PTC3424 - Primeira prova - EPUSP, 05 de abril de 2017

Profa. Maria D. Miranda

A prova é sem consulta. Não é permitido o uso de calculadora, celular e nem consultar livro, apostila ou anotação própria. Qualquer tentativa de consulta zera integralmente a nota da prova.

Questão	1	2	3	4	Total
Peso	1,0	3,0	3,0	3,0	10
Nota					

Nome: GABARITO

1. Seja um sistema LIT descrito por uma função de sistema

$$H(z) = \mathrm{T}z\{h(n)\}$$

sendo $h(n)$ a sua resposta ao pulso unitário.

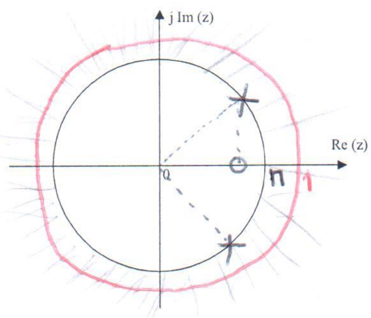
Sabe-se que $H(z)$ possui dois zeros, $z_1 = 0$ e $z_2 = r\cos(\pi/4)$, e dois polos $p_1 = re^{j\pi/4}$ e $p_2 = re^{-j\pi/4}$.

(a) Forneça $H(z)$ como razão de dois polinômios.

(b) Determine a faixa de valores de r de modo a garantir um $h(n)$ causal e estável.

(c) Faça o diagrama de polos e zeros de $H(z)$ e indique a região de convergência considerando um sistema causal e estável.

c)



a) $$\boxed{H(z) = \frac{z\,(z - r\cos\pi/4)}{(z - re^{j\pi/4})(z - re^{-j\pi/4})} = \frac{1 - r\cos\pi/4 \,.\, z^{-1}}{(1 - re^{j\pi/4} \,.\, z^{-1})(1 - re^{-j\pi/4} \,.\, z^{-1})}}$$

b) p/ ser causal RC $|z| > r$

p/ ser estável $r < 1$

$r < |z|$ com $r < 1$

2. Seja um sistema de tempo discreto com resposta ao pulso unitário

$$h(n) = v(n)\cos(\phi n)$$

Sabe-se que

$$v(n) \overset{\mathrm{T}z}{\longleftrightarrow} V(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad \mathrm{RC}_V: \ |z| > |\alpha|.$$

Responda os itens (a) a (d) a seguir supondo $\alpha = \sqrt{2}$ e $\phi = \pi/4$.

(a) Esboce $h(n)$ para $0 \le n \le 7$.

(b) Determine a transformada z de $x(n) = \alpha^n e^{j\phi n} u(n)$, sendo $u(n)$ o degrau unitário.

(c) Determine a função de sistema $H(z) = \mathrm{T}z\{h(n)\}$ em termos de polinômios de ordem 1 de z.

(d) O sistema descrito pelo $h(n)$ dado é estável? Justifique adequadamente sua resposta.

(e) Especifique a faixa de valores de α que possibilite obter o módulo e a fase da resposta em frequência a partir do diagrama de polos e zeros de $H(z)$. Justifique adequadamente sua resposta.

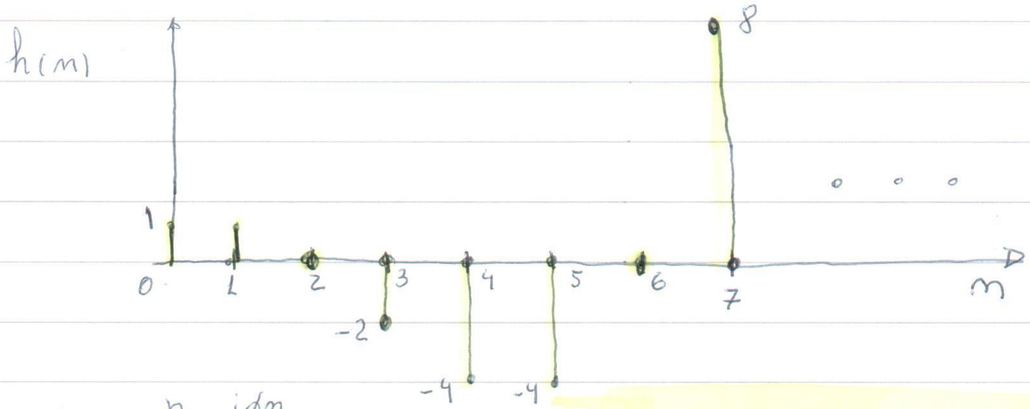
2ª Questão

$\to (\sqrt{2})^n$

2.a) (0,6)

$$\left.\begin{array}{l} h(n) = v(n)\,\cos\phi n \\ v(n) = \alpha^n . u(n) \end{array}\right\} \quad h(n) = \alpha^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) . u(n)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\cos(\frac{\pi}{4} n)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
h(n)	1	1	0	-2	-4	-4	0	8



