Essas notas sobre Transformada z inversa foram feitas para o curso de PTC 2324 (Processamento Digital de Sinais) pela Profa. Maria D. Miranda.

EPUSP - PTC, março de 2017.

A Transformada z inversa

Definição* :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz$$

A integral de linha deve ser calculada no sentido anti-horário em um caminho fechado da RC.

- Exige conhecimento da teoria de variáveis complexas;
- Pode ser calculada pelo teorema dos resíduos.

Prova da definição

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

$$X(z)z^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{n-1-k}$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{n-1-k}\,dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \underbrace{\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1-k}\,dz}_{=\begin{cases}1, & \text{se } n=k\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz = x(n)}$$

Métodos de antitransformação

Em geral, se está interessado em antitransformar funções racionais. Neste caso, podem ser utilizados métodos mais simples:

- Inspeção visual (Uso de tabelas de pares transformados e propriedades da Tz);
- Expansão em frações parciais;
- Expansão em séries de potências.

---

*Referências:**

- A. V. Oppenheim, R. W. Shafer, J.R. Buck, *Discrete-time signal processing*. 2ª ed., Prentice Hall, 1999, ou 3ª ed., Pearson, 2010. Capítulo 3.
- J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital signal processing: principles, algorithms, and applications*, 4a. edição, Prentice Hall, 2006. Capítulo 3.
- M. T. Madeira da Silva; *Slides*, EPUSP, 2010.

Inspeção visual

Exemplo: Antitransformar

$$X(z) = \frac{z^{-3}}{1 - 1{,}5z^{-1}}, \quad 0 < |z| < 1{,}5$$

$$X(z) = z^{-3} \underbrace{\left[\frac{1}{1 - 1{,}5z^{-1}}\right]}_{\text{T}z \text{ de sinal não-causal}} = z^{-3}Y(z)$$

Propriedade do deslocamento: $y(n - n_o) \leftrightarrow z^{-n_o}Y(z)$. Logo, $x(n) = y(n - 3)$. Da tabela de pares transformados, $y(n) = -(1{,}5)^n u(-n - 1)$. Portanto,

$$x(n) = -(1{,}5)^{n-3}u(-n + 2). \blacktriangleleft$$

Expansão em frações parciais

Dada uma função racional de z, ou seja,

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_P z^{-P}} = \frac{b_0}{a_0} z^{P-M} \frac{\prod_{j=1}^{M}(1 - z_j z^{-1})}{\prod_{k=1}^{P}(1 - p_k z^{-1})},$$

é possível expandi-la em soma de frações parciais:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{n_{PS}} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{r=0}^{M-P} B_r z^{-r} + \sum_{i=1}^{n_{PM}} \sum_{m=1}^{s_i} \frac{C_{i,m}}{(1 - p_i z^{-1})^m}$$

em que

- n_{PS}: número de polos simples,
- n_{PM}: número de polos múltiplos p_i de multiplicidade s_i.

Casos particulares:

- **Função racional estritamente própria com polos simples:** $P > M$, $n_{PM} = 0$

  Exemplo: $P = 2$, $M = 1$, $z_1 \neq p_1 \neq p_2$

$$X(z) = \frac{1 - z_1 z^{-1}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$$

$$X(z)(1 - p_1 z^{-1}) = \frac{1 - z_1 z^{-1}}{1 - p_2 z^{-1}} = A_1 + A_2 \left[\frac{1 - p_1 z^{-1}}{1 - p_2 z^{-1}}\right]$$

$$X(z)(1 - p_1 z^{-1})\Big|_{z=p_1} = \frac{1 - z_1 p_1^{-1}}{1 - p_2 p_1^{-1}} = A_1 \blacktriangleleft$$

- **Função racional estritamente própria com polos múltiplos:** $P > M$, $n_{PM} \neq 0$

  Exemplo: $P = 3$, $M = 1$, $z_1 \neq p_1 \neq p_2$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1 - z_1 z^{-1}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})^2} \\ &= \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_{2,1}}{1 - p_2 z^{-1}} + \frac{C_{2,2}}{(1 - p_2 z^{-1})^2} \end{aligned}$$

  A_1 e $C_{2,2}$ $\rightarrow$ como no caso anterior

  Para calcular $C_{2,1}$, note que

$$\begin{aligned} X(w^{-1})(1 - p_2 w)^2 &= \frac{1 - z_1 w}{1 - p_1 w} \\ &= A_1 \frac{(1 - p_2 w)^2}{1 - p_1 w} + C_{2,1}(1 - p_2 w) + C_{2,2}. \end{aligned}$$

  Derivando em relação a w e calculando em $w = p_2^{-1}$

$$-p_2 C_{2,1} = \frac{-z_1(1 - p_1 p_2^{-1}) + p_1(1 - z_1 p_2^{-1})}{(1 - p_1 p_2^{-1})^2}. \blacktriangleleft$$

- **Expansão em frações parciais:**

$$X(z) = \sum_{k=1}^{n_{PS}} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{r=0}^{M-P} B_r z^{-r} + \sum_{i=1}^{n_{PM}} \sum_{m=1}^{s_i} \frac{C_{i,m}}{(1 - p_i z^{-1})^m}$$

Como calcular os coeficientes A_k, $C_{i,m}$ e B_r?

