Essas notas sobre Transformada z foram feitas para o curso de PTC 2324 (Processamento Digital de Sinais) pela Profa. Maria D. Miranda com a colaboração do Monitor Flávio Renê M. Pavan.

EPUSP - PTC, março de 2017.

1 Transformada z

1.1 Introdução

Considere a sequência $x(n)$ ilustrada na Figura 1. Note que $x(n)$ não é absolutamente somável e nem somável em média quadrática. Porém, se multiplicarmos $x(n)$ por uma outra sequência adequada, como o r^{-n} indicado na figura, a sequência resultante $x(n)\,r^{-n}$ torna-se absolutamente somável.

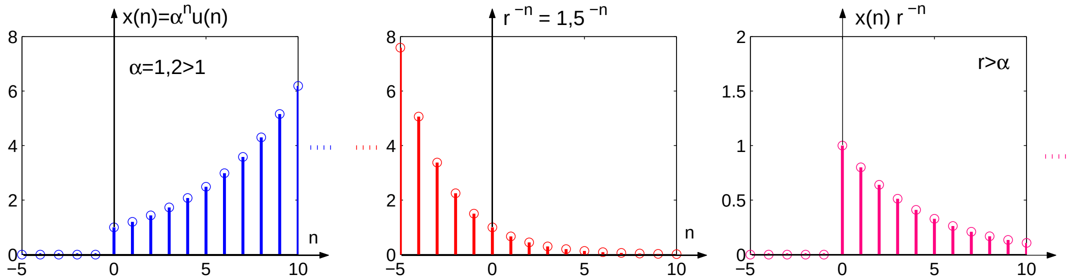


Figura 1: Exemplo da transformação de uma sequência não absolutamente somável em outra sequência absolutamente somável.

Exemplos de faixa de valores de r

Para cada $v(n)$ dado, determine a faixa de valores de r para assegurar a convergência da sequência $v(n)\,r^{-n}$.

1. **Sequência lateral direita**: $v(n) = 2^n u(n)$

$$v(n)\,r^{-n} = 2^n u(n)\,r^{-n} = \left(\frac{2}{r}\right)^n u(n)$$

Se $|r| > 2$, então $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{|r|}\right)^n = 0$

2. **Sequência lateral esquerda**: $v(n) = (1/2)^n u(-n)$

$$v(n)\,r^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)\,r^{-n} = \left(\frac{1}{2r}\right)^n u(-n) = (2r)^\ell\, u(\ell)$$

sendo $\ell = -n$. Se $|r| < 1/2$, então $\lim_{\ell\to\infty} (2\,|r|)^\ell = 0$

3. **Sequência bilateral**: $v(n) = 2^n$

Para $n > 0 \;\longrightarrow\; r > 2$. Para $n < 0 \;\longrightarrow\; r < 2$. Portanto, $\nexists\, r$ tal que $\lim_{n\to\infty} v(n)\,r^{-n} < \infty$

Motivação para a Transformada z

- Papel equivalente ao da Transformada de Laplace (tempo contínuo).
- Permite manipulações algébricas simples.
- Pode existir para muitas sequências em que a TFTD não existe.
- Facilita a análise da função de transferência de sistemas de tempo discreto.

1.2 Definição da Tz

Define-se a Transformada z (Tz) de uma sequência $x(n)$ como

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}}$$

sendo $z \in \mathbb{C}$. Com $z = re^{j\omega}$, pode-se escrever

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n},$$

o que permite interpretar a Tz de $x(n)$ como a TFTD da sequência $x(n)r^{-n}$, para cada valor de $r \in \mathbb{R}_+$ escolhido. Em particular, se for possível tomar $r = 1$, a Tz de $x(n)$ se reduz à TFTD de $x(n)$.

Se $x(n)$ é uma sequência causal, ou seja, $x(n) = 0$ para $n < 0$, então, a Tz se reduz à

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}.}$$

Essa expressão também representa a definição da Tz unilateral.

