S.U.S.
SERIOUS UNYIELDING STUDY

TOÀN THƯ VỀ TOÁN HỌC

Tác giả: Phạm Thành An

Ngày 4 tháng 7 năm 2025

Nhà xuất bản S.U.S.
Hải Dương — 2025

Mục lục

Danh mục Định nghĩa

Danh mục Định lý

Chương 1

Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

1.1 Tính đơn điệu của hàm số

Lý thuyết 1.1: Lý thuyết căn bản

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K. Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến** trên khoảng K nếu $\forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ hay xét một cách trực quan khi nhìn đồ thị, đồ thị có xu hướng "đi lên".

- **Điều kiện cần:** $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in K$ (điều kiện phụ: $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số điểm hữu hạn).
- **Điều kiện đủ:** $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$

Tương tự với nghịch biến. Ngoài ra, hàm số có giá trị không đổi, không phụ thuộc vào x, hoặc có đạo hàm bằng 0 trên khoảng xác định, còn được gọi là hàm hằng.

Chú ý 1.1: Điểm tới hạn

Điểm tới hạn là điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc không xác định.

Lý thuyết 1.2: Một số phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số

1. Sử dụng điều kiện cần hoặc đủ

- Bước 1: Tính y'
- Bước 2: Xét $y' > 0$ (Không quá quan trọng $\geq$ hay $>$, đồng biến trên một khoảng vẫn có thể chứa điểm có đạo hàm bằng 0, miễn là không có vô hạn điểm như vậy)

2. Sử dụng bảng biến thiên

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

- Bước 2: Tính y'
- Bước 3: Tìm nghiệm của y' hoặc các điểm mà y' không tồn tại
- Bước 4: Sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần và xét dấu y' ở giữa các khoảng

1.2 Cực trị hàm số

Lý thuyết 1.3: Lý thuyết về cực trị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K. Nếu $\exists(a;b)$ chứa x_0 và $(a;b) \subset K$ sao cho $f(x) < f(x_0)\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì:

- x_0 là một điểm cực đại
- $f(x_0)$ là giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu $y(\text{CĐ})$
- Điểm $M(x_0, f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số

Các điểm cực đại hay cực tiểu được gọi chung là các điểm cực trị. Các giá trị cực đại hay cực tiểu được gọi chung là các (giá trị) cực trị của hàm số.

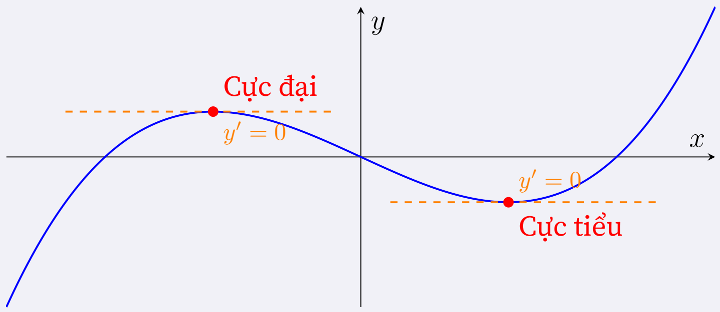
Bản chất 1.1

Để giải thích dễ hiểu hơn, ta có thể hình dung rằng điểm cực đại là điểm cao nhất trong một khoảng lân cận mà không phải là điểm đầu hay điểm cuối của khoảng. Tương tự với điểm cực tiểu.

Hệ quả là, trên đồ thị hàm số, điểm cực đại (hoặc cực tiểu) là một đỉnh mà tại đó đồ thị chuyển từ xu hướng đi lên sang đi xuống (hoặc ngược lại), tạo thành một "đỉnh lồi" (đối với cực đại) hoặc "đáy lõm" (đối với cực tiểu) trong vùng lân cận điểm đó.

Hơn nữa, tại điểm cực trị, đạo hàm của hàm số sẽ bằng 0 hoặc không xác định, vì tại điểm này, độ dốc của đồ thị chuyển từ dương sang âm (hoặc ngược lại), dẫn đến việc không có sự thay đổi về độ cao trong một khoảng nhỏ xung quanh điểm đó.

