

PTC2324: Processamento Digital de Sinais I

Resolução: Exercício computacional 7

MDM,FRMP-2014

Exercícios preparatórios

Suponha que sejam tomadas $N = 256$ amostras de um sinal de tensão $v(t)$ a uma taxa de amostragem $f_a = 48\text{kHz}$. Utilizando-se a FFT, é calculada a sequência $V(k) = \text{TFD}_{256}\{v(n)\}$. Pergunta-se:

1. Se $v(t)$ é um sinal de energia com transformada de Fourier $V(f)$, qual é o fator de escala que deve ser utilizado para calcular estimativas das amostras de $V(f)$ a partir de $V(k)$?

Solução: Se $v(t)$ é um sinal de energia, então sua transformada de Fourier $V(f)$ não será constituída por impulsos de Dirac. O sinal de tempo contínuo $v(t)$ é amostrado e janelado para formar o sinal de tempo discreto $v(n)$. Consideraremos primeiramente a amostragem. Seja $p_1(t)$ o pente de impulsos com período $T_a = 1/f_a < 1/(2f_s)$, em que f_s é a frequência máxima do sinal $v(t)$, ou seja,

$$p_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_a).$$

A multiplicação de $p_1(t)$ por $v(t)$ resulta

$$v_1(t) = v(t) \cdot p_1(t) = v(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_a).$$

No domínio da frequência ocorrerá a convolução de $V(f)$ com a representação em frequência do pente de impulsos, $P_1(f)$, isto é,

$$V_1(f) = V(f) * P_1(f) = V(f) * f_a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_a) = f_a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(f - kf_a),$$

em que $*$ denota a operação de convolução linear e $V_1(f) = \text{TF}\{v_1(t)\}$. Podemos perceber que $V_1(f)$ é uma repetição periódica de $V(f)$, multiplicado por um fator f_a .

Em seguida, o sinal $v_1(t)$ será janelado, resultando no sinal $v_2(t)$. Vamos supor uma janela retangular $q(t)$ centrada na origem, dada pela expressão

$$q(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq T_o/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

em que T_o é a largura da janela. Deste modo, o sinal $v_1(t)$ será multiplicado pela janela $q(t)$, resultando no sinal $v_2(t)$, em que

$$v_2(t) = v_1(t) \cdot q(t).$$

Equivalentemente, no domínio da frequência, ocorrerá a convolução do espectro de $v_1(t)$ com representação em frequência da janela retangular $q(t)$, dada por

$$Q(f) = T_o \text{sinc}(T_o f).$$

A Transformada de Fourier de $v_2(t)$, que representa o espectro deste sinal, é

$$V_2(f) = V_1(f) * Q(f) = \left[f_a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(f - kf_a) \right] * [T_o \text{sinc}(T_o f)].$$

Além disso, como foram tomadas amostras do sinal $v(t)$ a uma frequência f_a , durante o tempo T_o , que corresponde à largura da janela retangular, existirão N amostras para o sinal $v(n)$, com

$$N = \frac{T_o}{T_a},$$

ou ainda,

$$T_o = NT_a.$$

Consequentemente, o espectro do sinal $v_2(t)$ pode ser escrito como

$$V_2(f) = N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(f - kf_a) * \text{sinc}(T_o f).$$

Conclui-se que, devido ao janelamento com janela retangular, o espectro de $V_2(f)$ é uma representação “distorcida” de $V(f)$.

Mudando de interpretação de tempo contínuo para a de tempo discreto, considera-se agora o sinal $v(n)$ que corresponde às amostras do sinal $v(t)$ tomadas a uma frequência f_a e durante um tempo T_o , ou seja,

$$v(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} v(\ell T_a) \delta(n - \ell).$$

A representação deste sinal no domínio da frequência é dada pela sua Transformada de Fourier de Tempo Discreto, isto é, $V(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{v(n)\}$, em que ω é a frequência angular normalizada.

São então tomadas amostras do espectro de $v(n)$, ou seja, é calculada a TFD deste sinal, dada por $V(k) = \text{TFD}_N\{v(n)\}$. A relação entre o espectro contínuo $V(e^{j\omega})$ e o espectro amostrado $V(k)$ é dada somente por uma mudança na escala horizontal, de modo que

$$V(k) = V(e^{j\omega}),$$

para

$$\omega = \frac{2\pi}{N}k.$$

Da mesma forma, a relação o espectro do sinal de tempo discreto $V(e^{j\omega})$ e o espectro do sinal de tempo contínuo amostrado $V_2(f)$ também é dada somente por uma mudança na escala horizontal, que segue a relação

$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_a}.$$

Relaciona-se então f com k da seguinte maneira:

$$\frac{2\pi k}{N} = 2\pi \frac{f}{f_a} \Rightarrow f = \frac{k f_a}{N}.$$

Finalmente, sabe-se que $V_2(f)$ se relaciona com $V(f)$, como visto acima, por um fator N . Chega-se à conclusão de que

$$V(f) = \frac{V(k)}{N},$$

para

$$f = \frac{k f_a}{N}.$$

2. Se $v(t)$ é um sinal periódico com série de Fourier (exponencial) caracterizada por coeficientes c_m , qual é o fator de escala que deve ser utilizado para calcular estimativas dos coeficientes (raias) da série de Fourier de $v(t)$ a partir de $V(k)$?

Solução: Se $v(t)$ é um sinal periódico, então sua Transformada de Fourier irá conter impulsos de Dirac. Neste caso, uma representação mais adequada é dada pela série de Fourier exponencial, cujos coeficientes c_m se relacionam com o sinal $v(t)$ a partir da seguinte expressão

$$v(t) = \sum_{m=-L}^L c_m e^{j\Omega_0 m t}$$

em que L é o número do harmônico de maior frequência que constitui $v(t)$, e Ω_0 é a frequência fundamental de $v(t)$.

