2.4 Análise de sistemas lineares e invariantes no tempo no domínio do tempo

Até o momento, definimos a transformação que relaciona entrada-saída de um STD de forma genérica como $T\{\cdot\}$. No caso do sistema ser linear e invariante no tempo (LIT), essa transformação assume uma forma bem particular e permite determinar a a resposta do sistema para uma entrada de tempo discreto arbitrária. No contexto de sistemas LIT, a resposta ao pulso unitário, definida a seguir, assume um papel importante.

Resposta ao pulso unitário

Define-se resposta ao pulso unitário (resposta impulsiva) como a saída de um sistema de tempo discreto quando a entrada é o pulso unitário, ou seja,

$$h(n) \triangleq y(n) = T\{\delta(n)\}. \tag{1}$$

Na Figura 1, particulariza-se a notação usada.

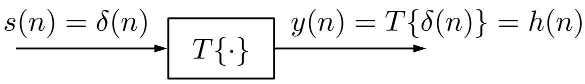


Figura 1: Saída do sistema para um pulso unitário aplicado à entrada.

As respostas ao pulso unitário

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n) \\ h(n) &= \frac{1}{2}(\delta(n) + \delta(n-1)) \\ h(n) &= a^n u(n) \end{aligned}$$

representam os sistemas atrasador, média móvel com duas amostras e média móvel com infinitas amostras, respectivamente.

Como caracterizar a saída $y(n)$ em função da entrada $s(n)$ e da resposta ao pulso unitário $h(n)$?

O somatório de convolução

Lembrando que todo sinal de tempo discreto pode ser representado como um somatório de pulsos unitários devidamente deslocados e ponderados no tempo, vamos reescrever o sinal de entrada de um sistema de tempo discreto

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)\delta(n-k).$$

Note que n é o índice de tempo e k é o parâmetro que define a localização do pulso unitário $\delta(n-k)$. Assim, o sinal de saída do sistema $y(n) = T\{x(n)\}$ pode ser expressa como

$$y(n) = T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)\delta(n-k) \right\}.$$

Se o sistema obedecer o princípio da aditividade, ou seja, uma transformação sobre um somatório de entradas é igual um somatório das saídas devido a cada uma das entradas, temos

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{s(k)\ \delta(n-k)\}.$$

Se o sistema for proporcional (propriedade da homogeneidade), temos

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)T\{\delta(n-k)\}.$$

Se o sistema é invariante no tempo, então a resposta ao pulso unitário $h(n) = T\{\delta(n)\}$ obedece a relação $h(n-k) = T\{\delta(n-k)\}$. Assim, para um sistema LIT, podemos escrever a saída em função da entrada e da resposta ao pulso unitário, como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)h(n-k).$$

Essa operação é definida como somatório de convolução, e muitas vezes é denotada por $*$, ou seja,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)h(n-k) = s(n) * h(n). \tag{2}$$

Uma melhor familiaridade com a convolução pode ser alcançada depois da sua interpretação gráfica. A interpretação gráfica a seguir também pode ser vista como um procedimento para implementar computacionalmente a Equação (2).

Interpretação gráfica da convolução

Considere a saída de um sistema LIT em um dado instante n_0

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)h(n_0-k).$$

- Rebatimento em torno da origem
  $h(k) \Longrightarrow h(-k)$
- Deslocamento de $h(-k)$ em n_0 amostras
  $\Longrightarrow h(-(k-n_0)) = h(n_0-k)$
  se $n > 0$ o deslocamento (direita) corresponde a um atraso e
  se $n < 0$ o deslocamento (esquerda) corresponde a um adiantamento.
- Produto, termo a termo, das sequências
  $s(k)$ e $h(n_0-k) \Longrightarrow v(n_0,k)$
- Soma de todos os termos da sequência $v(n_0,k)$

Para o melhor entendimento da definição de convolução e da interpretação gráfica, seguem dois exemplos.

Exemplo 1

Dados $s(n) = u(n) - u(n-5)$ e $h(n) = 0,6^n u(n)$, determine $y(n) = h(n) * s(n)$ de forma gráfica de forma analítica.

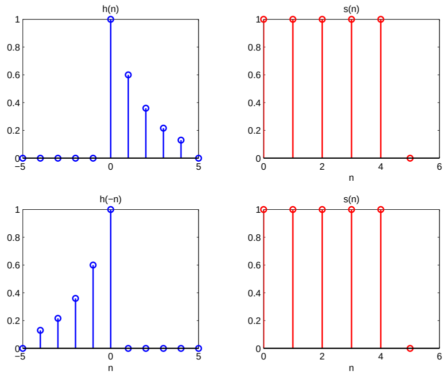


Figura 2: Sinais $s(n)$, $h(n)$ e $h(-n)$.

