PTC3424 - *Profs. Maria D. Miranda* - EPUSP, PTC - 10/05/2017*

2 Transformadas de Fourier de tempo discreto

2.1 A Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD)

Define-se a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de uma sequência de tempo discreto $x(n)$ como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{1}$$

em que ω é a frequência angular normalizada (radianos). Note que representação em frequência a partir das amostras do sinal no domínio do tempo é uma forma de **análise** do sinal.

A partir da definição nota-se que a TFTD possui as seguinte propriedades

- $X(e^{j\omega})$ é contínua em ω,
- $X(e^{j\omega})$ é periódica com período 2π,
- $X(e^{j\omega})$ é uma função complexa de ω.

Demonstra-se que a TFTD inversa é dada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega. \tag{2}$$

A obtenção das amostras do sinal no domínio do tempo a partir da sua representação em frequência é uma forma de **síntese** do sinal.

As equações da TFTD e da TFTD inversa permitem estabelecer o seguinte par transformado:

$$x(n) \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \tag{3}$$

É interessante notar que se fizermos $x(n) = h(n)$ na Equação 1 obtemos a resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ a partir da resposta ao pulso unitário $h(n)$. Além disso, fazendo $H(e^{j\omega})$ na Equação 2 obtemos a resposta ao pulso unitária a partir da resposta em frequência. Apesar do par transformado $h(n) \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$ ser feito com as mesmas transformações do par $x(n) \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$ a função resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ tem um papel diferente de $X(e^{j\omega})$. A função $H(e^{j\omega})$ representa a resposta em frequência de um sistema e $X(e^{j\omega})$ representa o espectro de uma sequência de tempo discreto.

Exemplos simples

Determine a TFTD das seguintes sequências

1. $x(n) = \delta(n)$
2. $x(n) = \delta(n-2)$
3. $x(n) = \delta(n+2) + \delta(n-2)$

*Notas sobre TFTD inicialmente feitas para o curso de PTC 2324 (Processamento Digital de Sinais). Profa. Maria D. Miranda e colaboração do Monitor Flávio Renê M. Pavan.

TFTD da exponencial real

Seja $x(n) = a^n u(n), \;\; (|a| < 1, \; a \neq 0)$, assim

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$\boxed{x(n) = a^n u(n), \;\; (|a| < 1, \; a \neq 0) \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$$

EXEMPLO 1

Forneça os gráficos do módulo e a fase da TFTD dos seguintes sinais de tempo discreto:

$$x_1(n) = (0.9)^n u(n) \quad \text{e} \quad x_2(n) = (-0.9)^n u(n).$$

Solução: As curvas de módulo e fase da TFTD para cada uma destas funções são representadas na Figura 1.

