Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Matemática Discreta

Lucia Menoncini

Chapecó, SC

NOÇÕES DE LÓGICA E TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÕES

Os objetos matemáticos não são reais (DUVAL, 2004), mas podem ser definidos por meio de condições específicas e precisas. Assim, estamos diante de uma **Definição**.

Definição: Um número inteiro a é chamado Par se for divisível por 2, ou seja, $2|a$. Da mesma forma, existe inteiro x tal que $a = 2x$.

Definição: Um número inteiro a é chamado Ímpar desde que haja um inteiro x tal que $a = 2x + 1$.

Um **Teorema** é uma afirmação declarativa (sentença que expressa uma ideia) sobre matemática para a qual existe uma **prova**.

Uma **prova** é uma dissertação que mostra, de maneira irrefutável, que uma afirmação é verdadeira.

Para os matemáticos, existem as seguintes afirmações:

a) afirmações que sabemos serem verdadeiras porque sabemos prová-las: teoremas;

b) afirmações cuja veracidade não podemos garantir: conjecturas;

c) afirmações falsas: erros.

Uma afirmação também é conhecida como **proposição**, ou seja,uma construção (ideia, pensamentos, sentença) à qual se pode atribuir juízo. No caso da lógica matemática, o tipo de juízo é o verdadeiro (V) ou falso (F), ou seja, o interesse é na verdade das proposições.

Para uma proposição p qualquer, denota-se

$$V(p)$$

o valor-verdade de p.

Ex: Dadas as proposições abaixo, encontre o seu valor-verdade:

a) p: o Brasil é um país.

b) $p : 3 + 2 = 10$

CONECTIVOS

A **álgebra de Boole** (álgebra booleana) fornece uma estrutura para lidarmos com afirmações, sejam elas afirmações simples, como "x é par", ou afirmações compostas que aparecem combinadas por meio de **conectivos**.

Para construir proposições compostas a partir de proposições simples, usamos conectivos lógicos: e, ou, não, se...então, se e somente se.

O valor lógico (verdadeiro ou falso) de uma proposição deste tipo depende do valor lógico das proposições simples que a compõem, e da maneira como elas são combinadas pelos conectivos.

A lógica proposicional, ou cálculo proposicional, é um formalismo que nos permite determinar o valor lógico de proposições compostas, se soubermos os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Os conectivos lógicos serão representados por sinais algébricos especiais (operadores) aplicados a essas variáveis. Os mais importantes são:

- conjunção: $p \wedge q$, significando "p e q".
- disjunção: $p \vee q$, significando "p ou q".
- negação: $\neg p$, significando "não p".
- implicação: $p \rightarrow q$, significando "se p, então q".
- equivalência: $p \longleftrightarrow q$, significando "p se, e somente se, q".

OPERADOR DE NEGAÇÃO

A negação de uma proposição é construida por meio da palavra "não". Se p denota uma proposição, então $\sim p$ ou $\neg p$.

Ex: Encontre a negação da proposição p : O Brasil é um país.

Tabela-verdade da Negação

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

OPERADOR DE CONJUNÇÃO

A conjunção de duas proposições é construida por meio da palavra "e". Se p e q denotam proposições, então a conjunção é $p \wedge q$.

Ex: A frase "O Brasil é um país e Santa Catarina é um município"é uma conjunção de duas proposições "(O Brasil é um país)$\wedge$ (Santa Catarina é um município)".

Tabela-verdade da Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

OPERADOR DE DISJUNÇÃO

A conjunção de duas proposições é construida por meio da palavra "ou". Se p e q denotam proposições, então a disjunção é $p \vee q$.

Ex: A frase "O Brasil é um país ou Santa Catarina é um município"é uma disjunção de duas proposições "(O Brasil é um país)$\vee$ (Santa Catarina é um município)".

Este conectivo também pode ser chamado de "ou inclusivo", pois permite que as duas frases sejam verdadeiras. A frase do exemplo acima é verdadeira se apenas o Brasil for um país, se apenas Santa Catarina for um município, ou se o Brasil for um país e Santa Catarina for um município.

Tabela-verdade da Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

OPERADOR DE DISJUNÇÃO EXCLUSIVA

Se p, q são duas proposições, denotamos por $p \oplus q$ a proposição "ou p ou q, mas não ambos." Este conectivo é chamado de disjunção exclusiva de p e q. O valor lógico de $p \oplus q$ é verdadeiro se p e q têm valores lógicos opostos, ou seja, exatamente um deles é verdadeiro.

Tabela-verdade da Disjunção Exclusiva

p	q	$p \oplus q$
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

O conectivo "ou" pode significar tanto a disjunção inclusiva ($\vee$) quanto a disjunção exclusiva ($\oplus$). Por exemplo, na frase "Ana viajou ontem para Bahia ou para o Rio Grande do Sul," entende-se que o "ou" é exclusivo, pois Ana não pode ter viajado ontem para os dois Estados. Por outro lado, na frase "a bateria está descarregada ou o tanque está vazio" o "ou" deve ser entendido como inclusivo, pois nada impede que as duas condições sejam verdadeiras.

