# Resposta em frequência de um SLIT de tempo discreto

Em tempo contínuo, a saída de um sistema LIT excitado por um impulso unitário (Dirac), denotado como $\delta(t)$, é a resposta ao impulso unitário deste sistema, denotada como $h(t)$. Sua representação na frequência é a resposta em frequência, aqui denotada como $H(j\Omega)$, em que $\Omega = 2\pi f$.

De modo equivalente, em tempo discreto, a saída de um sistema LIT excitado por um pulso unitário, denotado como $\delta(n)$, é a resposta ao pulso unitário deste sistema, denotada como $h(n)$. Sua representação na frequência é a resposta em frequência, aqui denotada como $H(e^{j\omega})$, em que $\omega = 2\pi f/f_a$, sendo $f_a$ a frequência de amostragem.

A análise de sistemas com base em sua resposta em frequência é uma maneira útil de lidar com a análise de sinais e sistemas e com o projeto em geral de sistemas. No caso de sistemas de tempo discreto, $H(e^{j\omega})$ guarda algumas particularidades em relação à $H(j\Omega)$. A seguir, vamos definir a resposta em frequência de um sistema de tempo discreto e apresentar suas principais propriedades e diferenças em relação ao caso de tempo contínuo. Além disso, mostraremos que a resposta em frequência possui a mesma informação da resposta ao pulso unitário, porém em um domínio diferente.

## Definição da resposta em frequência

Considere a exponencial complexa

$$x(n) = Ae^{j\omega_o n}, \quad \text{com} \quad -\infty < n < +\infty, \tag{1}$$

aplicada a um sistema LIT com resposta ao pulso unitário $h(n)$. Sabemos que a sua saída pode ser representada como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)Ae^{j\omega_o(n-k)}. \tag{2}$$

Deixando no somatório somente os termos que dependem de $k$, temos

$$y(n) = \underbrace{Ae^{j\omega_o n}}_{\text{(I)}} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega_o k}}_{\text{(II)}}.$$

Note que (I) é exatamente o sinal aplicado à entrada do sistema. Além disso, (II) independe de $n$ e o definimos como

$$H(e^{j\omega_o}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega_o k}. \tag{3}$$

O termo $A\ e^{j\omega_o n}$ pode ser interpretado como uma autofunção, pois ao ser aplicado a um sistema LIT, garante na saída desse sistema a mesma forma da entrada. Além disso, $H(e^{j\omega_o})$ pode ser interpretado como um autovalor associado à autofunção $A\ e^{j\omega_o n}$. Neste caso, a saída

$$y(n) = A\ e^{j\omega_o n} H(e^{j\omega_o}) \tag{4}$$

representa a resposta do sistema em regime permanente senoidal com condições iniciais nulas.

A resposta em frequência de um sistema LIT para toda e qualquer entrada é definida como

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k}. \tag{5}$$

## Propriedades da Resposta em Frequência

1. $H(e^{j\omega})$ é uma função contínua em $\omega = 2\pi f/f_a$.

2. $H(e^{j\omega})$ é uma função periódica de período $2\pi$:

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi m)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, \underbrace{e^{-j(\omega+2\pi m)k}}_{=\,e^{-j\omega k}} = H(e^{j\omega}).$$

   Assim, podemos representar $H(e^{j\omega})$ somente em um período, por exemplo, $-\pi \leq \omega < \pi$, ou $0 \leq \omega < 2\pi$.

3. $H(e^{j\omega})$ é uma função complexa de $\omega$:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\cos(\omega k)}_{H_R(e^{j\omega})} + j \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\sin(-\omega k)}_{H_I(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad \text{(módulo)}$$

$$\theta(\omega) = \arctan\left(\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right) \quad \text{(defasagem)}$$

   Essa propriedade permite reescrever a Equação (4), ou seja, a saída do sistema LIT a uma exponencial complexa, como

$$y(n) = A\, e^{j\omega_o n} H(e^{j\omega_o}) = A|H(e^{j\omega_o})|e^{j(\omega_o n + \theta(\omega_o))}. \tag{6}$$

   Portanto, podemos concluir que se uma exponencial complexa de frequência angular $\omega_o$ é aplicada a um sistema LIT, a sua saída é uma exponencial complexa de frequência angular $\omega_o$, porém com amplitude modificada pelo módulo da resposta em frequência em $\omega_o$, e a fase modificada pela fase da resposta em frequência em $\omega_o$.