B_r devem ser obtidos por divisão de polinômios, antes dos coeficientes A_k e $C_{i,m}$:

$$A_k = \left[(1 - p_k z^{-1}) X(z)\right]_{z=p_k}$$

$$C_{i,m} = \frac{1}{(s_i - m)!(-p_i)^{s_i - m}} \times \left\{ \frac{d^{s_i - m}}{dw^{s_i - m}} \left[(1 - p_i w)^{s_i} X(w^{-1})\right] \right\}_{w=p_i^{-1}} . \blacktriangleleft$$

Expansão em séries de potências

A transformada deve ser convertida para o formato

$$X(z) = \ldots + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-2} + \ldots$$

Em seguida constrói-se a sequência $x(n)$ a partir dos valores da equação acima:

Exemplo:

$$X(z) = \frac{1 - 0{,}5z^{-1} - z^{-2} + 0{,}5z^{-3}}{z^{-2}} = z^2 - 0{,}5z - 1 + 0{,}5z^{-1}$$

$$\Rightarrow x(n) = \delta(n+2) - 0{,}5\delta(n+1) - \delta(n) + 0{,}5\delta(n-1). \blacktriangleleft$$

Exemplo: Antitransformar

$$X(z) = \log\left(1 + az^{-1}\right), \quad |z| > |a|.$$

A expansão em séries de potências de $\log(1+x)$ para $|x| < 1$ é

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

Aplicando em $X(z)$, obtém-se

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} z^{-k}$$

Por inspeção, tem-se que

$$x(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} \delta(n-k)$$

que equivale a

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1} a^n}{n}, & \text{se } n \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \leq 0 \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Teorema dos resíduos de Cauchy

A antitransformada z também pode ser calculada como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X(z)\, dz = \sum_k R_k$$

em que R_k são os resíduos de $z^{n-1}X(z)$ (função racional) nos polos p_k, localizados no interior de C.

Definindo $\Psi_k(z) = X(z) z^{n-1} (z - p_k)^{s_k}$, tem-se

$$R_k = \frac{1}{(s_k - 1)!} \left[\frac{d^{(s_k-1)} \Psi_k(z)}{dz^{(s_k-1)}} \right]_{z=p_k}$$

em que s_k é a multiplicidade do polo p_k interno ao contorno C.

Exemplo: Antitransformar, usando o teorema dos resíduos,

$$H(z) = \frac{0{,}64 z^2}{0{,}48 z^4 - 2{,}072 z^3 + 3{,}1904 z^2 - 2{,}072 z + 0{,}48},$$

RC: $0{,}8 < |z| < 1{,}25$

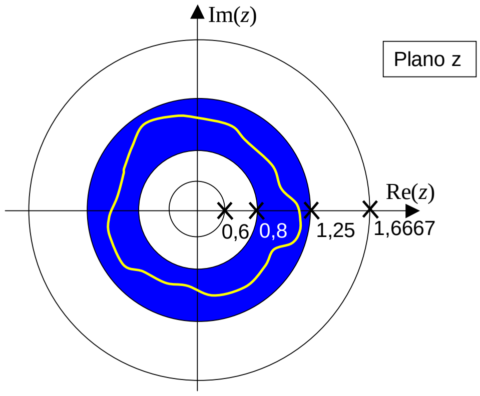
Polos:

$p_1 = 1{,}6667$

$p_2 = 1{,}25$

$p_3 = 0{,}8$

$p_4 = 0{,}6.$



Como os polos têm multiplicidade 1,

$$R_k = \Psi_k(p_k) = H(z) z^{n-1} (z - p_k)|_{z=p_k}$$

$$\begin{aligned} R_3 = \Psi(p_3) &= \left. \frac{0{,}64 z^{n+1}}{0{,}48 (z - 1{,}6667)(z - 1{,}25)(z - 0{,}6)} \right|_{z=0{,}8} \\ &= 17{,}0934 (0{,}8)^{n+1} \\ R_4 = \Psi(p_4) &= -9{,}6151 (0{,}6)^{n+1}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} h(0) &= (R_3 + R_4)|_{n=0} = 7{,}9060 \\ h(1) &= (R_3 + R_4)|_{n=1} = 7{,}4786 \\ &\vdots \end{aligned}$$

◀