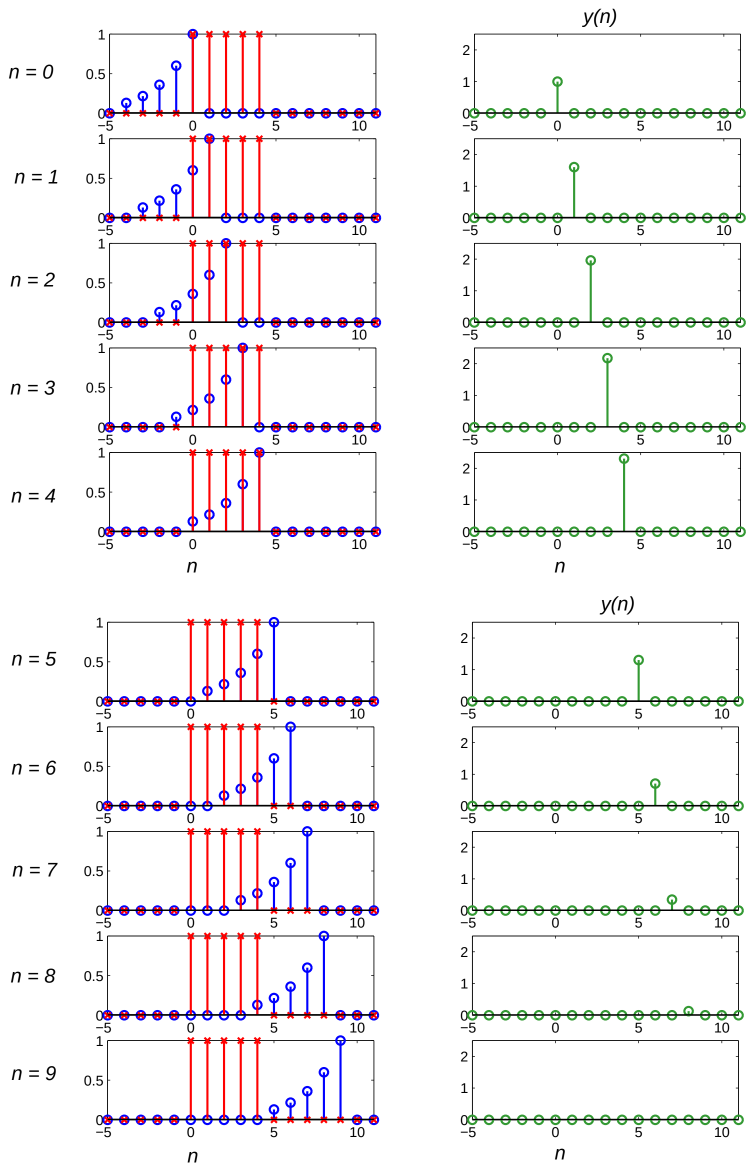


Figura 3: Cálculo de cada amostra de $y(n)$ para cada instante $n = 0, 1, \ldots, 9$.

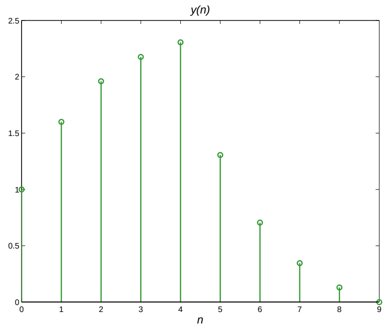
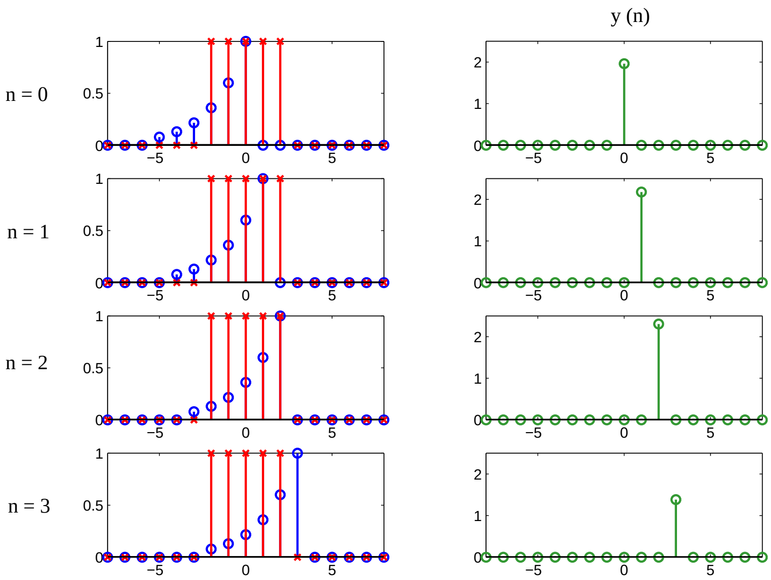