Convergência da Tz

Para que a Transformada z convirja é necessário e suficiente que

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \right| < +\infty.$$

Como $|X(z)| \leq \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)z^{-n}|$, então uma condição suficiente (mas não necessária) para a convergência é dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)r^{-n}||e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)r^{-n}| < +\infty.$$

Note que:

- Quando $r = 1$ a Tz é a própria TFTD.
- Se $\exists$ a TFTD vai $\exists$ a Tz, porém a recíproca não é verdadeira.

A região de convergência

A região de convergência (RC) da Tz possui formato de um anel centrado na origem do plano $z = re^{j\omega}$, cujas bordas internas e externas são circunferências.

$$\text{RC} = \{z : r_{\text{min}} < |z| < r_{\text{max}}\}.$$

1.3 Exemplos de Tz

1. **A Tz do pulso unitário**
   Seja $x(n) = \delta(n - \Delta)$ o pulso unitário. A sua Tz é dada por

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - \Delta) z^{-n} = 1 \cdot z^{-\Delta} + \sum_{n \neq \Delta} 0 \cdot z^{-n} = z^{-\Delta}.$$

   - $\Delta = 0$: A Tz do pulso unitário $x(n) = \delta(n)$ é constante e igual a 1. O somatório converge, independente do valor de z. Assim, a RC da Tz é todo o plano z.
   - $\Delta < 0$: A Tz do pulso unitário deslocado para esquerda $x(n) = \delta(n + |\Delta|)$ é igual a $z^{|\Delta|}$. O somatório converge para todo z, exceto $z = +\infty$. Assim a RC da Tz é todo o plano z exceto $z = +\infty$.
   - $\Delta > 0$: A Tz do pulso unitário deslocado para direita $x(n) = \delta(n - |\Delta|)$ é igual a $z^{-|\Delta|}$. O somatório converge para todo z, exceto $z = 0$. Assim a RC da Tz é todo o plano z exceto $z = 0$.

2. **Transformada z de exponenciais reais**
   Sejam $x_1(n) = a^n u(n)$ uma sequência causal e $x_2(n) = -a^n u(-n-1)$ uma sequência não-causal. Essas sequências têm a mesma expressão para a Tz, ou seja

$$X_1(z) = X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

   porém com diferentes regiões de convergência, dadas por $R_{x_1} = \{|z| > |a|\}$ e $R_{x_2} = \{|z| < |a|\}$.

3. Seja $x_1(n) = u(n)$ o degrau unitário. Usando o resultado anterior, chega-se a

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

   Considerando agora a sequência não-causal $x_2(n) = -u(-n-1)$, obtém-se

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| < 1.$$

$x_1(n)$ e $x_2(n)$ possuem a mesma expressão para a Tz, mas diferentes regiões de convergência (RC).

Portanto, no cálculo da Tz bilateral, é essencial obter também a sua RC para que haja uma única relação entre $\{x(n)\}$ e a sua Tz.

A Tz da soma de exponenciais: sequência lateral à direita

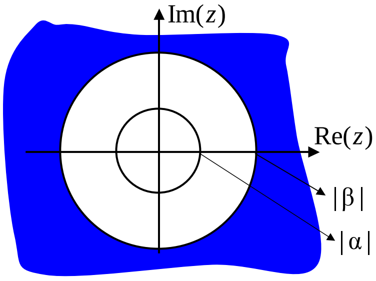
Seja a sequência lateral à direita

$$x_1(n) = (a_1\alpha^n + a_2\beta^n)u(n - N_0),$$

com a_1, a_2, α e β constantes reais tais que $|\alpha| < |\beta|$ e N_0 inteiro positivo ou negativo. Para calcular a sua Tz, aplica-se a definição, ou seja,

