

### 3

## Fluxo de Potência e Fluxo de Potência Continuado

Os estudos de fluxos de potência são de muita importância no planejamento e desenho dos sistemas de potência, assim como também, na determinação das melhores condições de operação, controle e supervisão dos sistemas existentes. [3]

### 3.1.

#### Fluxo de Potência [3] [4]

#### 3.1.1.

##### Introdução

A análise de fluxo de potência em redes elétricas consiste basicamente na determinação do estado da rede (i.e. magnitude das tensões nodais e os ângulos de fase), da distribuição dos fluxos e das injeções de potências ativa e reativa nas barras, dentre outras grandezas de interesse. Nesse tipo de análise, a modelagem do sistema é estática e a rede é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas. Tais modelos se justificam pelo fato da análise se referir a situações em que as variações das grandezas no tempo são suficientemente lentas, de modo que o efeito transitório pode ser desconsiderado. O comportamento do sistema elétrico de potência

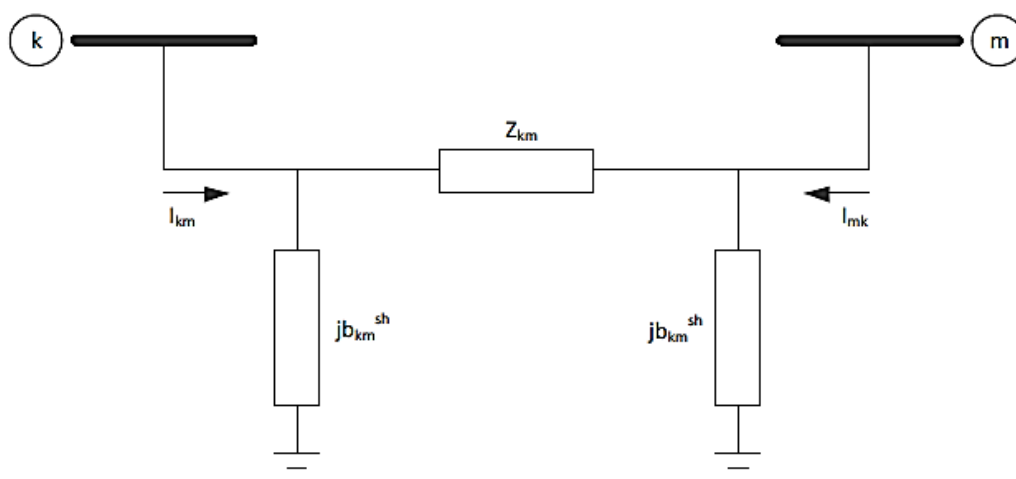
Nos sistemas de potência, os componentes podem ser ligados de duas formas distintas: entre os nós (barras do sistema), como é o caso das linhas de transmissão e transformadores, e entre o nó de referência e um nó qualquer, como é o caso das cargas, dos geradores, compensadores síncronos, etc. Os geradores e as cargas do sistema são tratados como parte externa do sistema. Sendo assim, são modelados como injeções constantes de potência nos nós da rede. A parte interna da rede, formada pelos demais componentes (i.e. linhas de transmissão, transformadores, etc.) é tratada como um conjunto de circuitos passivos e modelada por meio da matriz de admitância de barra. Impondo-se a conservação das potências ativa e

reativa em cada nó da rede é possível obter as equações básicas que regem o comportamento dos fluxos de potência nas redes elétricas. Em outras palavras, em cada nó da rede, a potência líquida injetada deve igual à soma das potências que fluem para os nós adjacentes.

### 3.1.2. Modelagem de Linhas e Transformadores

#### 3.1.2.1. Linhas de Transmissão

O modelo equivalente  $\pi$  de uma linha de transmissão, representado na Figura 3.1.



**Figura 3.1 Modelo Equivalente  $\pi$  de Linha de Transmissão**

A impedância do elemento série é dada por:

$$Z_{km} = r_{km} + jx_{km} \quad (3.1)$$

A admitância série é dada por:

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = Z_{km}^{-1} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} - j \frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (3.2)$$

A corrente  $I_{km}$  é formada por uma componente série e um componente shunt, calculada a partir das tensões terminais  $E_k$  e  $E_m$  e dos parâmetros do modelo  $\pi$  equivalente:

$$I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{sh} E_k \quad (3.3)$$

Onde:

$$E_k = V_k * e^{j\theta_k} \quad (3.4)$$

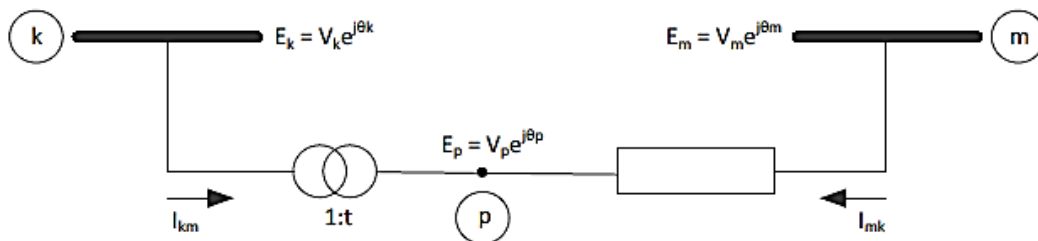
$$E_m = V_m * e^{j\theta_m} \quad (3.5)$$

