Formulação Estendida com Geração de Cortes e Colunas para o Problema de Programação de Horários em Escolas

Haroldo Gambini Santos
Instituto de Computação - Universidade Federal Fluminense
Niterói, RJ
haroldo.santos@gmail.com

Eduardo Uchoa
Depto. de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Niterói, RJ
eduardo.uchoa@gmail.com

Luiz Satoru Ochi
Instituto de Computação - Universidade Federal Fluminense
Niterói, RJ
satoru@dcc.ic.uff.br

RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação estendida de programação linear inteira mista para uma importante variante do clássico Problema de Programação de Horários Professor x Turma, que considera a satisfação de preferências de professores e a distribuição das aulas no decorrer da semana. Essa formulação contem um número exponencial de colunas e linhas. Um algoritmo para resolver a relaxação linear dessa formulação, através da geração de colunas e cortes, é apresentado, juntamente com experimentos computacionais. Os limites duais obtidos com esta formulação permitiram a determinação da solução ótima de três instâncias em aberto encontradas na literatura, bem como determinaram limites bastante apertados para as instâncias restantes.

PALAVRAS CHAVE. Programação Linear Inteira Mista. Programação de Horários. Geração de Colunas e Cortes. Área de classificação principal: OC – Otimização Combinatória

ABSTRACT

This work presents an extended mixed integer linear programming formulation for an important variant of the classical Class x Teacher Timetabling problem which considers the satisfaction of some teacher preferences and the distribution of lessons throughout the week. This formulation contains an exponential number of columns and rows. An algorithm to solve to optimality the linear relaxation of this formulation, by column and cut generation, is also presented, along with computational experiments. The dual limits obtained with this formulation allowed us to determine the optimal solution cost for three open instances from literature, as well provided very tight bounds for other instances.

KEYWORDS. Mixed Integer Linear Programming. Timetabling. Cut and Column Generation. Main area: CO – Combinatorial Optimization

1. Introdução

O Problema de Programação de Horários Professor x Turma (PPT), apresentado inicialmente em Gotlieb (1963), consiste no agendamento de um conjunto de encontros entre professores e turmas em um conjunto de períodos, tipicamente semanal, satisfazendo um conjunto de restrições. As restrições *básicas* que devem ser satisfeitas são: (i) evitar conflitos em cada período: nenhum professor ou turma deve ser alocado para mais de uma atividade em cada período; (ii) respeitar indisponibilidades de professores; e (iii) alocar o número correto de aulas para cada par professor-turma. O PPT é um clássico problema de otimização NP-Completo, como mostrado em Even et al. (1976).

Na prática, a construção manual de quadros de horários em instituições de ensino é uma tarefa trabalhosa: além das restrições básicas um bom quadro de horários deve considerar muitos outros requerimentos, considerando necessidades institucionais, pedagógicas e pessoais (relacionadas ao corpo docente). De fato, o critério que define a qualidade (e mesmo a viabilidade) de um quadro de horários é bastante dependente do sistema educacional específico do país. Entretanto, algumas considerações são comuns na maioria dos trabalhos encontrados na literatura, como a compacidade de horários: os professores, em geral, preferem ter todas as suas aulas concentradas em alguns dias da semana. Mesmo dentro de um mesmo turno de trabalho, "buracos", períodos de inatividade entre duas aulas, devem ser evitados. Essas restrições são ainda mais importantes no Brasil, onde uma parcela considerável dos professores do sistema público tem atividades letivas também em instituições privadas. Essas requisições foram consideradas em diversos trabalhos, como Schaerf (1999), Souza et al. (2003), Santos et al. (2005) e Colorni et al. (1998). Na maioria dos trabalhos, a restrição de compacidade é tratada como uma *restrição fraca* (ver Eiselt & Laporte (1987)), ou seja, é considerada na função objetivo como uma medida para a avaliação de quadros de horários. A definição do espaço de busca, especificada pelas *restrições fortes,* geralmente não inclui muitas restrições além das restrições básicas. Outro tipo bastante comum de restrição fraca é relacionada ao comprimento das aulas: para alguns pares de professores e turmas é necessário que o quadro de horários apresente um número mínimo de aulas duplas, isto é, aulas em que o professor permanece lecionando para a mesma turma em dois períodos consecutivos, como considerado em Schaerf (1999), Souza (2003) e Santos et al. (2005). Por outro lado, deve-se evitar mais do que uma aula (exceto quando aulas duplas são pedidas) de um professor para uma turma em cada dia. O problema considerado neste trabalho, denominado Problema de Programação de Horários Professor x Turma com Compacidade (PPTC), formalmente descrito na seção seguinte, considera a produção de quadros de horários compactos para professores e a distribuição de aulas no decorrer da semana.

