Sprawozdanie Obliczenia Naukowe
lista 4

Łukasz Bratos

listopad 2019

1 Opis metod

1.1 Ilorazy różnicowe

Naszym celem jest wyliczenie ilorazu różnicowego danej funkcji. Naszymi danymi wejściowymi są wektor węzłów o długości $(n+1)$ oraz wektor wartości funkcji w tychże węzłach (również o długości $n+1$).

Ilorazem różnicowym N-tego rzędu funkcji $f : X \to Y$ w punktach $x_0, x_1, ..., x_n \in X$ nazywamy funkcję:

$$f[x_0, x_1, ..., x_N] := \sum_{i=0}^{N} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{N}(x_i - x_j)}$$

Korzystając z poniższej zależności rekurencyjnej eliminujemy potrzebę wykorzystania macierzy do naszych wyliczeń.

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) & (0 \leqslant i \leqslant N) \\ f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+m}] - f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m-1}]}{x_{k+m} - x_k} & (0 \leqslant k \leqslant k+m \leqslant n) \end{cases}$$

Nasza metoda zwraca wektor zawierający wyliczone ilorazy różnicowe funkcji w podanych węzłach.

```
function ILORAZY-RÓŻNICOWE(x, f)
    len ← LENGTH(f)
    for i ← 1 to len do
        f_x[i] ← f[i]
    end for
    for i ← 2 to len do
        for j ← len downto i do
            f_x[j] ← (f_x[j] − f_x[j − 1])/(x[j] − x[j − i + 1])
        end for
    end for
    return f_x
end function
```

1.2 Wyliczanie wartości wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona

Naszym celem jest wyliczenie wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie $x = t$, korzystając z uogólnionego algorytmu Hornera. Nasza metoda będzie działała w czasie $\mathcal{O}(n)$. Naszymi danymi wejściowymi są wektor węzłów (długości $n+1$), wektor ilorazów różnicowych (również o długości $n+1$) oraz punkt t w którym wyliczamy wartość wielomianu. Postać Newtona wzoru interpolacyjnego wygląda następująco:

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k] \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_j)$$

Ponadto aby wyliczyć wartość $N_n(x)$ możemy skorzystać ze wzorów (uogólniony algorytm Hornera):

$$w_n(x) = f[x_0, ..., x_n]$$

$$w_k(x) = f[x_0, ..., x_n] + (x - x_k)w_{k+1}(x) \text{ dla } k = (n-1, ..., 0)$$

$$N_n(x) = w_0(x)$$

Metoda zwraca wartość wielomianu w punkcie t.

```
function WAR-NEWTON(x, f_x, t)
    len ← LENGTH(x)
    n_t = f_x[len]
    for i ← len − 1 downto 1 do
        n_t ← f_x[i] + (t − x[i]) · n_t
    end for
    return n_t
end function
```

1.3 Zmiana współczynników wielomianu interpolacyjnego z postaci Newtona na postać naturalną

Ta metoda zamienia współczynniki wielomianu interpolacyjnego z postaci Newtona na postać naturalną. Ponownie skorzystamy z uogólnionego algorytmu Hornera. Wiemy, że w wielomianie interpolacyjnym współczynnik c_n przy najwyższej potędze jest równy współczynnikowi a_n przy najwyższej potędze w jego postaci naturalnej. Iteracyjnie wyliczamy a_i na podstawie wcześniej wyliczonych wartości stojących przy danej potędze. Metoda w czasie $\mathcal{O}(n^2)$ (pętla zewnętrzna wykonuje się n razy, zaś wewnętrzna w najgorszym przypadku również n razy) zwraca nam wektor współczynników wielomianu w postaci naturalnej.

```
function NATURALNA(x, f_x)
    len ← LENGTH(x)
    a[len] ← f_x[len]
    for i ← len − 1 downto 1 do
        a[i] = f_x[i] − a[i + 1] · x[i]
        for j ← i + 1 to len − 1 do
            a[j] ← a[j] − a[j + 1] · x[i]
        end for
    end for
    return a
end function
```

1.4 Interpolacja funkcji oraz jej rysowanie

Ta metoda interpoluje funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie rysuje wykres interpolowanej funkcji oraz wielomian interpolacyjny. W interpolacji używamy węzłów równoodległych. Dane wejściowe to funkcja f, przedział $[a, b]$ oraz stopień wielomianu interpolacyjnego n.

