

## 2.12 Introdução à análise espectral de sinais periódicos

EPUSP - PTC 3424, maio de 2017. Profa. Maria D. Miranda \*

### 2.12.1 Motivação

- A análise espectral, muito usada em diversas aplicações da engenharia, usa os métodos de Fourier. Basicamente, esses métodos consistem na decomposição de sinais em uma base ortonormal de funções trigonométricas.
- Para obter a Transformada de Fourier (TF) de sinais de tempo contínuo pode-se utilizar a Transformada de Fourier Discreta (TFD). O cálculo eficiente da TFD pode ser feito com um conjunto de algoritmos conhecidos como FFT (do inglês, *Fast Fourier Transform*).
- Como usar os algoritmos de FFT para obter a TF de um sinal de tempo contínuo?

### 2.12.2 Teorema da amostragem de Nyquist

Um sinal  $v(t)$  de tempo contínuo e de banda limitada, isto é, com componentes espectrais nulas para  $f > f_M$ , possui relação biunívoca com suas amostras

$$v(nT_a), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

se a frequência de amostragem  $f_a = \frac{1}{T_a}$  satisfizer

$$\boxed{f_a > 2f_M \text{ (Hz)}}. \quad (1)$$

No caso de sinais periódicos  $v(t)$  de período  $T_s$ , ou seja,

$$v(t) = v(t + T_s),$$

a duração  $T_0 = NT_a$  da janela durante a qual ocorre amostragem deve ser exatamente igual a um número inteiro de períodos do sinal de tempo contínuo, ou seja  $T_0 = mT_s$ , com  $m = 1, 2, \dots$  para a FFT fornecer exatamente o mesmo espectro da SFD (Série de Fourier Discreta).

### 2.12.3 Amostragem de sinais senoidais com $T_0 = mT_s$

Seja  $p(t)$  o pente de impulsos com período  $T_a = \frac{1}{f_a} < \frac{1}{2f_s}$ , ou seja,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_a).$$

A multiplicação de  $p(t)$  por  $v(t)$  resulta

$$v_1(t) = v(t)p(t) = v(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_a),$$
$$V_1(f) = V(f) * \left[ f_a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_a) \right],$$

sendo  $V_1(f) = \text{TF}\{v_1(t)\}$ . Na Figura 1 é ilustrada a amostragem de um sinal senoidal com  $T_0 = mT_s$ . Note a repetição periódica das raias no espectro devido à amostragem do sinal no domínio tempo.

---

\* Algumas figuras foram gentilmente cedidas pelo Prof. Magno T. Madeira da Silva em 2008.

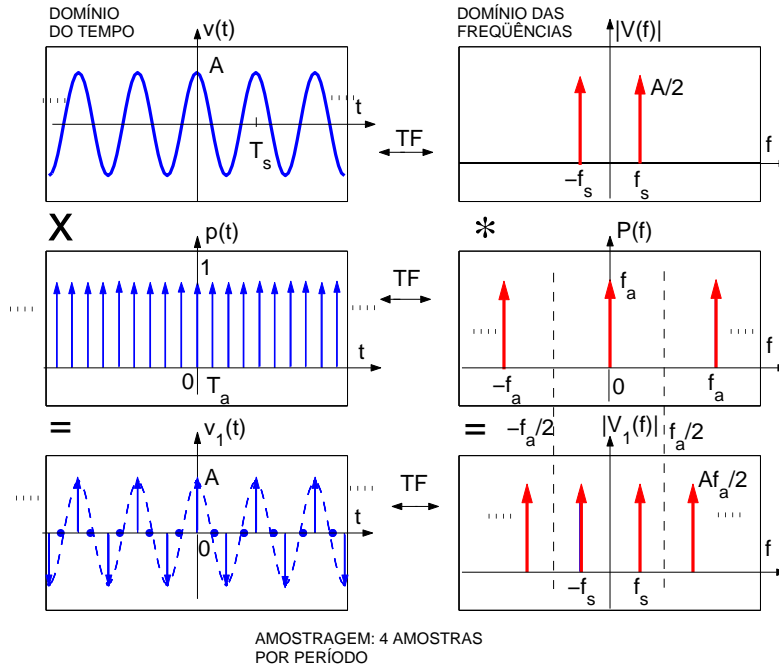


Figura 1: Amostragem de sinais senoidais com  $T_0 = mT_s$ .