Uma vez que os métodos exatos, que tentam encontrar soluções provadamente ótimas, podem exigir demandas não realistas de processamento e tempo para várias variantes do PPT, o desenvolvimento de heurísticas que são efetivas na prática tem recebido bastante atenção por parte dos pesquisadores. Nesse sentido, metaheurísticas sofisticadas tem sido desenvolvidas para a produção de soluções para problemas reais. Esses métodos incluem *Simulated Annealing* em Abramson (1991), Algoritmos Evolutivos em Colorni (1998), Busca Tabu em Schaerf (1999), Souza (2003) e Santos et al. (2005), sendo que alguns desses métodos na verdade são métodos híbridos, incorporando conceitos de mais de uma metaheurística. Para esses métodos, garantias de desempenho não encontram-se disponíveis, sendo que a sua avaliação depende fortemente de resultados empíricos. Em muitos desses trabalhos, a avaliação da qualidade dos quadros de horários é realizada através da comparação com soluções manualmente geradas, um critério pouco preciso. Idealmente, toda nova heurística deveria ser comparada com as heurísticas anteriormente propostas, com testes sendo realizados em um conjunto representativo de instâncias. Infelizmente isso não tem ocorrido na prática. De fato, muitos autores consideram variantes ligeiramente diferentes do PPT, tornando difícil a comparação.

Existe um outro modo de se avaliar a qualidade de uma heurística para programação de horários: a comparação do custo das soluções obtidas com limites duais. Suponha que se procura a minimização da combinação linear com pesos da violação das restrições fracas. No caso de minimização, os limites duais são limites inferiores válidos para o valor da solução ótima. Os limites duais podem ser obtidos através da resolução dos programas lineares resultantes da remoção das restrições de integralidade de formulações de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) (Wolsey (1998)). Entretanto, a qualidade desses limites varia significativamente de acordo com a formulação utilizada. Formulações compactas (com um número pequeno de variáveis e restrições) para problemas de programação de horários geralmente produzem limites inferiores bastante fracos.

Duas das técnicas mais utilizadas em PLIM para a melhora dos limites duais para problemas combinatórios difíceis são a geração de cortes e a geração de colunas. Este trabalho explora ambas as técnicas para a produção de limites de alta qualidade para instâncias do PPTC. O artigo está organizado do seguinte modo: a Seção 2 apresenta formalmente o problema através de uma formulação compacta; a Seção 3 apresenta a formulação estendida, descrevendo a geração de colunas e cortes; na seção 4 são apresentados os experimentos computacionais com as diferentes formulações; finalmente, na Seção 5, conclusões e trabalhos futuros são apresentados.

2. Uma Formulação Compacta

Nesta seção será apresentada uma formulação compacta para o PPTC que será útil para descrever formalmente o problema e em comparações futuras com a formulação estendida apresentada na seqüência. Considere os dados do problema:

- P: conjunto de professores, com elementos $p \in P$ numerados como $1, \ldots, |P|$;
- T: conjunto de turmas, com elementos $t \in T$ numerados como $1, \ldots, |T|$;
- D: conjunto de dias letivos, com elementos $d \in D$ numerados como $1, \ldots, |D|$;
- H: conjunto de de períodos letivos por dia, com elementos $h \in H$ numerados como $1, \ldots, |H|$;
- $\tilde{R}_{|P| \times |T|}$: matriz de requerimentos, onde $\tilde{r}_{pt}$ indica quantas aulas o professor p deve lecionar para a turma t;
- $\tilde{P}_{|P| \times |D| \times |H|}$: matriz de disponibilidade de professores, onde $\tilde{p}_{pdh} = 1$ indica se o professor p está disponível no dia d no período h, $\tilde{p}_{pdh} = 0$ caso contrário;
- $\tilde{M}_{|P| \times |T|}$: matriz de limites diários de aulas, onde $\tilde{m}_{pt}$ indica o máximo de aulas que o professor p pode lecionar na turma t em qualquer dia da semana;
- $\tilde{G}_{|P| \times |T|}$: matriz de requisições de aulas geminadas, onde $\tilde{g}_{pt}$ indica quantas aulas geminadas, no mínimo, são requisitadas pelo professor p, para aulas com a turma t;
- $W'_{|P|}$: vetor de pesos onde w'_p indica a importância da não ocorrência de buracos na agenda do professor p;
- $W''_{|P|}$: vetor de pesos onde w''_p indica a importância de se oferecer uma agenda compacta para o professor p;
- $W'''_{|P|}$: vetor de pesos onde w'''_p indica a importância da satisfação dos pedidos de aulas geminadas do professor p;

Dependendo da disponibilidade do professor, um subconjunto de períodos do dia permitirão a existência de aulas geminadas. Será denotado por $\widehat{G}_{pd} \subset H$ o subconjunto de períodos na agenda do professor p no dia d com a propriedade que $\tilde{p}_{ptdh} . \tilde{p}_{ptdh+1} = 1 \forall h \in \widehat{G}_{pd}$, ou seja, os períodos que podem ser o início de uma aula geminada.

