

3.8 A Transformada z unilateral

A transformada z unilateral é definida como

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}.$$

A Tz unilateral difere da Tz bilateral porque o limite inferior do somatório é sempre fixado em zero, independentemente dos valores de $x(n)$ para $n < 0$. Note que as definições das Tz unilateral e bilateral são idênticas apenas se $x(n) = 0$ para $n < 0$, ou seja, são transformadas idênticas apenas quando $x(n)$ é uma sequência causal.

As propriedades da RC da Tz unilateral serão as mesmas que aquelas da Tz bilateral aplicada à sequência lateral à direita causal. O limite da RC da Tz unilateral será definido pelo polo que está mais afastado da origem no plano z .

Em aplicações de PDS, as equações de diferenças são usualmente empregadas com condições de repouso inicial. Porém, em algumas situações, as condições de repouso inicial podem não ocorrer. Nesses casos, as propriedades de linearidade e deslocamento no tempo da Tz unilateral são ferramentas particularmente úteis. A propriedade da linearidade é idêntica àquela da Tz bilateral. Já a propriedade do deslocamento no tempo é diferente no caso unilateral.

Propriedade de deslocamento no tempo

- Deslocamento à direita:

$$x(n-k)u(n) \leftrightarrow z^{-k}\mathcal{X}(z) + z^{-k} \sum_{n=1}^k x(-n)z^n$$

- Deslocamento à esquerda:

$$x(n+k)u(n) \leftrightarrow z^k\mathcal{X}(z) - z^k \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n}$$

Vantagens da Tz unilateral

- é útil na resolução de equação de diferenças com coeficientes constantes.
- como na transformada de Laplace unilateral, não é necessário especificar a RC.

Solução de equações lineares de diferenças

Exemplo: Resolva

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 3x(n+1) + 5x(n) \quad (1)$$

com as seguintes condições iniciais

$$y(-1) = \frac{11}{6}, \quad y(-2) = \frac{37}{36},$$

e entrada

$$x(n) = 2^{-n}u(n).$$

Resolução: Para resolver a equação de diferenças usando a Transformada z unilateral, é preciso considerar as condições iniciais $y(0)$ e $y(1)$. Primeiramente, vamos fazer o cálculo das entradas $x(-2)$, $x(-1)$, $x(0)$ e $x(1)$.

$$\begin{aligned}x(-2) &= 2^2 u(-2) = 0. \\x(-1) &= 2u(-1) = 0. \\x(0) &= 2^0 u(0) = 1. \\x(1) &= 2^{-1} u(1) = 0,5.\end{aligned}$$

As condições iniciais para a saída $y(n)$ dadas no enunciado são:

$$\begin{aligned}y(-2) &= \frac{37}{36}. \\y(-1) &= \frac{11}{6}.\end{aligned}$$

As condições iniciais $y(0)$ e $y(1)$ são obtidas resolvendo-se a equação de diferenças para $n = -2$ e $n = -1$, respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned}y(0): \quad y(0) - 5y(-1) + 6y(-2) &= 3x(-1) + 5x(-2) \Rightarrow \\y(0) &= 5y(-1) - 6y(-2) = 5 \cdot \frac{11}{6} - 6 \cdot \frac{37}{36} = 3. \\y(1): \quad y(1) - 5y(0) + 6y(-1) &= 3x(0) + 5x(-1) \Rightarrow \\y(1) &= 5y(0) - 6y(-1) + 3x(0) = 5 \cdot 3 - 6 \cdot \frac{11}{6} + 3 \cdot 1 = 7.\end{aligned}$$

Aplicando a Tz unilateral em cada termo de (1) e lançando mão da propriedade de deslocamento à esquerda no tempo, obtém-se

$$\begin{aligned}y(n)u(n) &\leftrightarrow \mathcal{Y}(z) \\y(n+1)u(n) &\leftrightarrow z\mathcal{Y}(z) - zy(0) = z\mathcal{Y}(z) - 3z \\y(n+2)u(n) &\leftrightarrow z^2\mathcal{Y}(z) - z^2y(0) - zy(1) = z^2\mathcal{Y}(z) - 3z^2 - 7z \\x(n) = 2^{-n}u(n) &\leftrightarrow \mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \\x(n+1)u(n) &\leftrightarrow z\mathcal{X}(z) - zx(0) = \frac{z}{1 - 0,5z^{-1}} - z\end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em (1), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(z) &= \frac{3 - 9,5z^{-1} + 10,5z^{-2}}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \\&= \frac{3z^3 - 9,5z^2 + 10,5z}{(z - 0,5)(z - 2)(z - 3)} \\&= 3 + \frac{A_1}{z - 0,5} + \frac{A_2}{z - 2} + \frac{A_3}{z - 3} \\&= 3 + \frac{A_1 z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{A_2 z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} + \frac{A_3 z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}.\end{aligned}$$

com $A_1 = 13/15$, $A_2 = -14/3$, $A_3 = 54/5$. Antitransformando, chega-se a:

$$y(n) = 3\delta(n) + \left[\frac{13}{15}(0,5)^{n-1} - \frac{14}{3}2^{n-1} + \frac{54}{5}3^{n-1} \right] u(n-1).$$