Utilizando a janela retangular, chega-se a

$$v_2(t) = v_1(t) \Pi \left( \frac{t - T_0/2 + T_a/2}{T_0} \right), \quad T_0 = NT_a$$

$$V_2(f) = \left[ f_a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} V(f - mf_a) \right] * \left[ T_0 \text{sinc}(fT_0) e^{-j\pi f(T_0 - T_a)} \right],$$

que é uma representação “distorcida” de  $V_1(f)$ . Na Figura 2 está ilustrado o sinal amostrado e janelado com uma janela retangular e o respectivo efeito no domínio da frequência.

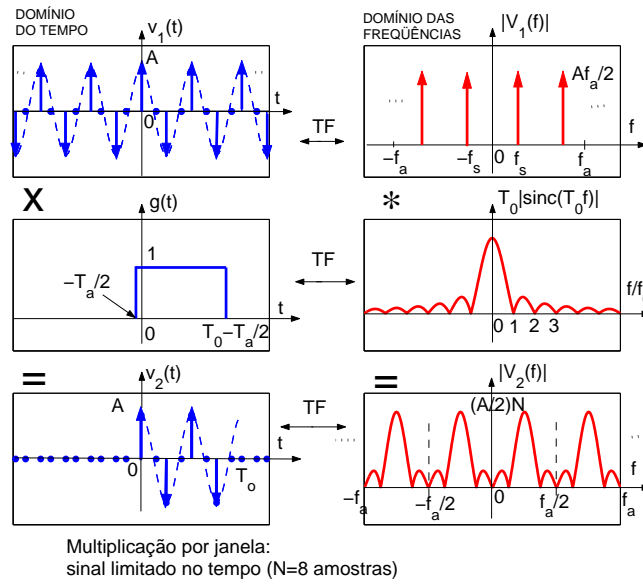


Figura 2: Sinal amostrado janelado e o efeito no domínio da frequência.

Mudando de interpretação de tempo contínuo para a de tempo discreto, chega-se a

$$v_3(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} v(\ell T_a) \delta(n - \ell) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_3(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$V_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} v_3(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} v(n T_a) e^{-j\omega n}.$$

Note que

$$\begin{aligned} V_2(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-T_a/2}^{T_0-T_a/2} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} v(n T_a) \delta(t - n T_a) \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} v(n T_a) e^{-j\Omega T_a n}. \end{aligned}$$

Para  $\omega = \Omega T_a$  vale  $V_2(j\Omega) = V_3(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T_a}$ , o que justifica a mudança de interpretação.

Considerando processamento digital,  $V_3(e^{j\omega})$  deve ser amostrado. Para tanto, convolui-se  $v_3(n)$  com a sequência periódica  $p_2(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(n - Ni)$ , obtendo-se  $\tilde{v}_3(n)$  no domínio do tempo e  $\tilde{V}_3(e^{j\omega})$  no domínio das frequências, dada por

$$\tilde{V}_3(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} V_3(e^{j\frac{2\pi}{N}q}) \delta\left(\omega - q \frac{2\pi}{N}\right).$$

Na Figura 3 está ilustrado o efeito da amostragem do espectro do sinal que foi amostrado e janelado no tempo. Note que a amostragem do espectro resulta em um sinal de tempo discreto periódico.