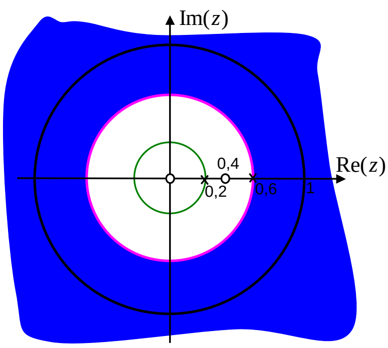
$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_1\alpha^n u(n-N_0)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_2\beta^n u(n-N_0)z^{-n} \\ &= a_1 \underbrace{\sum_{n=N_0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^n}_{\text{converge para } |z|>|\alpha|} + a_2 \underbrace{\sum_{n=N_0}^{+\infty} (\beta z^{-1})^n}_{\text{converge para } |z|>|\beta|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{a_1(\alpha z^{-1})^{N_0}}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{a_2(\beta z^{-1})^{N_0}}{1-\beta z^{-1}} \\ \mathcal{R}_{x_1} &= \{|z| > |\alpha|\} \cap \{|z| > |\beta|\} \\ &= |z| > |\beta| \end{aligned}$$



Exemplo: Para $N_0 = 0$; $a_1 = a_2 = 1$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,6$, tem-se

$$x_1(n) = [(0,2)^n + (0,6)^n]u(n) \longleftrightarrow X_1(z) = \frac{2z(z-0,4)}{(z-0,2)(z-0,6)}$$



A Tz da soma de exponenciais: sequência lateral à esquerda

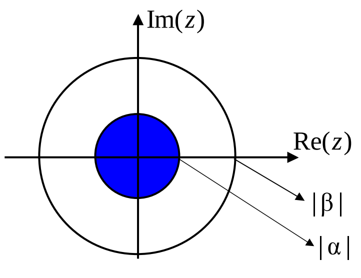
Seja a sequência lateral à esquerda

$$x_2(n) = (a_1\alpha^n + a_2\beta^n)u(-n - N_0),$$

com a_1, a_2, α e β constantes reais tais que $|\alpha| < |\beta|$ e N_0 inteiro positivo ou negativo. Para calcular a sua Tz, aplica-se a definição, ou seja,

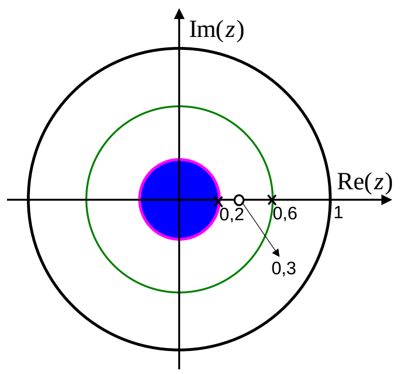
$$\begin{aligned}
X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_1\alpha^n u(-n-N_0)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_2\beta^n u(-n-N_0)z^{-n} \\
&= a_1 \sum_{n=-\infty}^{-N_0} \alpha^n z^{-n} + a_2 \sum_{n=-\infty}^{-N_0} \beta^n z^{-n} \\
&= a_1 \underbrace{\sum_{k=N_0}^{+\infty} (\alpha^{-1}z)^k}_{\text{converge para } |z|<|\alpha|} \quad + \quad a_2 \underbrace{\sum_{k=N_0}^{+\infty} (\beta^{-1}z)^k}_{\text{converge para } |z|<|\beta|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2(z) &= \frac{a_1(\alpha^{-1}z)^{N_0}}{1-\alpha^{-1}z} + \frac{a_2(\beta^{-1}z)^{N_0}}{1-\beta^{-1}z} \\
\mathcal{R}_{x_2} &= \{|z| < |\alpha|\} \cap \{|z| < |\beta|\} \\
&= |z| < |\alpha|
\end{aligned}$$



Exemplo: Para $N_0 = 0$; $a_1 = a_2 = 1$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,6$, tem-se

$$x_2(n) = [(0,2)^n + (0,6)^n]u(-n) \longleftrightarrow X_2(z) = \frac{-0,8(z-0,3)}{(z-0,2)(z-0,6)}$$



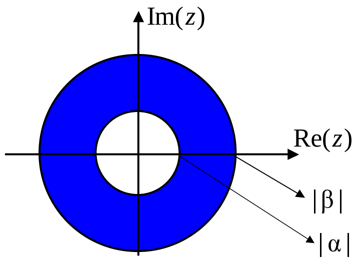
A Tz da soma de exponenciais: sequência bilateral

Seja a sequência bilateral

$$x_3(n) = a_1\alpha^n u(n-N_0) + a_2\beta^n u(-n-N_0),$$

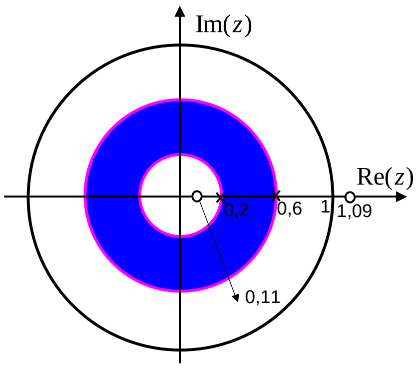
com a_1, a_2, α e β constantes reais tais que $|\alpha| < |\beta|$ e N_0 inteiro positivo ou negativo. Para calcular a sua Tz, aplica-se a definição, chegando-se a

$$\begin{aligned} X_3(z) &= \frac{a_1(\alpha z^{-1})^{N_0}}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{a_2(\beta^{-1}z)^{N_0}}{1-\beta^{-1}z} \\ \mathcal{R}_{x_3} &= \{|z| > |\alpha|\} \cap \{|z| < |\beta|\} \\ &= |\alpha| < |z| < |\beta| \end{aligned}$$



Exemplo: Para $N_0 = 0$; $a_1 = a_2 = 1$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,6$, tem-se

$$x_3(n) = (0,2)^n u(n) + (0,6)^n u(-n) \longleftrightarrow X_3(z) = \frac{(z-1,09)(z-0,11)}{(z-0,2)(z-0,6)}$$



Tz: sequência finita à direita

A Tz da sequência

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \textsf{se } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \textsf{caso contrário} \end{cases}$$

é dada por

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}.$$

Se $|a| < +\infty$, então a RC é todo o plano z com exceção da origem $z = 0$.

Tz: sequência finita à esquerda

A Tz da sequência

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \textsf{se } -N+1 \leq n \leq 0 \\ 0, & \textsf{caso contrário} \end{cases}$$

é dada por

$$X(z) = \sum_{n=-N+1}^{0} a^n z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} (a^{-1}z)^k = \frac{1-(a^{-1}z)^N}{1-a^{-1}z}.$$

Se $|a| \neq 0$, então a RC corresponde à região $|z| < +\infty$ ou $z \neq +\infty$.