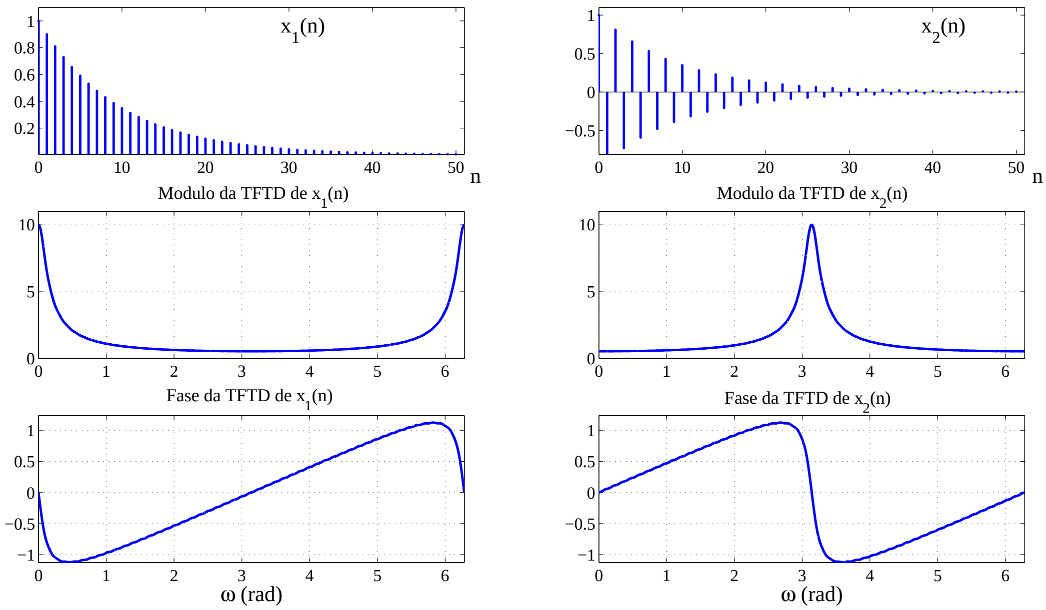

Figura 1: Exponenciais reais $x_1(n)$ e $x_2(n)$ e gráficos de módulo e fase de suas respectivas TFTDs.

Note que as abscissas do módulo e da fase espectral estão representadas no intervalo de zero a 2π. Em outras palavras, as abscissas vão de $\omega = 0$ até $\omega = 2\pi$ rad, que por sua vez correspondem a frequências do sinal de tempo contínuo $x(t)$ entre zero e a frequência de amostragem f_s (Hz). Nas Tabelas 1 e 2 estão os programas feitos no MatLab para gerar os sinais $x_1(n)$, $x_2(n)$ e os módulos e as fases das suas TFTDs. É notório que as variações do sinal $x_1(n)$ são bem menos abruptas que as variações do sinal $x_2(n)$. Nota-se a partir do módulo do espectro do sinal $x_1(n)$ que a sua energia está concentrada perto de zero radianos (baixas frequências), e, portanto, pela periodicidade espectral também está concentrada perto de 2π. Além disso, nota-se a partir do módulo do espectro do sinal $x_2(n)$ que a sua energia está concentrada em frequências perto de π rad (altas frequência).

Tabela 1: Comandos do MATLAB para gerar e plotar $h(n)$ e a sua TFTD.

$N = 50;$
$n = 0 : N - 1;$
$a = .9;$ % a=-0.9
$h = a. \wedge n;$
$[H, omega] = tftd(h, n);$
figure(1)
subplot(311); stem(n, h); title('h(n)'); grid
subplot(313); plot(omega/pi,abs(H)); grid; title('Modulo da TFTD de h(n)')
subplot(315); plot(omega/pi,angle(H)); grid; title('Fase da TFTD de h(n)')

Tabela 2: Função que calcula TFTD.

```
function[V,omega]=tftd(v,n);
M=length(n);
delta=1/10∧5;
omega=pi*[0:delta:2-delta];
V=zeros(1,length(omega));
for m=1:M
V=V+v(m)*exp(-j*omega*n(m));
end
```

TFTD da janela retangular

A janela retangular de tempo discreto é uma sequência de uns. Considera-se aqui essa janela como a soma de $L_2 - L_1 + 1$ pulsos unitários deslocados, ou seja,

$$x(n) = \sum_{k=L_1}^{L_2} \delta(n-k). \tag{4}$$

Aplicando a TFTD em (9), temos

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=L_1}^{L_2} e^{-j\omega n}. \tag{5}$$

Usando a representação fechada da série geométrica, temos

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega L_1} - e^{-j\omega(L_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}}. \tag{6}$$

Quando $\omega = 2\pi k$, para k inteiro, $|k| = 0, 1, 2, \ldots$, temos uma indeterminação em (6). Nesse caso, podemos aplicar a regra de L'Hôpital ou simplesmente usar diretamente (10), resultando

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k} = \sum_{k=L_1}^{L_2} 1 = L_2 - L_1 + 1.$$