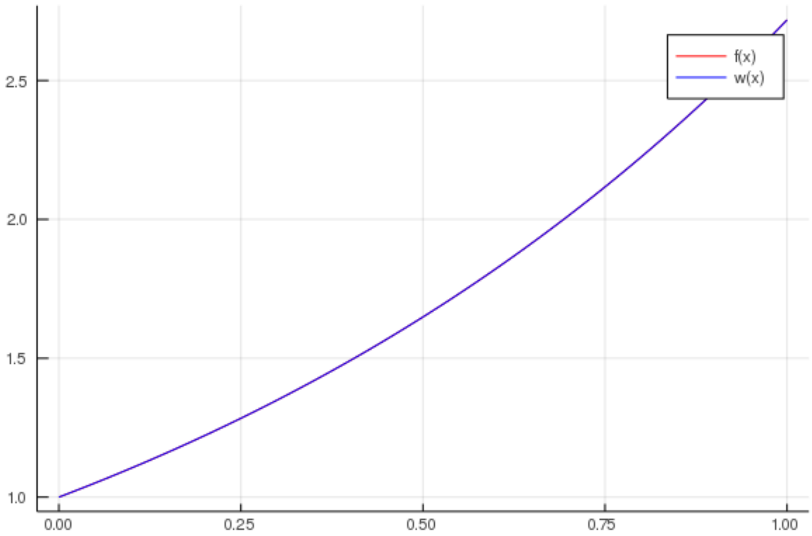
Na początku tworzymy wektor $n + 1$ równoodległych węzłów oraz drugi wektor wartości funkcji w tych węzłach. Na ich podstawie wyliczamy ilorazy różnicowe korzystając z napisanej przez nas wcześniej metody. Następnie generujemy dwa wektory (o długosci 101 dla lepszej dokładności) wartości funkcji oraz wartości wielomianu interpolacyjnego (korzystając z funkcji `warNewton()`). Na podstawie tych dwóch wektorów rysujemy wykres korzystając z pakietu `Plots`.

2 Zadanie 5

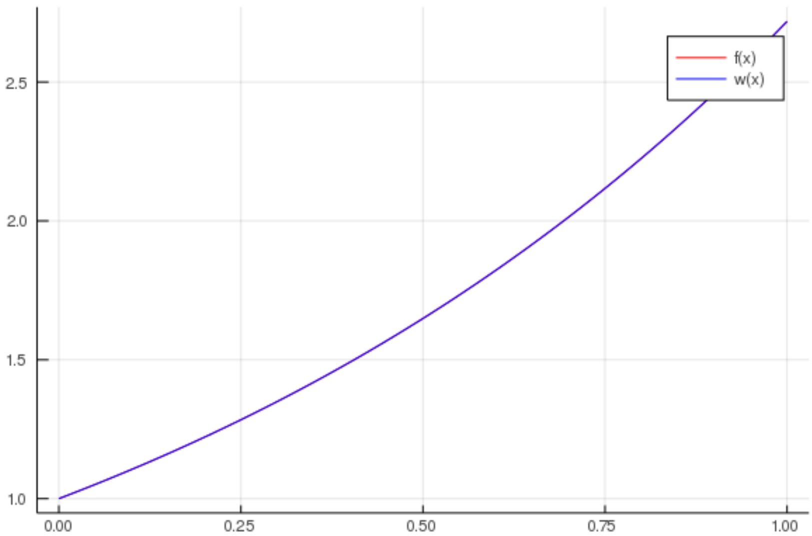
W tym zadaniu mamy przetestować działanie funkcji `rysujNnfx(f,a,b,n)` na następujących przykładach:

1. $f(x) = e^x$, przedział $[0, 1]$, $n = 5, 10, 15$
2. $f(x) = x^2 sin(x)$, przedział $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$

Widzimy, że nasze interpolacje funkcji pokrywają się z interpolowaną funkcją dla obu przykładów i dla każdego n.



Rysunek 1: Wykres e^x dla zadania 5, $a = 0$, $b = 1$, $n = 5$

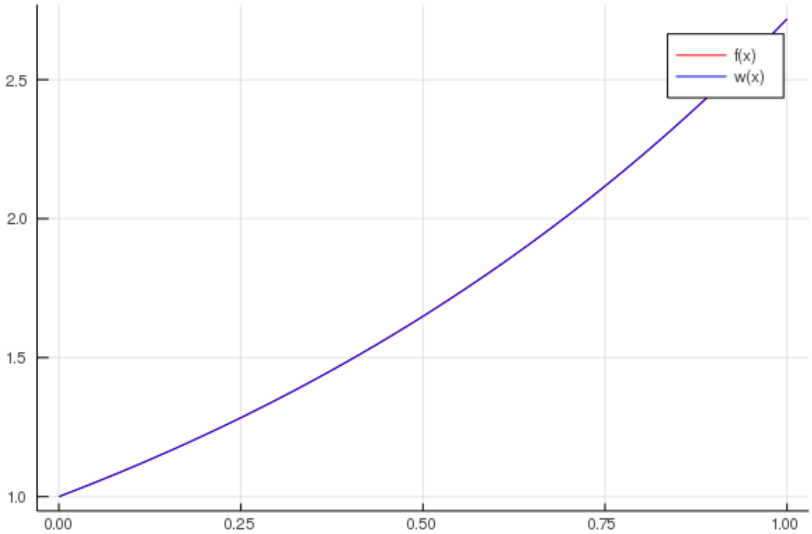


Rysunek 2: Wykres e^x dla zadania 5, $a =$, $b = 1$, $n = 10$

3 Zadanie 6

W tym zadaniu ponownie mamy przetestować działanie funkcji `rysujNnfx(f,a,b,n)` na następujących przykładach:

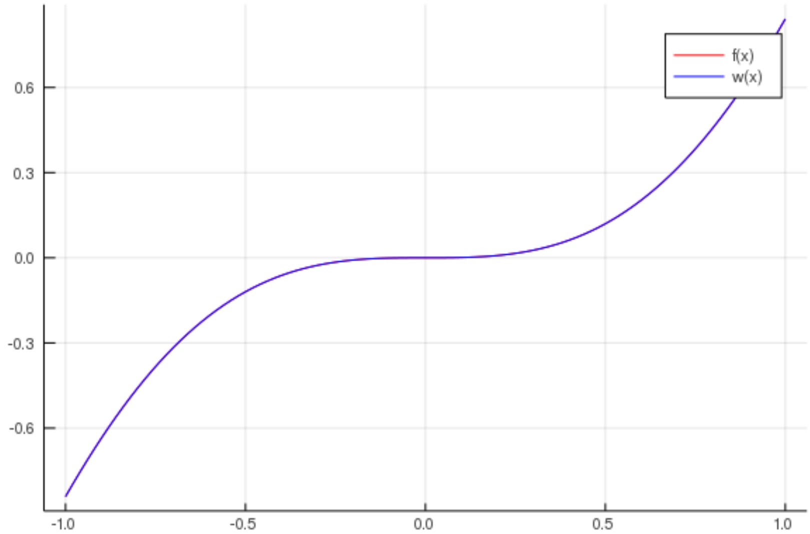
1. $f(x) = |x|$, przedział $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$
2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, przedział $[-5, 5]$, $n = 5, 10, 15$



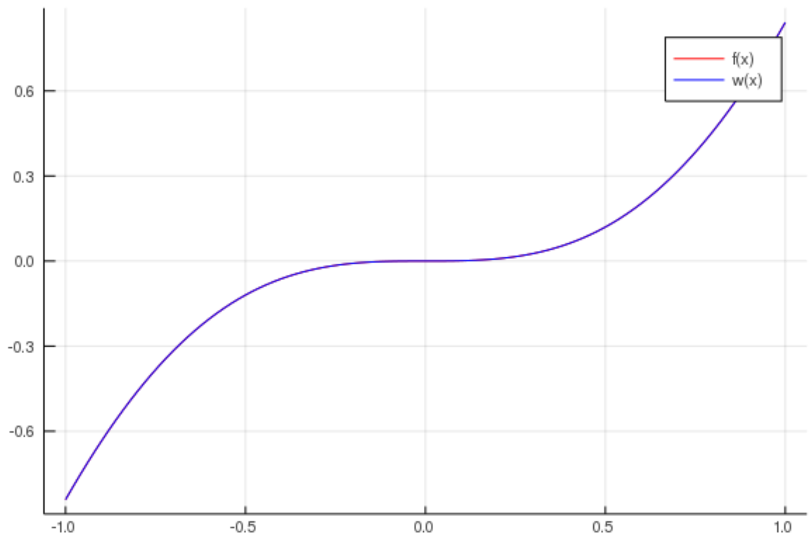
Rysunek 3: Wykres e^x dla zadania 5, $a = 0$, $b = 1$, $n = 15$

Widzimy, że dla funkcji $f(x) = |x|$ wartości wielomianu interpolacyjnego nie pokrywają się z wartościami funkcji. Powodem tego jest to, że funkcja $|x|$ nie jest różniczkowalna.

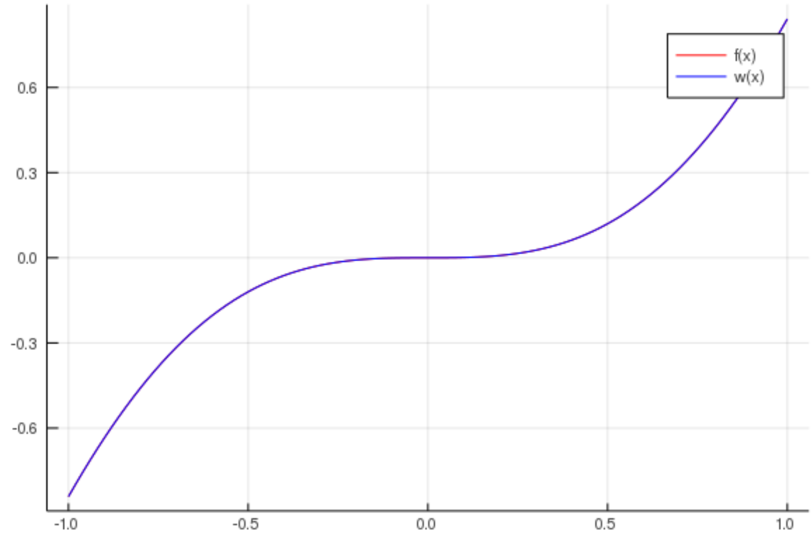
Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ widzimy, że pomimo zwiększenia n wartości na krańcach przedziału coraz bardziej się rozbiegają. Zjawisko to nazywa się efektem Rungego. Jest to zjawisko typowe dla interpolacji przy pomocy wielomianów o wysokich stopniach przy zastosowaniu równoodległych węzłów. Efekt ten można też zaobserwować w przypadku, gdy funkcja jest nieciągła lub znacząco różni się od funkcji gładkiej. Aby zapobiec temu zjawisku stosuje się interpolację z coraz gęściej upakowanymi węzłami na krańcach przedziału. Przykładem takich węzłów dla interpolacji n-punktowej wielomianowej są miejsca zerowe wielomianu Czybyszewa n-tego stopnia.



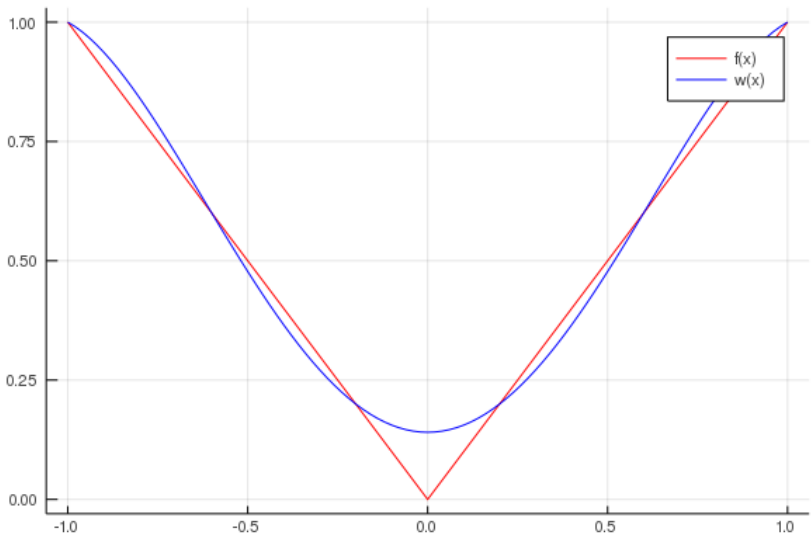
Rysunek 4: Wykres $x^2 sin(x)$ dla zadania 5, $a = -1$, $b = 1$, $n = 5$