1.4 Propriedades da região de convergência (RC)

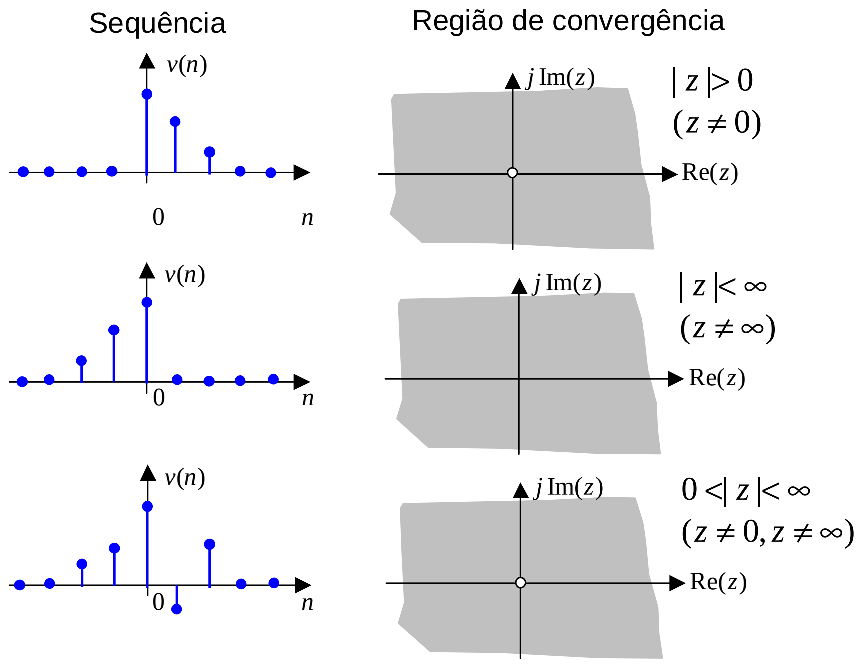


Figura 2: Possíveis RCs para sequências de duração finita

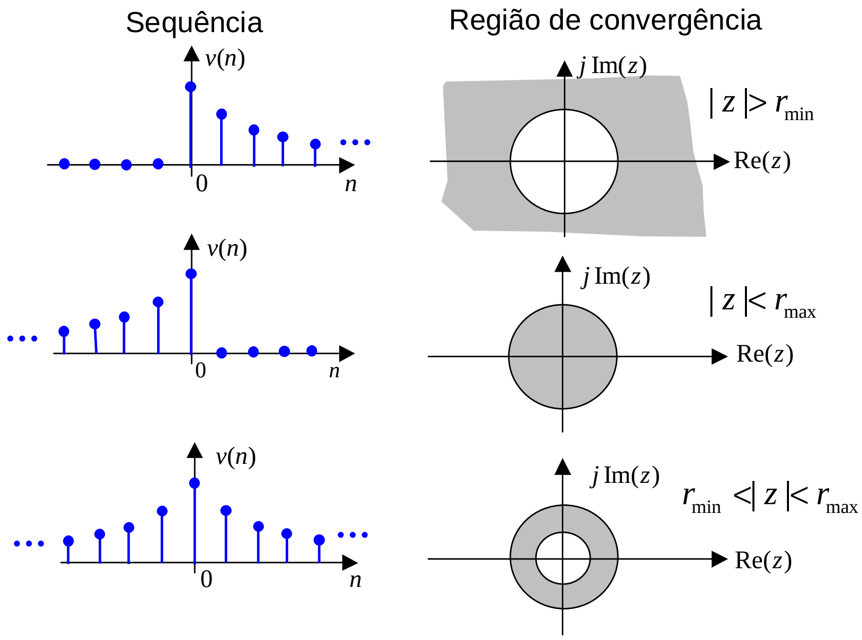


Figura 3: Possíveis RCs para sequências de duração infinita

A RC de $X(z) = \mathrm{T}z\{x(n)\}$ é um conjunto de valores de z que assegura somente valores finitos a função $X(z)$. Nas Figuras 2 e 3 estão ilustradas as possíveis RCs para sequências de duração finita e de duração infinita. Note que cada um dos tipos de sequências no domínio do tempo pode ter diferentes formas, por exemplo, exponenciais crescentes, exponenciais decrescentes, amostras com valores positivos e ou negativos, etc. Porém, as formas das RCs associadas à duração de cada sequência e ao fato de ela ser lateral à direita, à esquerda ou bilateral, são únicas.

Nota-se que as propriedades da RC dependem da natureza do sinal. A seguir são resumidas as principais propriedades da RC.

1. A RC é um anel centrado na origem: $0 < r_{\min} < |z| < r_{\max} < \infty$.
   Nota-se que em alguns casos especiais os limites inferior $|z| = 0$ e/ou superior $|z| = \infty$ da desigualdade podem também ser incluídos na RC como apontado nas Propriedades 5 e 6. Por esse motivo essa propriedade é também apresentada como:
   A RC é um anel centrado na origem: $0 \leq r_{\min} < |z| < r_{\max} \leq \infty$.

