3.1 Projeto de filtros FIR

EPUSP - PTC 3424, junho de 2017. Profa. Maria D. Miranda

Filtros são sistemas projetados para fornecer uma resposta em frequência específica. Filtro ideal possuem o módulo da resposta em frequência constante na faixa de frequência de interesse e zero fora dessa faixa e a fase linear. Quanto a resposta em frequência os filtros podem ser:

1. Passa-baixas (Low-Pass)
2. Passa-altas (High-Pass)
3. Passa-faixa (Band-Pass)
4. Rejeita-faixa (Band-Stop)
5. Passa-tudo (All-Pass)

A resposta ao pulso unitário de filtro passa-baixas ideal truncada

Considere a resposta em frequência do filtro passa-baixas ideal, definida aqui por conveniência apenas no período $-\pi \leq \omega < \pi$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{se } \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

A resposta ao pulso unitário $h_d(n)$ que fornece $H_d(e^{j\omega})$ é obtida com a definição da TFTD inversa:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\,d\omega.$$

Resolvendo a integral, temos

$$h_d(n) = \begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}, & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{\omega_c}{\pi}\,\dfrac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Note que para $n = \ell\pi/\omega_c$ inteiro (para todo ℓ inteiro, exceto $\ell = 0$), tem-se $\omega_c n = \ell\pi$ e $h_d(n) = 0$. A expressão de $h_d(n)$ pode também ser representada como

$$h_d(n) = \frac{\omega_c}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right),$$

ou seja, é uma função sinc$(\cdot)$ amostrada cuja magnitude do lóbulo principal é ω_c/π e a largura do lóbulo principal é π/ω_c.

Como exemplo considere um filtro passa-baixas ideal com $\omega_c = 0{,}2\pi$. A partir da definição da TFTD inversa é possível obter a seguinte resposta ao pulso unitário

$$h_d(n) = \begin{cases} 0{,}2; & \text{se } n = 0 \\ 0{,}2\,\dfrac{\sin(\pi\,0{,}2\,n)}{\pi\,0{,}2\,n}; & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Note que, $h_d(n) = 0$ quando $n = \ell/0{,}2 = 5\,\ell$, ou seja, $n = \{\pm 5;\ \pm 10;\ \pm 15;\ \cdots\}$.

Na Figura 1 estão ilustrados $H_d(e^{j\omega})$ e $h_d(n)$, não só para $\omega_c = 0{,}2\pi$, mas também para $\omega_c = 0{,}4\pi$ e $\omega_c = 0{,}9\pi$. Com esses três casos pode-se constatar como o lóbulo principal do sinc é alterado em sua largura e em sua magnitude em função de ω_c. Especificamente, o aumento de ω_c diminui a largura do lóbulo principal do sinc e aumenta a sua magnitude. Por outro lado, o produto entre a largura do lóbulo principal e a sua magnitude permanece constante. Note que em todos os casos a resposta ao pulso unitário de um filtro passa baixas ideal possui infinitos coeficientes e com valores não nulos para $n < 0$ sendo, portanto, um sistema não causal.

