

2.3 A TFTTD inversa

A resposta ao pulso unitário de filtro passa-baixas ideal truncada

Considere a resposta em frequência do filtro passa-baixas ideal, definida aqui por conveniência apenas no período $-\pi \leq \omega < \pi$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{se } \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

A resposta ao pulso unitário $h_d(n)$ que fornece $H_d(e^{j\omega})$ é obtida com a definição da TFTD inversa:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega.$$

Resolvendo a integral, temos

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{se } n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Note que para $n = \ell\pi/\omega_c$ inteiro (para todo ℓ inteiro, exceto $\ell = 0$), tem-se $\omega_c n = \ell\pi$ e $h_d(n) = 0$. A expressão de $h_d(n)$ pode também ser representada como

$$h_d(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right),$$

ou seja, é uma função sinc(\cdot) amostrada cuja magnitude do lóbulo principal é ω_c/π e a largura do lóbulo principal é π/ω_c .

Como exemplo considere um filtro passa-baixas ideal com $\omega_c = 0,2\pi$. A partir da definição da TFTD inversa é possível obter a seguinte resposta ao pulso unitário

$$h_d(n) = \begin{cases} 0,2; & \text{se } n = 0 \\ 0,2 \frac{\sin(\pi 0,2 n)}{\pi 0,2 n}; & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Note que, $h_d(n) = 0$ quando $n = \ell/0,2 = 5\ell$, ou seja, $n = \{\pm 5; \pm 10; \pm 15; \dots\}$.

Na Figura 1 estão ilustrados $H_d(e^{j\omega})$ e $h_d(n)$, não só para $\omega_c = 0,2\pi$, mas também para $\omega_c = 0,4\pi$ e $\omega_c = 0,9\pi$. Com esses três casos pode-se constatar como o lóbulo principal do sinc é alterado em sua largura e em sua magnitude em função de ω_c . Especificamente, o aumento de ω_c diminui a largura do lóbulo principal do sinc e aumenta a sua magnitude. Por outro lado, o produto entre a largura do lóbulo principal e a sua magnitude permanece constante. Note que em todos os casos a resposta ao pulso unitário de um filtro passa baixas ideal possui infinitos coeficientes e com valores não nulos para $n < 0$ sendo, portanto, um sistema não causal.

Note que a implementação do filtro passa baixas ideal em um processador digital de sinais não é possível. Precisamos truncar essa resposta ao pulso unitário em torno de $n = 0$ e depois deslocá-la de modo a resultar em um sistema com um número finito de coeficientes e causal. A resposta em frequência que representa a resposta ao pulso unitário truncada e deslocada não é mais exatamente a resposta em frequência do filtro passa baixas ideal. Para ilustrar esse efeito considere a multiplicação da resposta ao pulso unitário do filtro ideal $h_d(n)$ para $\omega_c = 0,5\pi$, por janelas retangulares $g(n)$ com diferentes comprimentos M conforme ilustrado na primeira coluna dos gráficos da Figura 2. Na segunda coluna desse gráfico a resposta em frequência de um filtro passa baixas ideal é representada com a curva de linha vermelha $H_d(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{h_d(n)\}$. O

resultado da convolução entre a TFTD da janela retangular e a resposta em frequência de um filtro passa baixas ideal $H(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{h_d(n)g(n)\} = H_d(e^{j\omega}) * G(e^{j\omega})/(2\pi)$ é representada com a curva de linha preta e essa curva muda conforme o comprimento usado na janela retangular. Note que a região de transição de $H(e^{j\omega})$ não é mais abrupta como acontece com $H_d(e^{j\omega})$ e a sua largura está relacionada com o comprimento da janela retangular. Quanto maior o comprimento da janela retangular mais estreita é a região de transição de $H(e^{j\omega})$. Além disso, as oscilações que aparecem na banda de passagem e de rejeição de $H(e^{j\omega})$ estão relacionadas ao número de lóbulos laterais de $G(e^{j\omega})$. Quanto maior o comprimento da janela retangular maior é o número de lóbulos laterais e mais oscilações vão aparecer na faixa de rejeição e de passagem de $H(e^{j\omega})$.

