Sprawozdanie Obliczenia Naukowe
lista 3

Łukasz Bratos

listopad 2019

1 Opis problemu

Problem którym będziemy się zajmować jest znajdowanie miejsc zerowych funkcji używając metod numerycznych. Sprowadza się to do rozwiązania równania w postaci:

$$f(x) = 0$$

Nasze dane początkowe to:

- $f(x)$ - funkcja której miejsce zerowe chcemy znaleźć
- przedział lub punkt od którego zaczynamy poszukiwania
- delta - pożądana długość przedziału
- epsilon - pożądana dokładność
- maksymalna liczba iteracji w przypadku niektórych algorytmów

2 Opis algorytmów

2.1 Metoda bisekcji

Aby móc skorzystać z tej metody funkcja musi spełniać poniższe założenia:

- $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$
- $f(x)$ zmienia znak, tj. $f(a)f(b) < 0$

Metoda ta polega na iteracyjnym dzieleniu przedziału na pół oraz wybranie tego w którym funkcja zmienia znak. Kończy ona działanie gdy długość przedziału jest mniejsza od δ lub wartość w punkcie jest mniejsza od ϵ. Kolejne przybliżenia wyraża się równaniem:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

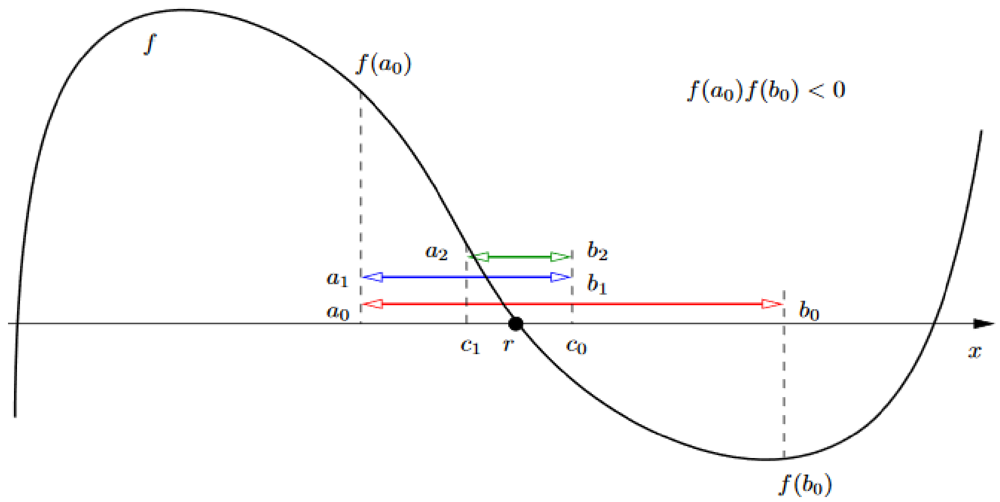
2.2 Metoda Newtona (stycznych)

Założenia:

- $f \in C^2[a, b]$
- $f'(r) \neq 0$ (r jest pierwiastkiem jednokrotnym)

Dany mamy punkt początkowy x_0. Wyznaczamy pochodną funkcji w punkcie początkowym, a następnie wyznaczamy styczną do funkcji w tym punkcie. Miejsce przecięcia stycznej oraz osi X jest potencjalnym pierwiastkiem naszej funkcji. Jeśli wartość funkcji w naszym punkcie przecięcia nie jest bliska zeru powtarzamy iterację, biorąc wyznaczone miejsce przecięcia jako punkt początkowy. Kolejne przybliżenia mają postać:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n}{f'(x_n)}$$



Rysunek 1: Interpretacja graficzna metody bisekcji

Dane: f, a, b, δ, ϵ
Wynik: r, $f(r)$, it, err
u ← $f(a)$; v ← $f(b)$; e ← b - a;
if *sgn(u) == sgn(v)* **then**
  return (0, 0, 0, 1)
end
it ← 1
while *true* **do**
  e ← e/2; c ← a + e; w ← $f(c)$;
  if $abs(e) < \delta$ *or* $|w| < \epsilon$ **then**
    return (c, w, it, 0)
  end
  if *sgn(w) != sgn(u)* **then**
    b ← c; v ← w;
  else
    a ← c; u ← w;
  end
  it++
end

Algorithm 1: Pseudokod metody bisekcji

2.3 Metoda siecznych

Założenia:

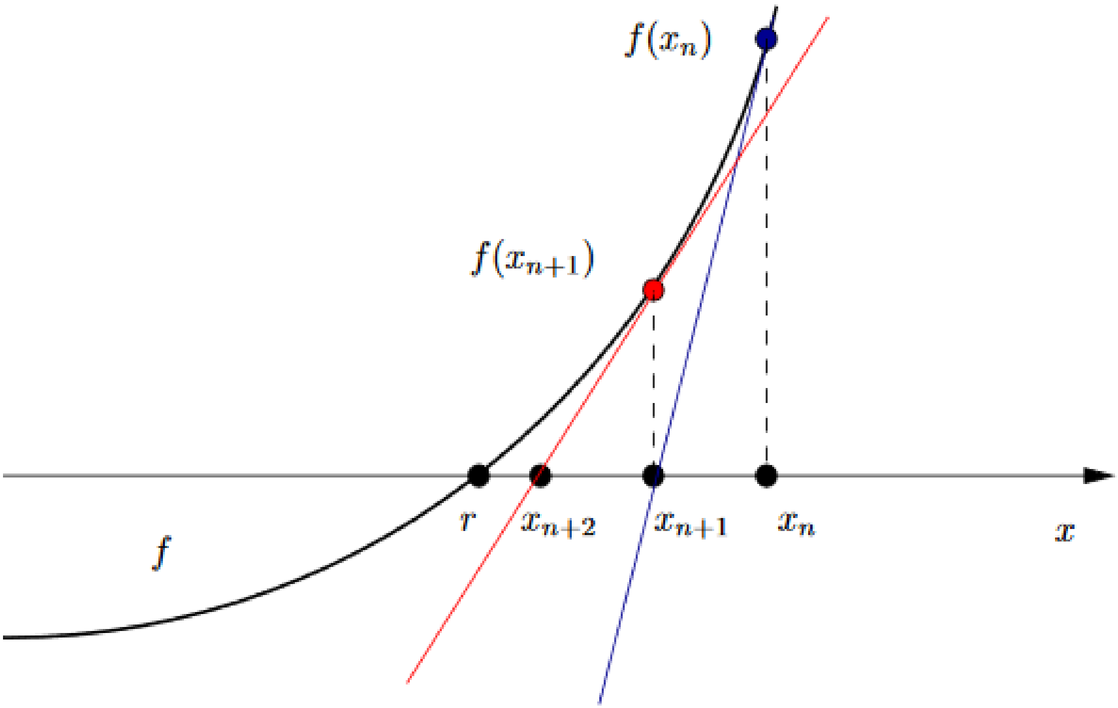
- $f \in C^2[a, b]$
- $f'(r) \neq 0$ (r jest pierwiastkiem jednokrotnym)

Metoda ta, jest podobna do metody Newtona z tą różnicą, że zamiast obliczać pochodną funkcji aproksymujemy ją ilorazem różnicowym, przez co dostajemy sieczną. Jako wartości początkowe potrzebujemy dwóch punktów, gdyż x_{n+1} jest zależne od x_n i x_{n-1}.

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Punkty przecięcia siecznej z osią X są naszymi potencjalnymi pierwiastkami. Wyliczamy je za pomocą wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Rysunek 2: Interpretacja graficzna metody Newtona

3 Zadanie 4

Naszym zadaniem jest wyznaczyć pierwiastek funkcji:

$$f(x) = sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$$

korzystając z metod przez nas zaimplementowanych.

Delta i epsilon są równe $\frac{1}{2}10^{-5}$. Pozostałe dane początkowe:

Korzystając z napisanych przez nas metod (wartość *maxit* ustawiamy na 100) otrzymujemy następujące wyniki:

Widzimy, że wszystkie metody zwróciły mniej więcej ten sam poprawny wynik. Wartości w tych punktach nie są dokładnie równe 0, lecz bliskie jemu. Metoda bisekcji potrzebowała więcej iteracji niż dwa pozostałe algorytmy, które poradziły sobie tak samo.

4 Zadanie 5

W tym zadaniu korzystając z metody bisekcji mamy znaleźć miejsca przecięcia funkcji:

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = 3x$$

Sprowadza się to do znalezienia miejsc zerowych funkcji $f(x) - g(x)$, która wygląda następująco:

$$f(x) - g(x) = e^x - 3x$$

Dzięki *WolframAlpha* wiemy, że funkcje te przecinają się w punktach $x \approx 0.619061$ i $x \approx 1.51213$. Stąd też jako nasze przedziały początkowe wybieramy $[0.0, 1.0]$ oraz $[1.0, 2.0]$. Delta i epslion są równe 10^{-4}.

Otrzymujemy wyniki zbieżne z tym co przedstawia *WolframAlpha*. Z ciekawości również sprawdziłem wyniki dla funkcji $g(x) - f(x)$. Różniły się one tylko co do znaku w wartości funkcji.

Dane: f, f' x_0, δ, ϵ, maxit
Wynik: r, $f(r)$, it, err
v $\leftarrow f(x_0)$;
if $abs(v) < \epsilon$ **then**
| return (x_0, v, 0, 0)
end
for *it* $\leftarrow$ *1* **to** *maxit* **do**
  if $abs(f'(x0)) < \epsilon$ **then**
    | return (0, 0, it, 2)
  end
  $x_1 \leftarrow x_0 - v/f'(x_0)$; v $\leftarrow f(x_1)$;
  if $abs(x_1 - x_0) < \delta$ *or* $abs(v) <$ *epsilon* **then**
    | return (x_1, v, it, 0)
  end
  $x_0 \leftarrow x_1$;
end
return (0, 0, 0, 1)

Algorithm 2: Pseudokod metody Newtona

Dane: f, x_0, x_1, δ, ϵ, maxit
Wynik: r, $f(r)$, it, err
a $\leftarrow x_0$; b $\leftarrow x_1$; fa $\leftarrow f(a)$; fb $\leftarrow f(b)$;
for *it* $\leftarrow$ *1* **to** *maxit* **do**
  if $abs(fa) > abs(fb)$ **then**
    | a $\leftrightarrow$ b; fa $\leftrightarrow$ fb;
  end
  s $\leftarrow$ (b-a) / (fb-fa);
  b $\leftarrow$ a; fb $\leftarrow$ fa;
  a $\leftarrow$ a - fa*s;
  fa $\leftarrow f(a)$;
  if $abs(b - a) < \delta$ *or* $abs(fa) <$ *epsilon* **then**
    | return (a, fa, it, 0)
  end
end
return (0, 0, 0, 1)

Algorithm 3: Pseudokod metody siecznych

5 Zadanie 6

W tym zadaniu za pomocą naszych metod mamy znaleźć miejsca zerowe następujących funkcji:

$$f_1(x) = e^{(1-x)} - 1$$

$$f_2(x) = xe^{-x}$$

Delta oraz epsilon są równe 10^{-5}.

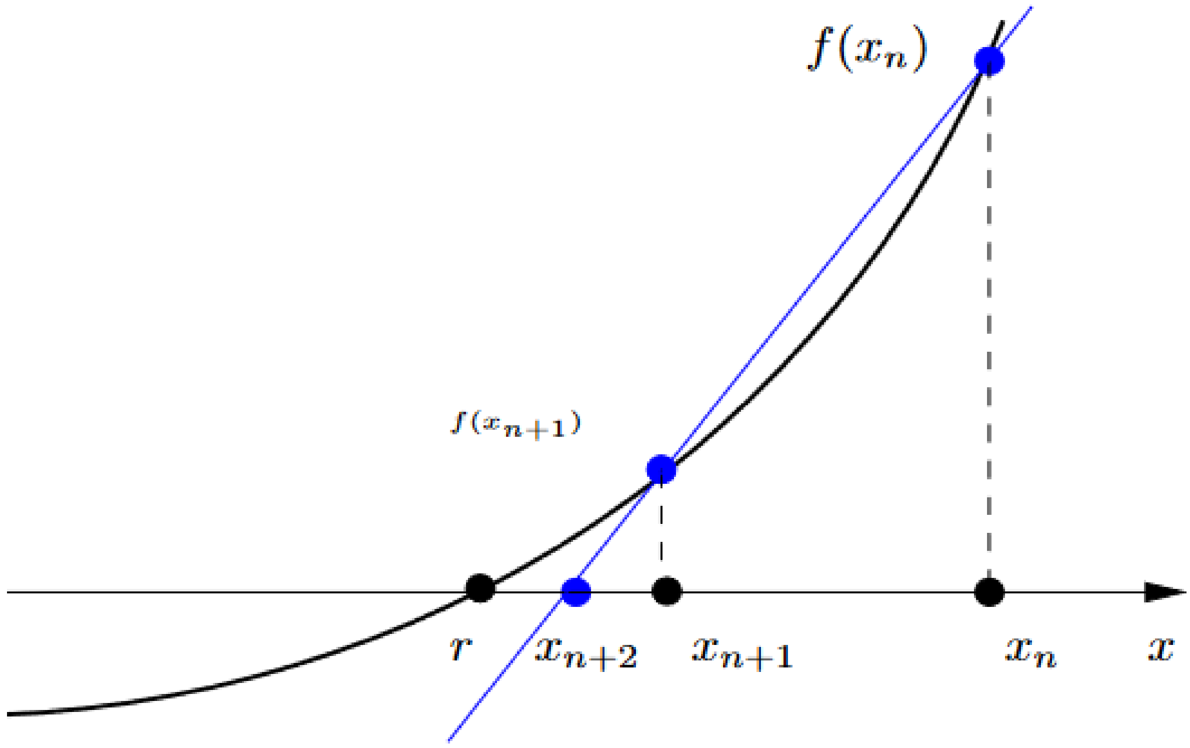
Miejsca zerowe funkcji f_1 i f_2 to odpowiednio $x = 1$ oraz $x = 0$. Stąd też nasze wartości początkowe powinny znajdować się blisko tych punktów.

