Lista de Exercício 5

CCR - Matemática C – turma extra

Docente: Tainara Volan

Nome: ____ Data: ________________

1. (FAAP – SP) Uma indústria produz, por dia, x unidades de determinado produto, e pode vender tudo o que produzir a um preço de R$ 100,00 a unidade. Se x unidades são produzidas a cada dia, o custo total, em reais, da produção diária é igual a $x^2 + 20x + 700$. Portanto, para que a indústria tenha lucro diário de R$ 900,00, qual deve ser o número de unidades produzidas e vendidas por dia?

Função Receita
$y = 100 * x$

Função Custo
$y = x^2 + 20x + 700$

Função Lucro = Receita – Custo
$y = 100x - (x^2 + 20x + 700)$
$y = 100x - x^2 - 20x - 700$
$y = -x^2 + 80x - 700$

Lucro diário de R$ 900,00
$-x^2 + 80x - 700 = 900$
$-x^2 + 80x - 700 - 900 = 0$
$-x^2 + 80x - 1600 = 0$

Vamos utilizar Xv na determinação da quantidade de produtos a serem produzidos e vendidos visando o lucro diário de R$ 900,00.

$$Xv = -\frac{b}{2a} \Rightarrow Xv = -\frac{80}{2*(-1)-2} \Rightarrow Xv = -\frac{80}{-2} \Rightarrow Xv = 40$$

A empresa deverá produzir e vender a quantidade de 40 produtos.

2. (Cesesp – PE) Um fabricante vende mensalmente c unidades de um determinado artigo por $V(x) = x^2 - x$, sendo o custo da produção dado por $C(x) = 2x^2 - 7x + 8$. Quantas unidades devem ser vendidas mensalmente, de modo que se obtenha o lucro máximo?

$L(x) = V(x) - C(x)$
$L(x) = x^2 - x - (2x^2 - 7x + 8)$
$L(x) = x^2 - x - 2x^2 + 7x - 8$
$L(x) = -x^2 + 6x - 8$

Aplicando Xv

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{6}{2*(-1)}$$
$$x_v = \frac{6}{2} \Rightarrow x_v = 3$$

A empresa deverá vender mensalmente 3 unidades do produto.

3. (PUC – SP) Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão h = –25t² + 625. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

Quando a bola atingir o solo, sua posição será igual a zero, então:

$h = 0$

$0 = -25t^2 + 625$

$25t^2 = 625$

$t^2 = 625 / 25$

$t^2 = 25$

$\sqrt{t^2} = \sqrt{25}$

$t = 5$

A bola levará 5 segundos para atingir o solo.

4. (PUC – Campinas – SP) **A** trajetória de um projétil foi representada no plano cartesiano por

$$y = \frac{-x^2}{64} + \frac{x}{16}$$

com uma unidade representando um quilômetro. Determine a altura máxima que o projétil atingiu.

Vamos calcular a altura máxima através da fórmula do yv.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^2 - 4*\left(-\frac{1}{64}\right)*0}{4*\left(-\frac{1}{64}\right)}$$

$$y_v = -\frac{\frac{1}{256}}{4*\left(-\frac{1}{64}\right)} \Rightarrow y = -\frac{\frac{1}{256}}{\left(-\frac{4}{64}\right)} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{256}}{\frac{4}{64}}$$

$$y = \frac{1}{256} * \frac{64}{4}$$

$$y = \frac{64}{1024}$$

$$y = 0{,}0625km$$

$$y = 62{,}5metros$$

A altura máxima atingida pelo projétil foi de 62,5 metros.

5. (Enem 2013 – PPL) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão L(x)= -x²+ 12x - 20, onde x

representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a:

A) 4
B) 6
C) 9
D) 10
E) 14

Alternativa B.

Sabendo que a função lucro L(x) é uma função do 2º grau, a = -1, ou seja, o seu gráfico é uma parábola com concavidade para baixo, queremos encontrar o ponto de máximo da função, ou seja, o vértice. Como x representa a quantidade de bonés, então a quantidade de bonés que maximiza o lucro é o x_V.

b = 12

a = -1

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

6. (Enem 2009) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.
Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

A) $V = 10.000 + 50x – x^2$.
B) $V = 10.000 + 50x + x^2$.
C) $V = 15.000 – 50x – x^2$.
D) $V = 15.000 + 50x – x^2$.
E) $V = 15.000 – 50x + x^2$.

