Práctica 2: Álgebra Lineal con MATLAB

1 Introducción

A lo largo de la Práctica 1 hemos visto en particular cómo se crean las matrices (y vectores) y algunas operaciones básicas entre ellos. Ahora ahondaremos en algunos aspectos adicionales relacionados con el álgebra lineal.

Muchas matrices especiales no es necesario especificar "a mano", sino que tienen funciones predefinidas para crearlas; entre ellas están

- `eye(m,n)` devuelve la matriz $m \times n$ con 1 en la diagonal principal y 0 en las demás posiciones; en particular, `ones(n)` es la matriz identidad $n \times n$;
- `ones(m,n)` devuelve la matriz $m \times n$ con 1 en todas las posiciones; en particular, `ones(n)` de unos $n \times n$. De manera análoga funciona `zeros(m,n)` y `zeros(n)`;
- `rand(m,n)` devuelve la matriz $m \times n$ con valores aleatorios uniformemente distribuidos en $[0, 1]$; en particular, `rand(n)` es la matriz aleatoria $n \times n$. El comando `randn(m,n)` tiene una función análoga, excepto que los números obedecen a la distribución normal con media 0 y desviación estándar $\sigma = 1$;
- `diag` construye matrices diagonales o devuelve la diagonal de una matriz, en dependencia del contexto:
  - si `v` es un vector de n componentes, `diag(v,k)` devuelve una matriz cuadrada de orden $n + |k|$, con los elementos de `v` en la k-ésima diagonal: $k = 0$ (por defecto) representa la diagonal principal, $k > 0$ son las que están por encima, y $k < 0$ las que están por debajo de la diagonal principal. En particular, `diag(v)` crea una matriz diagonal con `v` en la diagonal principal.
  - si `X` es una matriz, `diag(X,k)` devuelve un vector columna, formado por los elementos de la k-ésima diagonal de `X`. En particular, `diag(X)` devuelve el vector (columna) de la diagonal principal de `X`.
- `linspace(a,b,n)` devuelve el vector de n valores equiespaciados entre `a` y `b`.

Además de las habituales (*,+,-), MATLAB incorpora diversas funciones para utilizar con matrices; entre ellas,

- `inv` calcula la inversa de una matriz;
- `det` calcula el determinante de una matriz;
- `rank` calcula el rango de una matriz.

Por último, en MATLAB están definidas dos divisiones: izquierda y derecha, que aplicadas a matrices o vectores tienen el siguiente sentido:

$$\texttt{A/B} \Leftrightarrow AB^{-1}, \quad \texttt{A\textbackslash B} \Leftrightarrow A^{-1}B.$$

En realidad, son operaciones mucho más versátiles de lo que se explica aquí, y que iremos descubriendo a lo largo del curso.

2 Trabajo de laboratorio

Resuelva, con la ayuda de MATLAB, los siguientes problemas:

1. Escriba una función de MATLAB llamada **menores**,

   ```
   function [y]=menores(a,k)
   ```

   que tenga como variables a y k y que devuelva la submatriz cuadrada $k \times k$ de la matriz a correspondiente al menor principal de ese orden.

2. Recuerde que un criterio suficiente para que una matriz A sea definida positiva es que todos sus menores principales sean estrictamente positivos. Modifique la función **menores** del ejercicio anterior para que devuelva la lista de todos los menores principales de la matriz argumento. Use la función **menores** para verificar si las matrices

   $$\begin{pmatrix} 21 & -13 & 2 \\ -13 & 133 & 14 \\ 2 & 14 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 21 & -13 & -200 \\ -13 & 133 & 14 \\ -200 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

   son definidas positivas.

3. Defina la matriz

   $$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix}$$

   y asígnela a la variable `B`. Calcule también su inversa y asígnela a `C`. Realice la comprobación de la certeza del resultado.

4. Verifique si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible:

$$\begin{aligned} 3u + 4v - 6x + 5z &= -8; \\ 2u - 12v + z &= 10; \\ -u + v - 14x + y + z &= 20; \\ 10v + 10x - y - 3z &= 6; \\ 2u - 3v + y &= -5; \end{aligned}$$

En caso de que lo sea, resuélvalo por dos vías:

(a) por medio de la división matricial (operador \);

(b) por medio de la inversa de la matriz;