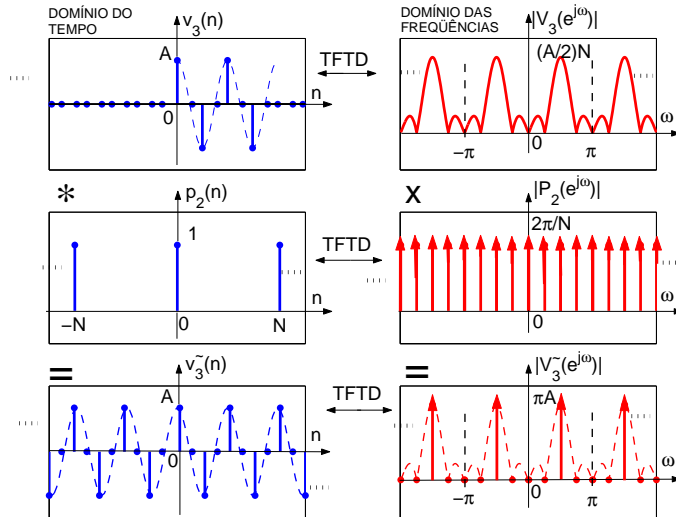


Figura 3: Sinal no tempo discreto janelado e o efeito no domínio do tempo devido a amostragem do espectro.

Novamente, mudando de interpretação de tempo contínuo para tempo discreto, e levando-se em conta o fator multiplicativo  $\frac{2\pi}{N}$ , obtém-se

$$v_4(n) \xleftrightarrow{\text{TFTD}} V_4(k)$$

Na Figura 4 é mostrada a reconstrução do sinal de tempo contínuo a partir do sinal de tempo discreto.

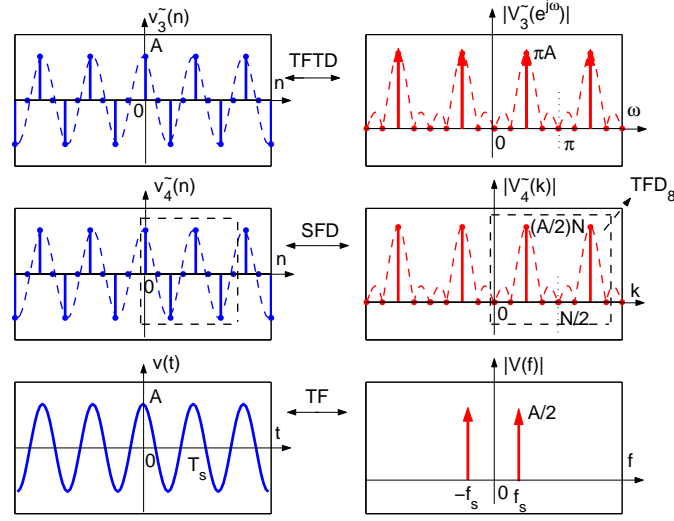


Figura 4: Reconstrução do sinal de tempo contínuo a partir do sinal de tempo discreto.

**Conclusão:** Dado um sinal periódico  $v(t)$ , sua TF  $V(f)$  pode ser medida com a TFD de

$$v_4(n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

sendo  $T_0 = NT_a = mT_s$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Para tanto

$$\boxed{V(f) \Big|_{f=\frac{k}{NT_a}} = \frac{V_4(k)}{N}}. \quad (2)$$

#### 2.12.4 Análise espectral de sinais periódicos e seus erros

Quando  $T_0 = NT_a \neq mT_s$  para  $m = 1, 2, \dots$ , ou seja, quando a duração da janela não coincide com um número inteiro de períodos do sinal de tempo contínuo, podem ocorrer os seguintes tipos de erros:

- Vazamento (*leakage effect*),
- Recobrimento ou rebatimento (*aliasing*),
- Efeito cerca (*picket fence effect*).

#### 2.12.5 Vazamento

Com  $T_0 \neq mT_s$ , a SFD representa a expansão em série de Fourier da sequência periódica mostrada em preto. Para corrigir esse erro, deve-se considerar  $T_0 = T_s$ , ou usar uma janela adequada.