Amostrando $v(t)$ com uma frequência $f_a = 1/T_a$ resulta em um sinal de tempo discreto $v(n)$. Vamos considerar que o sinal $v(n)$ é periódico de período N . Aplicando a SFD em $v(n)$ resulta

$$\tilde{V}(k) = N \sum_{m=-L}^L c_m \delta(\lfloor k - m \rfloor_N).$$

Note que temos aqui a relação entre os coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ e da série de Fourier Discreta (SFD) de $v(n)$. Como a TFD de $v(n)$ corresponde a um período de sua SFD, conclui-se que o fator de escala que deve ser empregado para se obter os coeficientes é tal que

$$c_m = \frac{V(k)}{N},$$

com $m = k$ e $-L \leq m \leq L$.

3. O “eixo das frequências” de $V(k)$ é normalizado. Como ele deve ser desnormalizado nos itens 1. e 2. anteriores?

Solução: Como visto no item a), a relação entre k e f é dada por

$$\frac{2\pi k}{N} = 2\pi \frac{f}{f_a} \Rightarrow f = \frac{k f_a}{N}.$$

Deste modo, para desnormalizar o “eixo das frequências”, é necessário multiplicá-lo por f_a/N .

Observação: O comando `fft(x,N)` do MatLab retorna a TFD do sinal $x(n)$ para os valores de k no seguinte intervalo: $0 \leq k < N$. Desta forma, representará o espectro para o seguinte intervalo de frequências normalizadas ω : $0 \leq \omega < 2\pi$. Para visualizar o espectro no intervalo $-\pi \leq \omega < \pi$, pode-se utilizar o comando `fftshift(fft((x,N))`, que desloca a frequência nula para o centro do vetor que contém o espectro. Neste caso, é preciso desnormalizar o “eixo das frequências” de uma forma diferente, considerando este deslocamento, com seguinte expressão,

$$f_k = \frac{(k - \frac{N}{2})f_a}{N},$$

se N for par. Na parte experimental, foram plotados gráficos cuja TFD foi obtida com o comando `fftshift` e com a desnormalização adequada.

4. Suponha que após a amostragem, o sinal $v(n)$ é multiplicado pela janela de Hamming originando o sinal $v_1(n)$ com TFD $V_1(k)$. Descreva com detalhes como calcular $V_1(k)$ a partir de $V(k)$ da forma mais simples possível. No caso de um sinal periódico, qual é o fator de escala a ser aplicado em $V_1(k)$ para obter estimativas das raiais espectrais da série de Fourier de $v(t)$? Justifique.

Solução: O sinal $v_1(n)$ é resultado da seguinte multiplicação do sinal $v(n)$ por uma janela de Hamming $q(n)$:

$$v_1(n) = v(n) \cdot q(n).$$

Uma multiplicação no tempo equivale a uma convolução no domínio da frequência, ou seja,

$$V_1(k) = V(k) * Q(k).$$

A forma mais simples possível de se realizar o cálculo de $V_1(k)$ é realizar a multiplicação das sequências no domínio do tempo, e depois calcular a TFD do produto, ou seja, $V_1(k) = \text{TFD}_N\{v(n) \cdot q(n)\}$.

Se $v(n)$ é periódico e supondo janelamento com janela retangular, então, como verificado no item b), é necessário multiplicar $V_1(k)$ por um fator de escala de $1/N$ para se encontrar estimativas das raiais espectrais da série de Fourier de $v(t)$, ou seja, os coeficientes c_m . Note que N é o valor máximo do lóbulo principal da Transformada de Fourier da janela, ou seja,

$$\text{máximo } \text{abs}(\text{fft}(\text{janela retangular})).$$

Assim, no caso da janela de Hamming esse fator é máximo `abs(fft(janela Hamming))`.

Antes de começar a utilizar o computador, procure preparar os programas necessários na linguagem MatLab (ou equivalente). Utilize os trechos dos programas abaixo, completando e inserindo os comandos necessários.

Solução:

1. Multiplicar o sinal pela janela:

```

1 N=256;
2 TA=62.5e-6; % periodo de amostragem
3 K=0:N-1;
4 tempo=K*TA; % tempo discreto
5
6 V1T=5*cos(2000*pi*tempo); % sinal no tempo
7 JAT=janela; % Veja "Gerar janelas com funções do MatLab"
8 VTJ=V1T.*JAT; % sinal*janela
9 \textbf{VF1=abs(fft(VTJ,N))}; % TFD de VTJ com N pontos
10 \textbf{FE1=1/N}; % FE1 - fator de escala - coeficiente da SF
11
12 VF=VF1*FE1; % coeficiente da SF do sinal
13 VdB=20*log10(VF); % coeficiente da SF (dB)

```

2. Gerar janelas com funções do MatLab:

```

1 N=128;
2 w1=window(@rectwin,N);
3 w2 = window(@hamming,N);
4 w3 = window(@triang,N);
5 plot(1:N,[w1,w2,w3],'.'); axis([1 N 0 1]);
6 legend('Retangular','Hamming','Triangular');
7 grid

```

Arquivo help da função window:

window Window function gateway.

window(@WNAME,N) returns an N-point window of type specified by the function handle @WNAME in a column vector. @WNAME can be any valid window function name, for example:

@bartlett	- Bartlett window.
@barthannwin	- Modified Bartlett-Hanning window.
@blackman	- Blackman window.
@blackmanharris	- Minimum 4-term Blackman-Harris window.
@bohmanwin	- Bohman window.
@chebwin	- Chebyshev window.
@flattopwin	- Flat Top window.
@gausswin	- Gaussian window.
@hamming	- Hamming window.
@hann	- Hann window.
@kaiser	- Kaiser window.
@nuttallwin	- Nuttall defined minimum 4-term Blackman-Harris window.
@parzenwin	- Parzen (de la Valle-Poussin) window.
@rectwin	- Rectangular window.
@taylorwin	- Taylor window.
@tukeywin	- Tukey window.
@triang	- Triangular window.

window(@WNAME,N,OPT1,OPT2) designs the window with the optional input arguments specified in OPT1 and OPT2. To see what the optional input arguments are, see the help for the individual windows, for example,

KAISER or CHEBWIN.

window launches the Window Design & Analysis Tool (WinTool).