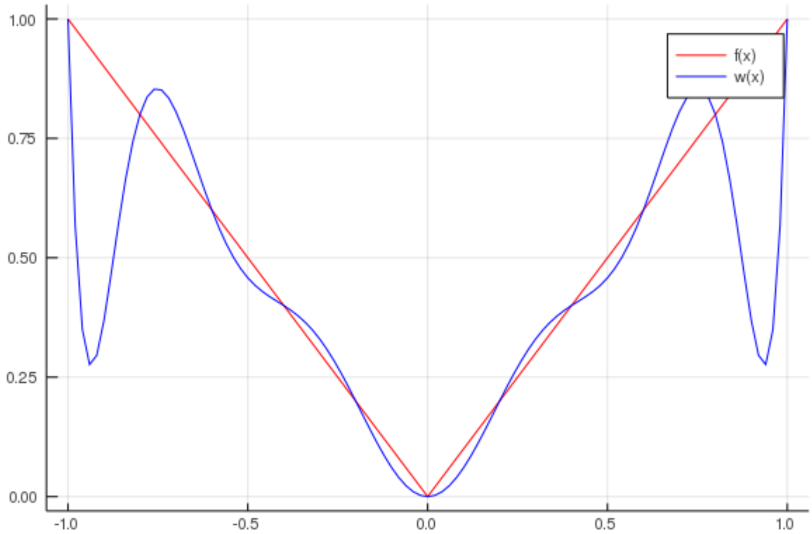
Rysunek 5: Wykres $x^2 sin(x)$ dla zadania 5, $a = -1$, $b = 1$, $n = 10$



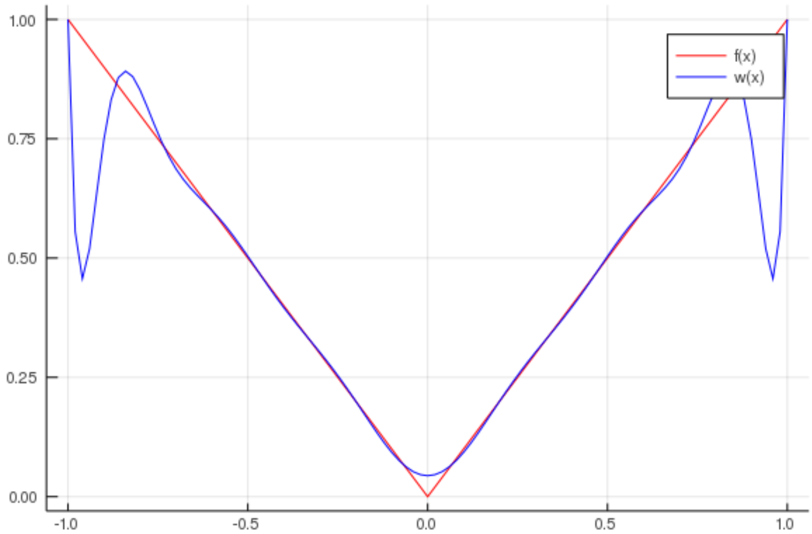
Rysunek 6: Wykres $x^2 sin(x)$ dla zadania 5, $a = -1$, $b = 1$, $n = 15$



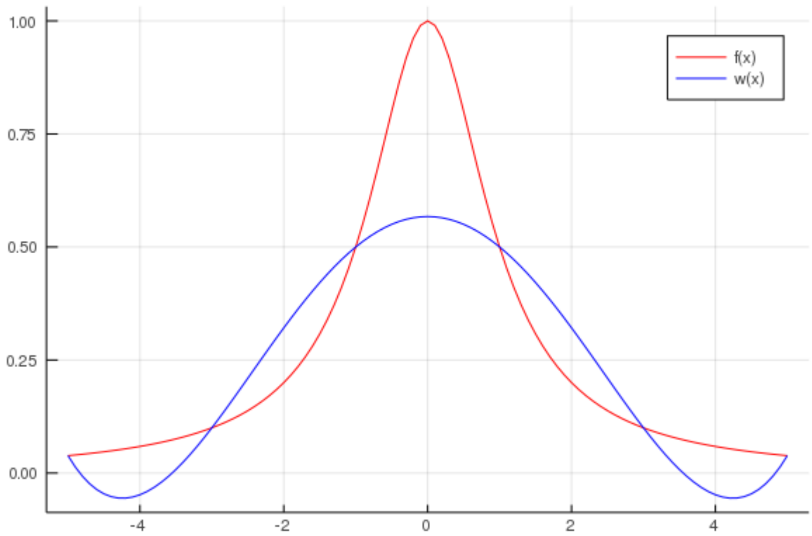
Rysunek 7: Wykres $|x|$ dla zadania 6, $a = -1$, $b = 1$, $n = 5$