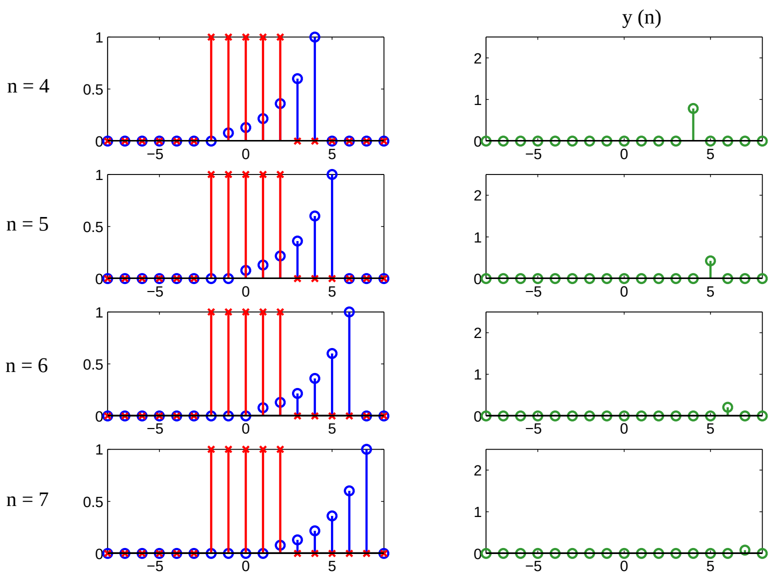
Figura 4: O sinal $y(n)$.

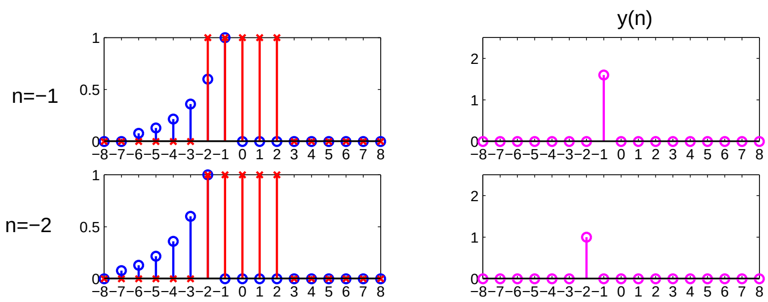
A solução analítica fica como exercício.

Exemplo 2:

Dados $h(n)$ e $s(n) = u(n+2) - u(n-3)$, determine $y(n) = h(n) * s(n)$ de forma gráfica de forma analítica. Note que $h(n)$ é o mesmo do Exemplo 1.







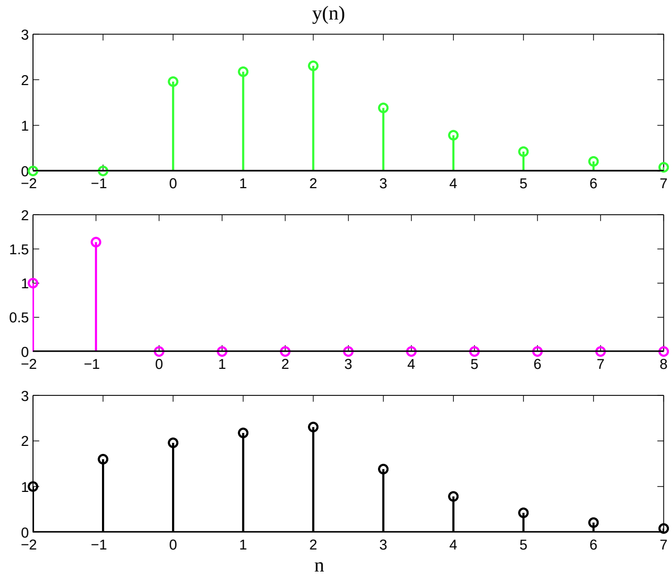


Figura 5: a) Sinal devido ao deslocamento do $h(n)$ para a direita; b) sinal devido ao deslocamento do $h(n)$ para a esquerda; c) Sinal $y(n)$.