Parte computacional

Em cada item abaixo é considerado um sinal de tensão $v(t)$ que é amostrado e multiplicado pelas janelas retangular e Hamming. O período de amostragem é T_a , sendo tomadas N amostras a partir de $t = 0$. Considere $v(t)$ em volts e t em segundos.

- Calcule o módulo da TFD dos sinais amostrados e meça diretamente, da melhor forma possível, a magnitude das componentes espectrais, isto é, o módulo dos coeficientes da série Fourier dos sinais de tempo contínuo considerados.

Antes de iniciar, efetue alguns testes utilizando partes do trecho de programa 2.

- Verifique inicialmente se os sinais gerados estão corretos (amplitude e frequência).
- Verifique se as janelas no tempo estão corretas (forma e magnitude do máximo).

1. $v(t) = 5 \cos(2000\pi t)$

$T_a = 62,5\mu s, \quad N = 256$

Complete a Tabela I, mostrada ao final do enunciado. Utilize o comando `stem` e uma escala linear para fazer os gráficos.

Solução: Após correção de escala e desnormalização do “eixo de frequências” do espectro obtido pela `fft` (ver observação do item c) dos Exercícios Preparatórios), foram obtidos os gráficos das Figs. 1 e 2, para janela retangular e de Hamming, respectivamente.

A tabela completada está ao fim deste gabarito.

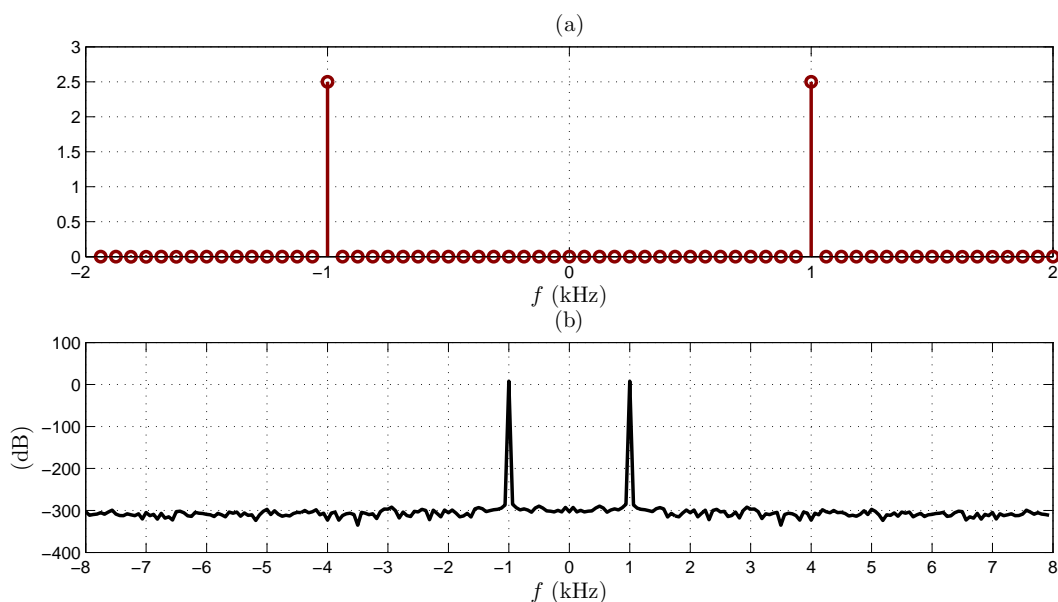


Figura 1: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ para janela retangular: (a) escala linear, (b) escala em dB.

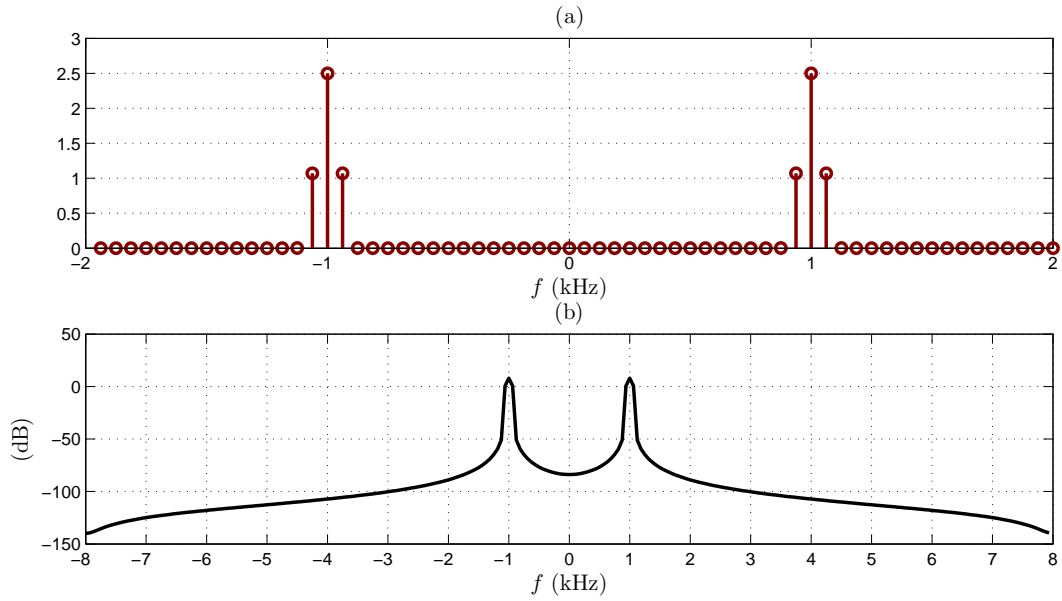


Figura 2: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ para janela de Hamming: (a) escala linear, (b) escala em dB.