A seguir apresenta-se uma formulação para o PPTC, aqui denotada por $\mathcal{F}_1$, onde a variável de decisão x_{ptdh} indica se o professor p está dando aula para a turma t no dia d no período h ($x_{ptdh} = 1$) ou não ($x_{ptdh} = 0$). As variáveis auxiliares v_{pd}, b_{pd} e g_{pt} medem a violação das restrições fracas relacionadas à compacidade de horários em número de dias, não ocorrência de buracos e satisfação de pedidos de aulas geminadas, respectivamente, como segue:

Minimizar:

$$\sum_{p \in P} \sum_{d \in D} w_p^{'}.b_{pd} + \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} w_p^{''}.v_{pd} + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} w_p^{'''}.g_{pt}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
\sum_{d \in D} \sum_{h \in H} x_{ptdh} &= \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T && (2.1) \\
\sum_{p \in P} x_{ptdh} &\leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H && (2.2) \\
\sum_{t \in T} x_{ptdh} &\leq \tilde{p}_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H && (2.3) \\
\sum_{h \in H} x_{ptdh} &\leq \tilde{m}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D && (2.4) \\
v_{pd} &\geq \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H && (2.5) \\
\overline{a}_{pd} &\leq (|H| + 1) \bigcirc (|H| + 1 \bigcirc h) \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H && (2.6) \\
\underline{a}_{pd} &\geq h. \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H && (2.7) \\
b_{pd} &\geq \underline{a}_{pd} \bigcirc \overline{a}_{pd} + v_{pd} \bigcirc \sum_{t \in T} \sum_{h \in H} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, d \in D && (2.8) \\
y_{ptdh} &\leq x_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in \widehat{G}_{pd} && (2.9) \\
y_{ptdh} &\leq x_{ptdh+1} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in \widehat{G}_{pd} && (2.10) \\
g_{pt} &\geq \tilde{g}_{pt} \bigcirc \sum_{d \in D} \sum_{h \in \widehat{G}_{pt}} y_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T && (2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{ptdh} &\in \{0, 1\} & \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H && (2.12) \\
y_{ptdh} &\in \{0, 1\} & \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in \widehat{G}_{pd} && (2.13) \\
v_{pd} &\in \{0, 1\} & \forall p \in P, d \in D && (2.14) \\
\overline{a}_{pd} &\in \{0, \ldots, |H|\} & \forall p \in P, d \in D && (2.15) \\
\underline{a}_{pd} &\in \{0, \ldots, |H|\} & \forall p \in P, d \in D && (2.16) \\
b_{pd} &\in \{0, \ldots, |H| \bigcirc 2\} & \forall p \in P, d \in D && (2.17)
\end{aligned}$$

As restrições 2.1 garantem o cumprimento da carga horária semanal, enquanto 2.2 e 2.3 garantem, respectivamente, a não ocorrência de conflitos em horários de turmas e professores. 2.3 garante ainda o respeito à indisponibilidades dos professores. As restrições 2.4 tratam da limitação no número de aulas que cada professor pode lecionar por dia para cada turma. As restrições 2.5 associam as variáveis v_{pd} com a ativação de qualquer período de trabalho dos professores em diferentes dias. As restrições 2.6, 2.7 e 2.8 tratam da medição do número de buracos em cada dia letivo de cada professor. A restrição 2.11 computa o número de aulas duplas faltantes no quadro de horários semanal de cada par professor x turma. Finalmente, as restrições de 2.12 até 2.17 determinam o domínio das variáveis.

