PTC2334 - Processamento digital de sinais

Profa. Maria D. Miranda; Monitor Flávio Renê Pavan; Segundo semestre de 2015.

2.2 Sistemas de tempo discreto (STD)

Um sistema de tempo discreto (STD) pode ser representado por um algoritmo, ou circuito, que opera sobre uma sequência de tempo discreto (entrada do STD) segundo uma lei bem definida, de modo a produzir uma outra sequência de tempo discreto (saída do STD). Na Figura 1 é apresentado um diagrama de blocos simplificado de um sistema de tempo discreto, em que $s(n)$ é a sequência de entrada (excitação), $y(n)$ é a sequência de saída (resposta do sistema a entrada) e $T\{\cdot\}$ descreve uma transformação genérica que aplicada em $s(n)$ resulta em $y(n)$.

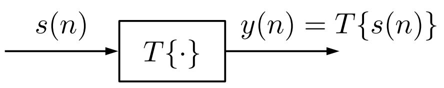

Figura 1: Diagrama de blocos simplificado de um sistema de tempo discreto.

Em processamento em tempo discreto de sinais, os STD são usados para processar esses sinais com objetivos de obter propriedades desejáveis ou extrair informações de interesse. A descrição entrada-saída (E/S) de um STD consiste em uma expressão matemática que define explicitamente a transformação entre as sequências de entrada e de saída.

Exemplos de transformações $T\{\cdot\}$

1. **O atrasador**:

$$y_1(n) = T\{s(n)\} = s(n - \Delta) \tag{1}$$

O resultado da $T\{\cdot\}$ indica um atraso de Δ amostras na saída em relação a entrada. Na Figura 2 é ilustrado o bloco usual do atrasador com $\Delta = 1$, especificamente z^{-1} corresponde ao operador atraso de uma amostra.

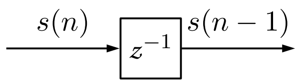

Figura 2: Diagrama do bloco do atrasador de uma amostra.

2. **Sistemas média móvel com número finito de amostras**:
A relação entrada-saída

$$y_{2a}(n) = \frac{1}{2}\Big[s(n) + s(n-1)\Big] \tag{2}$$

descreve um sistema que em sua saída a cada instante n toma duas amostras da entrada, a do instante n e a do instante $n - 1$, e divide por dois. Um diagrama de blocos para esse sistema está ilustrado na Figura 3.

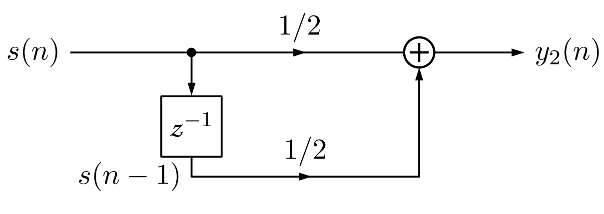

Figura 3: Diagrama de blocos do sistema média móvel com janela de duas amostras.

É interessante notar que a saída $y_{2a}(n)$ também pode ser expressa como o produto interno de vetores

$$y_{2a}(n) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s(n) \\ s(n-1) \end{bmatrix}.$$

A relação entrada-saída

$$y_{2b}(n) = \frac{1}{5}\Big[s(n) + s(n-1) + s(n-2) + s(n-3) + s(n-4)\Big] \tag{3}$$

descreve um sistema que em sua saída a cada instante n toma 5 amostras da entrada. Neste caso, podemos escrever $y_{2b}(n)$ como o produto interno de vetores

$$y_{2b}(n) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s(n) \\ s(n-1) \\ s(n-2) \\ s(n-3) \\ s(n-4) \end{bmatrix}.$$

Um diagrama de blocos para esse sistema é ilustrado na Figura 4.

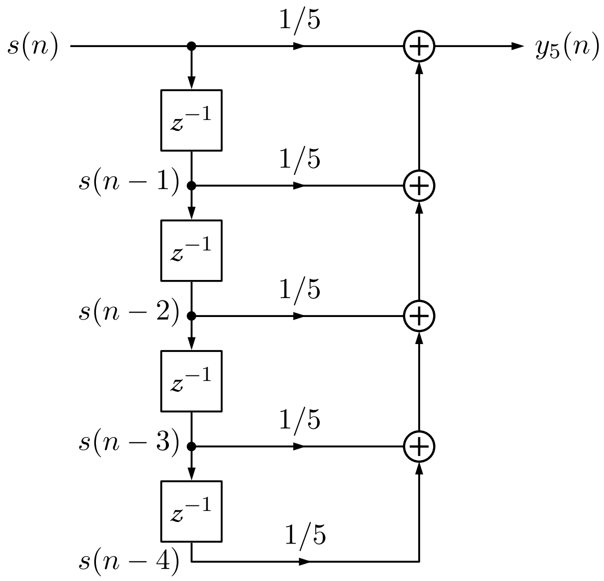

Figura 4: Diagrama de blocos do sistema média móvel com janela de cinco amostras.