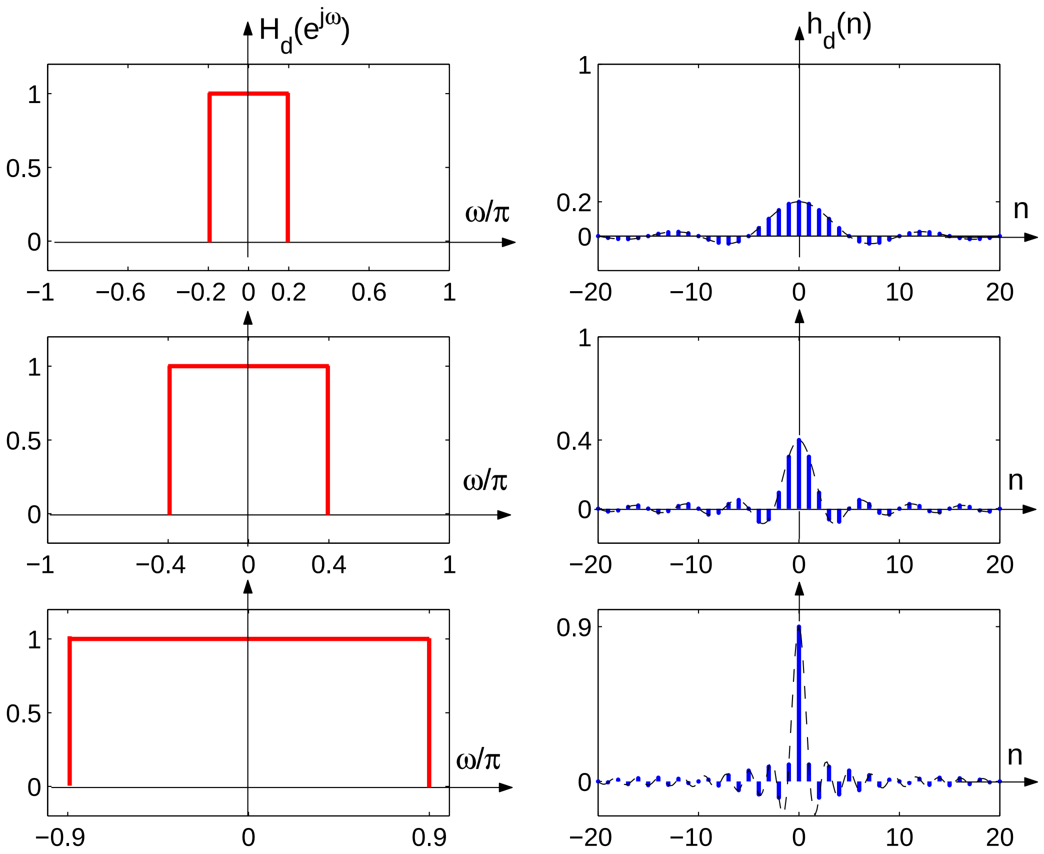

Figura 1: $H_d(e^{j\omega})$ e $h_d(n)$ para $\omega_c = 0{,}2\pi$, $\omega_c = 0{,}4\pi$ e $\omega_c = 0{,}9\pi$.◀

Note que a implementação do filtro passa baixas ideal em um processador digital de sinais não é possível. Precisamos truncar essa resposta ao pulso unitário em torno de $n = 0$ e depois deslocá-la de modo a resultar em um sistema com um número finito de coeficientes e causal. A resposta em frequência que representa a resposta ao pulso unitário truncada e deslocada não é mais exatamente a resposta em frequência do filtro passa baixas ideal.

TFTD da janela retangular

Seja a sequencia de uns

$$g(n) = \sum_{\ell=-L}^{L} \delta(n-\ell)$$

A sua TFTD é

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^{L} e^{-j\omega n} = \frac{\operatorname{sen}([2L+1]\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$$

Na Figura 2 ilustra-se $g(n)$ e a sua TFTD para $L=3$. Na curva seguinte ilustra-se a TFTD para $L=4$ e $L=10$.

