Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Matemática Discreta - Conjuntos

Lucia Menoncini

Chapecó, SC

TEORIA DOS CONJUNTOS

Um conjunto é uma coleção de objetos, sem repetção e não ordenada. Um objeto pertencente a um conjunto é chamado *elemento* do conjunto.

Dizemos que um elemento x pertence a um conjunto A se x é um elemento de A e denotamos por $x \in A$. Para dizer que x não pertence a A, escrevemos $x \notin A$.

Um conjunto A é dito Unitário quando possui apenas 1 elemento.

Um conjunto A é Vazio quando não possui elementos. Representamos este conjunto por $A = \varnothing$ ou $A = \{\}$.

O conjunto Universo contém todos os seus elementos.

Quando todos os elementos de um conjunto A também são elementos de um conjunto B, dizemos que A está contido em B e podemos indicar por $A \subset B$. Dizemos também que A é subconjunto de B ou que A é parte de B. O símbolo $\subset$ é chamado sinal de inclusão e $A \subset B$, relação de inclusão. Também podemos escrever $B \supset A$. Quando o conjunto A não está contido em B , escrevemos ......

Subconjunto

Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é subconjunto de B se e somente se, todo elemento de A também é elemento de B. Escrevemos ....

Ex: $A = \{1, 2, 3\}$ é subconjunto de $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Um conjunto é sempre subconjunto de si mesmo.

$\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$ é verdadeiro , mas $\varnothing \in \{1, 2, 3\}$ é falso.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Conjunto dos Números Naturais

Chama-se conjunto dos números naturais - símbolo $\mathbb{N}$ - o seguinte conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Denotamos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

Vejamos alguns exemplos de números que pertencem e não pertenecem ao conjunto dos números naturais: $0 \in \mathbb{N}$, $-2 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

2. Conjunto dos números Inteiros

Chama-se conjunto dos números inteiros - símbolo $\mathbb{Z}$ - o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ distinguimos três subconjuntos notáveis:

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (chamado conjunto dos inteiros não negativos)

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$ (chamado conjunto dos inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$ (chamado conjunto dos inteiros não nulos).

3. Conjunto dos números Racionais

Chama-se conjunto dos números racionais - símbolo $\mathbb{Q}$ - o seguinte conjunto: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} |\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } \ b \in \mathbb{Z}^*\}$.

No conjunto dos números racionais destacamos os seguintes subconjuntos:

$\mathbb{Q}_+$ é o conjunto dos racionais não negativos;

$\mathbb{Q}_-$ é o conjunto dos racionais não positivos;

$\mathbb{Q}^*$ é o conjunto dos racionais não nulos.

Exemplo: $\mathbb{Q} = \{..., -7/2, -3, -2, -3/2, -1, -2/5, 0, 1/3, 1, 2, 5/2, 3, ...\}$

Representação decimal

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Para isto, basta dividir o inteiro a pelo inteiro b. Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

(1) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, um decimal exato.

Exemplo: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\quad \frac{37}{100} = 0,37$

(2) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica.

Exemplo: $\dfrac{1}{3} = 0,33333...$

4. Conjunto dos números Irracionais

Existem números cuja representação decimal não é nem finita nem periódica. Números como esses são chamados *números irracionais*.

Exemplo: $\pi = 3,14159265...$, $\sqrt{2} = 1,414213...$

5. Conjunto dos números Reais

Este conjunto é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Exemplo: $A = \{-\pi, -\sqrt{3}, -\sqrt[3]{2}, 0, 1/2, 1, 5/2, 3, \pi, ...\}$

De forma resumida, podemos representar os conjuntos numéricos:

CARDINALIDADE

A cardinalidade $|A|$ de um conjunto A é o número de elementos desse conjunto. Dizemos que $|A|$ é o tamanho do conjunto A. Um conjunto é finito se sua cardinalidade é um número inteiro. Caso contrário, é infinito.

Observe que $|A| = 0$ se e somente se $A = \varnothing$.

Conjuntos infinitos não podem ter seus elementos listados explicitamente. Informalmente, é comum usar '. . . ' nesses casos, por exemplo:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z} = \{..., 3, 2, 1, 0, +1, +2, +3, ...\}$
- Mas quem são os elementos do conjunto $A = \{1, 4, 5, 7, ...\}$?

Conjunto Finito e Conjunto Infinito

Um conjunto é finito quando sua cardinalidade é um número inteiro. Caso contrário, o conjunto é infinito.

NOTAÇÃO DE CONJUNTOS

Denotamos conjuntos de duas formas: listando seus elementos ou escrevendo a Lei de Formação. Vejamos.