Dodatkowo mamy sprawdzić co się stanie w metodzie Newtona, gdy dla f_1 wybierzemy $x_0 \in [1, \infty]$, dla f_2 wybierzemy $x_0 > 1$ oraz czy możemy wybrać $x_0 = 1$ dla f_2.

Widzimy, że gdy dla metody bisekcji wybierzemy przedział, którego środkiem jest nasze miejsce zerowe otrzymujemy od razu dokładny wynik. Gdy lekko go przesuniemy otrzymujemy już niedokładny wynik.

Eksperymentując z wartościami początkowymi dla metody Newtona i funkcji f_1 możemy zauważyć, że wybierając wartości z przedziału $(1, \infty]$ możemy otrzymać komunikat o błędzie, że pochodna jest bliska zeru. Wynika to z faktu, że $\lim_{x\to\infty} f_1'(x) = 0$, przez co dla dużych x otrzymujemy błąd. Dla małych wartości uzyskujemy jeszcze poprawny wynik.

Gdy dla metody Newtona i funkcji f_2 wybierzemy $x_0 = 1.0$ otrzymamy błąd o pochodnej zbyt bliskiej zeru ($f_2'(1) = 0$, a więc jest równoległa do osi X, przez co nie można wyznaczyć punktu przecięcia). Z kolei



Rysunek 3: Interpretacja graficzna metody siecznych

Metoda	x_0	x_1
bisekcji	1.5	2
Newtona	1.5	-
stycznych	1	2

Tabela 1: Dane początkowe do zadania 4

wybierając duże x otrzymamy niepoprawny wynik, gdyż $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$, więc wybierając dostatecznie duży x otrzymamy go jako wynik, ze względu na bliskość do zera, mimo tego, że funkcja nie ma miejsc zerowych na dodatniej części osi X.

6 Wnioski

Aby poprawnie wyznaczyć miejsca zerowe funkcji zaprezentowanymi metodami musimy posiadać wiedzę na temat przebiegu funkcji. Korzystając z wykresu funkcji możemy domniemywać gdzie znajdują się miejsca zerowe i na tej podstawie wyznaczyć wartości początkowe dla naszych algorytmów. Nieumiejętne dobranie przedziału dla metody bisekcji spowoduje zwiększenie liczby potrzebnych iteracji. Nieodpowiednie wartości początkowe dla metod Newtona i siecznych mogą spowodować zwrócenie niepoprawnych wyników co może być zasygnalizowane błędem, ale nie musi (przykład z zadania 6, gdzie funkcja jest zbieżna do 0 i nie posiada miejsc zerowych na tym przedziale).

Metoda	r	v	it	err
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Tabela 2: Wyniki dla zadania 4

Przedział	r	v	it	err
$[0.0, 1.0]$	0.619140625	-9.066320343276146e-5	9	0
$[1.0, 2.0]$	1.5120849609375	-7.618578602741621e-5	13	0

Tabela 3: Wyniki dla zadania 5

Metoda	Wartości początkowe	r	v	it	err
bisekcji	$[0.0, 1.5]$	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6	16	0
bisekcji	$[0.0, 2.0]$	1.0	0.0	1	0
Newtona	$x_0 = 0.0$	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-67	4	0
siecznych	$x_0 = 0.5, x_1 = 1.5$	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	0

Tabela 4: Wyniki do zadania 6 dla funkcji f_1

Metoda	Wartości początkowe	r	v	it	err
bisekcji	$[-1.0, 1.5]$	3.814697265625e-6	3.814682713737527e-6	17	0
bisekcji	$[-1.0, 1.0]$	0.0	0.0	1	0
Newtona	$x_0 = -1.0$	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
siecznych	$x_0 = -1.0, x_1 = 1.0$	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18	0

Tabela 5: Wyniki do zadania 6 dla funkcji f_2

Funkcja	Wartości początkowe	r	v	it	err
f_1	$x_0 = 3.0$	0.9999999710783241	2.892167638712806e-8	9	0
f_1	$x_0 = 15.0$	15.0	-0.9999991684712809	1	2
f_2	$x_0 = 1.0$	1.0	0.36787944117144233	1	2
f_2	$x_0 = 50.0$	50.0	9.643749239819589e-21	0	0

Tabela 6: Wyniki dla eksperymentów z zadania 6