Alternativa D.

Analisando a situação, com o combustível a R$ 1,50, são vendidos 10.000 litros, logo é faturado um total de:

10.000·1,50 = 15.000 → R$ 15.000,00.

É possível perceber que o valor arrecadado (V) é igual ao produto da quantidade Q pelo preço P.

$$V = Q \cdot P$$

Quando se abaixa 1 centavo, a quantidade vendida aumenta em 100 litros, ou seja:

$$Q = 10.000 + 100x$$

Por outro lado, o preço terá o desconto de 1 centavo, o que podemos representar por:

$$P = 1{,}50 - 0{,}01x$$

Sendo assim, o valor é calculado por:

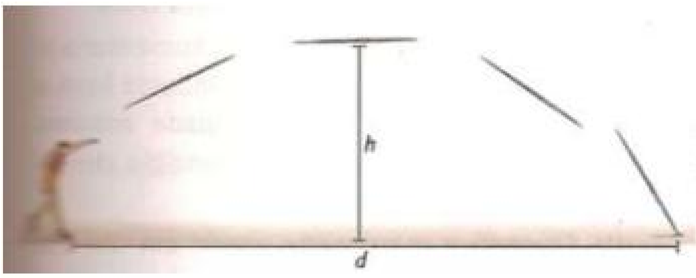
$$V = Q \cdot P$$

$$V = (10.000 + 100x) \cdot (1{,}50 - 0{,}01x)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos que:

$$V = 15.000 - 100x + 150x - x^2$$
$$V = 15.000 + 50x - x^2$$

7. O recorde olímpico no lançamento de dardo pertence ao norueguês Andreas Thorkildsen, nascido em 1982, que nas Olimpíadas de Pequim em 2008, atingiu a marca de 90,57m de distância. Ao ser lançado por um atleta, o dardo descreve uma trajetória aproximadamente parabólica, ou seja, uma trajetória que pode ser descrita por uma parábola.



Sabendo que a trajetória do lançamento do dardo pode ser descrita pela parábola que representa a função $f(x) = -\frac{1}{88}x^2 + x$, sendo x a medida em metros.

a) Calcular a distância d obtida nesse lançamento.
b) Qual a altura máxima h atingida pelo dardo?

Solução:

a) Para resolvermos essa situação teremos primeiro que determinar a distância do atleta ao local onde o dardo caiu. Para calcular a distância precisamos de dois pontos. Para isso calculamos os zeros da função.

Assim, $f(x) = 0 \rightarrow -\frac{1}{88}x^2 + x = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\left(-\frac{1}{88}\right).\ 0 = 1$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot -\frac{1}{88}} = \frac{-1 \pm 1}{-\frac{1}{44}} \rightarrow x' = 0$ e $x'' = 88$

$d = x'' - x' = 88 - 0 = 88$

b) Observando o gráfico podemos ver que altura máxima que o dardo atinge corresponde à distância que este se desloca no eixo y. Observando a parábola podemos notar que ele sobe e desce num ponto determinado. O vértice. Então vamos calcular o y_v:

$h = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{88}\right)} = 22$ m

8. (Adaptado do vestibular do IFPE – 2015) Considere a função do domínio real definida por $f(x) = -x^2 + x + 12$. Qual o valor do domínio que produz imagem máxima na função?

Observe que $a = -1$, $b = 1$ e $c = 12$ na função quadrática. O enunciado pede o cálculo do

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}.$$

9. (Adaptado do vestibular do UERN-2015) Se o ponto (k, 9) representa o vértice da parábola determinada pela função $y = 6x^2 + bx + 15$, com $b \in R$, então quais os possíveis valores de b?