2. $v(t)$ e N como no item 1.

$$T_a = 63,5 \mu s.$$

Complete a Tabela II, mostrada ao final do enunciado. Utilize o comando `stem` e uma escala logarítmica em dB (usando a função `log10`) para fazer os gráficos. Como deve ser interpretada a existência das várias raias no resultado?

Solução: Foram obtidos os gráficos das Figs. 3 e 4, para janela retangular e de Hamming, respectivamente.

A existência das várias raias no resultado com janela retangular é explicada pelo erro de vazamento que ocorre quando a largura da janela não é um múltiplo inteiro do período do sinal sendo analisado. Neste caso, o período de $v(t)$ é

$$T_v = \frac{1}{f_v} = 1 \text{ ms.}$$

A largura da janela é dada por

$$T_0 = NT_a = 256 \cdot 63,5 \cdot 10^{-6} = 16,256 \cdot 1 \text{ ms} = 16,256 \cdot T_v.$$

Assim, ocorre erro de vazamento, e por isso a raia na frequência de 1 kHz não é obtida, mas raias vizinhas a ela passam a aparecer.

A tabela foi completada estimando como raia do sinal $v(t)$ aquela de maior amplitude em cada caso.

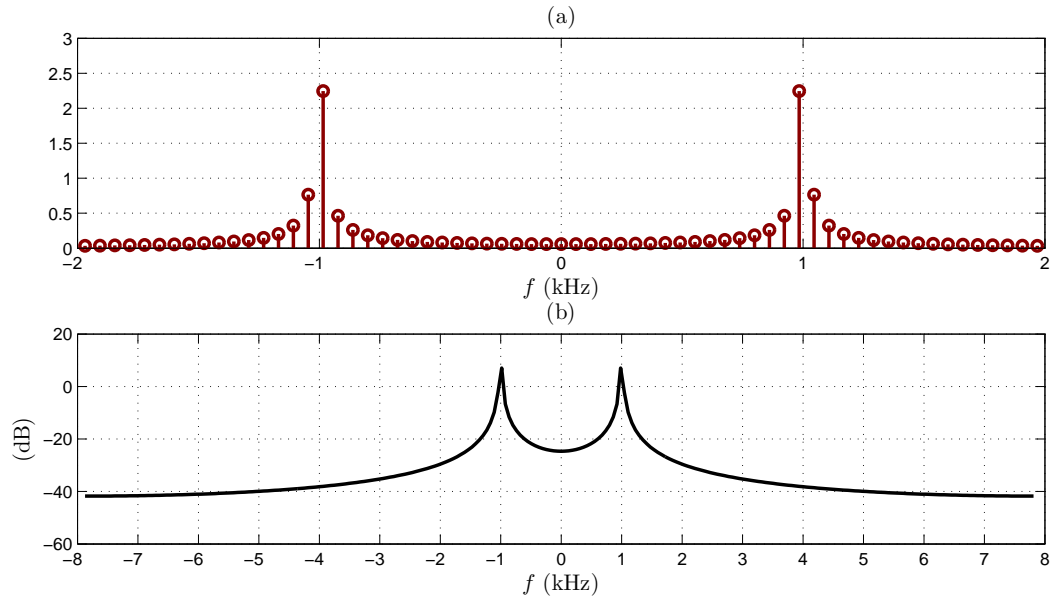


Figura 3: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ para janela retangular: (a) escala linear, (b) escala em dB.

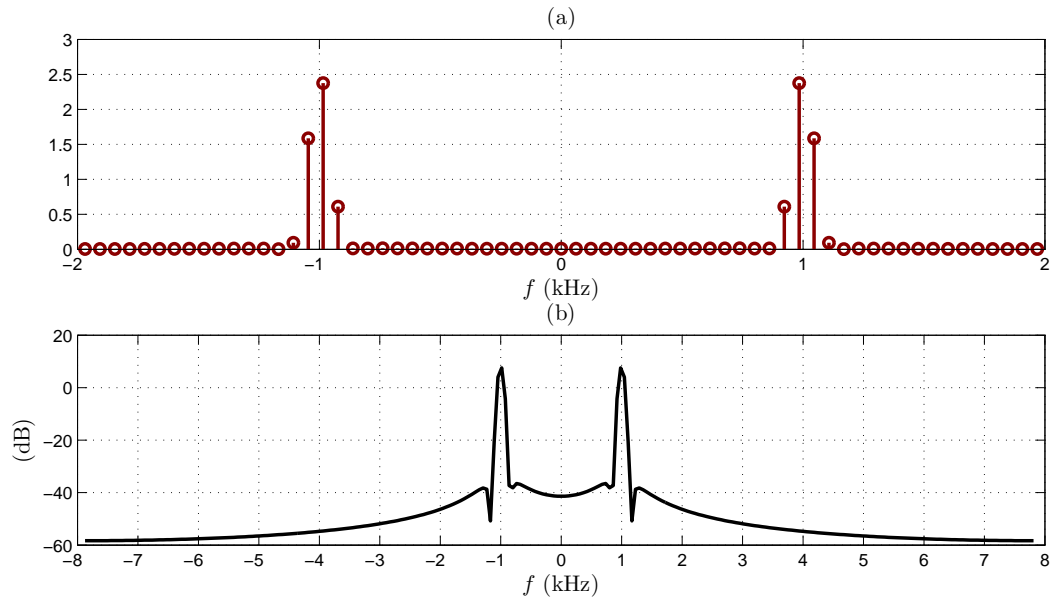


Figura 4: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ para janela de Hamming: (a) escala linear, (b) escala em dB.