Ex: A é o conjunto formado pelos números naturais maiores que 5. Representamos por $A = \{6, 7, 8, ...\}$ ou pela Lei de formação $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto universo U. Utilizando esses subconjuntos, podemos construir novos subconjuntos de U por meio das seguintes operações: união, interseção e diferença.

O conjunto união (ou reunião) de A e B, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \ \mid x \in A \ \ ou \ \ x \in B\}$$

.

O conjunto interseção de A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e a B.

$$A \cap B = \{x \ \mid x \in A \ \ e \ \ x \in B\}$$

O conjunto diferença entre A e B, que indicamos por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$$A - B = \{x \ \mid x \in A \ \ e \ \ x \notin B\}$$

Graficamente pode-se representar um conjunto usando Diagramas de Venn. Ex:

Às vezes, é conveniente supor que todos os elementos de todos os conjuntos que nos interessam pertencem a um conjunto universal ou universo, que denotaremos por U. Se A é o conjunto universo U, então $U - B$ é chamado o complemento de B e denotado por $\overline{B}$ ou B^c.

Um conjunto A é igual a um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B, e todo elemento de B é elemento de A. Esta condição, denotada por $A = B$, significa que A, B são o mesmo conjunto. Assim, dois conjuntos A e B são diferentes $A \neq B$ se, e somente se, existe um elemento de A que não pertence a B, ou um elemento de B que não pertence a A. Observe que, como os conjuntos não são ordenados, o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é igual ao conjunto $B = \{3, 2, 1\}$.

Teorema Seja A um conjunto finito. O número de subconjuntos de A é $2^{|A|}$.

Ex: Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, calcule $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\overline{B}$ e indique a sua cardinalidade. Quantos subconjuntos tem o conjunto A?

PROPRIEDADES

São válidas as seguintes operações com conjuntos:

a) Comutativa.

$A \cup B =$

$A \cap B =$

b) Assossiativa.

$A \cup (B \cup C) =$

$A \cap (B \cap C) =$

c) Distributiva.

$A \cup (B \cap C) =$

$A \cap (B \cup C) =$

d) Leis de Morgan.

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

PARTIÇÃO

Seja A um conjunto e P um conjunto cujos elementos são sub-conjuntos de A (isto é, $P \subseteq P(A)$). Dizemos que P é uma partição de A se os elementos de P são não vazios, disjuntos dois a dois, e a união de todos os elementos de P é A. Nesse caso, cada elemento de P é também chamado de uma parte ou bloco da partição.

Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, o conjunto

$$P = \{\{1, 2, 5, 6, 7\}, \{3\}, \{4, 8, 10\}, \{9\}\}$$

é uma partição de A.

O conjunto vazio tem apenas uma partição, que é o próprio conjunto vazio (sem nenhuma parte).

Revisão sobre Intervalos em $\mathbb{R}$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$

PROBLEMAS

Problema 1: Uma avaliação contendo duas questões foi aplicada a 200 alunos. Sabe-se que 50 alunos acertaram as duas questões; 100 alunos acertaram a primeira questão; 90 alunos acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões? R: 60

Problema 2: (CRM ES 2016 – Quadrix) Numa pesquisa, verificou-se que, das pessoas consultadas, 100 se informavam pelo site A; 150 por meio do site B; 20 buscavam se informar por meio dos dois sites, A e B; e 110 não se informavam por nenhum desses dois sites. Desse modo, é correto afirmar que o número de pessoas consultadas nessa pesquisa foi de 370?

Problema 3: Em uma escola foi realizada uma pesquisa sobre o gosto musical dos alunos.Após as entrevistas, os resultados foram os seguintes:

- 416 alunos disseram que gostam de Rock.
- 320 alunos optaram por Pop.
- 116 alunos afirmaram que gostam de MPB.
- 93 alunos gostam de Rock e Pop.
- 52 alunos gostam de Pop e MPB.
- Nenhum entrevistado gosta de "Rock e MPB".
- Nenhum entrevistado gosta dos três gêneros.

Quantos foram os alunos entrevistados? R: 707

Problema 4: Considere o conjunto dos reais. Encontre:

a) $(-3,5) \cup [1,3)$

b) $[0,4) \cap (-2,3]$

c) $(-\infty,1] \cup (-3,10)$

d) $\overline{(0,5]}$

Problema 5: Use diagramas de Venn para verificar as seguintes identidades:

a) $A - (A \cap B) = A - B$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

PRODUTO CARTESIANO DE DOIS CONJUNTOS

Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$. Como os pares são ordenados, temos que $A \times B \neq B \times A$ (exceto quando $A = B$ ou $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$).