A formulação $\mathcal{F}_1$ é uma formulação bastante fraca, como os experimentos da Seção 4 irão demonstrar. Um corte útil em melhorar o limite dual produzido pela relaxação de $\mathcal{F}_1$, que considera o número mínimo de dias que o professor necessita trabalhar, é o seguinte:

$$\sum_{d \in D} v_{pd} \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}}{|H|} \right\rceil, \max_{t \in T} \left\lceil \frac{\tilde{r}_{pt}}{\tilde{m}_{pt}} \right\rceil \right\} \qquad \forall p \in P \qquad (2.18)$$

3. Formulação Estendida

Na formulação proposta, aqui denotada por $\mathcal{F}_2$, são considerados os possíveis padrões de alocação que podem ocorrer em dias letivos de cada professor. Considere, além dos dados disponíveis na Seção 2, que $\breve{P}_p$ seja o conjunto de padrões possíveis de alocação para o professor p em um dia supondo disponibilidade total e que $\breve{x}_{pjth} = 1$ indique que professor p no padrão de alocação j, no período h tem alocação para a turma t ou $\breve{x}_{pjth} = 0$ caso contrário. O custo do padrão de alocação j para o professor p é denotado por c_{pj} e engloba, nesse caso, a computação da existência de buracos na agenda do professor e, caso o padrão de alocação não seja vazio, o custo de um dia adicional de trabalho. Considere também o número de aulas geminadas $\breve{g}_{pjt}$ existentes para o professor p na turma t no padrão de alocação j. A variável de decisão λ_{pjd} indica se o padrão de alocação j será selecionado para o dia d na agenda do professor p ($\lambda_{pjd} = 1$) ou não ($\lambda_{pjd} = 0$). Deve-se observar que a existência de um dia d' onde um professor p tem apenas um subconjunto de períodos disponíveis irá implicar na existência de um conjunto menor de combinações $p \in P, j \in \breve{P}_p$ válidas para esse dia, já que nem todas as alocações contidas nos padrões considerados podem ser compatíveis com a disponibilidade em questão. Denota-se por $\breve{P}_{pd}$ esse subconjunto de $\breve{P}_p$. Desse modo, apresenta-se a formulação $\mathcal{F}_2$ para o PPTC:

Minimizar:

$$\sum_{p \in P} \sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . c_{pj} + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} w_p^{'''} . g_{pt}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \qquad (3.1)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H \qquad (3.2)$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \sum_{d \in D} \sum_{h \in D} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} = \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \qquad (3.3)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{g}_{pjt} + g_{pt} \geq \tilde{g}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \qquad (3.4)$$

$$\lambda_{pjd} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, d \in D, j \in \breve{P}_{pd} \qquad (3.5)$$

$$g_{pt} \in I\!N \qquad \forall p \in P, t \in T \qquad (3.6)$$

Onde 3.1, a restrição de convexificação, obriga a seleção de um padrão de para cada professor e dia. Apesar de que o número de variáveis envolvidas em $\mathcal{F}_2$ pode ser proibitivamente grande[1], a resolução da relaxação linear de $\mathcal{F}_2$, denotada aqui por $\mathcal{F}_{2r}$, pode ser realizada sem a

1. Nos experimentos realizados a utilização explícita da formulação $\mathcal{F}_2$ só foi possível para as duas menores instâncias disponíveis, mesmo considerando somente a resolução do problema linear relaxado, visto que o resolvedor CPLEX 10 abortou sua execução

utilização explícita de todas as variáveis envolvidas através da técnica de Geração de Colunas, apresentada por Dantzig & Wolfe (1960). Nessa técnica, inicia-se com um subconjunto pequeno de variáveis e a cada iteração, utilizando-se informação da solução dual do problema, são identificadas variáveis promissoras, através do custo reduzido. Essas variáveis são inseridas progressivamente até que não existam mais variáveis que permitam a melhora da solução.

Geração de Colunas: inicialmente, para a resolução de $\mathcal{F}_{2r}$ são inseridas somente colunas (variáveis λ) que correspondem a dias de inatividade e variáveis artificiais, com custo suficientemente alto, que permitem a factibilização da solução inicial considerando as restrições existentes, como o atendimento da carga horária.

O problema de *pricing* consiste em encontrar, para cada professor, considerando cada respectivo dia da semana com alguma disponibilidade, o padrão de alocação com menor custo reduzido. Essa computação utiliza variáveis duais associadas às restrições envolvidas. Denotam-se aqui por μ, ν, π e κ as variáveis duais associadas com as restrições 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, respectivamente. Considere a descoberta de uma coluna com custo reduzido negativo para um professor p em um dia d, cujo conteúdo é expresso em variáveis $\breve{x}_{th}$ $(t \in T, h \in H)$, sendo que $\breve{x}_{th} = 1$ caso o professor p esteja alocado para uma aula com a turma t no dia d e período h, $\breve{x}_{th} = 0$ caso contrário. Desse modo, o problema de *pricing* relacionado ao professor p e dia d, aqui denotado por $\mathcal{P}_{pd}$ pode ser formulado como um problema de PLIM:

$$
\mathcal{P}_{pd} = \left\{ \begin{array}{rcl}
\textit{minimizar} & & \overline{c}_{pd} = \breve{c}_{pd} - \breve{d}_{pd} \\
\textit{sujeito a} & & \\
\sum_{h \in H} \breve{x}_{th} & \leq & \min\{\tilde{m}_{pt}, \tilde{r}_{pt}\} \quad \forall t \in T \\
\breve{c}_{pd} & = & \breve{b}.w_p^{'} + \breve{v}.w_p^{''} \\
\breve{d}_{pd} & = & \mu_{pd} + \displaystyle\sum_{t \in T} \sum_{h \in H} \nu_{tdh}.\breve{x}_{th} + \sum_{t \in T} \sum_{h \in H} .\pi_{pt}.\breve{x}_{th} + \sum_{t \in T} \sum_{h \in \widehat{G}_{pd}} \breve{y}_{th}.\kappa_{pt} \\
\overline{a} & \leq & \sum_{t \in T} (+h - |H|).\breve{x}_{th} + |H| \quad \forall h \in H \\
\underline{a} & \geq & \sum_{t \in T} h.\breve{x}_{th} \quad \forall h \in H \\
\breve{b} & = & 1 + \underline{a} - \overline{a} - \sum_{t \in T} \sum_{h \in H} \breve{x}_{th} \\
\sum_{t \in T} \breve{x}_{th} & \leq & \tilde{p}_{pdh}.\breve{v} \quad h \in H \\
\breve{y}_{th} & \leq & \breve{x}_{th} \quad \forall t \in T, h \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{y}_{th} & \leq & \breve{x}_{th+1} \quad \forall t \in T, h \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{y}_{th} & \geq & \breve{x}_{th} + \breve{x}_{th+1} - 1 \quad \forall t \in T, h \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{x}_{th} \in \{0,1\} & & \forall t \in T, h \in H \\
\breve{y}_{th} \in \{0,1\} & & \forall t \in T, H \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{v} \in \{0,1\} & & \\
\overline{a} \in I\!N & & \\
\underline{a} \in I\!N & & \\
\breve{b} \in I\!N & &
\end{array} \right.
$$

Problemas $\mathcal{P}_{pd} \, \forall p \in P, d \in D$ são resolvidos a cada iteração, aumentando o problema em no máximo $|P| \times |D|$ colunas por iteração. A solução ótima para $\mathcal{F}_{2r}$ é obtida quando $\nexists \, \overline{c}_{pd} < 0 \, \forall p \in P, d \in D$. Apesar de que, de nosso conhecimento, não estejam disponíveis algoritmos que resolvam $\mathcal{P}_{pd}$ de maneira eficiente (com complexidade de tempo polinomial), uma observação deve ser feita sobre a praticidade da utilização do problema de *pricing* acima apresentado: as dimensões do espaço de busca são relacionadas diretamente ao número de períodos ($|H|$). Em instâncias reais do PPTC o valor de $|H|$ é bastante limitado, assim como os valores de $\tilde{m}_{pt}$, por questões pedagógicas, visto que as aulas são distribuídas no decorrer da semana.

Geração de Cortes: a formulação $\mathcal{F}_2$ permite a definição de novos cortes que não seriam possíveis com a formulação $\mathcal{F}_1$. Os cortes que serão apresentados se referem ao fechamento da carga horária semanal, considerando escolhas diárias para a carga horária de

---

prematuramente para as demais instâncias em uma máquina com 2GB de RAM.

professores, bem como escolhas diárias para a carga horária de encontros entre professores e turmas. Primeiramente vamos estender $\mathcal{F}_2$ com novas variáveis e restrições que facilitarão a definição dos cortes. Essa formulação estendida, denotada aqui por $\mathcal{F}_2'$ incorpora variáveis $\breve{a}_{pdh}$ que indicam se o professor p irá lecionar exatamente h aulas em um dia d ($\breve{a}_{pdh} = 1$, $\breve{a}_{pdh} = 0$ c.c.), bem como variáveis $\breve{a}_{ptdh}$ que indicam se o professor p irá lecionar exatamente h aulas para a turma t em um dia d ($\breve{a}_{ptdh} = 1,\ \breve{a}_{ptdh} = 0$ c.c.). Seja $\breve{P}_{pdh}$ o subconjunto de colunas de $\breve{P}_{pd}$ tal que o número total de aulas em cada coluna de $\breve{P}_{pdh}$ seja exatamente h e seja $\breve{P}_{ptdh}$ o subconjunto de $\breve{P}_{pd}$ contendo todas as colunas com exatamente h aulas do professor p para a turma t. Então as restrições seguintes, 3.7, 3.8 e 3.9, controlam a seleção única de uma carga de trabalho diária para os professores e a amarração de tal escolha com as colunas λ. Já as restrições 3.10, 3.11 e 3.12 garantem a seleção da carga horária para encontros diários entre professores e turmas e a relação dessas escolhas com as variáveis λ, como segue:

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{pdh} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{3.7}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H \tag{3.8}$$

$$\breve{a}_{pdh} \in \{0,1\} \qquad \forall p \in P, d \in D, h \in H \tag{3.9}$$

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{ptdh} = 1 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \tag{3.10}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{ptdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{3.11}$$

$$\breve{a}_{ptdh} \in \{0,1\} \qquad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{3.12}$$

As restrições 3.7 e 3.10 não são necessárias, considerando a seleção única de um padrão de trabalho diário para cada professor, mas foram colocadas por motivos de clareza. Deve-se observar que a ocorrência das variáveis λ em duas restrições adicionais implica modificações no problema de *pricing* para a computação correta de $\breve{d}_{pd}$ em $\mathcal{P}_{pd}$.

Um dos cortes possíveis válidos para a formulação $\mathcal{F}_2'$ são cortes 0-1 *knapsack cover*, como apresentados em Balas (1975) e Hammer et al. (1975). Considere as restrições implícitas existentes em $\mathcal{F}_2'$:

$$\sum_{h \in H} \sum_{d \in D} h.\breve{a}_{pdh} = \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P \tag{3.13}$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{d \in D} h.\breve{a}_{ptdh} = \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{3.14}$$

Como exemplo de um corte de *cover* levando em conta as restrições 3.13 considere um professor p e um conjunto de pares ordenados $\dot{C}$ com elementos $(d_1, h_1), \ldots, (d_{\dot{c}}, h_{\dot{c}}), d_i \in D \forall i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}, h_i \in H \forall i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}$ tal que:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} h_i.\breve{a}_{pd_ih_i} > \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}$$

Desse modo, a seguinte desigualdade, denominada desigualdade *cover* é válida para $\mathcal{F}_2'$:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} \breve{a}_{pd_ih_i} \leq \dot{c} \bigcirc 1$$

Apesar da possibilidade de utilização de uma implementação específica para a separação dos cortes de *cover*, como a descrita por Zonghao et al. (1998), utilizou-se a abordagem mais genérica dos planos de cortes por enumeração, os *Fenchel Cuts*, descritos por em Boyd (1994), que requerem a solução de um problema linear por iteração. Tal opção se mostrou bastante eficiente, novamente devido ao fato do número de períodos $|H|$ ser bastante limitado. Nesse caso, dois problemas de separação foram considerados: no primeiro, foram considerados os pontos extremos do poliedro definido pelas equações 3.7, 3.13 e 3.8, já no segundo foram considerados os pontos extremos do poliedro definido pelas equações 3.10, 3.14 e 3.12. Uma vantagem dessa abordagem é o fato de que o uso desses planos de corte permite que outros cortes, além dos cortes de *cover*, sejam inseridos automaticamente, caso a solução fracionária[2] gerada esteja fora da envoltória convexa dos pontos extremos enumerados.

O procedimento de geração de cortes acima apresentado apenas considera inclusão de variáveis ativas (que aparecem na solução fracionária com valores positivos) nos cortes gerados, visto que o problema de separação trata apenas da produção de um corte com violação máxima na solução corrente. De modo a produzir desigualdades mais fortes, a realização de um *lifting* pode ser considerada. Uma maneira bastante simples de obtenção de tais desigualdades é a inclusão de coeficientes nas variáveis inativas na construção do problema de separação. Tais coeficientes devem ser suficientemente pequenos para não atrapalharem a seleção do corte mais violado.