Cực đại và cực tiểu của hàm bậc ba



Lý thuyết 1.4: Điều kiện để một điểm là cực trị

Các bước xét cực trị:

1. **Bước 1:** Xác định miền xác định D của hàm số.
2. **Bước 2:** Tính đạo hàm y'.
3. **Bước 3:** Lựa chọn một trong hai hướng sau:

   Hướng 1: *(Dựa vào dấu của y')*

   Nếu xét được dấu của y', sử dụng dấu hiệu I:

   – Hàm số có k cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có k nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua các nghiệm đó.

Hướng 2: *(Dựa vào đạo hàm bậc hai y'')*

Nếu không xét được dấu của y' hoặc cần xác định cụ thể cực đại/cực tiểu, sử dụng dấu hiệu II bằng cách tính thêm y'':

- Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' \neq 0. \end{cases}$ có nghiệm thuộc D.
- Hàm số có cực tiểu $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' > 0. \end{cases}$ có nghiệm thuộc D.
- Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' < 0. \end{cases}$ có nghiệm thuộc D.
- Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 khi $\begin{cases} x_0 \in D \\ x_0 \text{ là điểm tới hạn.} \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$
- Hàm số đạt cực đại tại x_0 khi $\begin{cases} x_0 \in D \\ x_0 \text{ là điểm tới hạn.} \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$

Lưu ý: Hai điều cuối chỉ một chiều từ phải sang trái.

Lý thuyết 1.5: Tìm cực trị của một hàm số

Các bước xét cực trị:

1. **Bước 1:** Xác định miền xác định D của hàm số.
2. **Bước 2:** Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tới hạn.
3. **Bước 3:** Lựa chọn một trong hai hướng sau:
   - Xét đạo hàm bậc hai để xác định tính chất cực trị.
   - Sử dụng bảng biến thiên để xác định dấu của đạo hàm và từ đó suy ra cực trị.

Cách làm trên gần như tương tự với cách xét một điểm là cực trị hay không, nên tôi sẽ không nói quá chi tiết ở phần này. Tuy nhiên, có một cách khác rất hay để nhanh chóng tìm ra điểm cực trị đối với những hàm đa thức đơn giản:
Giả sử:

$$y = f(x)$$

Khi đó, đạo hàm có dạng:

$$f'(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_n)^{k_n}$$

Như vậy, đối với những trường hợp hàm $f(x)$ được phân tích thành nhân tử như trên, ta làm theo các bước sau:

1. Loại các nhân tử vô nghiệm (luôn lớn/nhỏ hơn 0 hoặc chứng minh được là không có nghiệm).

2. Loại các nhân tử mũ chẵn.
3. Nghiệm của những nhân tử mũ lẻ chính là những cực trị cần tìm.

$\Rightarrow$ Từ đây, có thể dùng những phương pháp khác như lập bảng biến thiên để xét tính chất cực trị.

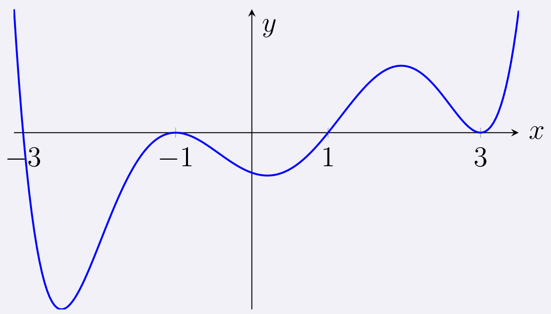
Chú ý 1.2: Tách nhân tử

Khi gặp những nhân tử có dạng kiểu $x^2 - n$ có thể tách tiếp thành $(x - \sqrt{n})(x + \sqrt{n})$.