2. A TFTD de $x(n)$ converge absolutamente se a RC de $X(z)$ incluir a circunferência unitária.

3. A RC não pode conter polos.

4. Se $x(n)$ for de duração finita, a RC é o plano completo com exceção de $z = 0$ e/ou $z = +\infty$

5. Se $x(n)$ for lateral à direita, a RC se estende para fora do polo de maior magnitude de $X(z)$, incluindo possivelmente $z = +\infty$.

6. Se $x(n)$ for lateral à esquerda, a RC é interna a uma circunferência e é delimitada pelo polo de menor magnitude de $X(z)$, incluindo possivelmente $z = 0$.

7. Se $x(n)$ for bilateral, a RC é um anel.

8. A RC deve ser uma região conectada (função convexa).

1.5 Propriedades da Tz

As propriedades da Tz são análogas às propriedades da TFTD. Porém, a RC da Tz pode ser modificada conforme o tipo de operação aplicada sobre uma determinada sequência. A seguir considera-se que existe o par transformado

$$x(n) \longleftrightarrow X(z)$$

e $X(z)$ está associada a uma região de convergência $\text{RC}_X = \mathcal{R}_x$.

Propriedade da linearidade

$$y(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \longleftrightarrow Y(z) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$
$$z \in \mathcal{R}_y \supseteq (\mathcal{R}_{x_1} \cap \mathcal{R}_{x_2})$$

Prova: Segue diretamente da definição da Tz. ◀

Nota-se que a RC deve conter pelo menos a intersecção das duas RCs, mas pode ser maior.

Exemplos:

- Determine a RC de $v(n) = u(n) - u(n-1)$.
- Seja $x(n) = a^n u(n) - a^n u(n-N)$.

  Determine a RC de $X(z)$ a partir das RCs das Transformadas z das sequências $a^n u(n)$ e $a^n u(n-N)$.

Propriedade do deslocamento no tempo

$$y(n) = x(n - n_o) \longleftrightarrow Y(z) = z^{-n_o}X(z), \quad z \in \mathcal{R}_y = \mathcal{R}_x \pm \{z = 0\} \pm |z| = +\infty$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}z\{x(n-n_o)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-n_o)z^{-n} \\
&= z^{n_o-n_o}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-n_o)z^{-n} = z^{-n_o}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-n_o)z^{-(n-n_o)} \\
&= z^{-n_o}\sum_{k=-\infty}^{=\infty} x(k)z^{-(k)} = z^{-n_o}X(z). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Exemplo: Seja $x(n) = (1/4)^n\ u(n)$. Calcule a Tz de $x(n)$, $x(n-10)$ e $x(n+10)$ e as suas respectivas RCs.

Propriedade da convolução

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) \longleftrightarrow Y(z) = X_1(z)X_2(z), \; z \in \mathcal{R}_y \supseteq (\mathcal{R}_{x_1} \cap \mathcal{R}_{x_2})$$

Prova:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[x_1(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n-k)z^{-(n-k)} \right] \\
&= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)z^{-k} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2(m)z^{-m} \right] = X_1(z)X_2(z) \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Nota-se que a RC deve conter pelo menos a intersecção das duas RCs, mas pode ser maior.

Exemplo: Sejam $h_1(n) = \alpha^n u(n)$ e $h_2(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$ as respostas ao pulso unitário de dois sistemas associados em cascata. Determine a Tz de cada um dos subsistemas e as suas respectivas RCs. Determine a Tz da resposta ao pulso unitário do sistema equivalente da associação e a sua RC.

Propriedade da diferenciação no domínio z

$$y(n) = nx(n) \longleftrightarrow Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad \mathcal{R}_y : z \in \mathcal{R}_x \pm \{z = 0\} \pm |z| = +\infty$$

Prova:

$$\begin{aligned} Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} &= -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\frac{dz^{-n}}{dz} \\ &= -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left[-nz^{-n-1}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[nx(n)\right] z^{-n}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Exemplos:

1. Seja $Y(z) = \dfrac{1}{(1 - z^{-1})^2}$ com $\mathrm{RC}_Y : |z| > 1$. Determine $y(n)$.
2. Seja $v(n) = na^n u(n)$. Determine $V(z)$.
3. Seja $X(z) = \log(1 + az^{-1})$. Determine $x(n)$.