3. $v(t)$ e T_a como no item 2.

$$N = 2 \times 256 = 512$$

Complete a Tabela III. Utilize o comando `stem` e uma escala logarítmica em dB para fazer os gráficos.

Solução: Foram obtidos os gráficos das Figs. 5 e 6, para janela retangular e de Hamming, respectivamente.

A tabela foi completada estimando como raia do sinal $v(t)$ aquela de maior amplitude em cada caso.

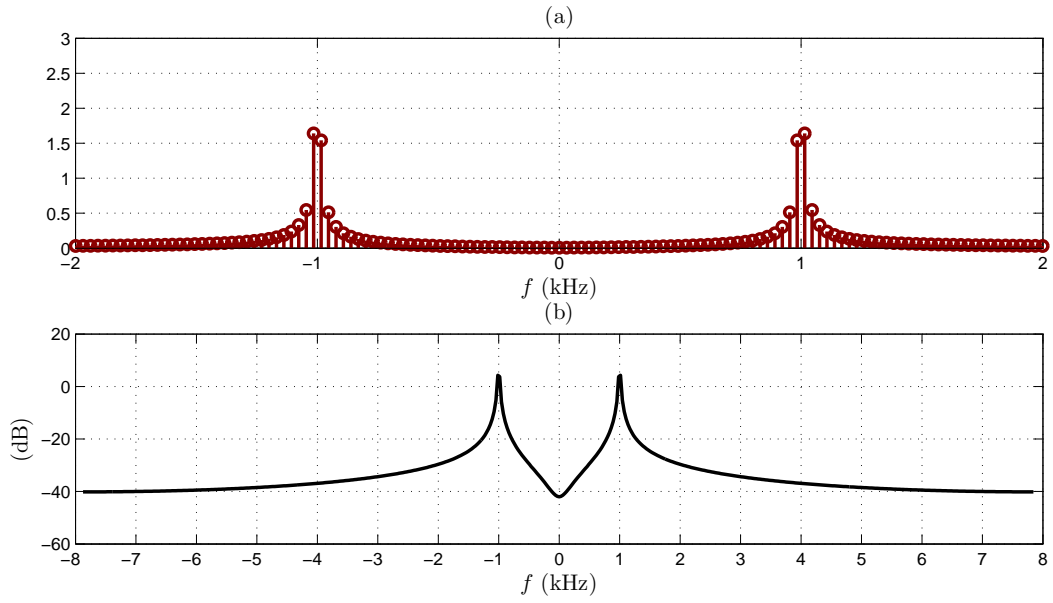


Figura 5: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ para janela retangular: (a) escala linear, (b) escala em dB.

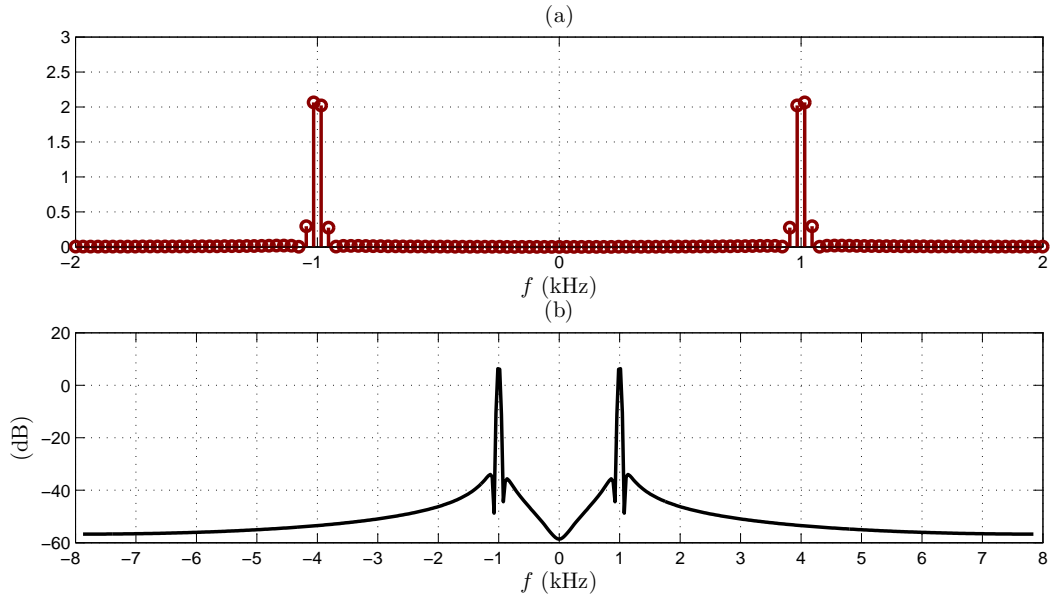


Figura 6: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ para janela de Hamming: (a) escala linear, (b) escala em dB.

4. Comparar e justificar quantitativamente (por exemplo: aumento do erro do item 2. para o 3.) os resultados dos itens 1., 2., e 3., considerando os seguintes aspectos:

- influência da relação entre o tamanho da janela (número total de pontos) e o número de períodos do sinal.
- influência da janela.