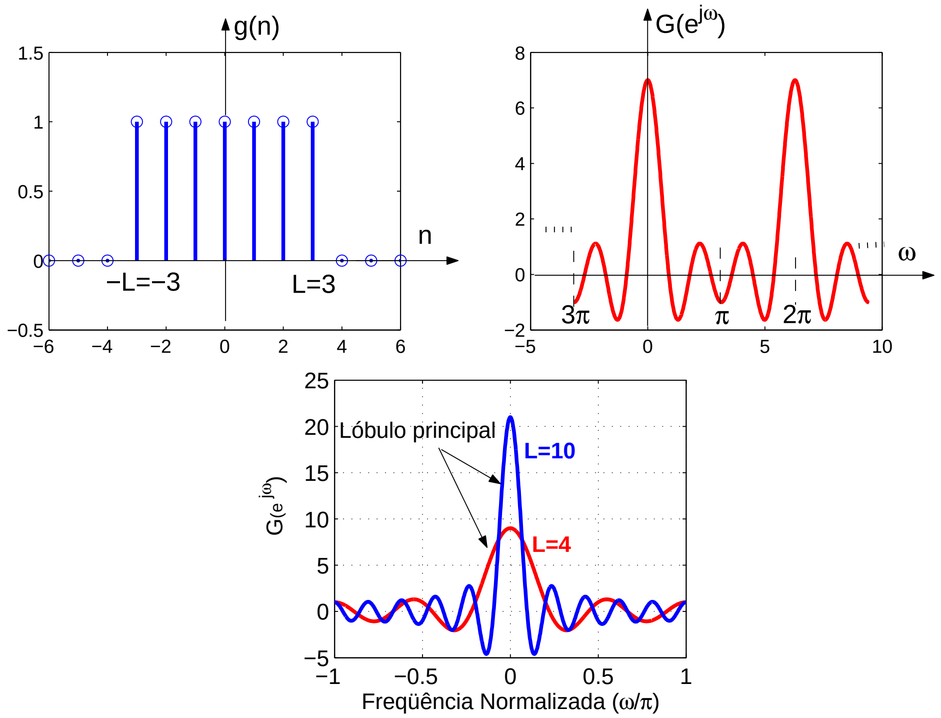

Figura 2: TFTD da janela retangular, $L=3$, $L=4$ e $L=10$

Note que

Altura do lóbulo principal: $\quad G(e^{j0}) = 2L+1$

Largura do lóbulo principal: $4\pi/(2L+1)$

Efeito do truncamento da resposta ao pulso unitário com a janela retangular

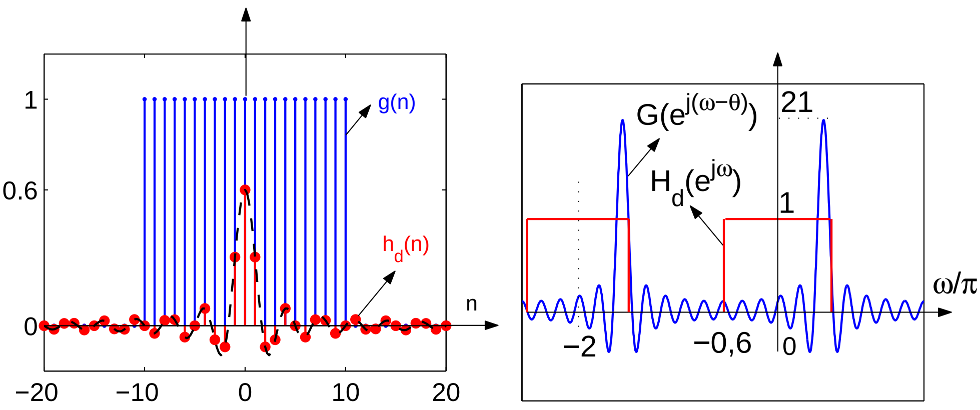

Figura 3: Multiplicação da resposta ao pulso do filtro ideal $h_d(n)$ pela janela retangular $g(n)$