2.b) (0,6) $x(n) = \alpha^n . e^{j\phi n} . u(n)$

$$x(n) = \left(\alpha e^{j\phi}\right)^n . u(n) \Rightarrow \begin{cases} X(z) = \dfrac{1}{(1 - \alpha e^{j\phi} . z^{-1})} \\ |z| > |\alpha| \end{cases}$$

(0,6) 2.c)
$$H(z) = T_z\left(\alpha^n . \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) . u(n)\right) = T_z\left(\frac{(\alpha e^{j\frac{\pi}{4}})^n u(n) + (\alpha e^{-j\frac{\pi}{4}})^n u(n)}{2}\right)$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j\phi} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\phi} . z^{-1}}\right) = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{z - \alpha e^{j\phi}} + \frac{1}{z - \alpha e^{-j\phi}}\right)$$

(0,6) 2.d) e (0,6) 2.e)

Com $\alpha = \sqrt{2}$ então $|\alpha| > 1$ como h(n) dado é causal não será possível incluir a circunferência unitária na RC de H(z) e o sistema será BIBO instável.

P/ ser BIBO estável $|\alpha| < 1$

3. Um filtro digital causal tem resposta ao pulso unitário $h(n)$ e função de sistema

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}.$$

Pede-se:

(a) Determine a região de convergência de $H(z)$.

(b) O filtro é estável? Justifique.

(c) Calcule a resposta ao pulso unitário $h(n)$ do filtro.

(d) Determine a transformada z da entrada $x(n)$ que produz a saída

$$y(n) = -(2)^n\, u(-n-1) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n).$$

Apresente $X(z)$ como razão de dois polinômios em z^{-1}.

3ª Questão

(0,75) 3. a) $H(z) = \dfrac{(z-1)}{(z+\frac{1}{4})(z+\frac{3}{4})}$

$RC_H = (|z| > \frac{1}{4}) \cap (|z| > \frac{3}{4}) = |z| > \frac{3}{4}$

(0,75) 3. b) Como RC_H é $|z| > \frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4} < 1$

a RC_H contém a circunferência unitária logo o sistema será BIBO estável.

(0,75) 3. c) $H(z) = \dfrac{z-1}{(z+\frac{1}{4})(z+\frac{3}{4})} = \dfrac{A_1}{z+\frac{1}{4}} + \dfrac{A_2}{z+\frac{3}{4}}$

$H(z) = -\frac{5}{2} \cdot \dfrac{z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{7}{2} \cdot \dfrac{z^{-1}}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})}$

$$\boxed{h(n) = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot u(n-1) + \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot u(n-1)}$$

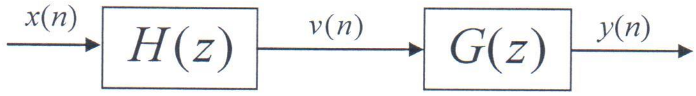
(0,75) 3. d) $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$

$X(z) = \dfrac{H(z)}{Y(z)}$

$Y(z) = \dfrac{1}{1-2z^{-1}} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})} = \dfrac{z}{(z-2)} + \dfrac{z}{(4z+1)}$

$Y(z) = \dfrac{z(5z-1)}{(z-2)(4z+1)} \Rightarrow X(z) = \dfrac{(z-1)(z-2)(z+1/4)4}{(z+\frac{1}{4})(z+\frac{3}{4})z(5z-1)} = \dfrac{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})z^{-1}4}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(5-z^{-1})}$

4. Deseja-se projetar um sistema causal e estável para compensar as distorções da transmissão de um sinal de áudio. Os sistemas de distorção $H(z)$ e de compensação $G(z)$ estão associados conforme diagrama de blocos da figura a seguir.



Nesse esquema, $x(n)$ representa o sinal de áudio e as distorções da transmissão são modeladas com a função de sistema

$$H(z) = \frac{(1 - 4z^{-2})(1 + 0{,}5\, z^{-1})}{1 - 0{,}25\, z^{-1}}$$

A saída distorcida $v(n)$ é aplicada à entrada do sistema compensador $G(z)$. Considerando essas informações, responda os itens a seguir.

(a) Forneça o diagrama de polos e zeros de $H(z)$.

(b) É possível obter diretamente um sistema $G(z) = 1/H(z)$ causal e estável? Justifique adequadamente sua resposta.

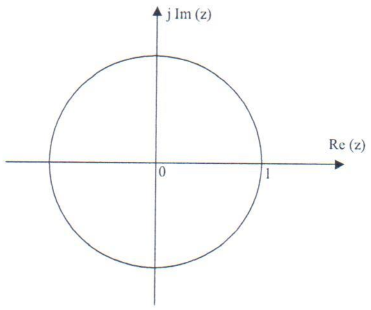
(c) Seja a função de sistema

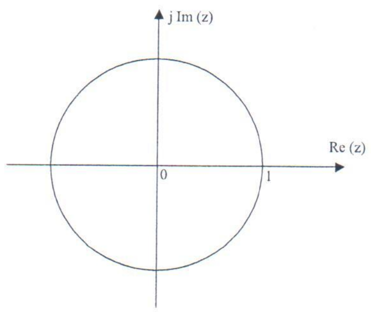
$$H_1(z) = \frac{1 - 4z^{-2}}{z^{-2} - 4}$$