Basta utilizar a fórmula do x_V o que gera

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$
$$k = -\frac{b}{2 \cdot 6}$$
$$k = -\frac{b}{12}$$

e substituir o ponto $(k, 9)$ na lei da função ficando com

$$y = 6x^2 + bx + 15$$
$$9 = 6 \cdot k^2 + b \cdot k + 15$$
$$9 = 6 \cdot \left(-\frac{b}{12}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{12}\right) + 15$$
$$9 - 15 = 6 \cdot \frac{b^2}{144} - \frac{b^2}{12}$$
$$-6 \cdot 144 = 6b^2 - 12b^2$$
$$-6 \cdot 144 = -6b^2$$
$$b^2 = 144$$
$$b = \pm 12.$$

10. A equação da trajetória parabólica do salto de uma pulga é dada por $f(x) =- x^2 + 4x$, na qual x é a distância horizontal percorrida e $f(x)$ a altura relativa a essa distância, todas as medidas em decímetros. Essa pulga salta no ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas. Qual é, em decímetros, a altura máxima atingida pela pulga?

A altura máxima nesse caso é o y_V que pode ser calculado como

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$
$$y_V = -\frac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)}$$
$$y_V = 4 \text{ dm}.$$

11. Um ônibus de 40 lugares transporta diariamente turistas de um determinado hotel para um passeio turístico pela cidade. Se todos os lugares estão ocupados, o preço de cada passagem e R$ 20, 00. Caso contrário, para cada lugar vago, será acrescida a importância de R$ 3,00 ao preço de cada passagem. Assim, o faturamento da empresa de ônibus, em cada viagem, é dada pela função f(x) = (40 − x)(20 + x), onde x indica o número de lugares vagos ($0 \leq x \leq 40$).

a) Qual o número de lugares vagos no ônibus, em cada viagem, para que a empresa obtenha faturamento máximo?

b) Qual é o faturamento máximo?

A função pode ser reescrita como $f(x) = -x^2 + 20x + 800$.

a) O número de lugares vagos para o faturamento máximo é a abscissa x_V, que pode ser calculado como

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$
$$x_V = -\frac{20}{2 \cdot (-1)}$$
$$x_V = 10.$$

b) Basta calcularmos $f(10) = (40 - 10)(20 + 10) = 900$ reais.

12. A empresa SKY transporta 2400 passageiros por mês da cidade de Acrolândia a Bienvenuto. A passagem custa 20 reais e a empresa deseja aumentar seu preço. No entanto, o departamento de pesquisa estima que a cada 1 real de aumento no preço da passagem, 20 passageiros deixarão de viajar pela empresa. Neste caso, qual é o preço da passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento da SKY?

16. (Extraído da Vídeo Aula) Supondo que o aumento da passagem seja x, temos que o total arrecadado f pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2400 - 20x)(20 + x) \\ &= 48000 + 2400x - 400x - 20x^2 \\ &= -20x^2 + 2000x + 48000. \end{aligned}$$

Como queremos o preço da passagem para faturamento máximo, temos $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2000}{-40} = 50$, ou seja, a passagem deverá custar $20 + 50 = 70$ reais.

13. A inequação $-t^2 + 3t > 0$ representa em horas o intervalo de tempo da ação de um determinado fármaco em função do tempo, a partir do momento em que um paciente o ingere. O medicamento se mantém eficiente para valores positivos da função. Qual o intervalo de tempo em que o remédio reage no corpo do paciente?

Identificando os coeficientes

a = -1

b = 3

c = 0

As raízes são os pontos em que a função é zero e, por isso, são os pontos em que a curva corta o eixo x.

$$-t^2 + 3t = 0$$
$$t(-t + 3) = 0$$

$t = 0$

ou

$$-t + 3 = 0$$
$$-t\,.(-1) = -3\,.(-1)$$
$$t = 3$$

A função assume valores positivos entre 0 e 3. Portanto, o medicamento mantém seu efeito durante três horas.

14. Em uma loja de roupas uma promoção diz que se um cliente comprar uma peça, ele pode levar uma segunda, igual a primeira, por um terço do valor. Se um cliente tem R$ 125,00 e quer aproveitar a promoção, o preço máximo da primeira peça que ele pode comprar, para poder levar também a segunda, é?