Bản chất 1.2

- Thứ nhất, ở đây ta đang xét các hàm đơn giản, đạo hàm xác định với mọi x. Do đó, cực trị chỉ có thể là nghiệm của phương trình đạo hàm $f'(x) = 0$ (loại trừ trường hợp cực trị tại điểm mà đạo hàm không xác định). Vì vậy, ta có thể loại bỏ các nhân tử vô nghiệm (không nhất thiết phải có dạng $x - x_n$; kể cả đa thức bậc 2, 3,... nếu chứng minh hoặc bấm máy thấy vô nghiệm thì cũng loại bỏ được).
- Thứ hai, đây là một kiến thức thú vị về đồ thị hàm số, tại các nghiệm kép (mũ chẵn), đồ thị chỉ tiếp xúc trục hoành mà không cắt qua. Điều này có nghĩa là trước và sau nghiệm đó, dấu của đạo hàm không thay đổi, nên đó không phải là cực trị. Ngược lại, tại các nghiệm lẻ (mũ lẻ), đồ thị đi qua trục hoành, dấu của đạo hàm đổi qua nghiệm đó, nên đó chính là cực trị.

$$y' = (x+3)(x-1)(x+1)^2(x-3)^2$$



1.3 Một số hàm số thường gặp

Lý thuyết 1.6: Hàm số bậc ba

Hàm số bậc ba có dạng:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Đạo hàm:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Khi này, ta xét tam thức bậc hai

- $y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Bổ sung: $y' \neq 0$ với mọi x khi $\Delta \neq 0$ (vì nó có nghiệm)

Cực trị:

- 2 cực trị $\Leftrightarrow \Delta > 0$ (có 2 nghiệm phân biệt)
- Không có cực trị $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \Delta < 0 & \text{(không có nghiệm)} \\ \Delta = 0 & \text{(có nghiệm kép)} \end{array} \right.$

Lý thuyết 1.7: Hàm phân thức bậc nhất/bậc nhất

Hàm phân thức bậc nhất có dạng:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (x \neq -\frac{d}{c})$$

Đạo hàm:

$$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Từ đây, với $ad - bc$ là hằng số, dễ dàng suy ra rằng:

- Nếu $ad - bc > 0$ thì $y' > 0$, hàm đồng biến trên khoảng xác định.
- Nếu $ad - bc < 0$ thì $y' < 0$, hàm nghịch biến trên khoảng xác định.
- Nếu $ad - bc = 0$ thì $y' = 0$, hàm không đổi trên khoảng xác định.

Lý thuyết 1.8: Hàm trùng phương

Hàm trùng phương có dạng:

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

Đạo hàm:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} (2) \end{array}\right.$$

Các trường hợp (2):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{TH1:} & -\dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \\ & \Rightarrow x = 0 \text{ là nghiệm bội ba (lẻ)} \\ & \\ \text{TH2:} & -\dfrac{b}{2a} < 0 \Leftrightarrow ab > 0 \\ & \Rightarrow x^2 = -\dfrac{b}{2a} \text{ vô nghiệm} \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{0 là cực trị duy nhất}$$

$$\text{TH3:} \quad -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{2a} \text{ có hai nghiệm phân biệt } x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

Kết luận:

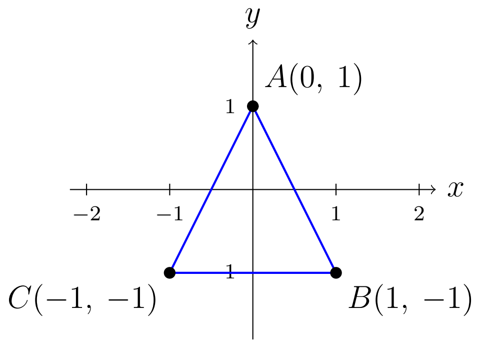
- Hàm trùng phương có 1 cực trị $\iff ab \geq 0$
- Hàm trùng phương có 3 cực trị $\iff ab < 0$
- Trong cả hai trường hợp đều có $x = 0$ là cực trị.

Tính chất của 3 điểm cực trị:
Với hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (với $ab < 0$ để có 3 cực trị), ta có:

- Ba điểm cực trị là $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$, $x_3 = -\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.
- Giá trị hàm số tại hai điểm đối xứng:

$$f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = f\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$$

- Ba điểm cực trị tạo thành các đỉnh của một tam giác cân trên mặt phẳng tọa độ.