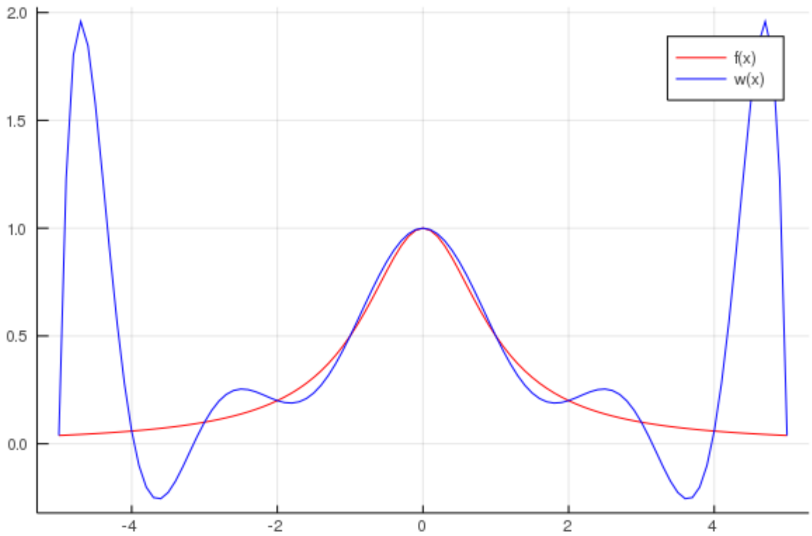
Rysunek 8: Wykres $|x|$ dla zadania 6, $a = -1$, $b = 1$, $n = 10$



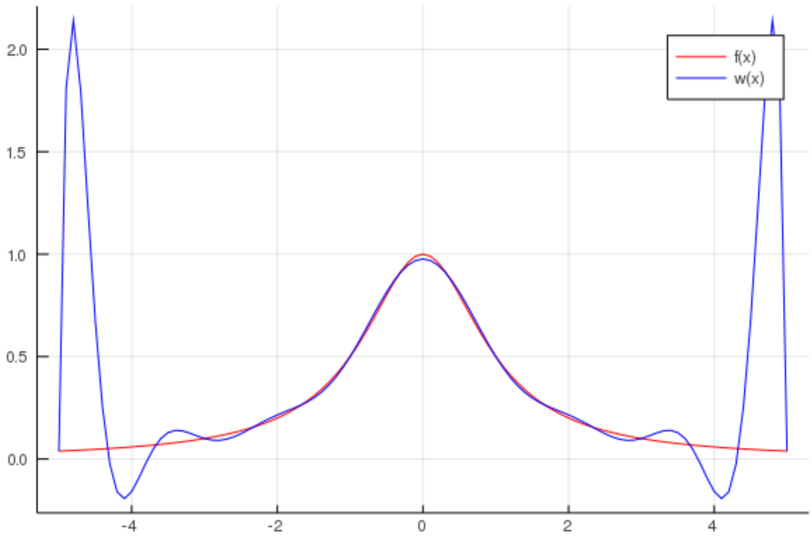
Rysunek 9: Wykres $|x|$ dla zadania 6, $a = -1$, $b = 1$, $n = 15$



Rysunek 10: Wykres $\frac{1}{1+x^2}$ dla zadania 6, $a = -5$, $b = 5$, $n = 5$



Rysunek 11: Wykres $\frac{1}{1+x^2}$ dla zadania 6, $a = -5$, $b = 5$, $n = 10$



Rysunek 12: Wykres $\frac{1}{1+x^2}$ dla zadania 6, $a = -5$, $b = 5$, $n = 15$