PTC3424 - Teste 3 - EPUSP, 15 de maio de 2017

Prof.ª Maria D. Miranda

Nome: GABARITO

Sejam as sequências de tempo discreto

$$x(n) = \delta(n) - \delta(n-2) \quad \text{e} \quad v(n) = \delta(n) + \delta(n-2),$$

em que $\delta(n)$ é o pulso unitário. A partir dessas sequências, são construídas duas outras sequências de período $N = 4$:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x(n - \ell N) \quad \text{e} \quad \tilde{v}(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} v(n - \ell N)$$

Considere as seguintes definições:

$$X(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{x(n)\}; \qquad \tilde{X}(k) = \text{SFD}\{\tilde{x}(n)\}$$

$$V(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{v(n)\}; \qquad \tilde{V}(k) = \text{SFD}\{\tilde{v}(n)\}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})V(e^{j\omega}); \qquad y(n) = \text{TFTD}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}$$

$$\tilde{Y}_1(k) = \tilde{X}(k)\,\tilde{V}(k); \qquad \tilde{y}_1(n) = \text{SFD}^{-1}\{\tilde{Y}_1(k)\}$$

em que TFTD é a Transformada de Fourier de Tempo Discreto e SFD é a Série de Fourier Discreta. Sem calcular explicitamente as transformações, responda às questões a seguir:

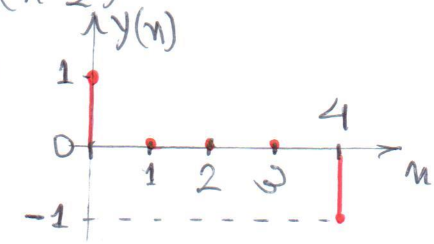
1. Sem calcular explicitamente $Y(e^{j\omega})$, esquematize $y(n)$.
2. Sem calcular explicitamente $\tilde{Y}_1(k)$, esquematize $\tilde{y}_1(n)$.
3. Qual a relação entre $Y(e^{j\omega})$ e $\tilde{Y}_1(k)$? Justifique adequadamente sua resposta.
4. Qual a relação entre $y(n)$ e $\tilde{y}_1(n)$? Justifique adequadamente sua resposta.
5. Para obter $\tilde{y}_1(n)$ exatamente igual a $y(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, qual deve ser o menor valor do período N de $\tilde{v}(n)$ e $\tilde{x}(n)$? Justifique adequadamente sua resposta.

1 Como $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})V(e^{j\omega})$, então $y(n) = x(n) * v(n)$.

$$\Rightarrow y(n) = x(n) * [\delta(n) + \delta(n-2)] = x(n) + x(n-2)$$

$$= \delta(n) - \cancel{\delta(n-2)} + \cancel{\delta(n-2)} - \delta(n-4)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(n) = \delta(n) - \delta(n-4)}.$$



2 Nota-se que $\tilde{Y}_1(k) = \tilde{X}(k)\tilde{V}(k)$ corresponde ao espectro $Y(e^{j\omega})$ amostrado com $N=4$ amostras por período do espectro, ou seja,

$$\tilde{Y}_1(k) = Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k = \frac{2\pi}{4}k = \frac{\pi}{2}k} \qquad (1)$$

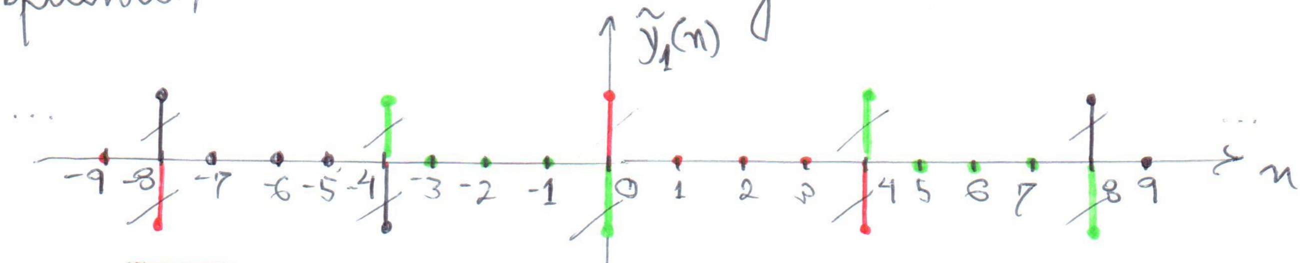
Sendo assim, no domínio do tempo, o sinal $\tilde{y}_1(n)$ corresponderá a uma repetição periódica de $y(n)$ com período $N=4$ amostras, isto é,

$$\tilde{y}_1(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y(n - lN) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y(n - 4l) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_1(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\delta(n-4l) - \delta(n-4-4l)] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4l) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4(l+1))$$

$$= \cancel{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4l)} - \cancel{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4m)} = 0 \quad \forall\ n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

Em outras palavras, ocorre um cancelamento de amostras não nulas de repetições periódicas subsequentes, como mostrado a seguir:



Logo, $\boxed{\tilde{y}_1(n) = 0 \quad \forall\ n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots}$

3 Respondido na questão 2; equação (1).

4 Respondido na questão 2; equação (2).

$\boxed{5}$ Obtém-se $\tilde{y}_1(n) = y(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ se for escolhido um valor de N tal que não ocorra sobreposição de amostras na repetição periódica de $y(n)$ para compor $\tilde{y}_1(n)$.

Com base no resultado encontrado na questão 2, nota-se que não ocorrerá sobreposição para $N \geq 5$. Portanto, o menor valor de N é 5 amostras para garantir

$$\tilde{y}_1(n) = y(n) \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4.$$