4. Quando o sistema possui resposta ao pulso unitário real, o módulo de $H(e^{j\omega})$ possui simetria par e a fase de $H(e^{j\omega})$ possui simetria ímpar. Essa propriedade pode ser facilmente verificada observando que o complexo conjugado de $H(e^{j\omega})$ é

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^*(k)e^{j\omega k}.$$

   Se $h(n)$ for real, então $H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$. Portanto,

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \qquad \text{Módulo: é uma função par.}$$
$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega) \qquad \text{Fase: é uma função ímpar.}$$

   **Exercício**: Usando as Propriedades 3 e 4, mostre que quando a entrada do sistema LIT é

$$x(n) = A\cos(\omega_o n + \phi),$$

   a sua saída é

$$y(n) = A\, |H(e^{j\omega_o})| \cos(\omega_o n + \phi + \theta(\omega_o)). \tag{7}$$

   Em outras palavras, mostre que se um cosseno de frequência angular $\omega_o$ é aplicado a um sistema LIT, a sua saída é um cosseno de frequência angular $\omega_o$, porém com amplitude modificada pelo módulo da resposta em frequência em $\omega_o$, e a fase modificada pela fase da resposta em frequência em $\omega_o$.

Portanto, qualquer sinal representado em termos de exponenciais complexas, como cosseno e seno, é também uma autofunção de um sistema LIT.

◀

## Exemplos de resposta em frequência para sistemas de média móvel

- **Exemplo 1**: Inicialmente determine o módulo e a defasagem da resposta em frequência de um sistema que faz apenas o atraso de $\Delta$ amostra do sinal de entrada, ou seja, $h(n) = \delta(n - \Delta)$.

- **Exemplo 2**: Determine o módulo e a defasagem da resposta em frequência do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y(n) = \frac{1}{2}\Big[x(n) + x(n-1)\Big].$$

- **Exemplo 3**: Determine o módulo e a defasagem da resposta em frequência do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y(n) = \frac{1}{2}\Big[x(n) - x(n-1)\Big].$$

- **Exemplo 4**: Determine a resposta em frequência do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y(n) = \frac{1}{3}\Big[x(n-1) + x(n) + x(n+1)\Big].$$

  **Resposta ao pulso unitário**

$$h(n) = (1/3)\ \ \big[\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)\big].$$

  **Resposta em frequência**

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-1}^{1} h(k)e^{-j\omega k} = \frac{1}{3}\Big[e^{-j\omega(-1)} + e^{-j\omega 0} + e^{-j\omega 1}\Big].$$

  **Módulo**: $|H(e^{j\omega})| = (1/3)\ \ |2\cos(\omega) + 1|$.

  **Fase**: $\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega \le 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 \le \omega \le \pi \end{cases}$

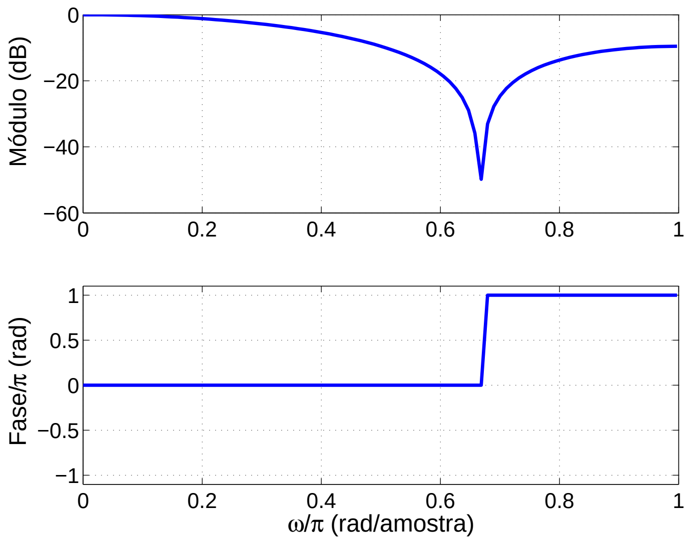



Figura 1: Módulo e fase da resposta em frequência do sistema de média móvel com $h(n)$ simétrico em relação a origem.

◀

- **Exemplo 5**: Determine a resposta em frequência do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y(n) = \frac{1}{3}\Big[x(n) + x(n-1) + x(n-2)\Big].$$

**Resposta ao pulso unitário**

$$h(n) = (1/3) \ \ \big[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)\big].$$

**Resposta em frequência**

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{2} h(k)e^{-j\omega k} = \frac{1}{3}\Big[e^{-j\omega 0} + e^{-j\omega 1} + e^{-j\omega 2}\Big].$$

**Módulo**: $|H(e^{j\omega})| = (1/3) \ \ |2\cos\omega + 1|.$

**Fase**: $\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega, & 0 \le \omega \le 2\pi/3 \\ -\omega + \pi, & 2\pi/3 \le \omega \le \pi \end{cases}$

Note que o módulo da resposta em frequência é o mesmo do caso anterior, porém, a fase é modificada devido ao deslocamento da resposta ao pulso unitário de uma amostra para a direita (atraso). Sugestão: Esboce a curva da fase da resposta em frequência.

A partir dos esboços do módulo e da defasagem da resposta em frequência obtenha a expressão de $y(n)$ para a entrada $x(n) = \cos(0.9\ n)$.

◀

- **Exemplo 6**:

Esboce o módulo e a defasagem da resposta em frequência do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y(n) = \frac{1}{4}\Big[x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)\Big].$$

A partir dos esboços do módulo e da defasagem da resposta em frequência obtenha a expressão de $y(n)$ para a entrada $x(n) = \cos(\pi n/6)$.

◀

## A resposta em frequência de sistemas de tempo discreto descritos por equação de diferenças

Sistemas lineares de tempo discreto podem ser descritos por equações de diferenças do tipo:

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)x(n-\ell) - \sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k).$$

Para obter a resposta em frequência desta classe de sistemas, vamos usar o fato de que a autofunção $x(n) = e^{j\omega_o n}$ aplicada a um sistema LIT resulta em sua saída $y(n) = e^{j\omega_o n}H(e^{j\omega_o}) = x(n)H(e^{j\omega_o})$. Além disso,

$$x(n-\ell) = e^{j\omega_o(n-\ell)} = x(n)e^{-j\omega_o \ell},$$

e

$$y(n-k) = x(n-k)H(e^{j\omega_o}) = y(n)e^{-j\omega_o k}.$$

Aplicando essas relações na equação de diferenças, temos

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)x(n)e^{-j\omega_o \ell} - \sum_{k=1}^{N} a(k)y(n)e^{-j\omega_o k},$$

ou ainda, colocando $x(n)$ e $y(n)$ em evidência temos

$$y(n)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a(k)e^{-j\omega_o k}\right) = x(n)\sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)e^{-j\omega_o \ell},$$

o que, finalmente, permite reescrever a saída como

$$y(n) = x(n)\underbrace{\frac{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)e^{-j\omega_o \ell}}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a(k)e^{-j\omega_o k}}}_{\text{(I)}}.$$

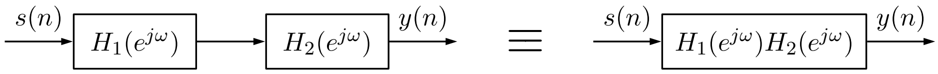
Note que essa igualdade é estabelecida para a entrada particular $x(n) = e^{j\omega_o n}$. Além disso, o termo (I) não depende de $n$ e a sua generalização para todo $\omega$ define a resposta em frequência de um sistema IIR descrito por uma equação de diferenças, ou seja,

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \frac{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)e^{-j\omega\ell}}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a(k)e^{-j\omega k}}.$$

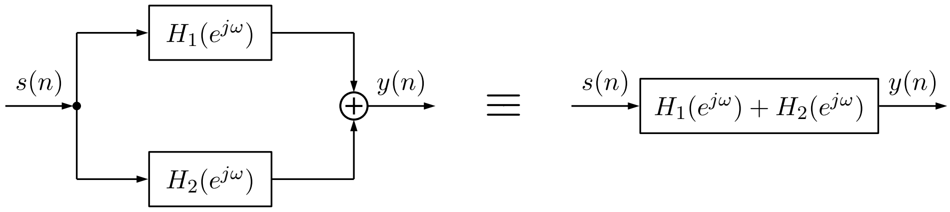
No caso em que não há realimentação das saídas passadas para a saída do instante $n$, esta expressão retorna a resposta em frequência de um sistema FIR.

