2.2 Propriedades da Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Alguns pares transformados podem ser obtidos facilmente a partir da definição da Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) e da TFTD inversa, ou seja,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}.$$

Exemplos desse caso são os pares transformados da Tabela 1. Outros pares transformados porém, são mais facilmente obtidos a partir das propriedades da TFTD. Na Tabela 2 são resumidas as principais propriedades da TFTD decorrentes da simetria de $x(n)$.

Tabela 1: Pares transformados da TFTD.

$x(n)$	$\longleftrightarrow$	$X(e^{j\omega})$
$\delta(n-\Delta)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-j\omega\Delta}$
$a^n\,u(n)$ $(\lvert a\rvert<1)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$\sum_{k=L_1}^{L_2}\delta(n-k)$	$\longleftrightarrow$	$\begin{cases} -L_1+L_2+1, & \text{se } \omega = 2\pi k \\ \dfrac{\sin(\omega(L_2-L_1+1)/2)}{\sin(\omega/2)}\, e^{-j\omega(L_2+L_1)/2}, & \text{se } \omega \neq 2\pi k \end{cases}$

Tabela 2: Propriedades da TFTD decorrentes da simetria de $x(n)$.

$x^*(n)$	$\longleftrightarrow$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$\longleftrightarrow$	$X(e^{-j\omega})$
$x^*(-n)$	$\longleftrightarrow$	$X^*(e^{j\omega})$
$x_{\text{par}}(n)$	$\longleftrightarrow$	$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
$x_{\text{ímpar}}(n)$	$\longleftrightarrow$	$j\,\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$

As demonstrações das propriedades da Tabela 2 são relativamente triviais. Para ilustrar o procedimento, será feita a demonstração da propriedade da inversão do eixo do tempo, ou seja, $y(n) = x(-n) \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X\left(e^{-j\omega}\right)$.

Prova: $Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{j\omega m} = X\left(e^{-j\omega}\right)$. ◄

Na Tabela 3 são mostradas as principais propriedades da TFTD. A seguir é feita a demonstração de algumas dessas propriedades.

Tabela 3: Propriedades fundamentais da TFTD.

1) Deslocamento no tempo:	$x(n-n_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
2) Deslocamento na frequência:	$e^{j\Delta n}x(n) \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\Delta)})$
3) Derivada na frequência:	$n\,x(n) \longleftrightarrow j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
4) Convolução no tempo:	$\displaystyle\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x(\ell)y(n-\ell) \longleftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
5) Multiplicação no tempo:	$\displaystyle x(n)y(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$
6) Igualdade de Parseval:	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x(n)\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2\,d\omega$

1) Propriedade do deslocamento no tempo: $x(n-n_0) \;\longleftrightarrow\; e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

Prova:

$$\begin{aligned}
\text{TFTD}\{x(n-n_0)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-j\omega(m+n_0)} \\
&= e^{-j\omega n_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-j\omega m} \\
&= e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

3) Propriedade da diferenciação na frequência: $nx(n) \;\longleftrightarrow\; j\,\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

Prova:

$$\begin{aligned}
\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\frac{de^{-j\omega n}}{d\omega} \\
&= -j\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)e^{-j\omega n} \\
&= -j\ \text{TFTD}\{nx(n)\}. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Exemplo de aplicação: $x(n) = (n+1)a^n u(n)\ \ (|a|<1) \;\longleftrightarrow\; X(e^{j\omega}) = ?$

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} na^n u(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n)e^{-j\omega n} \\
&= j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right) + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \\
&= j(-1)\frac{-ae^{j\omega}(-j)}{(1-ae^{-j\omega})^2} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \\
&= \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

4) Propriedade da convolução no tempo: $x_1(n) * x_2(n) \longleftrightarrow X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$

Prova:

$$\begin{aligned}
\text{TFTD}\{x_1(n) * x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right]e^{-j\omega n}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n-k)e^{-j\omega(n-k)}\\
&= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)e^{-j\omega k}\right]\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2(m)e^{-j\omega m}\right] \quad = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

5) Propriedade da multiplicação no tempo (convolução periódica na frequência):

$$x(n)y(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\text{TFTD}\{x(n)y(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}\,d\theta\right]y(n)e^{-j\omega n}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j(\omega-\theta)n}\right]}_{=Y(e^{j(\omega-\theta)})} X(e^{j\theta})\,d\theta. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Na Figura 1 é ilustrado um exemplo gráfico das etapas da convolução periódica de dois espectros $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$. Note que o resultado da convolução em um período $-\pi \leq \omega \leq \pi$ para uma dada frequência angular normalizada é a área da função marcada em verde no último gráfico da Figura 1.

6) Igualdade de Parseval: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$

Prova:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}\,d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}}_{=X(e^{j\omega})}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2\,d\omega. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Obviamente a Igualdade de Parseval se aplica apenas a sinais de energia finita. Note que $|X(e^{j\omega})|$ é a densidade espectral de energia, informa como a energia do sinal $x(n)$ está distribuída nas suas componentes em frequência.

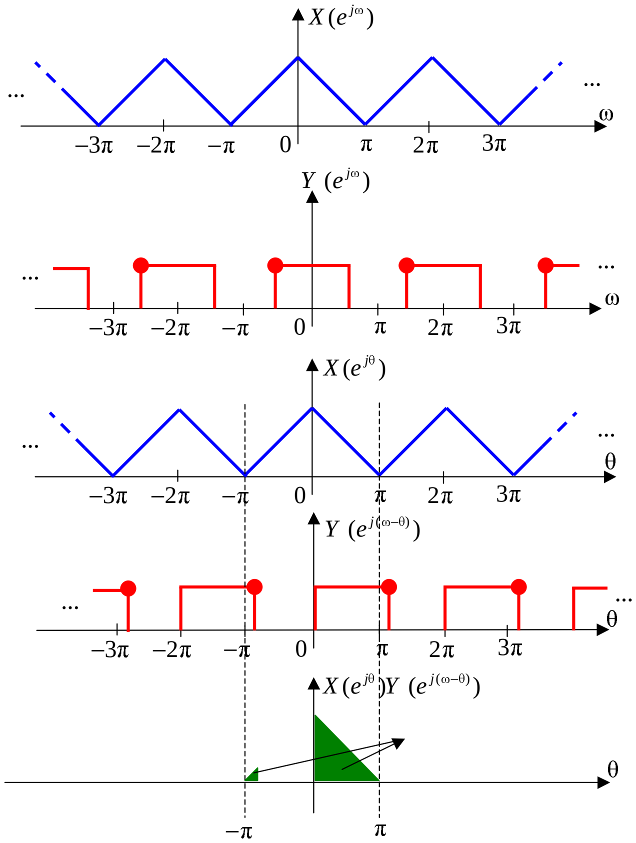

Figura 1: Exemplo de convolução periódica.