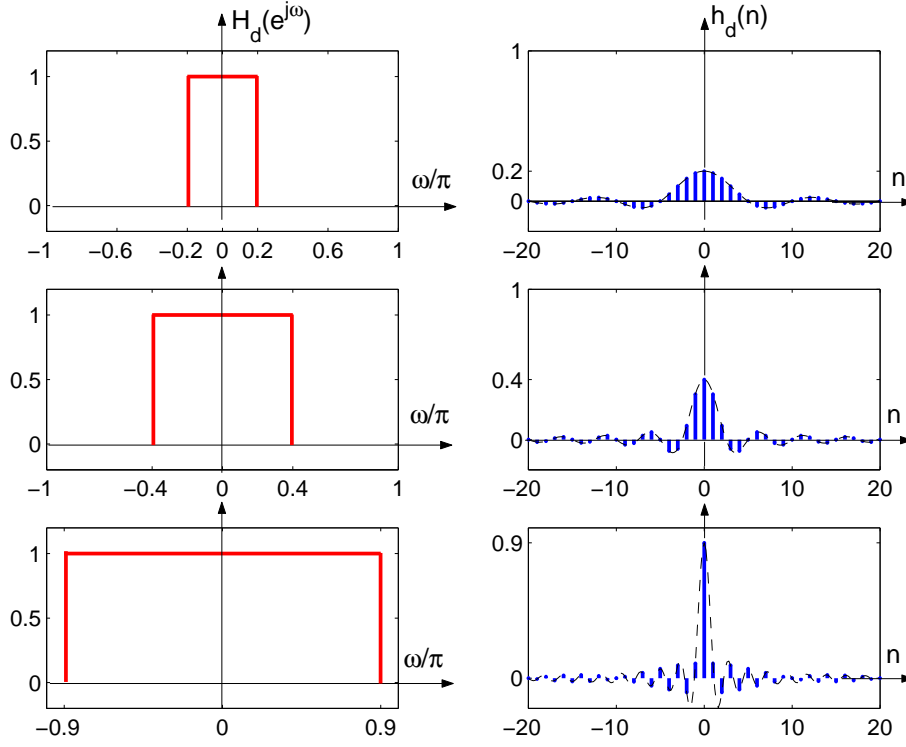


Figura 1: $H_d(e^{j\omega})$ e $h_d(n)$ para $\omega_c = 0, 2\pi$, $\omega_c = 0, 4\pi$ e $\omega_c = 0, 9\pi$. ◀

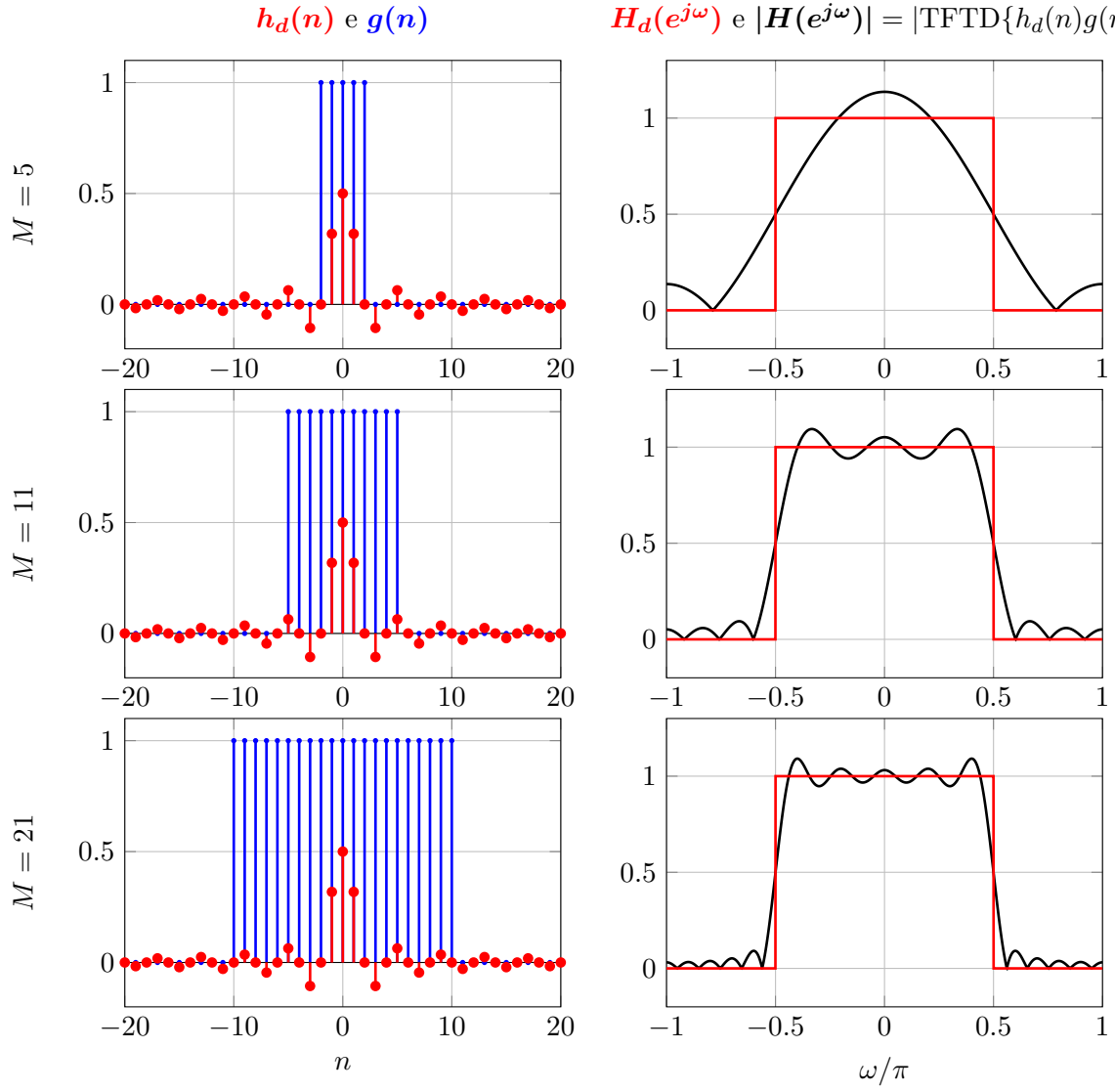


Figura 2: Curvas de $h_d(n)$, $g(n)$, $H_d(e^{j\omega})$ e $H(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{h_d(n)g(n)\}$ para janelas com comprimento de $M = 5$, $M = 11$ e $M = 21$ amostras. ◀