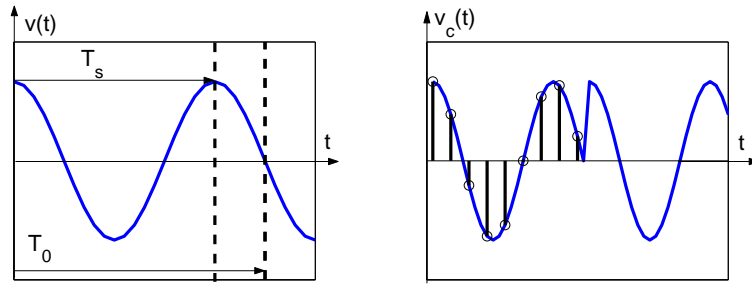


Figura 5: Efeito do truncamento inadequado na recuperação do sinal.

### 2.12.6 Recobrimento ou *aliasing*

Aparece quando  $f_a < 2f_M$ .

**Exemplo:** Seja  $v_c(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$  um sinal de tempo contínuo, em que  $\Omega = 2\pi f_s$ . Este sinal é amostrado com frequência de amostragem  $f_a$ , tal que  $f_a/2 < f_s$ . A sequência  $v(n)$  resultante da amostragem será

$$\begin{aligned} v(n) &= A \cos \left( 2\pi \frac{f_s}{f_a} n + \phi \right) = A \cos \left( 2\pi n - 2\pi \frac{f_s}{f_a} n - \phi \right) \\ &= A \cos \left( 2\pi \frac{f_a - f_s}{f_a} n - \phi \right). \end{aligned}$$

Logo, duas cossenoides de frequências  $f_s$  e  $f_a - f_s$  fornecem as mesmas amostras!

Uma componente de frequência  $f_s > f_a/2$  será interpretada como tendo frequência  $f_a - f_s$ , como é mostrado na Figura 6. Na literatura, a frequência  $f_a/2$  é denominada *folding frequency*, pois é em torno dela que o espectro se “dobra” e ocorre o rebatimento.

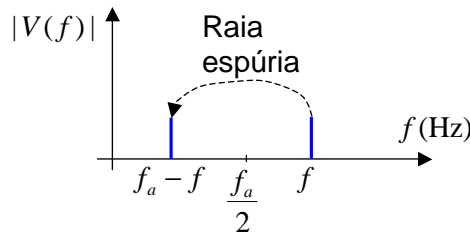


Figura 6: Efeito *aliasing*.

**Solução:** Aumentar  $f_a$  ou considerar um filtro *anti-aliasing*.

### 2.12.7 Efeito cerca

Seja um sinal de tempo contínuo periódico  $v(t)$  com frequência fundamental  $f_0 = 500$  Hz. Este sinal possui harmônicos em  $f_k = k500$  Hz, para  $k$  inteiro. Se ele for amostrado durante  $T_0 = 23$  ms, a componente fundamental não aparece no espectro do sinal amostrado.

Em vez disso, aparecerão componentes em  $\frac{11}{23}$  ms = 478,26 Hz e em  $\frac{12}{23}$  ms = 521,74 Hz, que **cercam** o componente de 500 Hz. Na Figura 7 é ilustrado o efeito cerca.