2. Solução fracionária considerando as variáveis $\breve{a}$

Entrada: Instância do PPTC
Saída: Vetor de solução $\overline{\lambda}$ e limite dual $f(\overline{\lambda})$

Inicialize o programa linear $\mathcal{PL}$ com os dados do problema, utilizando a formulação $\mathcal{F}_2'$, considerando apenas variáveis artificiais e colunas λ correspondentes a dias de folga;
Adicione em $\mathcal{PL}$ o corte relativo ao número mínimo de dias de trabalho;
$novasColunas \leftarrow 1$;
$novosCortes \leftarrow 0$;
enquanto $(novosCortes + novasColunas) > 0$ **faça**
  Resolva $\mathcal{PL}$, atualize a solução (variáveis $\overline{\lambda}$ e $\breve{a}$) e a informação dual;
  $novasColunas \leftarrow 0$;
  para cada $p \in P$ **faça**
    para cada $d \in D | \sum_{h \in H} \tilde{p}_{pdh} > 0$ **faça**
      Resolva $\mathcal{P}'_{pd}$;
      se $\overline{c}_{pd} < 0$ **então**
        Adicione nova coluna em $\mathcal{PL}$;
        $novasColunas \leftarrow novasColunas + 1$;
      fim
    fim
  fim
  $novosCortes \leftarrow 0$;
  se $novasColunas = 0$ *e soluçãoFracionária*$(\overline{\lambda})$ **então**
    para cada $p \in P$ **faça**
      Resolva $\mathcal{S}_p$;
      se *Corte violado encontrado* **então**
        Adicione corte em $\mathcal{PL}$;
        $novosCortes \leftarrow novosCortes + 1$;
      fim
      para cada $t \in T$ **faça**
        Resolva $\mathcal{S}_{pt}$;
        se *Corte violado encontrado* **então**
          Adicione corte em $\mathcal{PL}$;
          $novosCortes \leftarrow novosCortes + 1$;
        fim
      fim
    fim
  fim
fim

Algoritmo 1: Algoritmo de Geração de Colunas e Cortes GCCPPTC

4. Experimentos Computacionais

Experimentos computacionais foram realizados para avaliação das diferentes formulações. Os códigos foram implementados em C++, utilizando a biblioteca do resolvedor de programação linear CPLEX 10. A solução dos problemas de *pricing* $\mathcal{P}_{pd}$ na implementação corrente é resolvida por enumeração de padrões. Os códigos foram compilados com o compilador GCC 4 com a opção `-O2`. Os testes foram executados em um computador Dell Optiplex G620, com um processador Pentium D 3.0Ghz e 2GB de memória RAM, rodando o sistema operacional Linux.

O conjunto de instâncias utilizadas nos testes é o mesmo considerado em Souza et al. (2003) e Santos et al. (2005) e contém problemas coletados em algumas escolas Brasileiras. A

Tabela 1 apresenta algumas características dessas instâncias.

inst.	$\|P\|$	$\|T\|$	$\sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}$	$\sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \tilde{g}_{pt}$
1	8	3	75	21
2	14	6	150	29
3	16	8	200	4
4	23	12	300	66
5	31	13	325	71
6	30	14	350	63
7	33	20	500	84

Tabela 1: Características das instâncias

Nas Tabelas 2 e 3 são apresentados, respectivamente, os resultados das formulações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$. Formulações com * são complementadas com o corte 2.18. $\mathcal{LI}$ e $\mathcal{LS}$ indicam os limites inferiores e superiores produzidos, respectivamente. Dado um limite inferior li e um superior ls o $gap(\%)$ é: $\frac{ls-li}{li} * 100$. Os melhores limites são formatados em negrito. O tempo de execução dos experimentos foi medido utilizando-se o tempo de CPU em segundos e é indicado por t.cpu(s). A coluna GCCPPTG, na Tabela 3 indica os resultados do algoritmo com geração de cortes e colunas.

	$\mathcal{F}_1$			$\mathcal{F}_1^*$			
inst.	$\mathcal{LI}$	$gap(\%)$	t.cpu(s)	$\mathcal{LI}$	$gap(\%)$	t.cpu(s)	$\mathcal{LS}$
1	135,0	49,6	0,2	**189,0**	**6,9**	0,2	**202**
2	270,0	23,3	1,2	**333,0**	**0,0**	1,9	**333**
3	360,0	17,5	0,5	**414,0**	**2,2**	1,0	**423**
4	600,0	8,8	3,1	639,0	2,2	4,2	**653**
5	585,0	30,9	6,4	**756,0**	**1,3**	13,4	**766**
6	630,0	20,6	8,0	**738,0**	**3,0**	17,6	**760**
7	900,0	14,3	23,7	**999,0**	**3,0**	41,1	**1.029**

