Essas notas sobre função de sistema e resposta em frequência foram feitas para o curso de PTC 2324 (Processamento Digital de Sinais) pela Profa. Maria D. Miranda.

EPUSP - PTC, março de 2017.

Função de Sistema $H(z)$ e Resposta em frequência $H(\ e^{j\omega})$

Equação de diferenças e a função de sistema $H(z)$

Muitos sistemas de tempo discreto podem ser modelados como um sistema linear e invariante no tempo (LIT) e alguns desses podem ser descritos pela equação de diferenças

$$\sum_{k=0}^{P} a_k y(n-k) = \sum_{\ell=0}^{M} b_\ell x(n-\ell) \tag{1}$$

sendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_P$ e $b_0, b_1, \ldots, b_M$ coeficientes constantes. Aplicando a Transformada z bilateral em ambos os membros da equação e usando a propriedade de deslocamento no tempo para a Transformada z resulta

$$Y(z)\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{\ell=0}^{M} b_\ell z{-}\ell \tag{2}$$

Define-se a função de sistema $H(z)$ como a razão de polinômios:

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_P z^{-P}} = \frac{\sum_{\ell=0}^{M} b_\ell z^{-\ell}}{\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k}}. \tag{3}$$

Por conveniência vamos reescrever $H(z)$ usando potências positivas de z e garantir que os termos de potência de z de ordem mais elevada fiquem unitários. Para isso basta multiplicar o numerador e o denominador de $H(z)$ por $z^{-M}z^M$ e $z^{-P}z^P$ respectivamente, e colocar b_0 e a_0 em evidência no numerador e no denominador respectivamente, assim

$$H(z) = \frac{z^{-M}}{z^{-P}}\ \frac{b_0}{a_0}\ \frac{\sum_{\ell=0}^{M}(b_\ell/b_0)z^{M-\ell}}{\sum_{k=0}^{P}(a_k/a_0)z^{P-k}}. \tag{4}$$

Supondo $P > M$, é possível reescrever essa razão de polinômios em termos de suas raízes

$$H(z) = z^{P-M}\ \frac{b_0}{a_0}\ \frac{\prod_{\ell=1}^{M}(z-z_\ell)}{\prod_{k=1}^{P}(z-p_k)}.$$

Nota-se que z_ℓ e z_k são os zeros e os polos respectivamente da função de sistema $H(z)$. A posição dos polos e zeros de $H(z)$ no plano z permitem obter informações sobre a estabilidade e causalidade da resposta ao pulso unitário $h(n)$ associada à $H(z) = Tz\{h(n)\}$. Além disso, lembrando $z = re^{j\omega}$ e portanto, $H(z) = H(e^{j\omega})$ quando $r = 1$, assim partir da posição dos polos e zeros é possível obter também informações sobre o módulo e a fase da resposta em frequência.

A posição dos polos e zeros de $H(z)$ e estabilidade e causalidade de sistemas LIT

- Resposta em frequência: $H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$.
- Sistema BIBO-estável: $\sum_n |h(n)| < +\infty \Leftrightarrow |z| = 1$ está na RC.
- Sistema causal: RC é da forma $|z| > |p_{\max}|$ e contém $z = +\infty$.
- Sistema BIBO-estável e causal: não tem polos fora do círculo unitário (todos no interior).
- Exigir **estabilidade:** tomar RC que contém $|z| = 1 \rightarrow$ resultado não é necessariamente causal.
- Exigir **causalidade:** tomar RC "externa" a uma circunferência qualquer
  $\rightarrow$ resultado não é necessariamente estável.

A posição dos polos e zeros de $H(z)$ e módulo e fase de $H(e^{j\omega})$

Filtros seletivos em frequência

filtros *notch*.

Sistemas inversos

Sistema inverso causal e estável.

Fase mínima

Filtros passa-tudo

Filtros compensadores

Filtros de fase linear