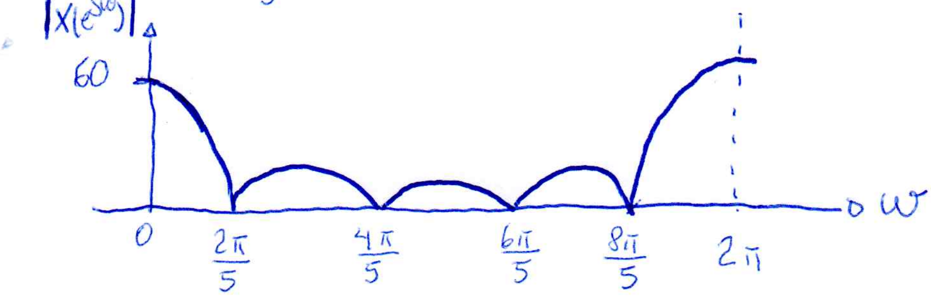
1ª Questão

a) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-2}^{2} 12 \cdot e^{-j\omega n} = 12 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(5\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$

Quando $\omega = 2\pi l$ sendo l um inteiro $\forall$ $X(e^{j\omega}) = 12.5 = 60$

Quando $\omega = \dfrac{2\pi}{5} l$ sendo l um inteiro $\forall$ $X(e^{j\omega}) = 0$.



b) $\tilde{X}_{10}(k) = X(e^{j\omega})$ para $\omega = \dfrac{2\pi}{10} k$

$5 \cdot \dfrac{2\pi}{10} \cdot \dfrac{1}{2} k = \dfrac{\pi}{2} \cdot k$

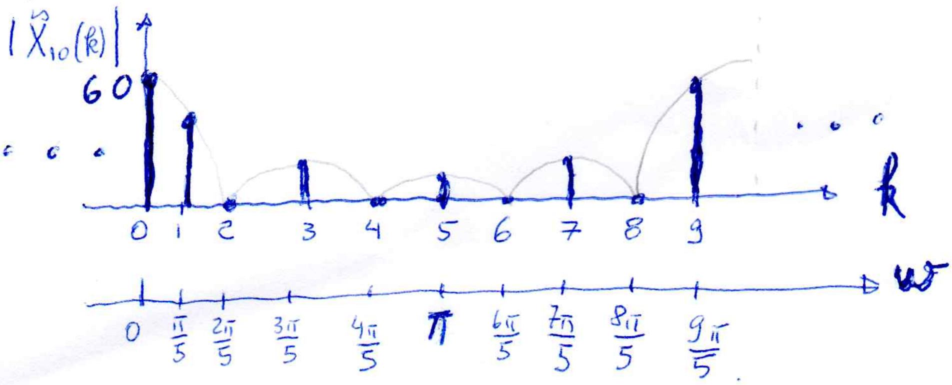
$\dfrac{2\pi}{10} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot k = \dfrac{\pi}{10} \cdot k$

$\tilde{X}_{10}(k) = 12 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{\operatorname{sen}(k\pi/10)}$

$\tilde{X}_{10}(k) = \tilde{X}_{10}(k + l \cdot 10)$ para qualquer l inteiro.

$\tilde{X}_{10}(k) = 0$ para k par e $\neq 10 \cdot l$

$\tilde{X}_{10}(k) = 60$ para $k = 10 \cdot l$.



periódico
período $N = 10$

c) $X_{10}(k) = \begin{cases} \tilde{X}_{10}(k) & \text{para } k = 0, \dots, 9 \\ 0 & \text{para os demais valores de } k \end{cases}$

Assim o esboço de $X_{10}(k)$ é o mesmo de $\tilde{X}_{10}(k)$ para $k = 0, \dots, 9$.

d)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x(n) \arrow[r, "\text{TFTD}"] \arrow[d, "\text{repetição periódica } x(n) \text{ com } N=10"] & X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-2}^{2} 12 \cdot e^{-j\omega n} \arrow[d, "\omega_k = \frac{2\pi}{10} \cdot k"] \\
\tilde{x}(n) \arrow[r, "\text{SFD}_{10}"] \arrow[d, "\text{um período de } \tilde{x}(n)"] & \tilde{X}_{10}(k) = \sum_{n=0}^{9} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} \arrow[d, "\text{um período de } \tilde{X}_{10}(k)."] \\
x(n) \arrow[r, "\text{TFD}_{10}"] & X_{10}(k)
\end{tikzcd}$$

A TFD de N pontos corresponde a N amostras consecutivas de um período da TFTD, por exemplo $0 \le \omega < 2\pi$. Essas amostras estão espaçadas $\frac{2\pi}{N}$ radianos.