Quando $\omega \neq 2\pi k$, podemos reescrever a equação (6) como

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) =& \frac{(e^{-j\omega L_1} - e^{-j\omega(L_2+1)})e^{j\omega L_1}e^{-j\omega L_1}}{(1-e^{-j\omega})e^{j\omega/2}e^{-j\omega/2}} = \frac{(1-e^{-j\omega(L_2-L_1+1)})e^{-j\omega L_1}}{(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})e^{-j\omega/2}}\\
X(e^{j\omega}) =& \frac{(1-e^{-j\omega(L_2-L_1+1)})e^{j\omega(L_2-L_1+1)/2}e^{-j\omega(L_2-L_1+1)/2}e^{-j\omega L_1}}{(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})e^{-j\omega/2}}\\
X(e^{j\omega}) =& \frac{(e^{j\omega(L_2-L_1+1)/2} - e^{-j\omega(L_2-L_1+1)/2})e^{-j\omega(L_2+L_1)/2}}{(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}.
\end{aligned}$$

Lembrando a expressão do seno em termos de exponencial complexa, temos

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega(L_2-L_1+1)/2)}{\sin(\omega/2)}\, e^{-j\omega(L_2+L_1)/2}. \tag{7}$$

Portanto, podemos escrever

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} K, & \text{para } \omega = 2\pi k \\ \dfrac{\sin(\omega K/2)}{\sin(\omega/2)}\, e^{-j\omega(L_2+L_1)/2}, & \text{para } \omega \neq 2\pi k \end{cases} \tag{8}$$

sendo

$$K = L_2 - L_1 + 1$$

o comprimento da janela retangular.

TFTD da janela retangular com simetria par em relação a $n = 0$

A janela retangular de tempo discreto é um outro nome que se dá para um pulso retangular (sequência de uns). Considera-se aqui essa janela com duração $2N_1 + 1$ e com simetria par em relação a $n = 0$, ou seja,

$$x(n) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} \delta(n-k). \tag{9}$$

Aplicando a TFTD em (9), temos

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}. \tag{10}$$

Após manipulações algébricas podemos escrever

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} K, & \text{para } \omega = 2\pi\ell \\ \dfrac{\sin(\omega K/2)}{\sin(\omega/2)}, & \text{para } \omega \neq 2\pi\ell \end{cases} \tag{11}$$

sendo ℓ um inteiro qualquer e $K = 2N_1 + 1$ o comprimento da janela retangular.

EXEMPLO 2

Obtenha a TFTD de uma janela retangular de 7 uns com simetria par em relação a $n = 0$, denotada como

$$g(n) = u(n+3) - u(n-4) = \sum_{k=-3}^{3} \delta(n-k).$$

Solução:
Para se obter a TFTD, pode-se usar diretamente (11), ou aplicar a definição de TFTD mostrada na Equação (1). Após algumas manipulações algébricas, resulta

$$G(e^{j\omega}) = \begin{cases} 7, & \text{para } \omega = 2\pi k \\ \displaystyle\sum_{n=-3}^{3} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(7\omega/2)}{\sin(\omega/2)}, & \text{para } \omega \neq 2\pi k \end{cases} \tag{12}$$

sendo k um inteiro qualquer.

Na Figura 2 é mostrado o $g(n)$ e a sua TFTD. Particularmente, como o $g(n)$ possui simetria par em relação a $n = 0$, a sua TFTD é uma função real. Essa propriedade será generalizada posteriormente.

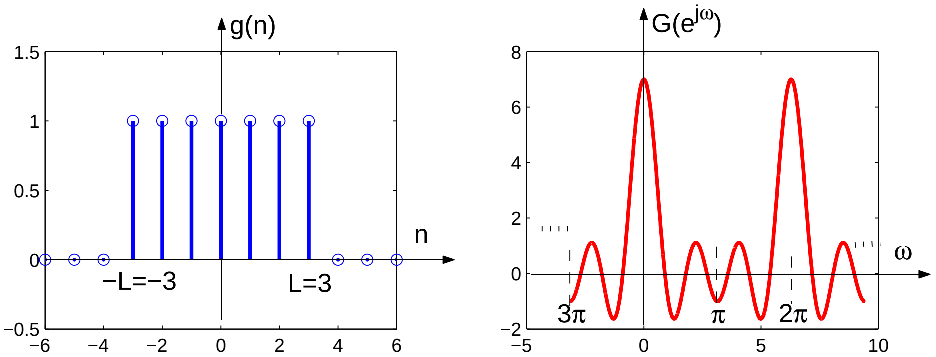

Figura 2: O pulso retangular com 7 amostras e a sua TFTD.