Solução: O cálculo teórico para o módulo da Transformada de Fourier (TF) de $v(t)$ é dado por

$$|V(f)| = \frac{5}{2} [\delta(f + f_v) + \delta(f - f_v)],$$

com $f_v = \Omega_v/(2\pi) = 1$ kHz, e $\Omega_v = 2000\pi$. O valor em dB esperado para a raia é

$$V_{dB} = 20 \log 2,5 = 7,96 \text{ dB}.$$

O resultado de 1. com janela retangular fornece as amplitudes corretas das raia nas frequências corretas, visto que o período de $v(t)$ é

$$T_v = \frac{1}{f_v} = 1 \text{ ms},$$

e a largura da janela é um múltiplo inteiro deste período, ou seja,

$$T_0 = NT_a = 256 \cdot 62,5 \cdot 10^{-6} = 16 \cdot 1 \text{ ms} = 16 \cdot T_v.$$

Comparando as Fig. 1 e 2, verifica-se que com a janela de Hamming, neste caso, aparecem raia espúrias em volta da raia de interesse. Isso ocorre pois o uso de janela de Hamming causa uma resolução em frequência menor, ou seja, as raia aparecem mais grossas. Isso dificulta a determinação de frequência de uma raia.

Como visto anteriormente, em 2. ocorre erro de vazamento pois $T_0 = 16,256T_v$. Isso introduz um desvio na frequência da raia estimada, que aparece em 0,9842 kHz, e um erro na sua amplitude de 0,93 dB para janela retangular. Em 3. também ocorre este erro, visto que $T_0 = 32,512T_v$. Isso introduz um desvio na frequência da raia estimada, que aparece em 1,015 kHz, e também um erro na sua amplitude de 3,66 dB para janela retangular.

Note que, para 2., a janela irá conter 16 períodos inteiros do sinal, e mais 26% de um período. Para 3., a janela irá conter 32 períodos do sinal e mais 51% de um período. Como em 3. a fração de período ao fim da janela é aproximadamente meio período, o efeito de vazamento é mais pronunciado neste caso. A vantagem da janela de Hamming, tanto em 2. quanto em 3., é reduzir o erro de vazamento, embora a sua aplicação cause menor resolução em frequência. Pode-se perceber isso comparando as Fig. 3, 4, 5 e 6.

Por fim, é importante notar que caso N sofra um aumento cada vez maior, a estimativa do espectro será cada vez mais próxima da TF do sinal, reduzindo cada vez mais o erro na estimação de frequências/amplitudes do espectro.

5. (a) $v(t) = 8 \cos(2000\pi t) + 0,035 \cos(2370\pi t)$,
 $T_a = 127\mu s$, $N = 256$

Análise o resultado obtido. Neste caso considere também a janela de Blackman (JB). Complete a Tabela IV. Utilize o comando `stem` e uma escala logarítmica em dB para fazer os gráficos.

Solução: O cálculo teórico para o módulo da Transformada de Fourier (TF) de $v(t)$ é dado por

$$|V(f)| = \frac{8}{2} [\delta(f + f_1) + \delta(f - f_1)] + \frac{0,035}{2} [\delta(f + f_2) + \delta(f - f_2)],$$

com $f_1 = \Omega_1/(2\pi) = 1$ kHz sendo $\Omega_1 = 2000\pi$, e $f_2 = \Omega_2/(2\pi) = 1,185$ kHz sendo $\Omega_2 = 2370\pi$. O valor em dB esperado para a raia na frequência f_1 (raia maior) é

$$V_{dB1} = 20 \log 4 = 12,04 \text{ dB},$$

e para a raia na frequência f_2 (raia menor) é

$$V_{dB2} = 20 \log 0,0175 = -35,14 \text{ dB}.$$

Foram obtidos os gráficos da Fig. 7, para janela retangular, de Hamming e de Blackman, respectivamente. A tabela foi completada estimando como raia do sinal $v(t)$ aquela de maior amplitude em cada caso.