OPERADOR DE IMPLICAÇÃO

Sejam p, q duas proposições. A proposição "se p então q", que denotaremos por $p \to q$, é chamada de implicação ou condicional. O valor lóogico de $p \to q$ á falso apenas se p for verdadeiro e q for falso. Nos demais casos, o valor de $p \to q$ é verdadeiro.

Esre conectivo não pressupõe uma relação causal entre as proposições p e q. Por exemplo a frase “se 5 é primo, então Chapecó é um município” é verdadeira apesar de não haver nenhuma relação entre os dois fatos.

Exemplo: A proposição “se você tirar nota inferior a 6,0 na média, não vai ser aprovado em Matemática Discreta” contém uma implicação: “(se você tirar nota inferior a 6,0 na média) $\rightarrow$ (você não vai ser aprovado em Matemática Discreta).”

Tabela-verdade da Implicação

p	q	$p \rightarrow q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

É bastante comum encontrarmos teorema na matemática, escritos na forma de implicações: se determinada afirmação p **(a hipótese, premissa, ou antecedente)** é verdadeira, então outra afirmação q **(a tese, conclusão ou consequência)** também é verdadeira.

Dizemos que a implicação $q \rightarrow p$ é a **recíproca de** $p \rightarrow q$. Observe que que há casos em que $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas sua recíproca $q \rightarrow p$ é falsa; e vice-versa.

A implicação $p \rightarrow q$ pode ser expressa em língua natural como:

- se p então q.
- quando p, temos q.
- q segue de p.
- p implica q.
- p é condição suficiente para q.

Exemplo: Considere a seguinte fala de um político que vai concorrer a um cargo eletivo:

"Se for eleito, diminuirei os impostos".

Em que condições posso ser considerado mentiroso?

a) Suponha que eu seja eleito e reduza os impostos. Certamente não serei chamado de mentiroso.

b) Suponha que eu seja eleito e não reduza os impostos. O cidadão terá todo o direito de me chamar de mentiroso - não cumpri minha promessa.

c) Suponha agora que eu não seja eleito, mas consiga fazer com que os impostos sejam reduzidos. O povo certamente não me chamará de mentiroso.

d) Por fim, suponha que eu não seja eleito e os impostos não sejam reduzidos. Novamente eu não poderia ser acusado de mentir - prometi reduzir os impostos apenas se eu fosse eleito.

Exemplo: Seja a afirmação: "Se um inteiro é simultaneamente um quadrado perfeito e primo, então é negativo". Essa afirmação é verdadeira?

OBS: Afirmações da forma $p \to q$ em que a hipotese p é impossível, são chamadas de *vazias*, e são consideradas verdadeiras porque não admitem exceções.

PROPOSIÇÃO 1: A soma de dois inteiros pares é par.

PROPOSIÇÃO 2: Seja x um número inteiro. Se $x > 1$ então x^3+1 é número composto. (um número positivo a é dito composto se existe um inteiro b de modo que $1 < b < a$ e $b|a$)

CONTRAEXEMPLO A forma de refutar uma afirmação de implicação é criar um contraexemplo, ou seja, achar uma situação em que p é Verdadeira, mas q é Falsa.

Exemplo: Prove a afirmação: "Se x é primo, então x é par".

OPERADOR DE EQUIVALÊNCIA

Se p, q são duas proposições, a proposição “p se, e somente se, q” é chamada de equivalência ou bicondicional de p e q. Denotaremos essa proposição por $p \leftrightarrow q$.

Tabela-verdade da Equivalência

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Exemplo: A proposição “você será aprovado em Matemática Discreta se, e somente se, obter média final 6,0” contém uma equivalência: “(você será aprovado em Matemática Discreta) $\leftrightarrow$ (obter média final 6,0).”

Há outros símbolos que também podem ser usados para reresentar este operador: $p \Leftrightarrow q$, $p \equiv q$, e $p = q$.

Podemos expressar a equvalência de outras formas:

- p é condição necessária e suficiente para q.
- as condições p e q são equivalentes.

PROPOSIÇÃO 3: Seja x um inteiro. Então x é par se e somente se $x + 1$ é impar.

ORDEM DE PRECEDÊNCIA

Existe uma ordem de precedência entre os conectivos, conforme tabela abaixo:

Operador	*Precedência*
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee, \oplus$	3
$\rightarrow, \leftrightarrow$	4

Exemplo 1: A proposição $\neg p \wedge q \rightarrow r \oplus s \wedge u$ deve ser entendida como ......