Analogamente, a corrente  $I_{mk}$  é dada por:

$$I_{mk} = y_{mk}(E_m - E_k) + jb_{mk}^{sh} E_m \quad (3.6)$$

### 3.1.2.2. Transformadores

A representação geral de transformadores em fase e defasadores, dada na Figura 3.2, consiste basicamente em uma admitância série  $y_{km}$  e um transformador ideal com relação de transformação série  $1:t$ . Para o transformador em fase,  $t$  é um número real ( $t=a$ ) e para o defasador,  $t$  é um número complexo ( $t=a^{ej\varphi}$ ).



**Figura 3.2: Representação Geral dos Transformadores**

Considerando-se o modelo do transformador em fase, a relação entre os módulos das tensões nos nós terminais  $k$  e  $p$  é:

$$\frac{V_p}{V_k} = a \quad (3.7)$$

Como  $\theta_k = \theta_p$  tem-se:

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{V_p * e^{j\theta_p}}{V_k * e^{j\theta_k}} = a \quad (3.8)$$

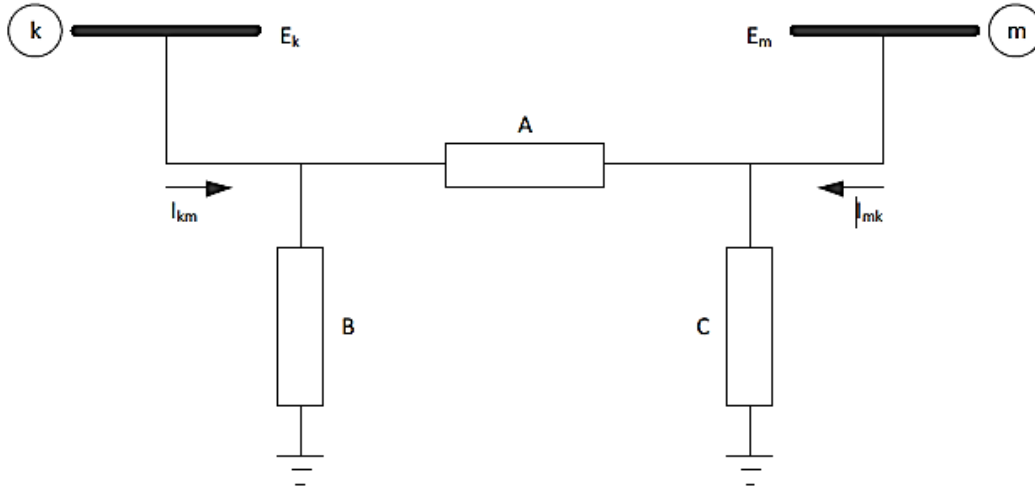
O fato de o transformador ser ideal implica que as potências complexas na entrada e na saída são iguais, ou seja, não há dissipação de potência ativa ou reativa entre os nós  $k$  e  $p$ , assim:

$$E_k I_{km}^* + E_p I_{mk}^* = 0 \quad (3.9)$$

A partir das equações (3.8) e (3.9) obtém-se:

$$\frac{I_{km}}{I_{mk}} = - \left| \frac{I_{km}}{I_{mk}} \right| = -a \quad (3.10)$$

As correntes  $I_{km}$  e  $I_{mk}$  estão desfasadas  $180^\circ$  e seus módulos estão na razão  $a=I$ . O transformador em fase pode ser representado por um circuito equivalente  $\pi$ , conforme ilustrado na Figura 3.3.



**Figura 3.3: Circuito Equivalente  $\pi$  de Transformador em Fase**

A determinação das admitâncias A, B e C do circuito equivalente é feita identificando-se as correntes  $I_{km}$  e  $I_{mk}$  de modelo da Figura 3.2, com as correntes correspondentes do circuito equivalente. Para o modelo da Figura 3.2, tem-se:

$$I_{km} = -ay_{km}(E_k - E_m) = a^2 y_{km} E_k - ay_{km} E_m \quad (3.11)$$

$$I_{mk} = y_{mk}(E_m - E_p) = (-t y_{km})E_k + (y_{km})E_m \quad (3.12)$$

Para o modelo  $\pi$  da Figura 3.3 tem-se:

$$I_{km} = BE_k + A(E_k - E_m) = (A+B)E_k + (-A)E_m \quad (3.13)$$

$$I_{mk} = CE_m + A(E_m - E_k) = (-A)E_k + (A+C)E_m \quad (3.14)$$

Identificando-se os coeficientes de  $E_k$  em (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) e obtém-se:

$$A = ay_{km} \quad (3.15)$$

$$B = a(a-1)y_{km} \quad (3.16)$$

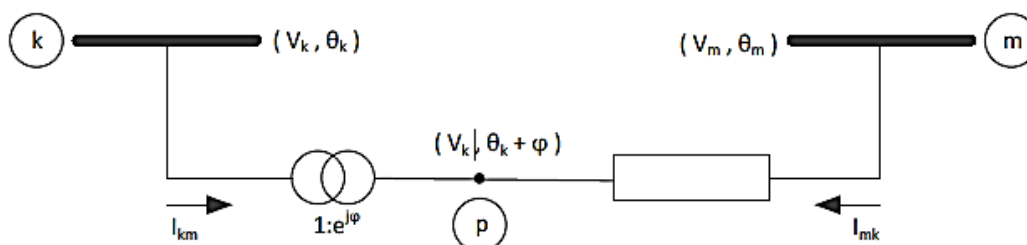
$$C = (1-a)y_{km} \quad (3.17)$$

As equações (3.15), (3.16) e (3.17) permitem a análise do efeito da relação de transformação 1:a sobre os módulos das tensões terminais  $V_k$  e  $V_m$ . Caso  $a=1$ , as admitâncias B e C são nulas e o circuito equivalente  $\pi$  reduz-se à admitância série  $y_{km}$ . Alterando-se a relação de transformação para um valor  $a \leq 1$ , B terá sinal contrário a  $y_{km}$  sendo do tipo capacitivo, enquanto C será do tipo indutivo, implicando em uma tendência a aumentar  $V_k$  e reduzir  $V_m$ . Por outro lado, quando  $a > 1$ , B será indutivo enquanto a C será do tipo capacitivo, havendo uma tendência a diminuir  $V_k$  e aumentar  $V_m$ . Se uma das barras terminais tiver tensão regulada ( $P\theta$  ou  $\theta V$ ), ou estiver eletricamente próxima de uma barra deste tipo, a outra barra terminal sofrerá efeitos das alterações na relação 1:a. Nestes casos, quando uma das tensões terminais é rígida, tudo se passa como se o transformador se apoiasse em um de seus terminais para elevar ou diminuir o módulo da tensão do terminal oposto.

### 3.1.2.3. Transformadores Defasadores

Este tipo de transformadores permite o controle do fluxo de potência ativa do ramo qual está inserido. A situação é análoga a de um circuito em corrente contínua, no qual se insere uma fonte de tensão em um dos seus ramos. Dependendo da polaridade da fonte, a corrente que flui no ramo pode aumentar ou diminuir, eventualmente mudando de sinal. Em uma rede de transmissão em corrente alterna,

o defasador consegue afetar o fluxo de potência ativa introduzindo uma defasagem entre os nós  $k$  e  $p$ . O modelo do defasador puro, aquele que somente afeta a relação entre as fases das tensões  $E_k$  e  $E_m$ , sem afetar a relação entre seus módulos, está mostrado na Figura 3.4.



**Figura 3.4: Defasador Puro ( $t=e^{j\varphi}$ )**

Neste caso tem-se:

$$\frac{E_p}{E_k} = t = e^{j\varphi} \quad (3.18)$$

Logo:

$$\theta_p = \theta_k + \varphi \quad (3.19)$$

Substituindo-se (3.18) e (3.9) obtém-se:

$$\frac{I_{km}}{I_{mk}} = -t = -e^{-j\varphi} \quad (3.20)$$

As correntes  $I_{km}$  e  $I_{mk}$  podem ser escritas em função das tensões terminais, da mesma forma que para o transformador em fase, resultando:

$$I_{km} = -t^* y_{km} (E_m - E_p) = y_{km} E_k - t^* y_{km} E_m \quad (3.21)$$

$$I_{mk} = y_{km} (E_m - E_p) = -t y_{km} E_k + y_{km} E_m \quad (3.22)$$

Observa-se que é impossível a determinação dos parâmetros A, B e C do circuito equivalente  $\pi$  neste caso, pois em (3.21) e (3.22) o coeficiente de  $E_m$  na equação de  $I_{km}$  difere do coeficiente do  $E_k$  na equação de  $I_{mk}$ .

O defasador com  $t=ae^{j\varphi}$  afeta não somente o fluxo de potência ativa, mas também de potência reativa do ramo onde este inserido. O procedimento seguido na obtenção das equações de  $I_{km}$  e  $I_{mk}$  é o mesmo dos casos precedentes. A única diferença em relação à (3.21) e (3.22), é que para o coeficiente de  $E_k$  na equação de  $I_{km}$  passa a ser  $a^2 y_{km}$  ao invés de  $y_{km}$ . Uma possibilidade prática e simples de se representar aproximadamente um defasador com  $a \neq 1$  consiste em utilizar um modelo constituído de um transformador em fase ( $t=a$ ) em série com um defasador puro ( $t=e^{j\varphi}$ ).

### 3.1.3. O problema dos Fluxos de Potência

O cálculo de fluxo de potência é de extrema importância nos estudos de planejamento e operação dos sistemas elétricos de potência. A modelagem do sistema é estática, sendo a rede representada por um conjunto de equações e inequações algébricas.

As equações básicas de fluxo de potência são obtidas impondo-se a primeira lei de Kirchhoff, no tocante à conservação das potências ativa e reativa em cada barra da rede, isto é, a potência líquida injetada em uma barra deve ser igual à soma das potências que fluem pelos componentes conectados a esta barra. A segunda lei de Kirchhoff é utilizada para expressar os fluxos de potência nos ramos como função das suas tensões terminais.

Quatro grandezas estão associadas a cada barra da rede:

- $V_k$ : Módulo da tensão na barra  $k$ ;
- $\theta_k$ : Ângulo da tensão na barra  $k$ ;
- $P_k$ : Potência ativa líquida injetada na barra  $k$ ;
- $Q_k$ : Potência reativa líquida injetada na barra  $k$ ;



Dependendo de como estas grandezas são tratadas no problema do fluxo de potência, são então definidos os tipos de barras:

- Barra de carga ou PQ: Não existe qualquer controle de tensão nestas barras. Conhecem-se as grandezas  $P_k$  e  $Q_k$  calculam-se  $V_k$  e  $\theta_k$ ;
- Barra de tensão controlada ou PV: Existem dispositivos de controle que permitem manter o módulo de tensão e a injeção de potência ativa em valores especificados, tais como os geradores e compensadores síncronos. Conhecidos  $P_k$  e  $V_k$  calculam-se  $Q_k$  e  $\theta_k$ ;
- Barra de referência, flutuante, swing, slack ou  $V\theta$  Esta barra fornece a referência angular e fecha o balanço de potência ativa e reativa do sistema, levando em consideração as perdas do sistema de transmissão. Conhecidos  $V_k$  e  $\theta_k$  calculam-se  $P_k$  e  $Q_k$ ;
- Barra de controle de tensão ou P: Esta barra, com  $Q_k$  variável, é utilizada para controlar a tensão de uma barra remota (barra PQV). Conhecido  $P_k$  calcula-se  $Q_k$ ,  $V_k$  e  $\theta_k$ ;
- Barra remota ou PQV: É uma barra de carga que passa a ter sua tensão controlada remotamente por uma ou mais barras P ou por um ou mais transformadores de taps variáveis. Conhecidos  $P_k$ ,  $Q_k$  e  $V_k$ , calculam-se  $\theta_k$ ;
- Barra  $\theta$ : É a barra onde se especifica  $\theta_k$ , valor de referência dos ângulos das tensões. Nessa barra pode-se especificar  $V_k$ , como é mais usual, ou  $Q_k$  Pode-se também especificar  $P_k$ , embora não seja usual. Conhecidos  $\theta_k$ , e  $V_k$  (ou  $Q_k$ ), calculam-se  $P_k$  e  $Q_k$  (ou  $V_k$ ).

Matematicamente, o problema do fluxo de potência é constituído por duas equações para cada barra, onde cada uma delas representa o fato das potências ativa e reativa injetada em uma barra serem iguais à soma dos fluxos que deixam esta barra através das linhas de transmissão e transformadores.

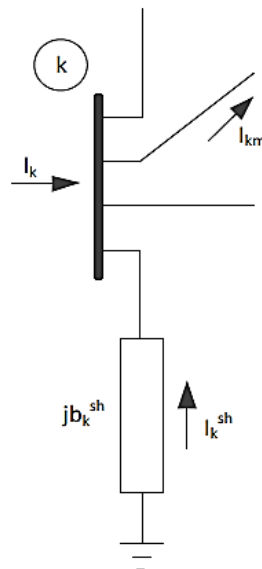
$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km} (V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) \quad (3.23)$$

$$Q_k + Q_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} (V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) \quad (3.24)$$

Onde:

- $\Omega_k$ : Conjunto das barras conectadas à barra  $k$ ;
- $P_{km}$ : Fluxo de potência ativa no ramo  $k-m$ ;
- $Q_{km}$ : Fluxo de potência reativa no ramo  $k-m$ ;
- $Q_k^{sh}$ : Injeção de potência reativa devido ao elemento shunt conectado na barra  $k$ .

As equações (3.23) e (3.24) consideram que as injeções líquidas de potência são positivas quando entram na barra (geração) e negativas quando saem da barra (carga). Os fluxos de potência são positivos quando saem e negativos quando entram na barra. Para os elementos shunt das barras é adotada a mesma convenção para as injeções. Estas convenções de sentido para potências ativas e reativas são as mesmas utilizadas para as correntes, sendo indicadas na Figura 3.5.



**Figura 3.5: Convenção do Sentido de Fluxo de Potência**

O conjunto das inequações que fazem parte do problema do fluxo de potência é formado, dentre outras, pelos limites nas injeções de potência reativa das barras PV.

$$Q_k^{\min} \leq Q_k \leq Q_k^{\max} \quad (3.25)$$

### 3.1.4. Expressões Gerais dos Fluxos

Os fluxos de potência ativa e reativa em linhas de transmissão, transformadores em fase e defasadores obedecem às expressões gerais:

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - a_{km} V_k V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (3.26)$$

$$Q_{km} = -(a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + a_{km} V_k V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - a_{km} V_k V_m g_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (3.27)$$

No caso de linhas de transmissão,  $a_{km} = 1$  e  $\varphi_{km} = 0$ . Para transformadores em fase,  $b_{km}^{sh} = 0$  e  $\varphi_{km} = 0$ . Para os defasadores puros,  $b_{km}^{sh} = 0$  e  $a_{km} = 1$ . Finalmente, para os defasadores,  $b_{km}^{sh} = 0$ .

### 3.1.5. Formulação Matricial

Tendo em vista a Figura 3.5, a injeção de corrente na barra  $k$  é dada por:

$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \quad (3.28)$$

A expressão geral para corrente  $I_{km}$  em uma linha de transmissão, transformador em fase e defasador puro é dada por:

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + j b_{km}^{sh}) E_k + (-a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km}) E_m \quad (3.29)$$

A equação (3.28) pode ser reescrita como:

$$I_{km} = \left[ jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega k} \left( jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km} \right) \right] E_k + \sum_{m \in \Omega} \left( -a_{km} e^{-j\varphi_{km}} y_{km} \right) E_m \quad (3.30)$$

Na forma matricial tem-se:

$$\bar{I} = Y \bar{E} \quad (3.31)$$

Onde:

- $\bar{I}$ : Vetor de injeções de corrente;
- $\bar{E}$ : Vetor das tensões nodais cujas componentes são  $E_k = V_k e^{j\theta_k}$ ;
- $Y$ : Matriz admitância nodal.

Os elementos da matriz  $Y$  são dados por:

$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega k} I_{km} \quad (3.32)$$

$$Y_{kk} = jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega k} \left( jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km} \right) \quad (3.33)$$

Em geral, esta matriz é esparsa, ou seja, tem uma grande proporção de elementos nulos. Caso o elemento existente entre as barras  $k$  e  $m$  seja uma linha de transmissão,  $Y_{km} = -y_{km}$ , se for um transformador em fase,  $Y_{km} = -a_{km}y_{km}$  e se um defasador puro,  $Y_{km} = -e^{-j\varphi_{km}}y_{km}$ . Se a rede for formada de linhas de transmissão e transformadores em fase, a matriz  $Y$  será simétrica. A presença de defasadores torna a matriz assimétrica.

A injeção de corrente  $I_k$  dada em (3.30) pode ser colocada na forma:

$$I_k = Y_{kk} E_k + \sum_{m \in \Omega k} Y_{km} E_m = \sum_{m \in \Omega \phi_k} Y_{km} E_m \quad (3.34)$$

Onde  $\varphi_k$  é o conjunto das barras adjacentes à barra  $k$ , incluindo a mesma.

Considerando-se que:

$$Y_{km} = G_{km} + jB_{km} \quad (3.35)$$

$$E_m = V_m e^{j\theta_m} \quad (3.35)$$

A equação (3.34) pode ser reescrita como:

$$I_k = \sum_{m \in \Omega \phi_k} V_m e^{j\theta_m} (G_{km} + jB_{km}) \quad (3.36)$$

A injeção de potência complexa  $S_k$  é dada por:

$$S_k^* = P_k - jQ_k = E_k^* I_k \quad (3.37)$$

Substituindo-se (3.36) e (3.37) e considerando-se que  $E_k^k = V_k e^{-j\theta_k}$ , obtém-se:

$$S_k^* = V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m \in \phi_k} V_m e^{j\theta_m} (G_{km} + jB_{km}) \quad (3.38)$$

As injeções de potência ativa e reativa podem ser obtidas identificando-se a parte real e imaginária de (3.38).

$$P_k = V_k \sum_{m \in \phi_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.39)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \phi_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.40)$$

onde:

$$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m \quad (3.41)$$

### 3.1.6.

#### Método de Newton-Raphson para Solução dos Fluxos de Potência

Considera-se inicialmente um problema no qual são dados  $P_k$  e  $Q_k$  para as barras PQ,  $P_k$  e  $V_k$  para as barras PV e  $V_k$  e  $\theta_k$  nas barras PV. Pretende-se calcular  $V_k$  e  $\theta_k$  nas barras PQ e  $\theta_k$  nas barras PV. Uma vez resolvido este problema, serão conhecidos  $V_k$  e  $\theta_k$  para todas as barras da rede, o que torna possível o cálculo de  $P_k$  e  $Q_k$  para as barras PV,  $Q_k$  para as barras PV e outras variáveis de interesse como, por exemplo, os fluxos de potência nas linhas de transmissão e transformadores.

O sistema de equações a ser resolvido é composto por duas equações e duas incógnitas para cada barra PQ e uma equação e uma incógnita para cada barra PV, ou seja, se  $N_{PQ}$  e  $N_{PV}$  representam as quantidades de barras PQ e PV, respectivamente, trata-se de um sistema de  $2N_{PQ} + N_{PV}$  equações algébricas não lineares com o mesmo número de incógnitas.

As equações que compõem este sistema podem ser escritas do seguinte modo: para as barras PQ e PV:

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k = 0 \quad (3.42)$$

para as barras PQ:

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k = 0 \quad (3.43)$$

$P_k^{esp}$  e  $Q_k^{esp}$  são as injeções de potência ativa e reativa especificadas na barra  $k$  e  $P_k$  e  $Q_k$  são as injeções de potência ativa e reativa calculadas para a barra  $k$ , dadas por (3.39) e (3.40) respectivamente.

As funções  $\Delta P_k$  e  $\Delta Q_k$  podem ser colocadas na forma vetorial:

$$\Delta P = P^{esp} - P(V, \theta) \quad (3.44)$$

$$\Delta Q = Q^{esp} - Q(V, \theta) \quad (3.45)$$

seja  $g(x)$  a função vetorial:

$$g(x) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{P} \\ \Delta \bar{Q} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

as incógnitas podem ser agrupadas no vetor  $\bar{x}$  dado a seguir:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{V} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

em que  $\bar{\theta}$  é o vetor dos ângulos das tensões das barras PQ e PV e  $\bar{V}$  é o vetor dos módulos das tensões das barras PQ.

Considere inicialmente o sistema:

$$g(\bar{x}) = 0 \quad (3.48)$$

Pretende-se calcular o valor de  $\bar{x}$  para o qual a função  $g(\bar{x})$  se anula, ou seja, determinar os valores de  $\theta_k$  e  $V_k$  para os quais as potências ativa e reativa calculadas  $P_k$  e  $Q_k$  sejam iguais às potências ativa e reativa especificadas  $P_k^{esp}$  e  $Q_k^{esp}$ .

A resolução desse problema pelo método de Newton-Raphson segue os seguintes passos:

1. Faz-se o contador de iterações  $h = 0$  e escolhem-se os valores iniciais de  $\bar{x} = \bar{x}^{(h)} = \bar{x}^{(0)}$ , ou seja,  $\theta_k = \theta_k^{(0)}$  para as barras PQ e PV e de  $V_k = V_k^{(0)}$  para as barras PQ.
2. Calcula-se o valor da função  $g(\bar{x})$  no ponto  $\bar{x} = \bar{x}^{(h)}$ , ou seja,  $P_k(V^{(h)}, \theta^{(h)})$  para as barras PQ e PV e  $Q_k(V^{(h)}, \theta^{(h)})$  para as barras PQ. Posteriormente determinam-se os resíduos  $\Delta P_k^{(h)}$  e  $\Delta Q_k^{(h)}$ .
3. Compara-se o valor calculado  $g(\bar{x}^{(h)})$  com a tolerância especificada  $\varepsilon$ . Caso  $\max|\Delta P_k^{(h)}| \leq \varepsilon$  e  $\max|\Delta Q_k^{(h)}| \leq \varepsilon$ , o processo iterativo convergiu para a solução  $(V^{(h)}, \theta^{(h)})$ . Caso contrário passa-se ao próximo passo.
4. Lineariza-se a função  $g(\bar{x})$  em torno do ponto  $(x^{(h)}; g(x^{(h)}))$  por intermédio da série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior a 1:

$$\bar{g}(\bar{x}^h + \Delta\bar{x}^h) \cong \bar{g}(\bar{x}^h) + \bar{g}'(\bar{x}^h)\Delta\bar{x} \quad (3.49)$$

sendo  $g'(x)=dg/dx$ . Este passo se resume ao cálculo de derivada  $g'(x^{(h)})$ .

Para a solução de fluxo de carga pelo método de Newton-Raphson, é definida a matriz Jacobiano como:

$$J^{(h)} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Os elementos das sub-matrizes H, N, M e L são dados por:

$$H_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_m} = V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.51)$$

$$H_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = -V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \phi k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.52)$$

$$N_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.53)$$

$$N_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = V_k^2 G_{kk} + \sum_{m \in \phi k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.54)$$



$$M_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.55)$$

$$M_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = -V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_{m \in \phi k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.56)$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = -V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.57)$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = -V_k^2 B_{kk} + \sum_{m \in \phi k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.58)$$

Os elementos  $H_{kk}$ ,  $N_{kk}$ ,  $M_{kk}$  e  $L_{kk}$  podem ser expressos em função das injeções de potência ativa e reativa na barra k. Assim tem-se:

$$H_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = -Q_k - V_k^2 B_{kk} \quad (3.59)$$

$$N_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = \frac{P_k}{V_k} + V_k G_{kk} \quad (3.60)$$

$$M_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = P_k - V_k^2 G_{kk} \quad (3.61)$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = \frac{Q_k}{V_k} - V_k B_{kk} \quad (3.62)$$

Das expressões deduzidas para as sub-matrizes  $H$ ,  $N$ ,  $M$  e  $L$  conclui-se que a matriz Jacobiano, formada a partir destas sub-matrizes, possui a mesma estrutura esparsa da matriz admitância nodal.