RELAÇÕES

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação binária R de A em B, é qualquer subconjunto de $A \times B$ (produto cartesiano), isto é, R é um conjunto tal que: $R \subset A \times B$. Logo, uma relação é um conjunto de pares ordenados.

Se $A = B$, dizemos apenas que R é uma relação em A ao invés de dizer relação de A em A.

O conjunto domínio de uma relação é constituído pelos primeiros elementos de todos os pares ordenados que pertencem a relação, e a imagem de uma relação é constituída pelos segundos elementos de todos os pares ordenados que pertencem a relação.

Exemplos de relações:

1. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$:

- $R_1 = \{(a, 1), (b, 3), (d, 2)\}$ é uma relação entre o conjunto A e o conjunto B.
- $R_2 = \{(1, c), (3, a), (2, a)\}$ é uma relação entre o conjunto B e o conjunto A.

2. Usando diagramas, represente as relações anteriores e indique o domínio e a imagem.

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES

Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade **reflexiva**, somente se:

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

A relação "maior ou igual" ($\geq$) no conjunto dos números reais é um exemplo de relação com propriedade reflexiva pois, $\forall x \in R, x \geq x$.

Seja A um conjunto e R A $\times$ A uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade **simétrica**, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$$

A relação de parentesco entre as pessoas de uma rua é um exemplo de relação simétrica pois, se x é parente de y então y é parente de x.

Seja A um conjunto e R uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade **assimétrica**, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$$

A relação "maior do que" ($>$) no conjunto dos números reais R é um exemplo de relação com propriedade assimétrica pois, $\forall x, y \in R$, se $x > y$ não podemos ter $y > x$.

Seja A um conjunto e R uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade **anti-simétrica**, somente se:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$$

A relação "maior ou igual" ($\geq$) no conjunto dos números reais R é um exemplo de relação com propriedade anti-simétrica pois, $\forall x, y \in R, x \geq y$ e $y \geq x$ então $x = y$.

Seja A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R tem propriedade **transitiva**, somente se:

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

A relação "maior ou igual" ($\geq$) no conjunto dos números reais R é um exemplo de relação com propriedade transitiva pois, $\forall x, y, z \in R, x \geq y$ e y $\geq z$ então $x \geq z$.

Sintetizando:

$\forall x \in A$, temos xRx, dizemos que R é reflexiva.

$\forall x \in A$, temos $xRy \Rightarrow yRx$, dizemos que R é simétrica.

$\forall x \in A$, temos $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$, dizemos que R é transitiva.

Ex: a relação ($\leq$) sobre os inteiros é reflexiva, transitiva, mas não simétrica.

Ex: a relação | (divide) sobre os números naturais é antissimétrica (pois se $x|y$ e $y|x$ então $x = y$). Sobre os inteiros não é antissimétrica, pois 3|-3 e -3|3, com $3 \neq -3$. Não é simétrica, pois 3|9, mas 9 não divide 3.

As relações dependem do contexto da relação (conjunto numérico abordado).

RELAÇÃO DE ORDEM

Uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de ordem se R for: reflexiva, anti- simétrica e transitiva. A relação de ordem como acima definida é conhecida também como "relação de ordem parcial"

RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de A em A. Dizemos que R é uma relação de equivalência se, somente se:

- $\forall x \in A, (x, x) \in R$
- $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
- $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R.$

Em outras palavras, dizemos que uma relação R sobre um conjunto A é uma relação de equivalência se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

Relações de equivalência podem ser vistas como extensões do conceito de igualdade. De modo geral, sempre que não houver dúvidas quanto a relação de equivalência em um dado conjunto, denotaremos $x \equiv y$ para escrever que x é equivalente a y.

Assim, a relação "igual a", (=) no conjunto dos reais é uma realção de equivalência, pois:

- $\forall x, (x = x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x = y \to y = x)$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x = y \wedge y = z \to x = z)$.

A relação igualdade sobre os inteiros é reflexiva (qualquer inteiro é igual a si mesmo), é simétrica (se x=y então y=x) e transitiva (se x=y e y=z então x=z).

A relação menor que ou igual ($\leq$) sobre os inteiros é reflexiva (qualquer inteiro é menor ou igual a si mesmo, $x \leq x$), é transitiva (se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$), mas não é simétrica, pois $x \leq y$ não implica em $y \leq x$, por ex, $3 \leq 9$, mas 9 não é menor que 3.