**Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS**

# Matemática Discreta - Indução Matemática

**Lucia Menoncini**

**Chapecó, SC**

## NÚMEROS NATURAIS

O primeiro coontato com a Matemática surge por meio do processo de contagem, que contempla duas etapas bem distintas:

a) Na primeira etapa aprendemos a enunciar uma sequência de palavras (um, dois, três,...) sem atribuir signficado a elas;

b) Na segunda etapa, usamos essa sequência para *contar* os elementos de um conjunto, ou seja, estabelecer uma correspondência entre os elementos do conjunto e estas palavras que chamamos de números.

Como os números naturais formam uma sequência, eles acabam estabelecendo uma ordem e portanto, passam a ser chamados de **números ordinais**. Já os números naturais usados como instrumento de contagem, remetem à noção de **números cardinais**.

**Para refletir...**

Seja $P(n)$ uma sentença matemática que depende de uma variável natural $n$, a qual se torna verdadeira ou falsa, depenendo do valor de $n$. Estas sentenças são chamadas sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Exemplos:

a) $P(n) : n$ é primo.

b) $P(n) : 2n + 6$ é par.

c) $P(n) : 1 + 3 + 5 + \ . \ . \ . \ + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Será que conseguiremos encontrar algum $n$ tal que $P(n)$ seja falso?

**Números Ordinais**

A estrutura do conjunto dos números naturais, no sentido dos números ordinais, é descrita por meio de uma lista de *axiomas*, que são propriedades essenciais, que caracterizam a estrutura da sequência, sem ambiguidades ou propriedades supérfluas. Giuseppe Peanno (1858-1932) propôs uma lista de 4 axiomas, baseado na noção se *sucessor* de um número natural:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um sucessor natural;

2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes,

3. Existe único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;

4. Seja $X$ um conjunto de números naturais ( isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de $X$ ainda pertence a $X$, então $X = \mathbb{N}$.

O último axioma é chamado **Axioma da Indução** e garante que um dado conjunto $X$ de $\mathbb{N}$ inclui, na verdade, todos os elementos de $\mathbb{N}$. É um método para demonstrar ou para construir definiões, e é utilizado para demonstrar sentenças da forma "$(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$", sejam igualdades ou desigualdades. Ele pode ser reescrito usando a linguagem de propriedades, e passa a ser chamado **Princípio da Indução Matemática**:

Seja $P(n)$ uma sentença abaerta, ou seja, uma propriedade relativa ao número natural $n$. Suponhamos que:

- (i). $P(1)$ é verdadeira;

- (ii). qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Na indução, temos:

- **Base da Indução:** Provar que $P(1)$ é verdade.
- **Hipótese de Indução:** Supor que para algum $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdade.
- **Passo da Indução:** Provar que $P(n+1)$ é verdade.

Exemplo: Prove que $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$.

**NOTA:**

Na demonstração acima, poderia parecer que estamos usando o fato de $P(n)$ ser verdadeira para deduzir que $P(n+1)$ é verdadeira para em seguida concluir que $P(n)$ é verdadeira. O que está ocorrendo? Estamos usando a tese para provar o teorema?

A resposta é não! Preste bem atenção, pois essa é a parte mais delicada de toda a história.

Dado um número natural $n$, temos duas possibilidades:

(a) $P(n)$ é verdadeira, ou (b) $P(n)$ é falsa.

A hipótese (ii) do Teorema não exige em absoluto que assumamos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, podendo eventualmente ser falsa para algum valor de $n$, ou mesmo para todos os valores de $n$. O que a hipótese (ii) exige é que sempre que algum

$n$ pertença à categoria (a) acima, então $n+1$ também pertença a essa mesma categoria; não exigindo nada quando $n$ pertencer à categoria (b).

Por exemplo, a sentença aberta $P(n) : n = n + 1$ satisfaz (por vacuidade) à hipótese (ii) do Teorema, já que nenhum $n \in \mathbb{N}$ pertence à categoria (a). O que falha para que o Teorema nos garanta que $P(n)$ é verdadeira para todo $n$ é que a hipótese (i) não é verificada, pois $P(1) : 1 = 2$ é falsa! (HEFEZ, 2019)

Exemplo: Demonstrar a desigualdade de Bernoulli: $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, para todo $n$ natural e todo $h > -1$.

Exemplo: Mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9.

Exemplo: Prove que $1 + 2 + 3 + .... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

**Outras formas do Principio da Indução**

Uma determinada propriedade pode ser válida para todos os números naturais a partir de um determinado valor $n_0$ ( o valor de $n_0$ pode ser o Zero, naqueles casos em que seja de interesse considerar 0 como um número natural), mas não necessariamente para valores menores. Neste caso, temos:

**Teorema**: Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural $n$ e seja $n_0$ um número natural. Suponhamos que:

- (i). $P(n_0)$ é verdadeira;
- (ii). qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exemplo: Prove que $2^n > n^2$ para todo natural $n \geq 5$.

**Teorema - Indução Forte ou Completa**: Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural $n$ e seja $n_0$ um número natural. Suponhamos que:

- (i). $P(1)$ é verdadeira;
- (ii). qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(k)$ é verdadeira para todo $k \leq n$, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n$.

Exemplo: Seja $a_n$ uma sequência definida por $a_0 = 2$ e $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{n+2}$ para cada natural $n$. Qual é o termo geral de $a_n$?

Referências

HEFEZ, 2009. Disponível em http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf