Aluno: Luiz Rodrigo Lacé Rodrigues
DRE: 118049873

Exercício 2.1: Explique e implemente como aproximar $\sqrt[3]{43}$ com o método de Newton em Julia e determine um chute inicial problemático.

Como não podemos encontrar o resultado exato no computador, vamos dar um jeito de encontrar um resultado aproximado.

Queremos achar um x = $\sqrt[3]{43}$ tal que x^3= 43.

Temos então que x^3 - 43 = 0. Ou seja, temos uma função f(x) = x^3 - 43 e queremos achar o 0 da função, tal que f(x) = 0.

O que queremos é chutar um número e ter como retorno do computador, uma aproximação. Como nós sabemos o chute e a função, podemos encontrar a inclinação da reta tangente (derivada) e achar um chute aproximado.

Matematicamente temos:

f'(chute) = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(chute) - 0}{chute - x(\text{ que é nossa aproximação})}$

Generalizando, temos: f'(x1) = $\dfrac{f(x1) - 0}{x1 - x2}$

Manipulando, temos que $x2 = x1 - \dfrac{f(x1)}{f'(x1)}$

Voltamos agora para a nossa função, temos:
f(x) = x^3- 43 e f'(x) = $3x^2$

Temos então que nossa aproximação vai ser dada por

$x_2 = x - \dfrac{x^3 - 43}{3x^2}$, sendo x o nosso chute e x_2 a nossa aproximação.

Transformando isso em código no julia, vamos chegar em

```
In [4]: x1 =    #chute inicial
        x2 = x1 -(((x1*x1*x1)-43)/(3*(x1*x1))) #aproximação de 43^(1/3)
```

Podemos começar chutando 3,5, visto que (3,5)^3 = 42.875

O que nós temos de retorno é

```
In [5]: x1 = 3.5  #chute inicial
        x2 = x1 -(((x1*x1*x1)-43)/(3*(x1*x1))) #aproximação de 43^(1/3)

Out[5]: 3.503401360544218
```

Mas isso seria um chute problemático, visto que se passarmos 3.503401360544218 como o nosso chute, chegaríamos em outro mais perto ainda

```
In [6]: x1 = 3.503401360544218  #chute inicial
        x2 = x1 -(((x1*x1*x1)-43)/(3*(x1*x1))) #aproximação de 43^(1/3)

Out[6]: 3.503398060389833
```

Como sempre podemos nos aproximar cada vez mais, também temos um método para nos aproximar, com um chute inicial e sempre utilizar o resultado como o próprio chute:

```
In [2]: #função para encontrar a raiz cubica de 43
        function raiz_cubica_43(numeroDeIteracoes, chute)#numero de iterações e chute inicial para a raiz
           for i=1:numeroDeIteracoes
                chute = chute -(((chute*chute*chute)-43)/(3*(chute*chute)))#atualizando o "chute"/aproximando do valor da raiz
            end
            return chute #valor aproximado da raiz cubica de 43(numero tal que chute^3 = aproximadamente 43)
        end
```

Chutando 3.5 com 4 iterações, chegamos em

```
In [32]: raiz_cubica_43(4,3.5)

Out[32]: 3.5033980603867243
```

Entretanto, podemos ver que o nosso método tem pega o parâmetro “chute” e o utiliza na divisão da conta para encontrarmos a aproximação, então caso passemos zero como nosso chute inicial nos deparamos com essa situação:

```
In [10]: #Execicio 2.1
         raiz_cubica_43(4,0)

Out[10]: NaN
```

Como não existe divisão por zero, o resultado retornado é o NaN (Not a Number). Então chutar 0 seria um chute problemático.

Exercício 2.2: Dê exemplo de um função f(x) tal que f(x) é um polinômio de grau dois para qual o método de Newton alterna entre os valores x0 = 1, x1 = 2, x2 = 1, x3 = 2, ….

Segundo o método de newton, temos que x2 = x1 - $\frac{f(x1)}{f'(x1)}$.

Segundo o enunciado, queremos uma função f(x), que é um polinômio de grau 2, que o método de newton alterne entre 1 e 2.

Como nossa função é um polinômio de grau 2, logo ela vai ter essa cara
f(x) = x^2+ax+b

O nosso método de newton vai ter esse formato
x - $\frac{x^2+ax+b}{2x+a}$

E como quer que altere entre 1 e 2, sendo x0 = 1, x1= 2 … ,quando passarmos 1 para o método de newton, vamos ter

1 - $\frac{1-a+b}{2+a}$ = 2

e passando 2, para o método de newton

2 - $\frac{4+2a+b}{4+a}$ = 1

Manipulando a primeira equação, chegamos em 2a+b = -3.
Manipulando a segunda, achamos -a = b

Logo, substituindo, achamos que a = -3 e b = 3

Substituindo agora na nossa função genérica f(x), vamos achar que
f(x) = x^2 -3x + 3

tendo a sua derivada f'(x)= 2x -3 e aplicando o método de newton no julia, podemos comprovar a alternância entre 1 e 2

```
In [77]: #Execicio 2.2
function alterna(numeroDeIteracoes, x)#numero de iterações e chute inicial
   for i=1:numeroDeIteracoes
        x = x - ((x*x)-(3*x)+3)/((2*x)-3) #atualizando o "chute"
    end
    return x #retornando o valor a proximado
end

Out[77]: alterna (generic function with 1 method)
```

```
In [79]: #Execicio 2.2
for i=1:10
    print(alterna(i-1,1),"\n")
end

1
2.0
1.0
2.0
1.0
2.0
1.0
2.0
1.0
2.0
```

Exercício 4.1 (Teto para Diferenças para Frente).

Sabemos intuitivamente que se a e x são próximos, então $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ≈ f'(a)

Supondo que para todo x ∈ [a, b], f''(x) ≤ M, determine um teto para o erro desta aproximação usando Taylor de ordem 1

Segundo o teorema de Taylor de ordem 1, temos que:

Se para todo x ∈ I, f''(x) ≤ M, então para todo x ∈ I, f(x) − (f(a) + f'(a)(x − a)) ≤ M $\frac{(x-a)^2}{2}$

Pelo enunciado, temos que a aproximação $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ≈ f'(a), contém um erro.

Para encontrarmos o teto desse erro, vamos manipular a fórmula do teorema acima para possamos chegar em uma expressão parecida com a aproximação de f'(a).

Como temos muitos termos parecidos, podemos dividir toda a expressão do teorema por (x-a).

Com um simples algebrismo chegamos em

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \leq M \frac{(x-a)}{2}$$

Passando f'(a) para o "outro lado"

$\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ ≤ f'(a) + M $\frac{(x-a)}{2}$, ou seja, $\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ é aproximadamente(no maximo) f'(a) mais, alguma coisa pequena, essa coisa pequena é M $\frac{(x-a)}{2}$.

Logo o teto do erro para $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ≈ f'(a) é M $\frac{(x-a)}{2}$.

Exercício 4.2: Aproxime sen(0.01) com erro máximo menor que 10^{-6}

Segundo o enunciado, temos que a nossa função é f(x) = sen(x), como queremos fazer a aproximação para um erro relativamente pequeno, vamos testar logo o teorema de Taylor de ordem 1

Adiantando as derivadas necessárias:

f(x) = sen(x)
f'(x) = cos(x)
f''(x) = -sen(x)

Vamos utilizar a = 0 visto que é um ângulo próximo ao que queremos aproximar, além de sabermos trabalhar com ele.

Além disso, como as derivadas variam entre sen e cos, nosso M (módulo do valor máximo da derivada do termo n+1 no intervalo [x,a]) será igual a 1 sempre.

Taylor de ordem 1:

f(x) − (f(a) + f'(a)(x − a)) ≤ M $\frac{(x-a)^2}{2}$

Substituindo o que temos:

sen(0.01) - (sen(0) + cos(0)(0.01-0)) ≤ 1 $\frac{(0.01-0)^2}{2}$

Calculando:

sen(0.01) - (0.01) ≤ $\frac{(0.01)^2}{2}$

sen(0.01) - (0.01) ≤ 0.00005

Vimos então que Taylor de ordem 1 não contempla o que é pedido, visto que estamos encontrando um teto do erro máximo maior do que 10^{-6}.

Dessa forma, vamos partir para **Taylor de ordem 2**, que é dada por:

$f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}) \leq M \frac{(x-a)^3}{3!}$

Fazendo as devidas substituições:

$sen(0.01)-(sen(0) + cos(0)(0.01 - 0) - sen(0)\frac{(0.01-0)^2}{2}) \leq 1 \frac{(0.01-0)^3}{3!}$

Calculando, como sen(0) = 0, fica fácil chegar em:

$sen(0.01) - 0.01 \leq \frac{(0.01)^3}{3!}$

$sen(0.01) - 0.01 \leq \frac{(0.01)^3}{3!}$

$sen(0.01) - 0.01 \leq \frac{0.000001}{3!}$

$\mathbf{sen(0.01) - 0.01 \leq \frac{10^{-6}}{3!}}$

Achamos então uma aproximação para sen(0.01) com um teto do erro menor que 10^{-6}, perceba que ele está sendo dividido por 3!, logo, é menor que 10^{-6}.

Exercício 4.3: Por que aproximação sen(x) ≈ x é muito boa para valores de x próximos de zero? Explique com um texto usando o Teorema de Taylor.

Para demonstrarmos como a aproximação de sen(x) ≈ x é boa para valores de x próximos de 0. Vamos utilizar o Teorema de Taylor de várias ordens para que seja possível observar tal aproximação.

Começando com a = 0, que é um ângulo que sabemos trabalhar para sen(x) e um x=0.1, que de certa forma é um valor maior que da questão anterior.

Logo, para Taylor de ordem 0, temos

$f(x) - f(a) \leq M(x-a)$

Como estamos trabalhando com f(x) = sen(x) então M, será sempre igual a 1, devido às suas derivadas.

Fazendo as devidas substituições, temos:

sen(0.1) - sen(0) ≤ (0.1-0)

sen(0.1) - 0 ≤ (0.1)

Podemos que nossa aproximação nesse caso para 0.1 foi igual a 0. Entretanto como taylor de ordem 0 é o menos “poderoso”, então podemos nos utilizar de ordens maiores para demonstrar o que queremos.

Taylor de ordem 1:

f(x) - (f(a) + f’(a)(x-a)) ≤ M $\frac{(x-a)^2}{2}$

Fazendo as devidas substituições:

sen(0.1) - (sen(0) + cos(0) (0.1-0)) ≤ $\frac{(0.1-0)^2}{2}$

Calculando:

sen(0.1) - (0.1) ≤ $\frac{(0.1)^2}{2}$

sen(0.1) - (0.1) ≤ $\frac{0.01}{2}$

sen(0.1) - (0.1) ≤ 0.005

Podemos ver que com Taylor de ordem 1, a nossa aproximação de sen(x) foi aproximadamente x para um valor próximo de 0, que nesse caso foi sen(0.1)≈0.1 com um erro máximo de 0.005.

Agora vamos ver o que conseguimos encontrar com Taylor de ordem 2.

Temos que o termo é dado por:

f(x) - (f(a) + f’(a)(x-a) + f’’(a)$\frac{(x-a)^2}{2}$) ≤ M $\frac{(x-a)^3}{6}$

Fazendo as devidas substituições:

sen(0.1) - (sen(0) + cos(0)(0.1 - 0) - sen(0) $\frac{(0.1-0)^2}{2}$) ≤ 1 $\frac{(0.1-0)^3}{6}$

Calculando, chegamos em:

sen(0.1) - (0.1) ≤ $\frac{(0.1)^3}{6}$

sen(0.1) - (0.1) ≤ $\frac{(0.1)^3}{6}$

sen(0.1) - (0.1) ≤ $\frac{0.001}{6}$

sen(0.1) - (0.1) ≤ $\frac{0.001}{6}$

Podemos ver que, novamente chegamos em uma aproximação de sen(x) ≈ x, mas como utilizamos Taylor de ordem 2, nosso erro foi menor ainda, se comparado com ordem 0 e ordem 1. Dessa forma, fica claro que quando utilizamos o teorema de taylor, onde trabalhamos com aproximações e erros a partir de valores que conhecemos, podemos dizer que se sen(x) ≈ x para valor de x próximos a 0.

Exercício 4.4. Seja f(x) = ln(x). Aproxime f(1.5) usando o polinômio de Taylor de terceira ordem com a = 1. Quantos dígitos corretos possui a aproximação? Quantos termos deve ter o polinômio para o erro de truncamento ser menor que 10^{-8} ?

Temos que a nossa função e alguma de suas derivadas são:

f(x) = ln(x)
f'(x) = 1/x
f''(x) = $-1/x^2$
f'''(x) = $2/x^3$

Taylor de ordem 3 tem a seguinte cara:

f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)$\frac{(x-a)^2}{2}$ + f'''(a) $\frac{(x-a)^3}{6}$) ≤ M $\frac{(x-a)^4}{4!}$

Como estamos trabalhando com taylor de ordem 3, então nosso M será o módulo do valor máximo da derivada do termo n+1 no intervalo [a,x]. Dessa forma, vamos precisar da quarta derivada de ln(x) que é **$-6/x^4$** . Como nosso intervalo é [1, 1.5] então nosso M será igual a 6.

Seguindo com as devidas substituições na expressão de Taylor:

ln(1.5) - (ln(1) + 1/1 (1.5 - 1) - $1/1^2$ $\frac{(1.5-1)^2}{2}$ + $2/1^3$ $\frac{(1.5-1)^3}{6}$) ≤ 6 $\frac{(1.5-1)^4}{4!}$

Sabendo que ln(1) = 0, chegamos em:

ln(1.5) - (0.5 - 1/1² $\frac{(1.5-1)^2}{2}$ + 2/1³ $\frac{(1.5-1)^3}{6}$) ≤ 6 $\frac{(1.5-1)^4}{4!}$

ln(1.5) - (0.5 - 0.125 + $\frac{(0.5)^3}{3}$) ≤ 6$\frac{(0.5)^4}{4!}$

ln(1.5) - (0.5 - 0.125 + $\frac{(0.5)^3}{3}$) ≤ 6 $\frac{(0.5)^4}{4!}$

ln(1.5) - (0.375 + $\frac{(0.5)^3}{3}$) ≤ 6 $\frac{(0.5)^4}{4!}$

ln(1.5) - (0.375 + $\frac{(0.5)^3}{3}$) ≤ 6 $\frac{0.0625}{24}$

ln(1.5) - (0.375 + $\frac{(0.5)^3}{3}$) ≤ 6 $\frac{0.0625}{24}$

ln(1.5) - (0.375 + $\frac{(0.5)^3}{3}$) ≤ $\frac{0.0625}{4}$

Finalmente chegamos em:

ln(1.5) - (0.375 + $\frac{(0.5)^3}{3}$) ≤ 0.015625

Trabalhando agora no termo da aproximação, temos que:

ln(1.5) - (0.41666666666) ≤ 0.015625

O que essa expressão significa é, ln(1.5) é aproximadamente 0.41666666666 com um erro máximo de 0.015625. Perceba que estamos fazendo a subtração do termo que queremos menos a sua aproximação, e o resultado é um número um pouco maior que 0, com uma casa após a vírgula igual a zero. Para essa casa ser igual a zero, então temos que essa casa é igual tanto no número que queremos encontrar, ln(1.5) quando sua aproximação, 0.41666666666. Dessa forma temos **1 dígito após a vírgula correto.**

Agora vamos procurar quantos termos o polinômio deve ter para que o erro do truncamento seja menor que 10^{-8}

Pelo teorema 4.3 (Taylor de ordem n) temos que o erro se comporta dessa forma:

$$M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Com o que temos, ficamos com:

$$M \frac{(0.5)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Outra coisa que é importante visualizar também é o nosso M para o padrão das derivadas de ln(x)

f'(x) = 1/x
f''(x) = -1/x^2
f''(x)= 2/x^3
f''''(x) = -6/x^4
f'''''(x) = 24/x^5

Ou seja, temos que a derivada está seguindo um padrão ($(-1)^{n+1}$(n-1)!)/x^n, como o M é o módulo do valor máximo da derivada do próximo termo, e nosso a = 1, então vamos precisar apenas do termo (n-1)!

Comprovando, sendo n o número da derivada

(1-1)! = 0! = 1
(2-1)! = 1! = 1
(3-1)! = 2! = 2
(4-1)! = 3! = 6
(5-1)! = 4! = 24

Como M é o módulo do valor máximo de n+1, então M = (n-1+1)! = n!

Logo a expressão do erro é dada por

$$n! \frac{(0.5)^{n+1}}{(n+1)!} = n! \frac{(0.5)^{n+1}}{(n+1)(n)!} = \frac{(0.5)^{n+1}}{(n+1)}$$

Vamos testar agora uns valores altos

Para n = 20

$$\frac{(0.5)^{20+1}}{(20+1)} = \frac{4.76837158e-7}{(21)} = 2.27065313e\text{-}8$$

Ou seja, para 20 termos, ainda temos um valor maior que 10^{-8}

Para n = 21

$$\frac{(0.5)^{21+1}}{(21+1)} = \frac{(0.5)^{22}}{(22)} = \frac{2.38418579e-7}{(22)} = 1.08372081e\text{-}8$$

Chegamos então muito próximos do teto que queremos, mas ainda sim é maior que 10^{-8}

Finalmente, para n = 22

$$\frac{(0.5)^{22+1}}{(22+1)} = \frac{(0.5)^{23}}{(23)} = \frac{1.1920929e{-7}}{(23)} = 5.18301259\text{e-}9$$

Chegamos finalmente em um teto para o erro menor do que 10^{-8}, com **22 termos**

Exercício 4.5

Implementei neste código o um while que vai fazendo as séries de taylor até chegar em um erro que o usuário passou na função .

```
In [121]: #exercicio 4.5, implementando com erro maximo
          function lnn(x,erro) #aproximação para x, para erros  termos
              #((-1)^(n+1))(n-1)! ((x-1)^n)/n!
              # Como visto e provado na questão 4.4, o termo do erro para ln centrado em 1 é dado por ((0.5)^n+1)/(n+1)
              s=0 # a = 1, logo ln(1)=0
              k=1
              while ((((0.5)^(k+1)))/(k+1)) >= erro
                  s += ((((-1)^(k+1))*(fatorial(k-1)))*(((x-1)^k)/fatorial(k)) )
                  k+=1
              end
              return s
          end

Out[121]: lnn (generic function with 1 method)

In [122]: #exercicio 4.5
          lnn(1.5,0.001)

Out[122]: 0.4046875
```

Exercício 4.6: Como o Teorema de Taylor em sin(x), pode te ajudar a calcular o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - x}{x^3}?$$

Como queremos um termo ao cubo, vamos utilizar o Teorema de Taylor de ordem 2

$$f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}) \leq M\frac{(x-a)^3}{6}$$

Como a nossa função é f(x) = sen(x), então vamos utilizar M = 1 e a = 0, visto que saberemos trabalhar com ele e também estamos com a ideia de que x está tendendo a 0.

Fazendo as substituições necessárias

sen(x) - (sen(0) + cos(0) (x-0) - sen(0)$\frac{(x-0)^2}{2}$)≤ 1$\frac{(x-0)^3}{6}$

Calculando, chegamos em

sen(x) - x ≤ $\frac{(x)^3}{6}$

Para chegarmos em uma expressão parecida, vamos dividir ambos os lados por $(x)^3$

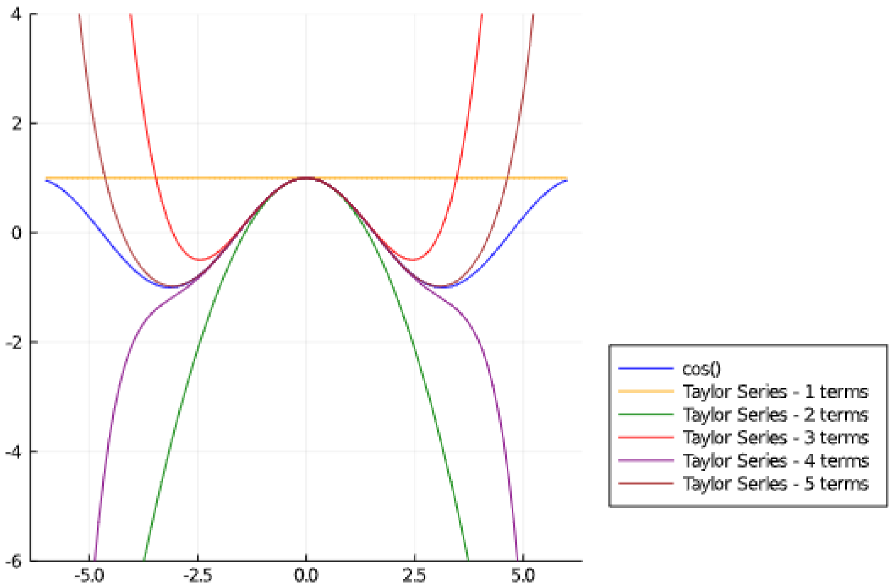
$$\frac{sen(x) - x}{(x)^3} \leq \frac{1}{6}$$

Agora com uma expressão parecida com o limite, e próximo de zero, sabemos que o resultado disso é, no máximo 1/6

Exercício 4.7

In [112]:
```
#Exercicio 4.7

# A serie de taylor para a função cos é dada por (((-1)^n)/(2n)!)* x^(2n).

#temos as seguintes funções para cada serie de taylor com determinado numero de termos

tay1(x) = 1 #taylor com 1 termo
tay2(x) = 1 - ((x^2)/2) #taylor com 2 termos
tay3(x) = 1 - (x^2)/2 + (x^4)/factorial(4) #taylor com 3 termos
tay4(x) = 1 - (x^2)/2 + (x^4)/factorial(4) -(x^6)/factorial(6) #taylor com 4 termos
tay5(x) = 1 - (x^2)/2 + (x^4)/factorial(4) -(x^6)/factorial(6) + (x^8)/factorial(8)#taylor com 4 termos

#x será dado com o seguinte range
x = range(-6,6, length=100)

#As funçoes serão instanciadas no intervalor de x
ycos = cos.(x)
t1 = tay1.(x)
t2 = tay2.(x)
t3 = tay3.(x)
t4 = tay4.(x)
t5 = tay5.(x)

#plotando as funções com legenda e cores diferentes
plot(x, ycos, c=:blue, lab="cos()")
plot!(x, t1, c=:orange, lab="Taylor Series - 1 terms")
plot!(x, t2, c=:green, lab="Taylor Series - 2 terms")
plot!(x, t3, c=:red, lab="Taylor Series - 3 terms")
plot!(x, t4, c=:purple, lab="Taylor Series - 4 terms")
plot!(x, t5, c=:brown, lab="Taylor Series - 5 terms")


# Limite do "quadro" e colocando a legenda fora do desenho
ylims!(-6,4)
plot!(legend=:outerbottomright)
```

Out[112]:


4
2
0
-2
-4
-6
-5.0
-2.5
0.0
2.5
5.0
cos()
Taylor Series - 1 terms
Taylor Series - 2 terms
Taylor Series - 3 terms
Taylor Series - 4 terms
Taylor Series - 5 terms