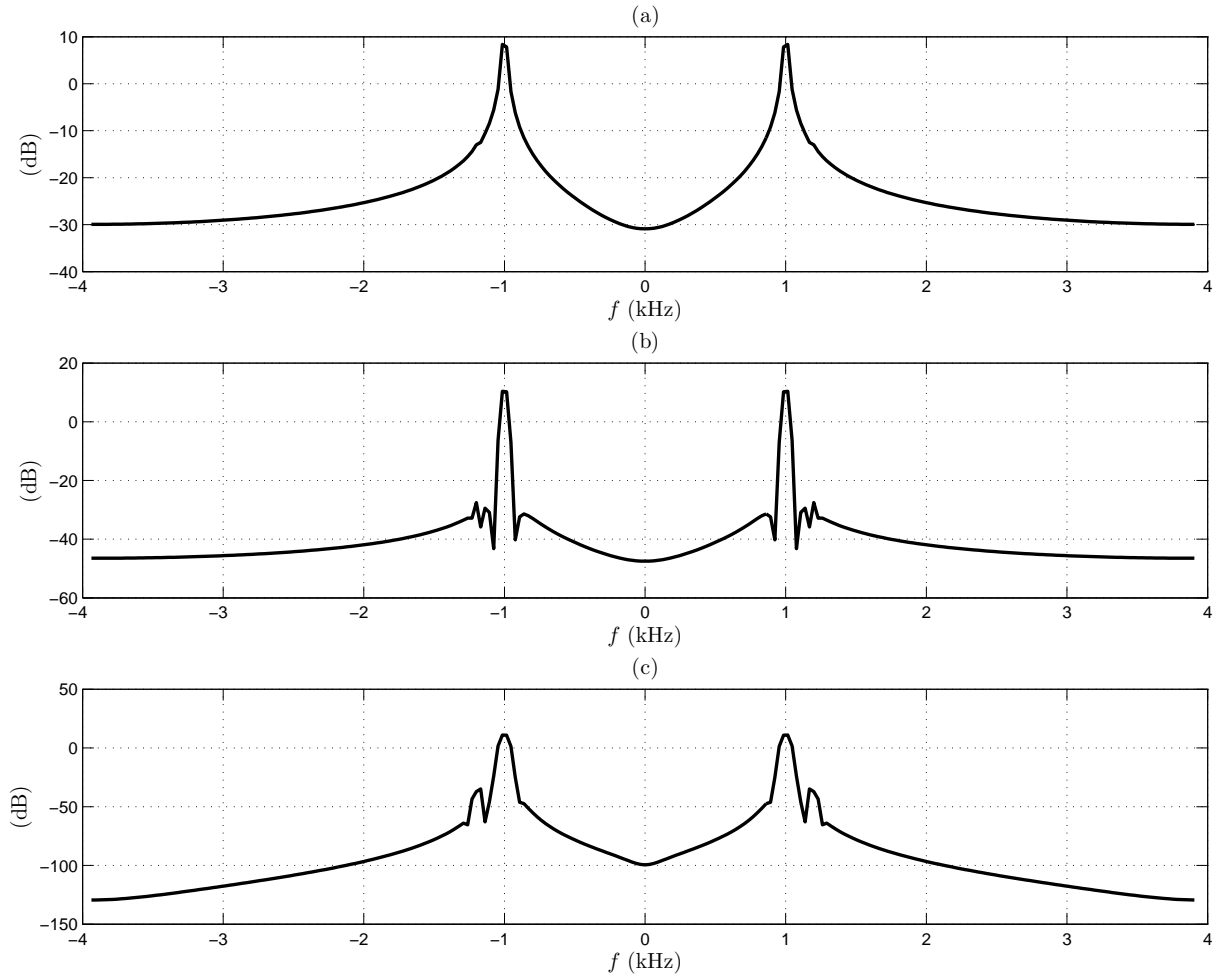


Figura 7: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ em dB para: (a) janela retangular, (b) janela de Hamming, (c) janela de Blackman.

O resultado obtido mostra que:

- Embora a aplicação de janela retangular dê boa resolução de frequências, o erro de vazamento é muito alto e encobre a raia menor, que está na frequência de 1,185 kHz, o que torna muito difícil percebê-la pela estimativa do espectro.
- A janela de Hamming causa uma diminuição no erro de vazamento, e ainda apresenta uma resolução de frequências razoável. Com ela, já é possível perceber a raia menor e estimar sua frequência.
- A janela de Blackman causa uma grande diminuição no erro de vazamento, sendo fácil perceber a raia menor com a sua aplicação. Porém, possui uma baixa resolução de frequências, ou seja, a raia aparece mais grossa, e embora seja fácil identificá-la, a determinação de sua frequência exata é difícil.

- (b) $v(t)$ e T_a como no item 5.(a), $N = 512$. Complete a Tabela V. Utilize o comando `stem` e uma escala logarítmica em dB para fazer os gráficos.

Solução: Foram obtidos os gráficos da Fig. 8, para janela retangular, de Hamming e de Blackman, respectivamente.