5. Resolve-se o problema linearizado:

$$\bar{g}(\bar{x}^h) + g'(\bar{x}^h)\Delta\bar{x} = 0 \quad (3.63)$$

que pode ser reescrito da forma:

$$\bar{g}(\bar{x}^h) = -g'(\bar{x}^h)\Delta\bar{x} \quad (3.64)$$

ou seja, resolvendo o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{P} \\ \Delta\bar{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\theta} \\ \Delta\bar{V} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

6. determinam-se, então, a nova solução  $\bar{x}^{(h+1)} = \bar{x}^{(h)} + \Delta\bar{x}^{(h)}$ , os seja:

$$\bar{\theta}^{h+1} = \bar{\theta}^h + \Delta\bar{\theta}^h \quad (3.66)$$

$$\bar{V}^{h+1} = \bar{V}^h + \Delta\bar{V}^h \quad (3.67)$$

7. Faz-se  $h=h+1$  e volta-se ao passo 2.

### 3.1.7. Sumário da Seção

Nesta seção foram apresentados os aspectos gerais do cálculo do fluxo de potência, o qual consiste basicamente na determinação do estado da rede e da

distribuição dos fluxos. A modelagem do sistema neste tipo de problema estática, sendo a rede representada por equações algébricas. Uma formulação genérica sobre o fluxo de potência foi desenvolvida, incluindo-se a dedução das equações básicas do problema, a descrição do modo de operação dos principais componentes da rede de transmissão e a definição dos principais tipos de barras. Além das equações básicas, foi mencionada a existência de um conjunto adicional de inequações que representam as restrições de operação da rede.

Por fim, o problema do fluxo de potência foi modelado em sua forma mais geral, conforme a formulação não-linear, para solução através do método de Newton-Raphson.

### 3.2 Fluxo de Potência Continuado

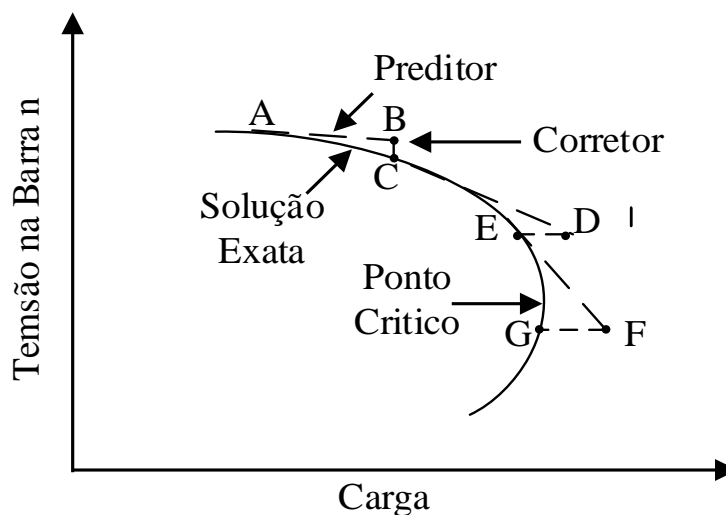
O método do FPC serve para encontrar o ponto de máximo carregamento do sistema através de sucessivas soluções das equações de fluxo de potência. O aumento gradual da carga através da variação manual do fator de carregamento  $\lambda$ , e solução do problema de fluxo de potência até que o processo divirja, não possibilita a obtenção do PMC, mas apenas chegar até bem próximo a ele. Isso ocorre porque a matriz Jacobiano torna-se singular no ponto PMC [5].

#### 3.1.8. Princípio Básico [1]

O FPC usa um processo iterativo que envolve um passo preditor e um passo corretor, como se pode ver na Figura 3.6. Desde uma solução conhecida (A), um preditor tangente é usado para estimar a solução (B) para um padrão específico de aumento de carga. O passo corretor determina a solução exata (C), usando a análise convencional de fluxo de potência tratado no capítulo 3, com a carga fixa.

A tensão para um aumento adicional de carga é predita baseada em um novo preditor tangente. Se a nova carga estimada (D) é agora maior que o carregamento máximo da solução exata, um passo corretor com cargas fixadas não permitiria a

convergência e, portanto, um passo corretor com uma tensão fixada no barramento monitorado é aplicado para buscar a solução exata (E). Como o limite de estabilidade de tensão é atingido, para determinar o máximo tamanho exato de incremento de carga deve-se reduzir gradualmente o preditor.



**Figura 3.6: Sequência de Passos FPC**

### 3.1.9. Formulação Matemática

As equações básicas são similares às do método convencional de fluxo de potência excetuando que a adição do parâmetro de incremento de carga  $\lambda$ . Reescrevendo as equações de fluxo de potência, em sua forma mais geral:

$$F(V, \theta, \lambda) = 0 \quad (3.68)$$

Onde  $V$  é o vetor dos módulos das tensões nodais,  $\theta$  é o vetor dos ângulos de fase nodais,  $\lambda$  é o fator de carregamento, e  $F$  é um vetor composto pelas equações dos balanços de potências ativa e reativa nodais. A equação (3.68) pode ser reescrita como:

Para barras PQ e PV:

$$\lambda P^{esp} - P(V, \theta) = 0 \quad (3.69)$$

Para barras PQ:

$$\lambda Q^{esp} - Q(V, \theta) = 0 \quad (3.70)$$

Onde  $P^{esp} = P^{gen} - P^{carga}$  é a diferença entre as potências ativas geradas e consumidas para as barras de carga ( $PQ$ ) e geração ( $PV$ ), e  $Q^{esp} = Q^{gen} - Q^{carga}$  é a diferença entre as potências reativas geradas e consumidas para as barras  $PQ$ . Para o caso-base, o fator de carregamento é  $\lambda=1$ . Para uma barra  $k$  qualquer,  $P(V, \theta)$  e  $Q(V, \theta)$  serão:

$$P_k(V, \theta) = G_k V_k^2 - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.71)$$