Tabela 2: Resultados da formulação $\mathcal{F}_1$

	$\mathcal{F}_2$			$\mathcal{F}_2^*$			GCCPPTC			
inst.	$\mathcal{LI}$	$gap(\%)$	t.cpu(s)	$\mathcal{LI}$	$gap(\%)$	t.cpu(s)	$\mathcal{LI}$	$gap(\%)$	t.cpu(s)	$\mathcal{LS}$
1	189,0	6,9	0,2	196,8	2,7	0,3	**202,0**	**0,0**	0,5	**202**
2	**333,0**	**0,0**	1,9	**333,0**	**0,0**	10,2	**333,0**	**0,0**	11,4	**333**
3	414,0	2,2	1,2	419,3	0,9	8,8	**423,0**	**0,0**	4,8	**423**
4	639,0	2,2	4,2	643,0	1,6	110,6	**652,0**	**0,2**	91,2	**653**
5	756,0	1,3	11,9	756,0	1,3	93,9	**762,0**	**0,5**	179,4	**766**
6	738,0	3,0	16,8	738,0	3,0	119,8	**756,0**	**0,5**	231,1	**760**
7	999,0	3,0	43,3	999,0	3,0	321,5	**1.017,0**	**1,2**	2.678,3	**1.029**

Tabela 3: Resultados da formulação estendida com geração de colunas e cortes

Como pode-se observar, o algoritmo GCCPPTC produziu os melhores limites duais conhecidos até o momento, superando a melhor formulação baseada em $\mathcal{F}_1$ em todos os casos, exceto na instância 2, onde os limites inferiores produzidos foram iguais. Em três casos o limite inferior ótimo foi obtido, sendo que no pior caso obteve-se um $gap(\%)$ de apenas 1,2.

5. Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma formulação de Programação Linear Inteira Mista com um número exponencial de linhas e colunas para o PPTC. Experimentos computacionais com um algoritmo para a resolução da relaxação linear dessa formulação foram apresentados. Os resultados permitiram, pela primeira vez, a determinação de soluções ótimas para instâncias do PPTC, bem como produziram limites bastante apertados para as instâncias restantes. É importante observar que o procedimento de geração de colunas e cortes apresentado neste trabalho pode ser aplicado a inúmeros problemas de programação de horários, visto que esses baseiam-se na na divisão das tarefas em diferentes dias, estrutura bastante comum em problemas do tipo.

A incorporação do algoritmo proposto em um *framework* de *branch-cut-and-price* forneceria um método completo para a produção de quadros de horários ótimos. Neste próximo passo uma tarefa importante é a aceleração da resolução da formulação apresentada. Nesse sentido, estratégias de estabilização da geração de colunas devem ser consideradas.

Referências

Abramson, D. (1991), Constructing school timetables using simulated annealing: sequential and parallel algorithms, Management Science, 37, 98-113.

Balas, E. (1975), Facets of the Knapsack Polytope, Mathematical Programming, 8(1), 146-164.

Boyd, E.A. (1994), Solving 0/1 integer programs with enumeration cutting planes, Annals of Operations Research, 50, 61-72.

Colorni, A., Dorigo, M. e Maniezzo, V. (1998), Metaheuristics for High-School Timetabling, Computational Optimization and Applications, 9(3), 277-298.

Dantzig, G. B. and Wolfe, P. (1960), Decomposition Principle for Linear Programs, Operations Research, 8, 101-111.

Even, S., Itai, A. e Shamir. (1976), On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, SIAM Jounal of Computing, 5, 691-703.

Eiselt, H. A. e Laporte, G. (1987), Combinatorial optimization problems with soft and hard requirements, Journal of Operations Research, 9(38), 785-795.

Hammer, P.L. and Johnson, E.L. and Peled, U.N. (1975), Facets of Regular 0-1 Polytopes, Mathematical Programming, 8(1), 179-206.

Gotlieb, C.C. The construction of class-teacher timetables, em *Proceeding IFIP congress 1962*, Amnsterdam, 73—77, 1963.

Santos, H.G, Ochi, L. S. e Souza, M.J.F. (2005), A Tabu search heuristic with efficient diversification strategies for the class/teacher timetabling problem, J. Exp. Algorithmics, 10.

Schaerf, A. (1999), Local search techniques for large high school timetabling problems, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A:systems and Humans, 29(4), 368-377.

Souza, M.J.F. and Ochi, L.S. and Maculan, N., A GRASP-Tabu Search Algorithm for solving School Timetabling Problems, em Resende, M.G.C. and Souza, J.P. (Eds.), *Metaheuristics: Computer Decision-Making*, Kluwer Academic Publishers, 659-672, 2003.

Wolsey, L. *Integer Programming*, Wiley, 1998.

Zonghao, G. and Nemhauser, G.L. e Savelsbergh, M.W.P. (1998), Lifted Cover Inequalities for 0-1 Integer Programs: Computation, INFORMS Journal on Computing, 10(4), 427-437.