PTC2324: Processamento Digital de Sinais I

Exercício computacional 6: TFD

MDM,FRMP-2014

Considerações iniciais: funções `fft` e `ifft`

A Transformada de Fourier Discreta (TFD) de uma sequência de tempo discreto $x(n)$ é

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

e a TFD inversa de $X(k)$ é

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Esses cálculos podem ser feitos de forma eficiente usando os algoritmos de *Fast Fourier Transform*, ou FFT. No MATLAB, é possível calcular a TFD e a TFD inversa com os comandos `fft` e `ifft`, respectivamente. Por exemplo, dada uma sequência $x(n)$ com N amostras, o comando

`fft(x,Ns)`

fornece `Ns` pontos de sua representação em frequência. Se `Ns` $> N$, a própria função inclui zeros ao final da sequência $x(n)$, até completar `Ns` amostras. Se for usado o comando

`fft(x)`,

teremos no domínio da frequência o mesmo número de amostras da sequência temporal, ou seja, N. Maiores detalhes desta função podem ser obtidos digitando `help fft` na tela de comandos do MatLab.

Supondo então que temos N pontos em ambos os domínios, os gráficos de módulo e fase da TFD $X(k)$ podem ser obtidos como:

```
subplot(2,1,1); stem($[0:N-1],abs(X)$)
title('Módulo de X(k)')
subplot(2,1,2); stem($[0:N-1],(angle(X))$)
title('Fase de X(k)')
```

Exercício computacional

1. Considere as sequências

$$x_1(n) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$
$$x_2(n) = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$$
$$x_3(n) = [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$
$$x_4(n) = [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$$
$$x_5(n) = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$
$$x_6(n) = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$$

Para responder os itens seguintes, use o comando `fft` do MatLab.

(a) Esboce $X_1(k)$ e $X_2(k)$. Indique o espaçamento angular entre as amostras.

(b) Qual a propriedade da TFD que relaciona $X_1(k)$ e $X_2(k)$?

(c) Forneça os valores de $X_3(k)$ e $X_4(k)$. Compare e justifique a diferença entre eles.

(d) Esboce $|X_2(k)|$ e $|X_5(k)|$. Compare e justifique a diferença entre as curvas de módulo.

(e) Esboce $|X_2(k)|$ e $|X_6(k)|$. Compare e justifique a diferença entre as curvas de módulo.

2. Considere o seguinte sinal de tempo discreto:

$$x(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-2) - \delta(n-4) + \delta(n-5) - \delta(n-6) + 2\delta(n-8).$$

Para responder o item (d), utilize o MatLab. Considere `x` o vetor de comprimento `9` correspondente às amostras de $x(n)$ nos instantes $n = 0, 1, \ldots, 8$.

(a) Determine a expressão de $X(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{x(n)\}$.

(b) Determine a expressão de $X_5(k) = \text{TFD}_5\{x(n)\}$. O espectro $X_5(k)$ é real? Que propriedade justifica isso?

(c) Determine a expressão de $y_5(n) = \text{TFD}_5^{-1}\{x(k)\}$ usando a propriedade da dualidade.

(d) O comando `fft(x,5)` retorna os mesmos valores de $X_5(k)$? Por quê? O comando `ifft(x,5)` retorna os mesmos valores de $y_5(n)$? Por quê? Em caso negativo, sugira uma mudança no vetor `x` para que o resultados de `fft(x,5)` e `ifft(x,5)` sejam iguais aos resultados calculados de $X_5(k)$ e $y_5(n)$, respectivamente.

3. Considere o seguinte sinal de tempo contínuo:

$$x_c(t) = 1 + 5\cos(2\pi 5000 t) - 3\cos(2\pi 10000 t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

em que t é o tempo em segundos.

(a) O sinal $x_c(t)$ é periódico? Se ele for, calcule o seu período T.

(b) O sinal $x_c(t)$ é amostrado com frequência de amostragem de $f_a = 25$ kHz, originando o sinal $x(n) = x_c(nT_a)$. Obtenha a expressão de $x(n)$ e o seu período N.

(c) Calcule $\tilde{X}(k) = \text{SFD}\{x(n)\}$. Representando $\tilde{X}(k)$ em um período, determine $X(k) = \text{TFD}_N\{x(n)\}$. Confira o seu resultado calculando `Xk` com o comando `Xk=fft(x,N)`, em que `x` é um vetor com as N primeiras amostras de $x(n)$.

(d) A partir do vetor `Xk` obtido, e considerando $M = 4$, um aluno curioso de PDS fez o que é descrito a seguir:

- adicionou um vetor de $(M-1)N$ zeros na posição do eixo de simetria de `Xk`, obtendo o vetor `Yk`, da seguinte forma:

```
Yk = [ Xk(1:(N+1)/2)    zeros(1,(M-1)*N)    Xk((N+3)/2:N) ],
```

- calculou a TFD inversa da sequência dada pelo vetor `Yk` e multiplicou o resultado por M, obtendo o vetor `y` que representa uma sequência $y(n) = y_c(nT_a)$, ou seja,

```
y = M*ifft(Yk,M*N).
```

Repita os passos do aluno. Utilizando os comandos `hold on` e `hold off`, faça o `plot` dos sinais $x_c(t)$, $x_c(nT_a)$ e $y_c(nT_a/M)$, todos em um mesmo gráfico, ou seja:

```
figure(1)
plot(t,xc,'k','Linewidth',2)
hold on
stem((0:N-1)/fa,xn,'xb','Linewidth',1.5,'Markersize',14)
plot((0:N*M-1)/fa/M,yn,'ro','Linewidth',1.5)
hold off
grid
legend('x_c(t)','x_c(nT_a)','y_c(nT_a)')
xlabel('t');
```

Note que, embora os sinais $x_c(nT_a)$ e $y_c(nT_a/M)$ correspondam a amostras, eles são representados em tempo contínuo t, para comparação com o sinal $x_c(t)$.

Comente o resultado obtido. O sinal $y(n)$ corresponde a amostras de $x_c(t)$? Caso positivo, essas amostras são tomadas a que frequência de amostragem? De quanto essa frequência de amostragem é maior ou menor do que a frequência de amostragem que resultou em $x(n)$?