## A resposta em frequência da associação de sistemas

**Associativa**




**Distributiva**




⋄ **Exemplo 7: A resposta em RPS e o transitório de um sistema LIT**

O sistema acumulador, que pondera as amostras de entrada a cada instante por um fator $a$, possui a seguinte resposta ao pulso unitário:

$$h(n) = a^n u(n),$$

sendo $u(n)$ o degrau unitário e $0 < a < 1$. A partir da definição, a sua resposta em frequência é

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u(k)e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(ae^{-j\omega})^k = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}.$$

No caso em que a entrada é a autofunção

$$x(n) = Ae^{-j\omega_o n}, \quad \text{para} \quad -\infty < n < \infty$$

a saída é

$$y_r(n) = Ae^{-j\omega_o n}H(e^{j\omega_o}) = Ae^{-j\omega_o n}\,\frac{1}{1-ae^{-j\omega_o}},$$

e corresponde a saída em regime permanente senoidal (RPS).

Se a entrada for aplicada somente para $0 \le n < +\infty$, ou seja,

$$x(n) = Ae^{-j\omega_o n}u(n),$$

uma forma de obter a saída é aplicando a definição da convolução. Assim,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u(k)Ae^{j\omega_o(n-k)}u(n-k).$$

Essa expressão pode ser bem simplificada se observarmos que $u(k) = 1$ somente para $k \ge 0$ e $u(n-k) = 1$ somente para $n \ge k$. Assim,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k Ae^{j\omega_o(n-k)} = Ae^{j\omega_o n}\sum_{k=0}^{n}(ae^{-j\omega_o})^k = Ae^{j\omega_o n}\,\frac{1-(ae^{-j\omega_o})^{n+1}}{1-ae^{-j\omega_o}}.$$

Por conveniência, vamos reescrever essa expressão como

$$y(n) = \underbrace{Ae^{j\omega_o n}\,\frac{1}{1-ae^{-j\omega_o}}}_{\text{(I)}} - \underbrace{Ae^{j\omega_o n}\,\frac{(ae^{-j\omega_o})^{n+1}}{1-ae^{-j\omega_o}}}_{\text{(II)}}$$

Note que o termo (I) é o $y_r(n)$, ou seja, resposta em RPS. A expressão $(ae^{-j\omega_o})^{n+1}$, com $0 < a < 1$, tende a zero quando $n \to \infty$, assim o termo (II) diminui com o aumento de $n$ e representa a resposta no transitório.

◀

### A resposta ao pulso unitário $h(n)$ a partir de $H(e^{j\omega})$

Conhecendo $H(e^{j\omega})$, é possível obter $h(n)$ a partir da seguinte relação

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

**Demonstração:**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h(\ell)e^{-j\omega\ell}e^{j\omega n}d\omega = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h(\ell)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-\ell)}d\omega$$

Observando que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-\ell)}d\omega = \frac{e^{j\pi(n-\ell)} - e^{j\pi(n-\ell)}}{2j\pi(n-\ell)} = \frac{\mathrm{sen}(\pi(\mathrm{n}-\ell))}{\pi(n-\ell)} = \mathrm{sinc}(n-\ell) = \begin{cases} 1, & n=\ell \\ 0, & n\neq\ell \end{cases}$$

então,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h(\ell)\delta(n-\ell).$$

Como o único valor de $\ell$ em que $\delta(n-\ell)$ é não nulo é $\ell = n$, resulta

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = h(n).$$

◀

Como a partir da resposta ao pulso unitário é possível obter a resposta em frequência e vice-versa, então ambas são descrições equivalentes de um sistema LIT.

### A condição de existência da resposta em frequência $H(e^{j\omega})$

Aplicando o módulo em ambos os lados de (5) temos

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k}\right|.$$

Como o módulo de uma soma de termos é menor ou igual que a soma dos módulos e $|e^{-j\omega k}| = 1$ temos

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k}\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)|.$$

Portanto,

$$H(e^{j\omega}) \text{ existe } \iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty,$$

ou seja, vai existir a resposta em frequência se e somente se a resposta ao pulso unitário for absolutamente somável. Note que trata-se da mesma condição para assegurar a estabilidade BIBO (*Bounded Input - Bounded Output*) de um sistema LIT.