Chamando o preço da primeira peça de x, a segunda sai por x / 3. Como as duas juntas devem custar no máximo R$ 125,00, escrevemos uma inequação usando o sinal "menor ou igual que".

$$x + \frac{x}{3} \leqslant 125$$

Resolvendo a inequação

$$\frac{3x}{3} + \frac{x}{3} \leqslant 125$$

$$\frac{4x}{3} \leqslant 125$$

$$4x \leqslant 125 \times 3$$

$$4x \leqslant 375$$

$$x \leqslant \frac{375}{4}$$

$$x \leqslant 93{,}75$$

Portanto, o preço máximo que ela pode pagar na primeira peça é R$ 93,75.

15. (UNESP). Carlos trabalha como dj e cobra uma taxa fixa de R$100,00, mais R$20,00 por hora, para animar uma festa. Daniel, na mesma função, cobra uma taxa fixa de R$55,00, mais R$35,00 por hora. O tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos, é?

Função do preço do serviço de Carlos

100 + 20h

Função do preço do serviço de Daniel

55 + 35h

Se quiséssemos saber em quantos horas o preço do serviço deles se iguala, seria necessário igualar as equações.

Preço Daniel = Preço Carlos

Como queremos que o preço do serviço de Daniel **não fique mais caro** que o de Carlos, trocamos o sinal de igual pelo sinal de menor ou igual que ($\leqslant$).

$55 + 35h \leqslant 100 + 20h$ (inequação do 1º grau)

Isolando o termo com h de um lado da desigualdade:

$$35h - 20h \leqslant 100 - 55$$
$$15h \leqslant 45$$
$$h \leqslant \frac{45}{15}$$
$$h \leqslant 3$$

Para valores de h = 3, o valor do preço do serviço se iguala para os dois.

Preço de Daniel para 3 horas de festa
55 + 35h = 55 + 35x3 = 55 + 105 = 160

Preço de Carlos para 3 horas de festa
100 + 20h = 100 + 20x3 = 100 + 60 = 160

O enunciado diz: "para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos". Por isso utilizamos o sinal de menor ou igual que.

O tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos, é de 3 horas. A partir de 3h sua contratação passa a ser mais cara.

16. (ENEM 2020 Digital). Na última eleição para a presidência de um clube, duas chapas se inscreveram (I e II). Há dois tipos de sócio: patrimoniais e contribuintes. Votos de sócios patrimoniais têm peso 0,6 e de sócios contribuintes têm peso 0,4. A chapa I recebeu 850 votos de sócios patrimoniais e 4 300 de sócios contribuintes; a chapa II recebeu 1 300 votos de sócios patrimoniais e 2 120 de sócios contribuintes. Não houve abstenções,

votos em branco ou nulos, e a chapa I foi vencedora. Haverá uma nova eleição para a presidência do clube, com o mesmo número e tipos de sócios, e as mesmas chapas da eleição anterior. Uma consulta feita pela chapa II mostrou que os sócios patrimoniais não mudarão seus votos, e que pode contar com os votos dos sócios contribuintes da última eleição. Assim, para que vença, será necessária uma campanha junto aos sócios contribuintes com o objetivo de que mudem seus votos para a chapa II.

A menor quantidade de sócios contribuintes que precisam trocar seu voto da chapa I para a chapa II para que esta seja vencedora é

a) 449
b) 753
c) 866
d) 941
e) 1.091

Resposta correta: b) 753

Ideia 1: a chapa 1 perde uma certa quantidade x de votos e a chapa 2 ganha essa mesma quantidade x de votos.

Ideia 2: montar a inequação

Como os votos dos sócios patrimoniais continuarão iguais, para a chapa 2 vencer a eleição, deve conquistar x votos dos sócios contribuintes. Ao mesmo tempo, a chapa 1 deverá perder esses mesmos x votos.

votos chapa 2 > votos chapa 1

$1300 . 0,6 + (2120 + x) . 0,4 > 850 . 0,6 + (4300 - x) . 0,4$

$780 + 848 + 0,4x > 510 + 1720 - 0,4x$

$1628 + 0,4x > 2230 - 0,4x$

$0,4x + 0,4x > 2230 - 1628$

$0,8x > 602$

$x > 602 / 0,8$

$x > 752,5$

Portanto, 753 é a menor quantidade de sócios contribuintes que precisam trocar seu voto da chapa I para a chapa II para que esta seja vencedora.