◀

O esboço do módulo e da fase de (11), para uma sequência de comprimento qualquer, pode ser facilmente obtido a partir das observações feitas a seguir.

- A função representada por (11) é uma função complexa cujo módulo terá sempre um lóbulo principal e lóbulos secundários em um período.
- O valor máximo do lóbulo principal é igual a K e é atingido para frequências $\omega = 2\pi\ell$, sendo ℓ um inteiro qualquer.
- Para $\omega \neq 2\pi\ell$, a função $X(e^{j\omega})$ é nula sempre que o argumento do seno do numerador de (11) é um múltiplo inteiro de π. Portanto, $X(e^{j\omega}) = 0$ quando

  $$\frac{\omega K}{2} = k\pi,$$

  sendo k um valor inteiro qualquer tal que $\omega = 2\pi \dfrac{k}{K} \neq 2\pi\ell$.

- Em um período, por exemplo, $0 \leq \omega < 2\pi$,

$$X(e^{j\omega}) = 0 \ \text{ para } \ k = 1, 2, \ldots, K-1,$$

portanto, o número de vezes em que $X(e^{j\omega}) = 0$ é $K-1$. Além disso, se K é par, em $\omega = \pi$ rad, $X(e^{j\omega}) = 0$ e se K é ímpar, em $\omega = \pi$ rad, $X(e^{j\omega}) \neq 0$.

- A metade da largura do lóbulo principal é $2\pi/K$ rad.

Para ilustrar as observações feitas, considera-se o caso do Exemplo 2. Como $K = 7$, $G(e^{j\omega}) = 0$ para

$$\omega = \{2\pi/7,\ 4\pi/7,\ 6\pi/7,\ 8\pi/7,\ 10\pi/7,\ 12\pi/7\},$$

e a metade da largura do lóbulo principal é $2\pi/7$ rad.

Note que, à medida que o número de pontos da janela retangular aumenta, o número de pontos nulos em um período da TFTD aumenta e a largura do lóbulo principal diminui. Para ilustrar esse efeito, na Figura 4 são comparadas as TFTDs de duas janelas retangulares, uma com $K = 9$ e a outra com $K = 21$. Ambas as janelas possuem simetria par em relação a $n = 0$, portanto, as TFTDs são funções reais.

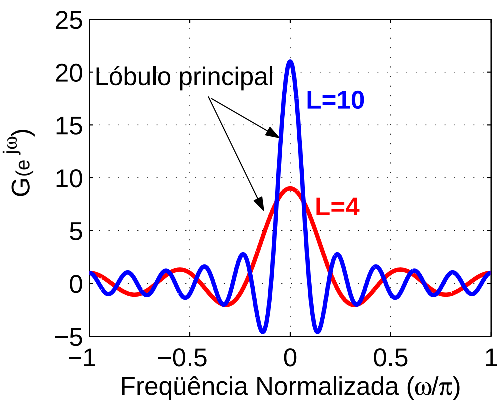

Figura 3: TFTD de janelas retangulares em que $L = (K-1)/2$ com $L = 4$ e com $L = 10$ uns. Ambas as janelas possuem simetria em relação a $n = 0$.

Como o valor máximo do lóbulo principal é K e a metade da sua largura $2\pi/K$ esse produto é sempre igual a 2π, independentemente do K adotado. Essa observação será usada posteriormente.

No caso em que não há simetria do sinal em relação a $n = 0$ a TFTD será uma função complexa. Para ilustrar essa situação tomamos as sequências do exemplo anterior e deslocamos de modo que ambas tenham a primeira amostra não nula em $n = 0$. No caso de $L = 4$ deslocamos 4 amostras e denotamos o sinal resultante como $x_1(n)$. No caso de $L = 10$ deslocamos 10 amostras e denotamos o sinal resultante como $x_2(n)$. Esses sinais de tempo discretos e os módulos e fases de suas respectivas TFTDs estão ilustrados na Figura 4.