Lý thuyết 1.9: Đường thẳng đi qua hai cực trị

1. Hàm phân thức dạng bậc hai/bậc một

- Phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị của $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có dạng:

$$y = \frac{(ax^2+bx+c)'}{(dx+e)'}$$

2. Hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

- **Cách 1:** Tính cụ thể hai điểm cực trị, sau đó viết phương trình đường thẳng qua hai điểm đó.
- **Cách 2:** Phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị có thể viết nhanh dưới dạng:

$$y = \text{dư của } \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(Tức là lấy phần dư khi chia $f(x)$ cho $f'(x)$)

1.4 Một số bài tập tiêu biểu

Chú ý 1.3: Bài tập xét tính đơn điệu hàm phân thức bậc nhất/bậc nhất

Xét hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến/nghịch biến trên khoảng K cần xét hai điều kiện

- $y' > (<)0$
- $-\dfrac{d}{c} \notin K$ (điều kiện xác định của hàm số)

Bài tập 1.1

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$. Tìm m để hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Bài này tương đối đơn giản, chỉ cần nắm rõ lý thuyết 1.6.
Đầu tiên, đối với mọi bài toán có tham số phía trước x có bậc cao nhất, ta cần xét trường hợp nó bằng 0 để xác định rõ ràng bậc của hàm số.
Xét $m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 1\}$
TH1: $m = 0 \Rightarrow y = 3x - 2;\ y' = 3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y$ đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).
TH2: $m = 1 \Rightarrow y = 2x^2 + 3x - 2;\ y' = 4x + 3 \Rightarrow y$ không đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$ (loại).
Xét $m^2 - m \neq 0 \Rightarrow y' = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 3 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}. \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ m^2 - m > 0 \end{cases}$$

Kết hợp với trường hợp $m = 0$. Ta có tập m cần tìm là:

Bài tập 1.2

Xác định tính đơn điệu của hàm số $y = \sin x + \cos x - x\sqrt{3}$.

Lời giải

Ở đây, chúng ta sử dụng phương pháp bất đẳng thức 2.1. Ta có: $y' = \cos x - \sin x - \sqrt{3}$. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta chứng minh được $\forall x \in \mathbb{R}$, có:

$$(a \sin x + b \cos x)^2 \leq (a^2 + b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Đối với hàm số này, ta có $a = -1,\ b = 1,\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.
$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x - \sqrt{3} \leq \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 1.3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x) = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; \dfrac{\pi}{2})$.

Lời giải

Đây là một câu hỏi vô cùng đơn giản sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, nhưng đối với những bạn mới làm quen thì có thể gặp chút lúng túng.
Bước giải:

Đặt $t = \cos x$. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.
Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên bài toán trở thành xét hàm số $y = \frac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên $(0; 1)$.
Ta có $y' = \frac{-m+2}{(t-m)^2} > 0$.
Để hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ thì:

$$\begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy: $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$

Bài tập 1.4

Cho hàm số $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng 1 cực trị.

Lời giải

Để làm được bài này, chúng ta cần nắm rõ lý thuyết 1.5.

Chương 2

Một số phương pháp chung

2.1 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

Lý thuyết 2.1: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Bất đẳng thức Bunhiacopxki (Cauchy–Schwarz):
Với mọi số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ta luôn có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi các vector $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ tỉ lệ với nhau.
Trường hợp thường gặp: Với $n = 2$, ta có $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$. Một hệ quả quan trọng dùng để đánh giá các biểu thức lượng giác:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.2 Phương pháp vẽ bảng biến thiên

Lý thuyết 2.2: Vẽ bảng biến thiên để xét tính đơn điệu của hàm số

Các bước thực hiện:

1. **Bước 1:** Xét điều kiện xác định của hàm số.
2. **Bước 2:** Tính đạo hàm y'.
3. **Bước 3:** Tìm các điểm tới hạn, gọi chung là các điểm x_i.
4. **Bước 4:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên, xét dấu y' trên từng khoảng.

Chú ý 2.1: Mẹo xét dấu

Có thể dùng máy tính CASIO chức năng giải bất phương trình để xét dấu của đạo hàm một cách nhanh chóng.

Ví dụ minh họa
Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- Hàm xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$ (hai điểm tới hạn).
- Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

Kết luận: Hàm số đồng biến trên $(-\infty, -1)$ và $(1, +\infty)$, nghịch biến trên $(-1, 1)$. Các điểm cực trị: cực đại tại $x = -1$ (y=4), cực tiểu tại $x = 1$ (y=0).