2ª Questão

a) $\tilde{x}(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$

a.i) $\tilde{X}_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)n}$

Você poderia usar o resultado dado no formulário ou então observar que

quando $k - k_0 = mN$ (p/ m inteiro)

temos $\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi m \cdot n} = N$

quando $k - k_0 \neq mN$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)\cdot n} = \frac{1 - \overbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)N}}^{=1}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-k_0)}} = 0$$

$$\boxed{\tilde{X}_N(k) = \begin{cases} N & ; \text{ quando } k - k_0 = m.N \\ 0 & ; \text{ quando } k - k_0 \neq m.N \end{cases}}$$

$\tilde{X}_N(k) \underset{\text{período } N}{=} N.\delta(\lfloor k - k_0 \rfloor_N) = \tilde{X}_N(k+N)$

a.ii) $\tilde{X}_{2N}(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} = \sum_{n=0}^{2N-1} e^{-j\frac{2\pi}{2N}(k-2k_0)n}$

$$\boxed{\tilde{X}_{2N}(k) = \begin{cases} 2N & ; \text{ quando } k - 2k_0 = mN \\ 0 & ; \text{ quando } k - 2k_0 \neq mN \end{cases}}$$

$\tilde{X}_{2N}(k) = 2N.\delta(\lfloor k - 2k_0 \rfloor_{2N}) = \tilde{X}_{2N}(k+2N)$

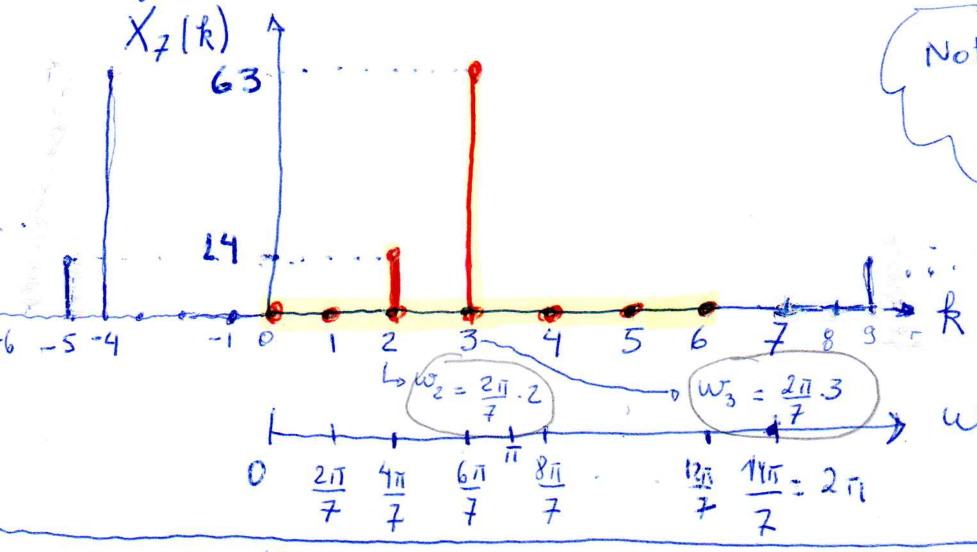
período $2N$

2ª Questão

b) $\tilde{x}(n) = 2\, e^{j\frac{2\pi}{7}\cdot 2n} + 9\cdot e^{j\frac{2\pi}{7}\cdot 3n}$

b.i) $\tilde{X}_7(k) = 7.2.\,\delta([k-2]_7) + 7.9.\,\delta([k-3]_7)$

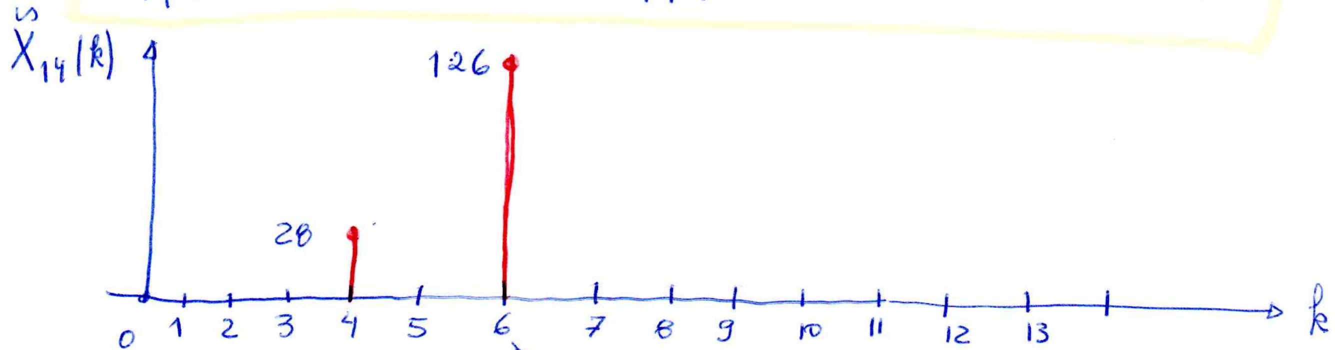
$$\boxed{\tilde{X}_7(k) = 14.\,\delta([k-2]_7) + 63.\,\delta([k-3]_7)}$$



Note que $\tilde{X}_7(k) = \tilde{X}_7(k + l7)$ é periódico de período 7
$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b.ii) $\tilde{X}_{14}(k) = 14.2\,\delta([k-2.2]_{14}) + 14.9.\,\delta([k-2.3]_{14})$

$$\boxed{\tilde{X}_{14}(k) = 28.\,\delta([k-4]_{14}) + 126.\,\delta([k-6]_{14})}$$