Propriedades da Convolução

- Comutativa

$$y(n) = s(n) * h(n) = h(n) * s(n)$$

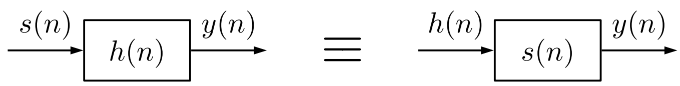
- Associativa

$$(s(n) * h_1(n)) * h_2(n) = s(n) * (h_1(n) * h_2(n))$$

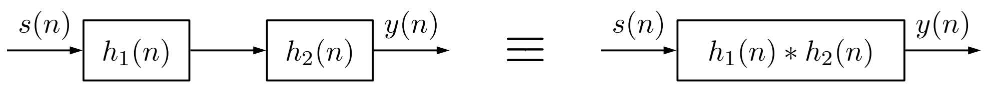
- Distributiva

$$s(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = s(n) * h_1(n) + s(n) * h_2(n)$$

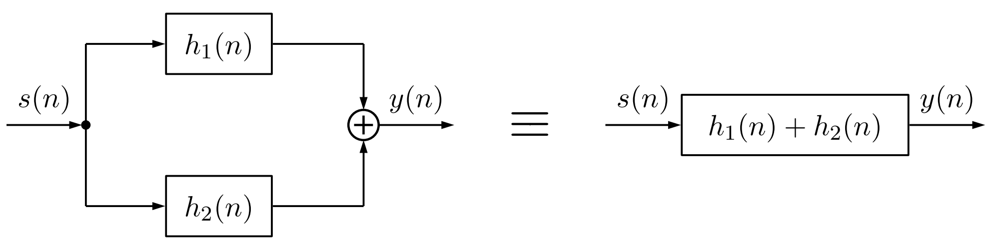
Comutativa



Associativa



Distributiva



Resposta ao pulso unitário de sistemas LIT

Causalidade

Um sistema de tempo discreto é causal se

$$h(n) = 0, \quad n < 0.$$

Em um sistema não-causal, a saída no instante n depende da entrada em instantes futuros, por exemplo, $(n+1)$, $(n+5)$, etc

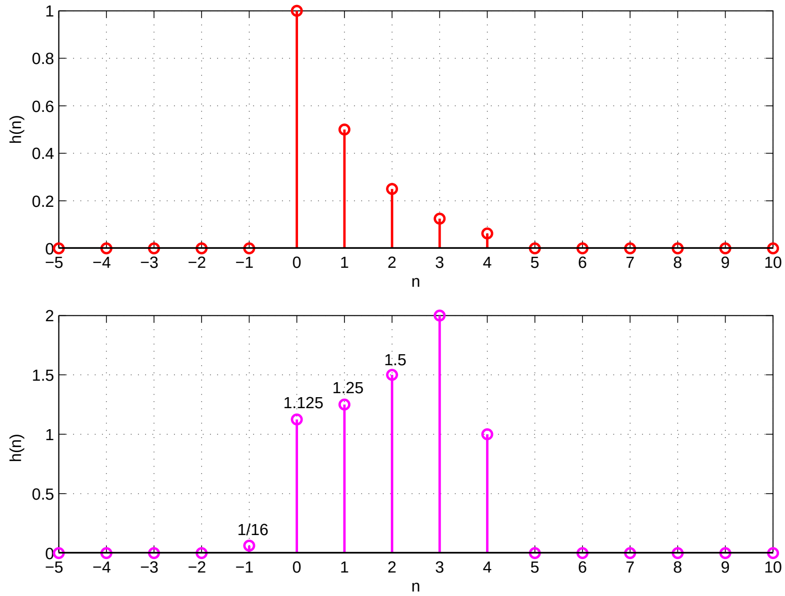


Figura 6: Exemplos: (a) resposta ao pulso unitário de um sistema causal; (b) resposta ao pulso unitário de um sistema não-causal.

Condição de Estabilidade BIBO para sistemas LIT

Dada uma sequência de entrada limitada, ou seja,

$$|s(n)| \leq M_1,$$

no caso do sistema LIT, a sequência de saída será limitada

$$|y(n)| \leq M_2$$

para M_1 e M_2 finitos se e somente se

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty.$$

Em outras palavras, um sistema LIT possui estabilidade BIBO se e somente se a resposta ao pulso unitário for absolutamente somável.