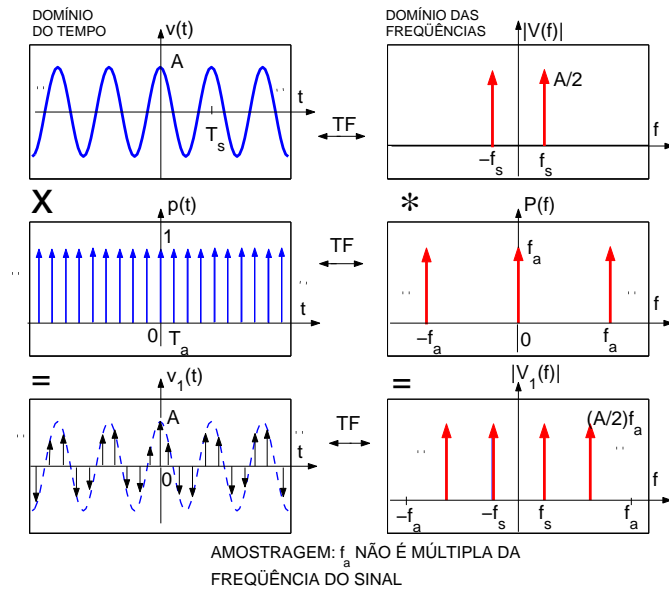


Figura 7: Efeito cerca.

### 2.12.8 Amostragem de sinais senoidais ( $T_0 \neq mT_s$ )

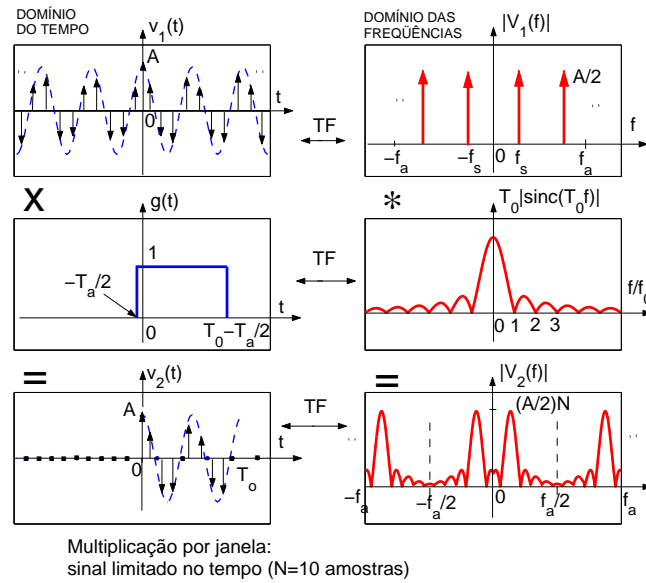


Figura 8: Exemplo de amostragem de sinais senoidais com  $T_0 \neq mT_s$ . Interpretação em tempo contínuo.

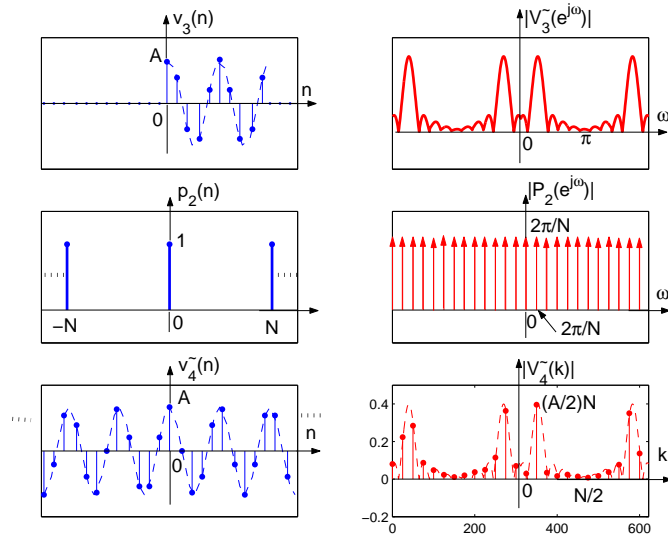


Figura 9: Exemplo de amostragem de sinais senoidais com  $T_0 \neq mT_s$ . Interpretação em tempo discreto.

### 2.12.9 Utilização de janelas na análise espectral

Se  $T_0 \neq mT_s$ , ocorre o **efeito cerca**, que pode ser minimizado utilizando-se outras janelas com nível de lóbulo lateral menor, além da janela retangular considerada até aqui. Três aspectos merecem destaque sobre a forma da janela no domínio das frequências:

- Deve possuir lóbulos laterais de menor nível possível  $\rightarrow$  evita erros de vazamento.
- O lóbulo central deve ser o mais plano possível  $\rightarrow$  evita distorção de amplitude.
- O lóbulo central deve ser o mais estreito possível  $\rightarrow$  aumenta a **resolução** do espectro.