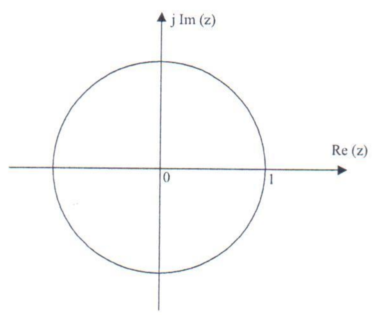
- Forneça o diagrama de polos e zeros de $H_1(z)$
- Esboce o módulo da resposta em frequência do sistema $H_1(z)$

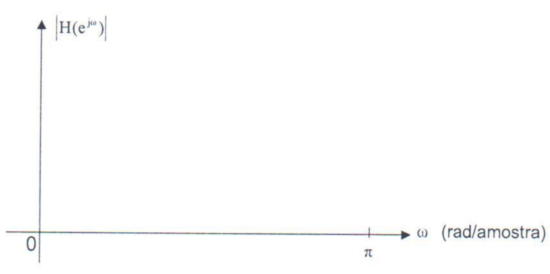
(d) Um estagiário sugeriu considerar $G(z) = 1/H_2(z)$, em que o sistema $H_2(z)$ é aquele que colocado em cascata com $H_1(z)$ fornece $H(z)$. Para verificar se esta sugestão é boa, pede-se:

- A função de sistema $H_2(z)$
- O diagrama de polos e zeros de $H_2(z)$
- O sistema $H_2(z)$ é de fase-mínima?
- Você aceitaria a proposta do estagiário? Justifique sua resposta.









4ª Questão

(0,5) 4.a) $H(z) = \dfrac{(z^2-4)(z+1/2)}{z^2(z-1/4)} = \dfrac{(z-2)(z+2).(z+1/2)}{z^2(z-1/4)}$

$H(z) \begin{cases} 3 \text{ zeros} & z_1 = 2 \; ; \; z_2 = -2 \text{ e } z_3 = -1/2 \\ 3 \text{ polos} & p_1 = p_2 = 0 \text{ e } p_3 = 1/4 \end{cases}$

(0,5) 4.b) $G(z) = \dfrac{1}{H(z)}$ os dois zeros de $H(z)$ que estão fora do círculo unitário vão ser os polos de $G(z)$.

Portanto, não é possível obter um $G(z)$ causal e estável

(0,8) 4.c) $H_1(z) = \dfrac{1-4z^{-2}}{z^{-2}-4} = \dfrac{z^2-4}{1-4z^2} = \dfrac{(z^2-4)}{(\frac{1}{4}-z^2)} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{(z-2)(z+2)}{(\frac{1}{2}-z)(\frac{1}{2}+z)} \cdot \dfrac{1}{4}$

$H_1(z) \begin{cases} 2 \text{ zeros} & z_1 = 2 \text{ e } z_2 = -2 \\ 2 \text{ polos} & p_1 = \frac{1}{2} \text{ e } p_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Os zeros são reais e os polos são seus recíprocos ∴ é um passa-tudo.

ganho $\dfrac{(1-2)(1+2)}{(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}+1)} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1 \cdot 3}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{-3}{-3} \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{4} = 1$

(1,2) 4.d) $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

$H_2(z) = \dfrac{H(z)}{H_1(z)} = \dfrac{\cancel{(z-2)}\cancel{(z+2)}\,(z+1/2)}{z^2(z-1/4)} \cdot \dfrac{(\frac{1}{2}-z)(\frac{1}{2}+z)}{\cancel{(z-2)}\cancel{(z+2)}} \cdot 4$

$H_2(z) = \dfrac{(z+1/2)^2(1/2-z) \cdot 4}{z^2(z-1/4)} = \dfrac{(1-z^{-1}/2)^2(z^{-1}/2-1)}{(1-z^{-1}/4)} \cdot 4$

$$H_2(z) \begin{cases} 3 \text{ zeros} & z_1 = z_2 = -1/2 \quad \text{e} \quad z_3 = 1/2 \\ 3 \text{ polos} & p_1 = p_2 = 0 \quad \text{e} \quad p_3 = 1/4 \end{cases}$$

Todos os polos e zeros de $H_2(z)$ em módulo são menores que um. Assim, estão no interior do círculo unitário. Logo $H_2(z)$ é um sistema de fase mínima.

$$H(z) = H_1(z) . H_2(z)$$

$H_1(z)$ é um passa tudo

$H_2(z)$ é um sistema de fase-mínima

Fazendo $G(z) = \dfrac{1}{H_2(z)}$ resulta

$$\boxed{H(z) . G(z) = H_1(z) . H_2(z) . \frac{1}{H_2(z)} = H_1(z)}$$

que é um passa-tudo.

$H_2(z)$ vai compensar as distorções de magnitude da resposta em frequência do sistema $H(z)$.

Assim a proposta do estagiário deve sim ser levada em consideração.