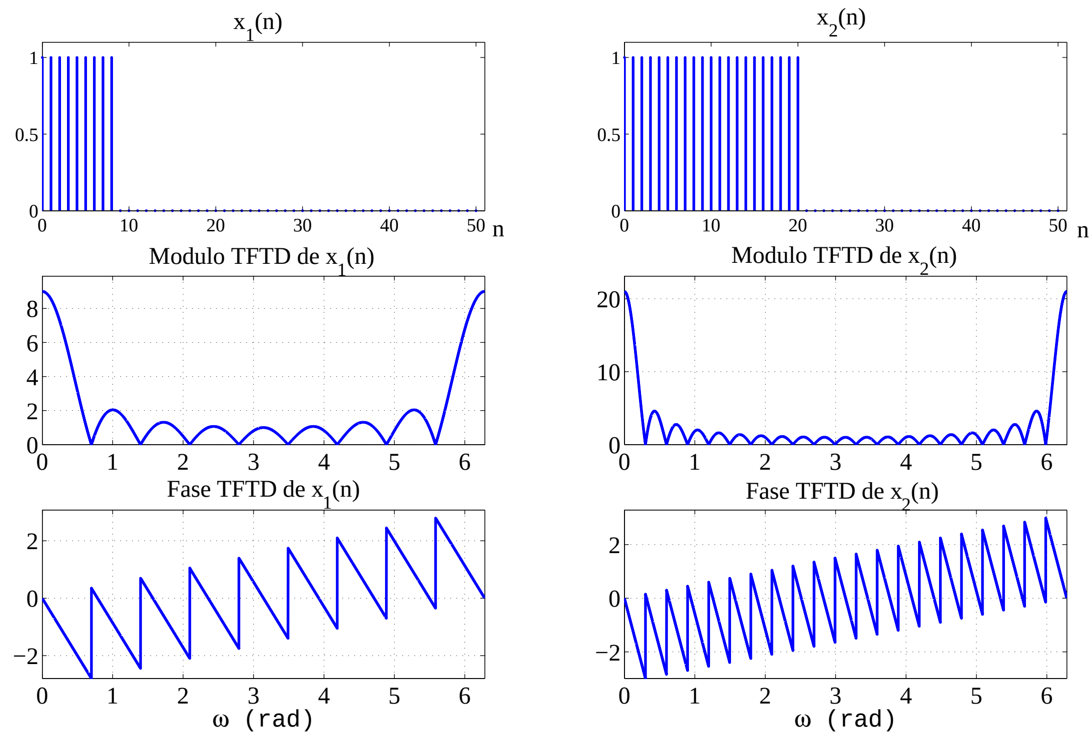

Figura 4: TFTD de janelas retangulares com durações de 9 e com 21 amostras unitárias.

EXEMPLO 3

O módulo e a fase do $g(n)$ do Exemplo 2 são ilustrados nas curvas (a) e (b) da Figura (5). Sejam as sequências $g_1(n)$, $g_2(n)$ e $g_3(n)$ com as fases das respectivas TFTDs ilustradas nas curvas (c), (d) e (e) da Figura (5). Sabe-se que as suas TFTDs possuem o mesmo módulo da TFTD de $g(n)$. A partir das informações das fases, determine as sequências $g_1(n)$, $g_2(n)$ e $g_3(n)$.
Solução: Sabemos que o comprimento da sequência é $7 = L_2 - L_1 + 1$. Essa informação pode ser obtida a partir da curva do módulo. Em um período $0 \leq \omega < 2\pi$, temos 6 valores de ω que fazem o módulo da TFTD igual a zero. Portanto, o número total de pontos é 7. Além disso, o coeficiente angular da reta da fase é $-(L_1 + L_2)/2$. Esse coeficiente pode ser obtido a partir da curva da fase. Portanto, para cada curva de fase temos duas equações:

$$K = L_2 - L_1 + 1 \quad \text{e}$$
$$\text{coeficiente angular da reta } = -\,(L_1 + L_2)/2$$

e duas incógnitas L_1 e L_2. Pela curva da fase de $g_1(n)$, obtemos o coeficiente angular

$$-\left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right) = -\frac{0.8571}{0.2857} = -3.$$

Assim, $L_2 - L1 = 6$ e $L_1 + L_2 = 6$. Resolvendo esse sistema de equações, temos $L_1 = 0$ e $L_2 = 6$. Portanto,

$$g_1(n) = \sum_{k=0}^{6} \delta(n-k).$$

Usando um raciocínio análogo, obtemos

$$g_2(n) = \sum_{k=-6}^{0} \delta(n-k) \quad \text{e} \quad g_3(n) = \sum_{k=1}^{7} \delta(n-k).$$

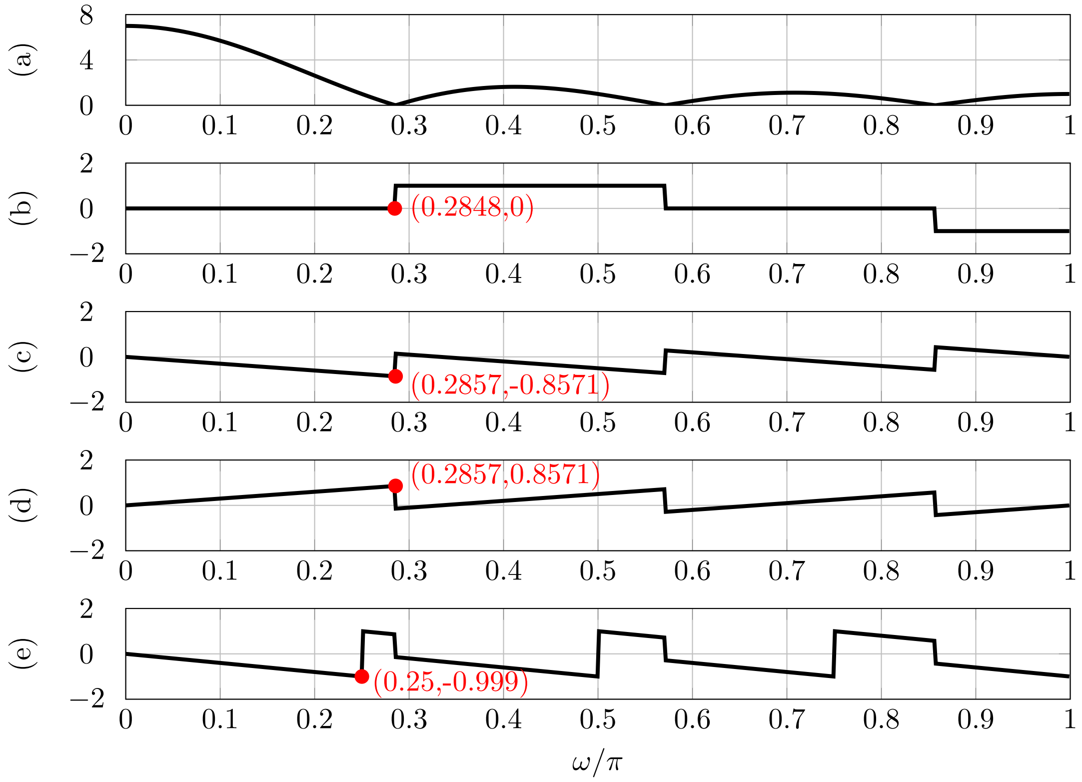

Figura 5: (a) Módulo e (b) fase da TFTD de $g(n)$; as curvas (c), (d) e (e) correspondem as fases das TFTDs de $g_1(n)$, $g_2(n)$ e $g_3(n)$ respectivamente.

◀

EXEMPLO 4

Seja a sequência

$$g(n) = \frac{1}{16} \sum_{\ell=0}^{15} \delta(n-\ell).$$

Sem fazer muitos cálculos, esboce o módulo e a fase da TFTD de $g(n)$.

Solução: Observando que $K = 16$, a altura do lóbulo principal é $K/16 = 1$. O número total de pontos nulos em um período de $G(e^{j\omega})$ é $K - 1 = 15$, ou seja, $G(e^{j\omega}) = 0$ para $\omega_k = \frac{2\pi}{16}k = \frac{\pi}{8}k$ com $k = 1, 2, \ldots, 14, 15$.
Para obter a curva da fase $\Theta(\omega) = -15\omega/2$, precisamos considerar as suas descontinuidades devido à mudança de sinal de $G(e^{j\omega})$. Para isso, vamos obter a fase em pontos vizinhos as suas descontinuidades. Esse pontos e as suas respectivas fases estão indicados na Tabela 3. Note que os saltos de π rad da terceira coluna são incluídos no cálculo da fase seguinte, conforme indicado na segunda coluna.

Tabela 3: Cálculo dos valores da fase vizinhos às suas descontinuidades.

ω (rad)	$\Theta(\omega) = -15\omega/2$	Saltos de π rad
0	0	0
$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{\pi}{8} = -\frac{15\pi}{16}$	$-\frac{15\pi}{16} + \pi = \frac{\pi}{16}$
$\frac{2\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{2\pi}{8} + \pi = -\frac{14\pi}{16}$	$-\frac{14\pi}{16} + \pi = \frac{2\pi}{16}$
$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{3\pi}{8} + 2\pi = -\frac{13\pi}{16}$	$-\frac{13\pi}{16} + \pi = \frac{3\pi}{16}$
$\frac{4\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{4\pi}{8} + 3\pi = -\frac{12\pi}{16}$	$-\frac{12\pi}{16} + \pi = \frac{4\pi}{16}$
$\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{5\pi}{8} + 4\pi = -\frac{11\pi}{16}$	$-\frac{11\pi}{16} + \pi = \frac{5\pi}{16}$
$\frac{6\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{6\pi}{8} + 5\pi = -\frac{10\pi}{16}$	$-\frac{10\pi}{16} + \pi = \frac{6\pi}{16}$
$\frac{7\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{7\pi}{8} + 6\pi = -\frac{9\pi}{16}$	$-\frac{9\pi}{16} + \pi = \frac{7\pi}{16}$
$\frac{8\pi}{8}$	$-\frac{15}{2}\frac{8\pi}{8} + 7\pi = -\frac{8\pi}{16}$	$-\frac{8\pi}{16} + \pi = \frac{8\pi}{16}$

Com os valores do módulo do lóbulo principal, e os valores da fase vizinhos às descontinuidades, é possível obter as curvas de módulo e da fase conforme ilustradas na Figura 6.

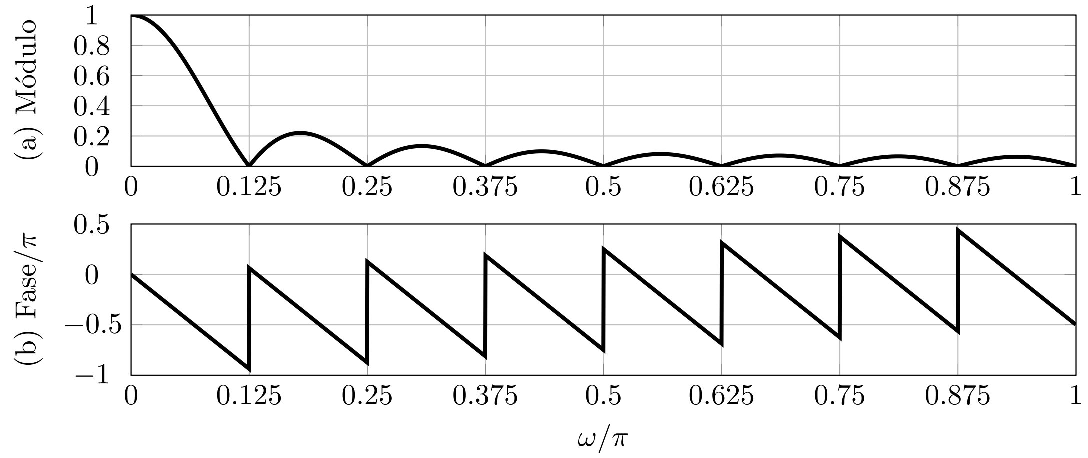

Figura 6: (a) Módulo e (b) fase da TFTD de $g(n)$ com $K = 16$ pontos.

◀