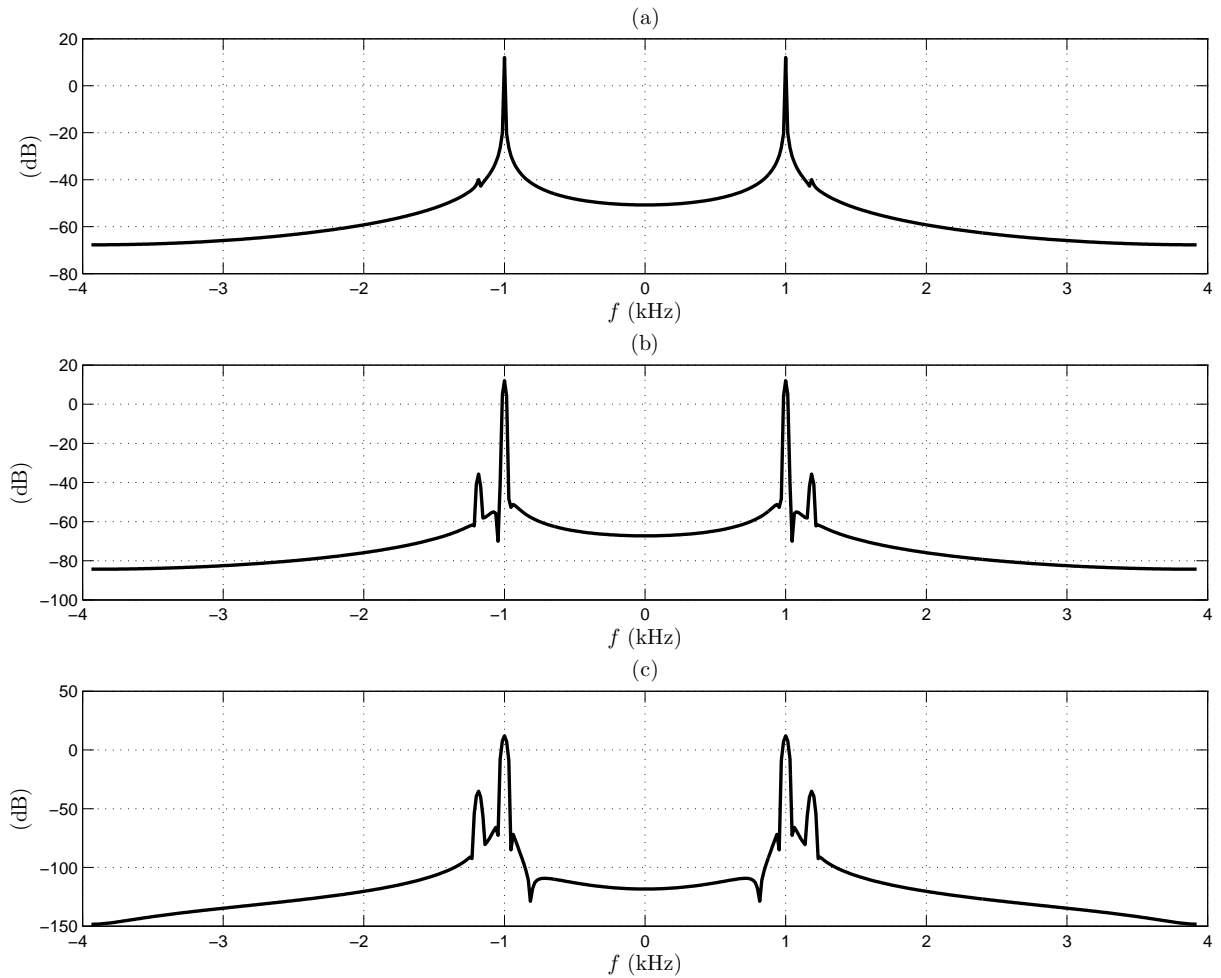


Figura 8: Módulo dos coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ em dB para: (a) janela retangular, (b) janela de Hamming, (c) janela de Blackman.

Quanto maior for o N usado, mais a estimativa do espectro irá se aproximar do espectro teórico obtido pela TF. Assim, neste caso os valores encontrados possuem em geral erros menores tanto em amplitude quanto em frequência do que no caso do item 5.(a).

6. Considere a amostragem de um sinal periódico composto de duas raias espectrais. Descreva combinações de amplitudes e frequências dessas componentes tais que a janela retangular seja a melhor opção para a análise espectral utilizando a TFD.

Solução: A aplicação de janela retangular apresenta boa resolução em frequência, ou seja, as raias aparecem bem finas, sendo fácil a determinação de sua frequência. Porém, sua aplicação causa, em geral, erros de vazamento grandes.

Assim, se um sinal periódico é composto de duas raias espectrais, a janela retangular será a melhor opção para a análise espectral com TFD se as duas raias tiverem amplitudes comparáveis, podendo estar em frequências distantes ou até mesmo bem próximas (pois esta janela dá alta resolução em frequência). Se as raias tiverem amplitudes muito diferentes, elas devem estar distantes para que o erro de vazamento da raia maior não cubra a raia menor.

Solução: tabelas

Tabela I.

janela	freqs	erro (freqs)	VFdB	erro (magnitude)
Retangular	1,015 kHz	$ 1 - 1,015 = 15 \text{ Hz}$	4,30 dB	$ 7,96 - 4,30 = 3,66 \text{ dB}$
Hamming	1,015 kHz	$ 1 - 1,015 = 15 \text{ Hz}$	6,30 dB	$ 7,96 - 6,30 = 1,66 \text{ dB}$

Tabela II.

janela	freqs	erro (freqs)	VFdB	erro (magnitude)
Retangular	0,984 kHz	$ 1 - 0,984 = 16 \text{ Hz}$	7,03 dB	$ 7,96 - 7,03 = 0,93 \text{ dB}$
Hamming	0,984 kHz	$ 1 - 0,984 = 16 \text{ Hz}$	7,51 dB	$ 7,96 - 7,51 = 0,45 \text{ dB}$

Tabela III.

janela	freqs	erro (freqs)	VFdB	erro (magnitude)
Retangular	1,015 kHz	$ 1 - 1,015 = 15 \text{ Hz}$	4,30 dB	$ 7,96 - 4,30 = 3,66 \text{ dB}$
Hamming	1,015 kHz	$ 1 - 1,015 = 15 \text{ Hz}$	6,30 dB	$ 7,96 - 6,30 = 1,66 \text{ dB}$

Tabela IV.

janela	freqs	erro (freqs)	VFdB	erro (magnitude)
Retangular	1,015 kHz	$ 1 - 1,015 = 15 \text{ Hz}$	8,38 dB	$ 12,04 - 8,38 = 3,66 \text{ dB}$
	1,169 kHz	$ 1,185 - 1,169 = 16 \text{ Hz}$	-12,49 dB	$ -35,14 + 12,49 = 22,65 \text{ dB}$
Hamming	1,015 kHz	$ 1 - 1,015 = 15 \text{ Hz}$	10,39 dB	$ 12,04 - 10,39 = 1,65 \text{ dB}$
	1,20 kHz	$ 1,185 - 1,20 = 15 \text{ Hz}$	-27,53 dB	$ -35,14 + 27,53 = 7,61 \text{ dB}$
Blackman	1,015 kHz	$ 1 - 1,015 = 15 \text{ Hz}$	11,00 dB	$ 12,04 - 11,00 = 1,04 \text{ dB}$
	1,169 kHz	$ 1,185 - 1,169 = 16 \text{ Hz}$	-34,92 dB	$ -35,14 + 34,92 = 0,22 \text{ dB}$

Tabela V.

janela	freqs	erro (freqs)	VFdB	erro (magnitude)
Retangular	1 kHz	$ 1 - 1 = 0$	12,03 dB	$ 12,04 - 12,03 = 0,01 \text{ dB}$
	1,184 kHz	$ 1,185 - 1,184 = 1 \text{ Hz}$	-39,96 dB	$ -35,14 + 39,96 = 4,82 \text{ dB}$
Hamming	1 kHz	$ 1 - 1 = 0$	12,04 dB	$ 12,04 - 12,04 = 0,00 \text{ dB}$
	1,184 kHz	$ 1,185 - 1,184 = 1 \text{ Hz}$	-35,67 dB	$ -35,14 + 35,67 = 0,53 \text{ dB}$
Blackman	1 kHz	$ 1 - 1 = 0$	4,49 dB	$ 12,04 - 12,04 = 0,00 \text{ dB}$
	1,184 kHz	$ 1,185 - 1,184 = 1 \text{ Hz}$	-35,13 dB	$ -35,14 + 35,13 = 0,01 \text{ dB}$

Nota:

freqs - frequência estimada do sinal

VFdB - valor medido do coeficiente da SF