,

$k \in PQ, PV$

$$Q_k(V, \theta) = -B_k V_k^2 - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.72)$$

,

$k \in PQ$

Onde  $\Omega_k$  é o conjunto de todas as barras diretamente conectadas à barra  $k$ .  $(G_k + jB_k)$  é o elemento da diagonal  $(k, k)$  da matriz admitância nodal, e  $(g_{kl} + jb_{kl})$  corresponde à admitância série do ramo que conecta as barras  $k$  e  $l$ . O sistema de equações (3.69) pressupõe que o carregamento da rede é proporcional ao do caso-base e considera o fator de potência constante. O conjunto de equações não lineares mostradas anteriormente resolvem-se mediante a especificação de um valor para  $\lambda$  tal que;  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{crítico}$ ; onde  $\lambda=0$  representa o caso-base, e  $\lambda_{crítico}$  é estado de carregamento crítico.

### 3.1.10. Passo Preditor

No passo preditor usa-se uma aproximação linear para estimar a solução para uma mudança em uma das variáveis de estado ( $\theta$ ,  $V$  ou  $\lambda$ ). Tomando as derivadas dos dois lados de (3.68), com as variáveis de estado correspondentes à solução inicial, resulta o seguinte conjunto de equações lineares.

$$F_{\theta}d\theta + F_VdV + F_{\lambda}d\lambda = 0$$

Ou,

$$\begin{bmatrix} F_{\theta} & F_V & F_{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.73)$$

Desde a adição da variável desconhecida  $\lambda$  nas equações de fluxo de potência é necessário mais uma equação para resolver (3.73). Isso é satisfeito mediante o estabelecimento de um dos componentes do vetor tangente para  $+1$  ou  $-1$ .

$$\begin{bmatrix} F_{\theta} & F_V & F_{\lambda} \\ & e_k & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Onde  $e_k$  é um vetor fila com todos os elementos iguais a zero, exceto o elemento  $k^{th}$  (correspondente ao parâmetro de continuação) sendo igual a  $1$ .

Inicialmente, o parâmetro de carga  $\lambda$  é escolhido como o parâmetro de continuação e a componente correspondente do vetor tangente é ajustada em  $+1$ . Durante os subsequentes passos preditores, o  $\lambda$  é escolhido para ser a variável de estado que tem a maior taxa de rotação perto da solução dada, e o sinal de seu declive determina o sinal do componente correspondente ao vetor tangente.

Uma vez que o vetor tangente é encontrado, o preditor para a nova solução é dado por:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ V \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ V_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} d\theta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Onde o subscrito “0” identifica os valores das variáveis de estado no início do passo preditor. O tamanho do passo preditor  $\sigma$  é escolhido de modo que a solução do fluxo de potência exista com o parâmetro de continuação especificado. Se para um tamanho de passo dado não se encontra uma solução, o tamanho do passo é reduzido, e o passo corretor é repetido até encontrar uma solução.

### 3.1.11. Passo Corretor

No passo corretor o conjunto original de equações  $F(\theta, V, \lambda) = 0$  é aumentado em uma equação que especifica a variável de estado selecionada como parâmetro de continuação.

$$\begin{bmatrix} F(\theta, V, \lambda) \\ x_k - \eta \end{bmatrix} = [0] \quad (3.76)$$

Em (3.50),  $X_k$  é a variável de estado selecionada como parâmetro de continuação e  $\eta$  é igual ao valor previsto de  $X_k$ . Esse conjunto de equações pode ser resolvido usando uma ligeira modificação do método Newton-Raphson. A introdução da equação especificando  $X_k$  faz com que a matriz jacobiano não fique singular no ponto de operação.

A componente tangencial de  $\lambda$  (p.ex.  $d\lambda$ ) é positiva na parte superior da curva  $\phi$  constante no plano  $PV$ , é zero no ponto crítico, e é negativa na parte inferior da curva. Portanto o sinal de  $d\lambda$  indicará se o ponto crítico foi ou não atingindo.

Se o parâmetro de continuação é o acréscimo de carga, o corretor será uma linha vertical (p.ex. o segmento  $BC$  da Figura 3.6). Por outro lado se o módulo da tensão é o parâmetro de continuação, o corretor será uma linha horizontal (p.ex. o segmento  $DE$  da Figura 3.6).

### 3.1.12. Seleção do Parâmetro de Continuação

A seleção de parâmetro de continuação adequado é particularmente importante para o passo corretor. Uma má escolha pode fazer com que a solução divirja. Por exemplo, o uso do parâmetro  $\lambda$  como parâmetro de continuação na região do ponto crítico pode causar que a solução divirja se a estimativa excede a máxima carga. Por outro lado, quando é usada a tensão como parâmetro de continuação a solução pode divergir se são utilizados grandes passos de mudança de tensão.