Exemplo 2: Construa as tabelas-verdade das fórmulas $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$. Elas são equivalentes?

Exemplo 3: Um conectivo muito importante para projeto de circuitos lógicos é o operador não-e ou (nand), que denotaremos por $\overline{\wedge}$, definido por $p \,\overline{\wedge}\, q = \neg(p \wedge q)$. Também temos o operador não-ou ou (nor), denotado por $\underline{\vee}$ e definido por $p \,\underline{\vee}\, q = \neg(p \vee q)$. Construa as tabelas-verdade destes operadores.

TAUTOLOGIAS E CONTRADIÇÕES

Uma tautologia é uma proposição composta que é sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

A proposição $p \vee \neg p$ é uma tautologia.

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
V	**F**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**V**	**V**

Uma contradição é uma proposição composta que é sempre falsa, quaisquer que sejam os valores valores lógicos de suas proposições simples. A proposição $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Os conectivos de implicação ($\rightarrow$) e equivalência ($\leftrightarrow$) induzem às relações de **implicação lógica** ($\Rightarrow$) e **equivalência lógica** ($\Leftrightarrow$) .

Assim, dizemos que p implica logicamente q, e denotamos por $p \Rightarrow q$, se e somente se $p \rightarrow q$ é uma tautologia e são válidas as implicações lógicas:

a) Adição: $p \Rightarrow p \vee q$

b) Simplificação: $p \wedge q \Rightarrow p$.

De fato, use tabela verdade para mostrar as implicações lógicas acima.

Também, dizemos que duas proposições compostas p e q são **logicamente equivalentes** se têm os mesmos valores lógicos para quaisquer combinações de valores lógicos que sejam atribuídos a suas proposições simples. Ou seja, p equivale logicamente a q, e denotamos por $p \Leftrightarrow q$, se e somente se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \leftrightarrow (\neg(\neg p))$
V	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**

São válidas as equivalências lógicas:

a) $\neg(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg\ x) \vee (\neg y)$

b) $x \rightarrow y \Leftrightarrow (\neg\ x) \vee y$

c) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

d) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

De fato, use a tabela verdade para mostrar as equivalências lógicas acima.

Voltando ao Exemplo 2: As fórmulas $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$. Elas são equivalentes?

A equivalência lógica $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$ é muito utilizada para demonstrar afirmações matemáticas (teoremas) da forma "se e somente se".

As equivalências lógicas abaixo são utilizadas como técnicas de demonstração de teoremas matemáticos:

a) **Contraposição ou Contrapositiva**: $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

b) **Absurdo**: $p \to q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \to F$

De fato, use a tabela verdade para mostrar as equivalências lógicas acima.

Prova por contraposição: Seja $n \in Z$. Se n^2 é par então n é par.

Prova por absurdo: Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Existem outras provas de implicação e de equivalência, as quais são chamadas Regras de Inferência. Pesquise mais sobre essas regras!

QUANTIFICADORES

Quantificador Universal: simbolizado por $\forall$, que quando associado à proposição $p(x)$ é escrito como:

$$\forall\ x \in A, \quad p(x)$$

Quantificador Existencial: simbolizado por $\exists$, que quando associado à proposição $p(x)$ é escrito como:

$$\exists\ x \in A, \quad p(x)$$

Quantificador Existencial Único: simbolizado por $\exists\ !$, que quando associado à proposição $p(x)$ é escrito como:

$$\exists\ !\ x \in A, \quad p(x)$$

Assim, temos que:

- $\forall\ x \in A, \quad p(x)$ é verdadeira, se $p(x)$ for verdadeira para todos os elementos do conjunto A.
- $\exists\ x \in A, \quad p(x)$ é verdadeira, se $p(x)$ for verdadeira para pelo menos um elemento do conjunto A.
- $\exists\ !\ x \in A, \quad p(x)$ é verdadeira, se $p(x)$ for verdadeira para um único elemento do conjunto A.
- **Negação dos quantificadores**:

$$\neg((\forall\ x \in A), \quad p(x)) \ \Leftrightarrow\ (\exists\ x \in A, \quad p(x))$$

$$\neg((\exists\ x \in A, \quad p(x)) \ \Leftrightarrow\ (\forall\ x \in A), \quad p(x))$$

Exemplo: Indique o valor-verdade de cada proposição:

a) $\{\forall\ n \in N, n < 1\}$

b) $\{\exists\ n \in N, n < 1\}$

c) $\{\forall\ n \in N, n + 1 > n\}$

d) $\{\exists\ n \in N, n + 1 > n\}$

e) $\{\forall\ n \in N, \quad 2n$ é par $\}$

f) $\{\exists\ n \in N, \quad 2n$ é par $\}$

Note que sempre que uma proposição quantificada universalmente é verdadeira, a mesma proposição existencial também será verdadeira.