Para ilustrar esse efeito considere a multiplicação da resposta ao pulso unitário do filtro ideal $h_d(n)$ para $\omega_c = 0{,}5\pi$, por janelas retangulares $g(n)$ com diferentes comprimentos $M = 2L + 1$ conforme ilustrado na primeira coluna dos gráficos da Figura 4. Na segunda coluna desse gráfico a resposta em frequência de um filtro passa baixas ideal é representada com a curva de linha vermelha $H_d(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{h_d(n)\}$. O resultado da convolução entre a TFTD da janela retangular e a resposta em frequência de um filtro passa baixas ideal $H(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{h_d(n)g(n)\} = H_d(e^{j\omega}) * G(e^{j\omega})/(2\pi)$ é representada com a curva de linha preta e essa curva muda conforme o comprimento usado na janela retangular. Note que a região de transição de $H(e^{j\omega})$ não é mais abrupta como acontece com $H_d(e^{j\omega})$ e a sua largura está relacionada com o comprimento da janela retangular. Quanto maior o comprimento da janela retangular mais estreita é a região de transição de $H(e^{j\omega})$. Além disso, as oscilações que aparecem na banda de passagem e de rejeição de $H(e^{j\omega})$ estão relacionadas ao número de lóbulos laterais de $G(e^{j\omega})$. Quanto maior o comprimento da janela retangular maior é o número de lóbulos laterais e mais oscilações vão aparecer na faixa de rejeição e de passagem de $H(e^{j\omega})$.