Para apreciar a operação do sistema média móvel, considere o sinal

$$s(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \text{ e par} \\ 2, & \text{se } n > 0 \text{ e ímpar} \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

A sua representação é ilustrada na Figura 5.a). Esse sinal é aplicado à entrada dos Sistemas 2a e 2b, que calculam a média de $s(n)$ a cada instante n com janelas de duas e cinco amostras, respectivamente. As Figuras 5.b) e 5.c) ilustram as saídas em cada um desses sistemas. Note que estes sistemas suavizam as variações das amostras de entrada, sugerindo portanto, que atuam como filtros que eliminam as componentes de altas frequências de $s(n)$, ou seja, atuam como filtros passa-baixas. As características desses filtros no domínio da frequência serão abordadas posteriormente.

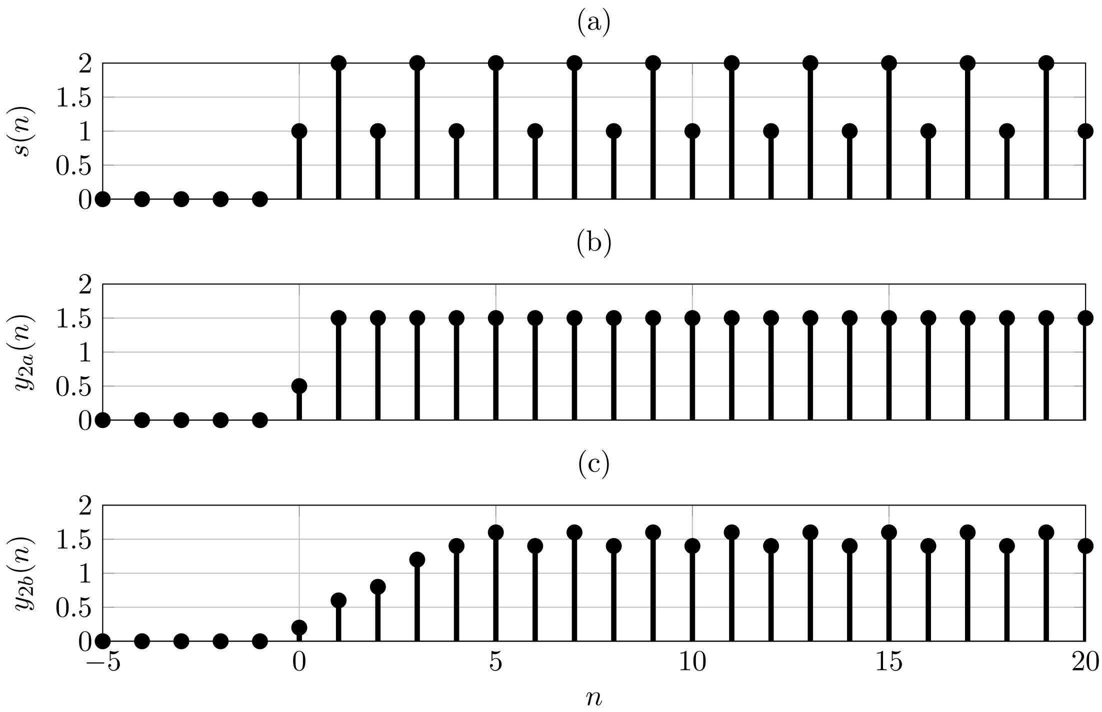

Figura 5: Sistema média móvel: a) Sinal de entrada; b) Sinal de saída com janela de duas amostras; c) Sinal de saída com janela de cinco amostras

3. **Sistema média móvel com número infinito de amostras**:

   A relação entrada-saída
   $$y(n) = s(n) + \alpha\, y(n-1) \tag{4}$$
   caracteriza uma equação de diferenças de primeira ordem*. A solução da equação de diferenças (4) pode ser facilmente obtida da seguinte forma

   $$\begin{aligned}
   y(0) =& s(0) + \alpha y(-1)\\
   y(1) =& s(1) + \alpha y(0) = s(1) + \alpha s(0) + \alpha^2 y(-1)\\
   y(2) =& s(2) + \alpha y(1) = s(2) + \alpha s(1) + \alpha^2 s(0) + \alpha^3 y(-1)\\
   y(3) =& s(3) + \alpha y(2) = s(3) + \alpha s(2) + \alpha^2 s(1) + \alpha^3 s(0) + \alpha^4 y(-1)\\
   \vdots =& \qquad\qquad\qquad \vdots\\
   y(n) =& s(n) + \alpha y(n-1) = \alpha^{n+1} y(-1) + \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} s(k).
   \end{aligned}$$

   Supomos aqui que existe uma resposta não nula do sistema em $n = -1$, e que a entrada vale $s(n) = 0$ para $n < 0$. Por conveniência, vamos supor $y(-1) = 0$ e vamos fazer uma mudança