$\omega_4 = \frac{2\pi}{14}.4$ $\qquad$ $\omega_6 = \frac{2\pi}{14}.6$

$$\begin{cases} \omega_4 = \frac{2\pi}{7}.2 \\ \omega_6 = \frac{2\pi}{7}.3 \end{cases}$$

b.iii) ao dobrar o valor do período p/ calcular a SFD inserimos zeros entre as raias.
Porém $\tilde{x}(n)$ não mudou e as frequências angulares normalizadas são as mesmas tanto para N $\left(\frac{2\pi}{7}.2 \;e\; \frac{2\pi}{7}.3\right)$ como para 2N $\left(\frac{2\pi}{7}.2 \;e\; \frac{2\pi}{7}.3\right)$.

2ª Questão

c) $\tilde{v}(n) \xrightarrow{SFD_{180}}$ $\begin{cases} \text{observando } k = 0, \dots, 179 \\ \tilde{V}_{180}(k) \neq 0 \\ k=10;\ k=20;\ k=160 \text{ e } k=180 \end{cases}$

$\tilde{V}_{180}(10) \neq 0 \longrightarrow \frac{2\pi}{180} \cdot 10 = \frac{2\pi}{18} \cdot 1$

$\tilde{V}_{180}(20) \neq 0 \longrightarrow \frac{2\pi}{180} \cdot 20 = \frac{2\pi}{18} \cdot 2$

$\Big\} \ 0 < \omega < \pi.$

$\tilde{V}_{180}(160) \neq 0$

$\tilde{V}_{180}(170) \neq 0.$

$\Big\} \ \pi < \omega < 2\pi$

Frequência angular fundamental

i) O período fundamental é $\boxed{N = 18} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{18}}$

ii) $\begin{cases} \tilde{V}_{18}(1) \neq 0 \\ \tilde{V}_{18}(2) \neq 0 \\ \tilde{V}_{18}(16) \neq 0 \\ \tilde{V}_{18}(17) \neq 0. \end{cases}$

$\tilde{V}_{18}(k) = 0$ para $\{k = 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, 15\}$

$\begin{cases} \tilde{V}_{18}(1) = \tilde{V}_{180}(10)/10 \\ \tilde{V}_{18}(2) = \tilde{V}_{180}(20)/10 \\ \tilde{V}_{18}(16) = \tilde{V}_{180}(160)/10 \\ \tilde{V}_{18}(170) = \tilde{V}_{180}(170)/10. \end{cases}$

3) a) $H_4(k) = W_4^{0.k} - W_4^{2k}$

$$\boxed{H_4(k) = 1 - e^{-jk\pi}}$$ //

b) $G_4(k) = W_4^{-3k} \cdot H_4(k) - W_4^{3k} \cdot H_4(k)$

$G_4(k) = W_4^{-3k} \cdot (W_4^{0} - W_4^{2k}) - W_4^{3.k} \cdot (W_4^{0} - W_4^{2k})$

$G_4(k) = W_4^{-3k} - W_4^{-k} - W_4^{3k} + W_4^{5k}$

$W_4^{(-3+4)k}$ $\quad W_4^{(-1+4).k}$ $\quad W_4^{4k} \cdot W_4^{k} = W_4^{k}$

$G_4(k) = W_4^{k} - W_4^{3k} - W_4^{3k} + W_4^{k}$

$G_4(k) = 2W_4^{k} - 2W_4^{3k}$

$G_4(k) = 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k} - 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3k}$

$$\boxed{g(n) = 2 \cdot \delta(n-1) - 2 \cdot \delta(n-3)}$$ //

c) $$\boxed{S_4(k) = 4 \cdot W_4^{0} - 2 \cdot W_4^{k} + 4 \cdot W_4^{2k}}$$ //

d) $Y_4(k) = S_4(k) \cdot H_4(k) = (4W_4^{0} - 2W_4^{k} + 4W_4^{2k})(W_4^{0} - W_4^{2k})$

$Y_4(k) = 4W_4^{0} - \cancel{4W_4^{2k}} - 2W_4^{k} + 2W_4^{3k} + \cancel{4W_4^{2k}} - 4W_4^{4k}$

W_4^{0}

$Y_4(k) = 4 \cdot W_4^{0} - 4W_4^{0} - 2W_4^{k} + 2W_4^{3k}$

$Y_4(k) = -2W_4^{k} + 2W_4^{3k} \Longrightarrow \boxed{y(n) = -2\delta(n-1) + 2\delta(n-3)}$

e) $y(n) = s(n) \circledast_4 h(n)$.

$$y(n) = \sum_{l=0}^{3} h([n-l]_4) \cdot s(l)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} h([n]_4) & h([n-1]_4) & h([n-2]_4) & h([n-3]_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y_4(n) = -2\delta(n-1) + 2\delta(n-3)}$$ //.

f) $N = N_s + N_h - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$.

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y_5(n) = 4\delta(n) - 2\delta(n-1) + 2\delta(n-3) - 4\delta(n-4)}$$ //