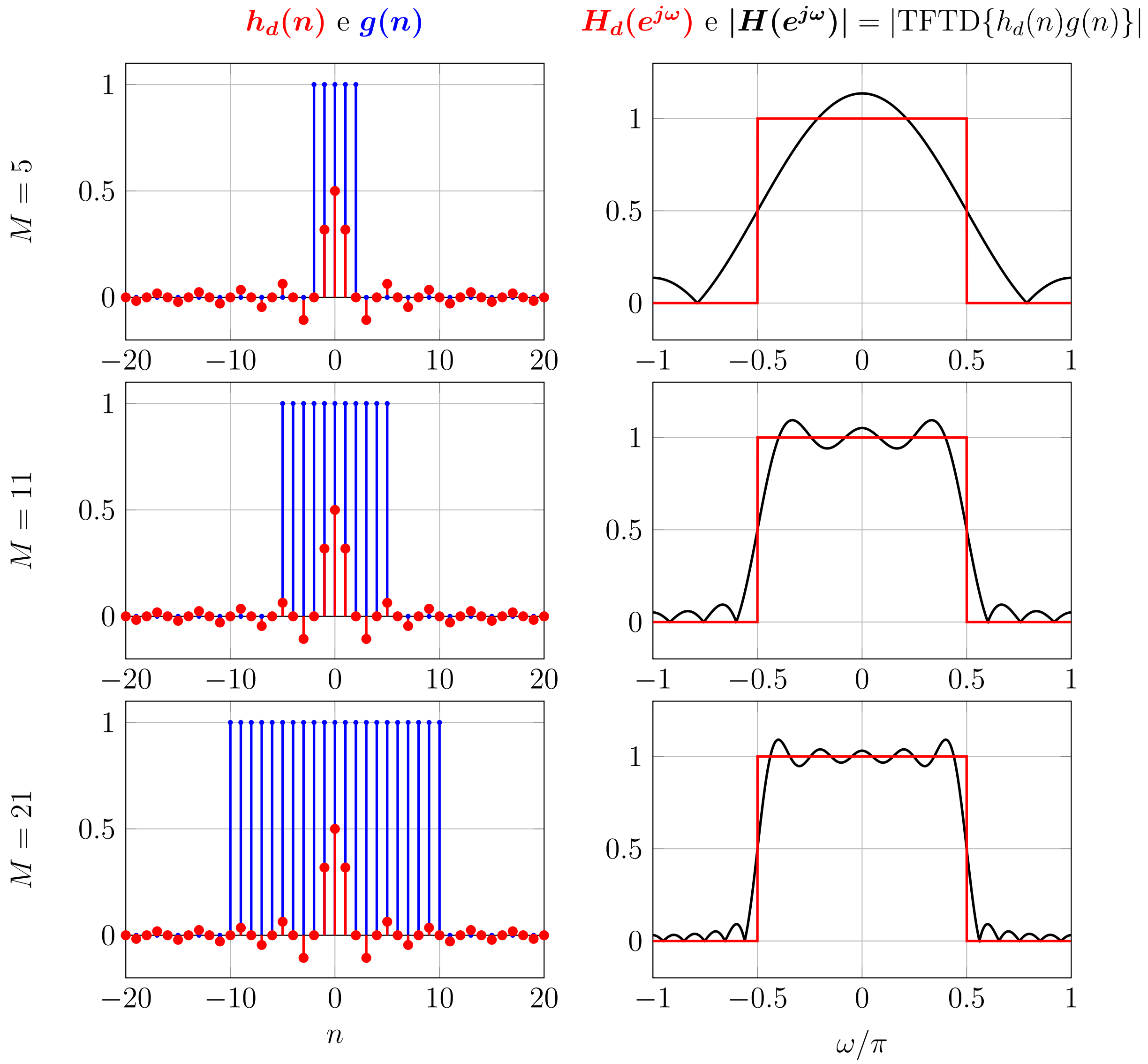

Figura 4: Curvas de $h_d(n)$, $g(n)$, $H_d(e^{j\omega})$ e $H(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{h_d(n)g(n)\}$ para janelas com comprimento de $M = 5$, $M = 11$ e $M = 21$ amostras. ◀

Fenômeno de Gibbs:

1. As oscilações se acumulam nas descontinuidades com um pico de erro de 9% da amplitude.

2. Ocorrem devido à transição abrupta da janela (tempo).

3. Diminuiriam se a razão entre as amplitudes dos lóbulos principal e secundário fosse maior (frequência).

O que se deseja de uma janela no domínio das frequências:

- Deve possuir razão entre lóbulos principal e secundário o menor possível (oscilações).
- Energia que decai rapidamente (lóbulo principal o mais estreito possível).

Janelas senoidais usuais

$$g(n) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cos\left(\frac{\pi}{L}kn\right), \quad -L \leq n \leq L.$$

Janela	a_0	a_1	a_2	a_3
Retangular	1	0	0	0
Von Hann	0,5	0,5	0	0
Hamming	0,54	0,46	0	0
Blackman	0,42	0,5	0,08	0
Plana	0,24726	0,46071	0,25078	0,04125

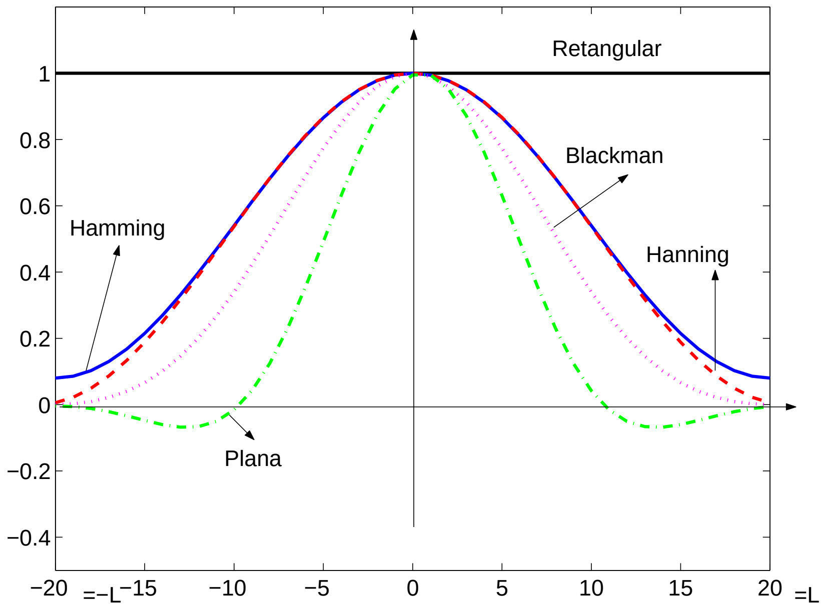

Figura 5: Janelas senoidais usuais em função n.