Propriedade da mudança de escala no domínio z

$$y(n) = z_o^n x(n) \longleftrightarrow Y(z) = X\left(\frac{z}{z_o}\right), \quad \mathcal{R}_y : z \in |z_o|\mathcal{R}_x$$

Prova:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_o^n x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left[\frac{z}{z_o}\right]^{-n} = X\left(\frac{z}{z_o}\right). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

No caso em que $z_o = e^{j\omega_o}$, ou seja, a constante z_o é uma exponencial complexa avaliada em ω_o tem-se

$$y(n) = e^{j\omega_o n} x(n)$$

Usando a propriedade resulta

$$Y(z) = X(e^{-j\omega_o} z)$$

Esse z_o em particular corresponde a uma rotação no plano z.

Exemplo: A partir da Tz do degrau unitário $u(n)$, determine a Tz da sequência

$$y(n) = r^n \cos(\omega_o n) u(n).$$

Propriedade da inversão do eixo do tempo

$$y(n) = x(-n) \longleftrightarrow Y(z) = X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \mathcal{R}_y = z \in \mathcal{R}_x^{-1}$$

Prova:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n)z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\left(z^{-1}\right)^{-k} = X\left(\frac{1}{z}\right). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Nota-se que se $\mathcal{R}_x = \alpha < z < \beta$, então $\mathcal{R}_y = \beta^{-1} < z < \alpha^{-1}$.

Exemplo: Usando a Tz de $x(n) = a^n u(n)$, determine a Tz de $y(n) = x(-n)$.

Propriedade da conjugação

$$y(n) = x^*(n) \longleftrightarrow Y(z) = X^*\left(z^*\right), \quad z \in \mathcal{R}_x$$

Prova:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x(n)(z^*)^{-n}\right]^* \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(z^*\right)^{-n}\right]^* = X^*(z^*). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

1.6 Resumo: propriedades e pares transformados

Nas Tabelas 1 e 2 são apresentados as principais propriedades e pares de Transformada z. Essas propriedades e pares transformados são úteis em diferentes contextos que envolvem o processamento em tempo discreto de sinais. Cabe notar que algumas das Tz da Tabela 2 foram obtidas com as propriedades da Tabela 1.

Tabela 1: Principais propriedades da Tz

Propriedade	**Sequência**	**Tz**	**RC**
	$x(n)$	$X(z)$	R_x
Linearidade	$\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$	$\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$	$\supseteq (\mathcal{R}_{x_1} \cap \mathcal{R}_{x_2})$
Deslocamento no tempo	$x(n - n_o)$	$z^{-n_o} X(z)$	$\mathcal{R}_x \pm \{z = 0\} \pm \|z\| = +\infty$
Convolução no tempo	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) X_2(z)$	$\supseteq (\mathcal{R}_{x_1} \cap \mathcal{R}_{x_2})$
Diferenciação em z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$\mathcal{R}_x \pm \{z = 0\} \pm \|z\| = +\infty$
Mudança de escala em z	$z_o^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{z_o}\right)$	$\|z_o\| \mathcal{R}_x$
Inversão do eixo do tempo	$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\mathcal{R}_x^{-1}$
Conjugação no tempo	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$\mathcal{R}_x$

Tabela 2: Principais pares de Tz

Sequência	**T**z	**RC**
$\delta(n)$	1	todo plano z
$\delta(n-m)$	z^{-m}	$\|z\| > 0$ $(m > 0)$ ou $\|z\| < +\infty$ $(m < 0)$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
$r^n \sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
$\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{d.v.n} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$
$\begin{cases} a^n, & -N+1 \le n \le 0 \\ 0, & \text{d.v.n} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^{-N} z^{N}}{1-a^{-1}z}$	$\|z\| < +\infty$