### 2.12.10 Janelas senoidais usuais

$$g(n) = \sum_{k=0}^3 a_k \cos\left(\frac{\pi}{L}kn\right), \quad -L \leq n \leq L.$$

O comprimento  $N$  de  $g(n)$  é dado por  $N = L + L + 1 = 2L + 1$ .

Janela	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
Retangular	1	0	0	0
Von Hann	0,5	0,5	0	0
Hamming	0,54	0,46	0	0
Blackman	0,42	0,5	0,08	0
Plana	0,24726	0,46071	0,25078	0,04125

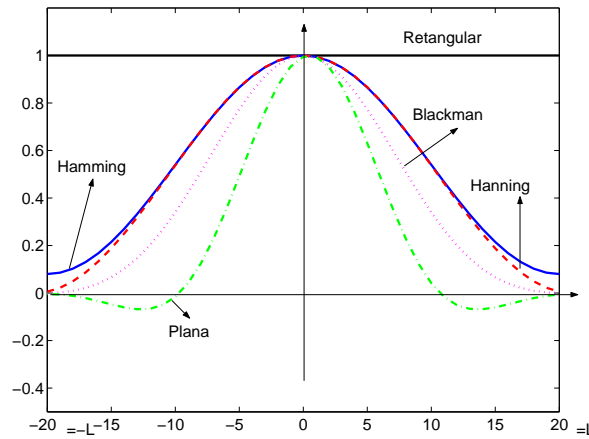


Figura 10: Janelas senoidais usuais em função  $n$ .

### 2.12.11 Parâmetros das janelas senoidais usuais

Janela	Atenuação do lób. lateral (dB)	Largura do lób. principal
Retangular	13,3	$\frac{4\pi}{N}$
Von Hann	31,5	$\frac{8\pi}{N}$
Hamming	42,7	$\frac{8\pi}{N}$
Blackman	58,1	$\frac{12\pi}{N}$
Plana	$\approx 70$	$\frac{16\pi}{N}$

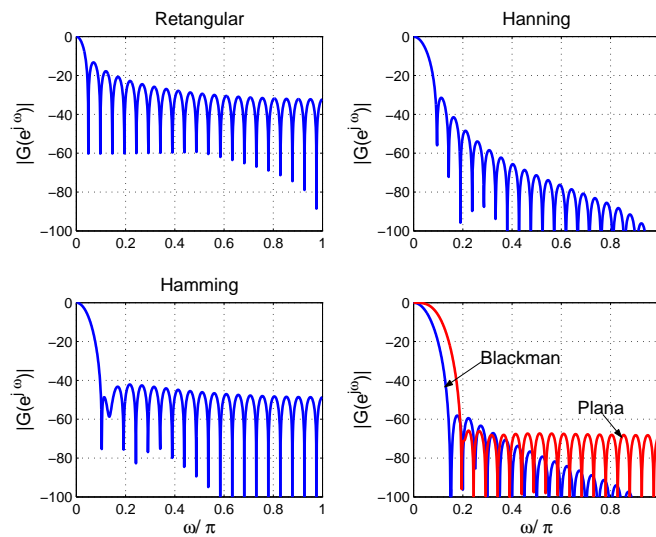


Figura 11: TFTD das janelas em função de  $\omega/\pi$ .

Para continuar o estudo você pode consultar: A. V. Oppenheim, R. W. Shafer, J.R. Buck, *Discrete-time signal processing*. Capítulo 10; 2a. ou 3a. edição, Prentice Hall. Outra referência útil: J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital signal processing : principles, algorithms, and applications*, 4a. edição, Prentice Hall, 2006.