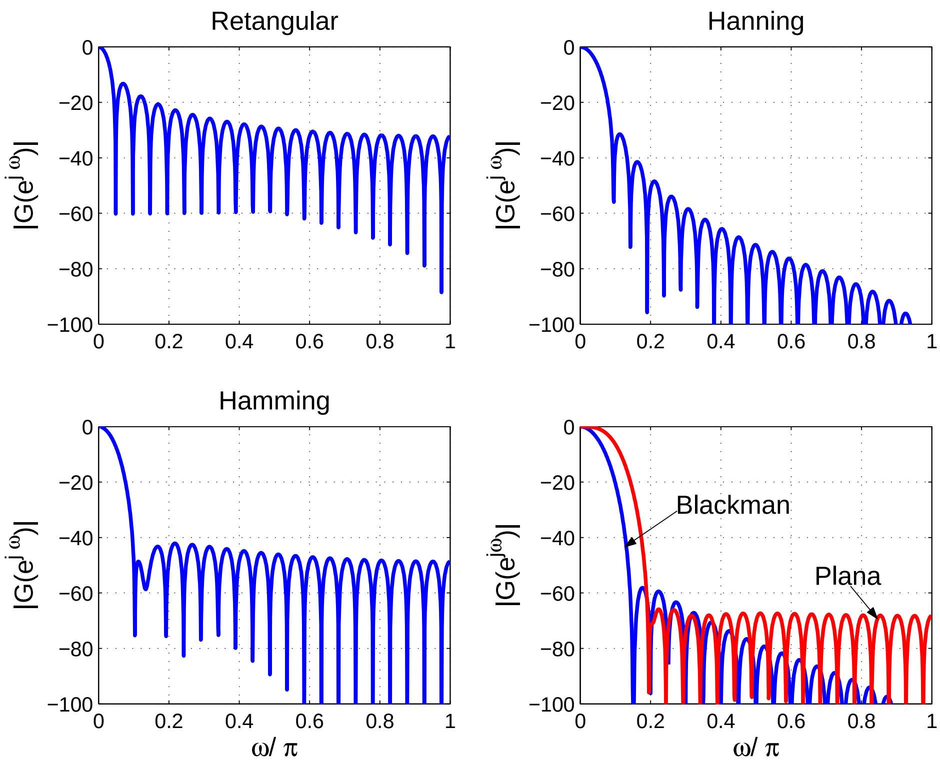

Figura 6: TFTD das janelas em função de ω/π.

Propriedades das janelas mais utilizadas

Janela	Atenuação do lób. lateral (dB)	Atenuação do filtro (dB)	Largura do lób. principal
Retangular	13,3	20,9	$4\pi/N$
Hanning	31,5	43,9	$8\pi/N$
Hamming	42,7	54,5	$8\pi/N$
Blackman	58,1	75,3	$12\pi/N$
Plana	$\approx$70	$\approx$ 89	$16\pi/N$

$N = 2L$.

A janela de Kaiser

$$g_k(n) = \begin{cases} \dfrac{I_o\left(\beta\sqrt{1-\left(1-(\frac{2n}{N-1})^2\right)}\right)}{I_o(\beta)}; & n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0; & \text{demais valores de } n \end{cases}$$

sendo $I_o(.)$ função de Bessel modificada de ordem 1.

Procedimento de projeto com a janela de Kaiser

1. **A partir de δ_r e δ_p, calcula-se**

$$a = -20 \log_{10} [\min\{\delta_r, \delta_p\}]$$

$$D = \frac{a - 7.95}{14.36}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(a - 8.7); & \text{para } a > 50dB \\ 0.5842(a-21)^{0.4} + 0.07886(a-21); & \text{para } 21 < a \leq 50dB \\ 0; & \text{para } a < 21dB \end{cases}$$

2. **A partir de D e $\Delta\omega = \omega_r - \omega_p$ obtém-se**

$$L = \frac{\pi D}{\Delta\omega}$$

3. Com β e $N = \text{round}(2L+1)$ calcula-se a janela de Kaiser $g_k(n)$.

4. Com N calculado no passo 3 obter $h_d(n)$ e calcular $h(n) = h_d(n)\, g_k(n)$.