PTC2324: Processamento Digital de Sinais I

Lista de exercícios 5 complementar: Transformada z

MDM,FRMP-2014;ASP-2012

($\diamond$): Exercícios adaptados do livro *Signals and Systems* de Oppenheim e Willsky.

1. Calcule os fatores de escala K_i de forma que os filtros realizados com cada uma das funções de transferência dadas abaixo apresentem ganho máximo unitário no módulo da resposta em frequência.

   (a) $H_1(z) = \dfrac{K_1}{1 + \frac{1}{8}z^{-3}}$

   (b) $H_2(z) = \dfrac{K_2}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$

   (c) $H_3(z) = K_3 \displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k z^{-k}$

   (d) $H_4(z) = \dfrac{K_4}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + 2z^{-1}\right)}$

2. Use o método gráfico para esboçar a magnitude da resposta em frequência dos sistemas com as seguintes funções de transferência:

   (a) $H(z) = \dfrac{z-1}{z+0{,}9}$

   (b) $H(z) = \dfrac{z^{-2}}{1 + \frac{49}{64}z^{-2}}$

   (c) $H(z) = \dfrac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{4}$

3. Mostre que uma sequência do tipo $x(n) = a^n$, para todo n, é autofunção de sistemas LIT e calcule o autovalor correspondente. Note que a pode assumir qualquer valor real ou complexo.

4. ($\diamond$) Sabe-se o seguinte a respeito de um sistema LIT com entrada $x(n)$ e saída $y(n)$:

   - Se $x(n) = (-2)^n$, então $y(n) = 0$.
   - Se $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, então $y(n)$ é da forma:

   $$y(n) = \delta(n) + a\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n),$$

   sendo a uma constante.

   (a) Determine o valor da constante a.

   (b) Determine $y(n)$ se $x(n) = 1$.

5. Sobre os teoremas do valor final e inicial, responda:

   (a) Mostre que para uma sequência satisfazendo $v(n) = 0$ para $n < 0$, vale

   $$\lim_{|z|\to\infty} V(z) = v(0).$$

(b) Mostre que para uma sequência satisfazendo $v(n) = 0$ para $n > 0$, vale

$$\lim_{|z|\to 0} V(z) = v(0).$$

(c) A região de convergência da Tz a seguir inclui a circunferência unitária:

$$X(z) = \frac{3z}{z - 0{,}75} + \frac{2{,}5}{z - 1{,}25}$$

Com os resultados de (a) e (b), determine $x(0)$.

6. A Tz de $v(n)$ é dada por:

$$V(z) = \frac{z^{40}}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

com $|a| < 1$, $|b| > 1$, $|c| > 1$ e $|d| > 1$. Supondo que $v(n)$ satisfaça $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v(n)| < +\infty$, determine $v(-38)$.

7. Seja $s(n)$ a sequência de entrada e $x(n)$ a sequência de saída de um sistema linear e invariante no tempo descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$x(n) = s(n) - \alpha^6 s(n-6)$$

sendo $0 < \alpha < 1$.

(a) Encontre a função de sistema

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}.$$

(b) Esboce o diagrama de polos e zeros de $H_1(z)$ e indique a sua região de convergência.

(c) Deseja-se recuperar $s(n)$ a partir de $x(n)$ com um sistema linear e invariante no tempo. Encontre a função de sistema

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

tal que $y(n) = s(n)$.

(d) Encontre todas as possíveis regiões de convergência de $H_2(z)$ e indique, em cada uma delas, se o sistema é causal e/ou estável.

(e) Se o sistema $H_1(z)$ for usado para eliminar interferências, quais são as frequências cíclicas que são eliminadas no caso em que a frequência de amostragem é de 12 kHz?

(f) É possível modificar $H_1(z)$ a fim de assegurar uma banda de passagem relativamente plana e com ganho aproximadamente constante? Caso positivo, forneça a nova função de sistema. Caso contrário, justifique adequadamente a sua resposta.

Dica: a equação $z^M - a^M = 0$ possui M raízes em $z_k = ae^{j\frac{2\pi}{M}k}$, para $k = 0, 1, \ldots, M-1$.

8. Seja $x(n) = \delta(n-2) + \delta(n+2)$.

(a) Determine a Tz unilateral de $x(n)$.

(b) Use as propriedades da Tz unilateral para encontrar a Tz unilateral das seguintes sequências:

i. $w(n) = x(n-1)$

ii. $w(n) = x(n-3)$

9. Use a Tz unilateral para determinar a resposta natural, a resposta forçada e a resposta completa do sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) - \frac{1}{9}y\,(n-2) = x\,(n-1)$$

considere $x(n) = 3u(n)$ e as seguintes condições iniciais: $y(-1) = 0, \quad y(-2) = 1$.

10. Considere a seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n).$$

   (a) Supondo as condições iniciais

   $$y(-1) = 0 \quad \text{e} \quad y(-2) = -1,$$

   forneça a resposta natural do sistema.

   (b) Supondo a entrada $x(n) = u(n)$, forneça a resposta forçada do sistema.

   (c) Forneça a resposta completa do sistema.