*Em tempo contínuo, o sistema equivalente é o descrito pela equação diferencial de primeira ordem
$$\dot{y}(t) = b\, s(t) + a y(t).$$
Aplicando a 1^a diferença regressiva
$$\dot{y}(t) = \frac{y(n\Delta) - y((n-1)\Delta)}{\Delta}$$
na equação diferencial, após manipulações algébricas simples, resulta
$$y(n) = \beta\, s(n) + \alpha y(n-1),$$
sendo $\alpha = 1/(1 - a\Delta)$ e $\beta = \Delta\, b\, \alpha$.

de variáveis na solução da equação diferencial de ordem um. Assim, fazendo $n-k=\ell$, temos

$$y(n)=\sum_{\ell=0}^{n}\alpha^{\ell}s(n-\ell)=\alpha^{0}s(n)+\alpha^{1}s(n-1)+\alpha^{2}s(n-2)+\alpha^{3}s(n-3)+\cdots+\alpha^{n}s(0)$$

Nota-se, portanto, que (4) representa um acumulador que pondera as amostras passadas por um fator α. Se $\alpha=1$, todas as amostras passadas são ponderadas por um mesmo fator. Se $0<\alpha<1$, as amostras recentes são mais valorizadas em relação as amostras passadas. Esse é o caso desejado quando estamos negociando o pagamento de uma dívida contraída. Se $\alpha>1$, as amostras passadas são mais valorizadas em relação as amostras atuais. Esse é o caso desejado quando fazemos uma aplicação financeira.

4. **Compressor:**
A relação entrada-saída
$$y(n)=s(2n) \tag{5}$$
descarta uma amostra a cada duas. Para se convencer, basta considerar a sequência de entrada
$$\{s(0),s(1),s(2),s(3),s(4),s(5),s(6),\ldots\}.$$
Essa sequência, aplicada ao sistema descrito, resulta
$$\{s(0),s(2),s(4),s(6),s(8),s(10),s(12),\ldots\}.$$
O sistema
$$y(n)=s(Mn) \tag{6}$$
descarta $M-1$ amostras a cada M amostras.

2.3 Propriedades de sistemas de tempo discreto

Homogeneidade

Um sistema de tempo discreto é homogêneo se satisfaz a propriedade da proporcionalidade (homogeneidade)

$$\begin{aligned}y(n)&=T\{c\,s(n)\}\\&=c\,T\{s(n)\},\end{aligned}$$

sendo c uma constante real ou complexa qualquer.

Aditividade

Um sistema de tempo discreto obedece a propriedade da aditividade se uma transformação sobre uma soma de entradas é igual a uma soma das saídas para cada uma das entradas. Por exemplo, considere o caso em que as entradas $s_1(n)$ e $s_2(n)$ resultam nas saídas $y_1(n)$ e $y_2(n)$,

$$\begin{aligned}y_1(n)&=T\{s_1(n)\}\\y_2(n)&=T\{s_2(n)\}\end{aligned}$$

Esse sistema possui a propriedade da aditividade se a igualdade

$$y_1(n)+y_2(n)=T\{s_1(n)+s_2(n)\}$$

for verdadeira.

Linearidade = aditividade + homogenidade

Um sistema de tempo discreto é linear se e somente se

$$\begin{aligned} y(n) &= T\{a_1 s_1(n) + a_2 s_2(n)\} \\ &= a_1 T\{s_1(n)\} + a_2 T\{s_2(n)\} \\ &= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n). \end{aligned}$$

Em outras palavras, um sistema é linear se obedece as propriedades da homogeneidade e da aditividade.

Invariância no tempo

Um sistema de tempo discreto é invariante no tempo se

$$\begin{aligned} y(n) &= T\{s(n)\} \\ y(n-n_0) &= T\{s(n-n_0)\}, \end{aligned}$$

ou seja, um deslocamento de n_0 amostras da sequência de entrada produz um deslocamento correspondente também de n_0 amostras na sequência de saída para todos os valores de n e n_0.

Memória

Um sistema de tempo discreto é sem memória se sua saída $y(n)$ no instante $n = n_0$, depende apenas da entrada do instante $n = n_0$, ou seja, $s(n_0)$.

Causalidade

Em um sistema não-causal, a saída no instante n depende da entrada em instantes futuros, por exemplo, $(n+1)$, $(n+5)$, etc.

Estabilidade

Existem várias formas de definir a estabilidade de sistemas. A mais simples é a que considera somente a descrição entrada-saída, denominada estabilidade BIBO (*bounded input - bounded output*) sendo definida como:

Um sistema de tempo discreto é estável em entrada-saída se uma sequência limitada

$$|s(n)| \leq M_1$$

produz uma sequência de saída limitada

$$|y(n)| \leq M_2,$$

para M_1 e M_2 finitos.