Angewandte Mathematik

Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum
kaori.nagatou@kit.edu

Lösungsvorschlag für die Aufgaben 3.1-3.4

3.1. Für $x = 192119201,\ y = 35675640$ rechnen Sie

$$z = \frac{1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832}{107751}$$

mit Matlab. (Mit Maple oder Mathematica: $z = 1783$)

Lösungsvorschlag:

```
>> format long
>> x=192119201, y=35675640
x =
   192119201
y =
    35675640
>> z=(1682*x*y^4+3*x^3+29*x*y^2-2*x^5+832)/107751
z =
   0.00772150606490
```

3.2. Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

1) $a = 1 + 2i,\ b = 2 + 3i,\ a + b$

2) $\left| -2 + 3i \right|$

3) $\cos^2(\pi / 3)$

4) $a = 2, b = 3, \sqrt{a^2 + b^3}$

Lösungsvorschlag:

1)
```
>> a=1+2i, b=2+3i, a+b
a =
   1.0000 + 2.0000i
b =
   2.0000 + 3.0000i
ans =
   3.0000 + 5.0000i
```

2)
```
>> abs(-2+3i)
ans =
    3.6056
```

3)
```
>> cos(pi/3)^2
ans =
    0.2500
```

4)
```
>> a=2, b=3, sqrt(a^2+b^3)
a =
     2
b =
     3
ans =
    5.5678
```

3.3. Berechnen Sie folgende Ausdrücke für $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) $a + b$

2) $a \cdot b$

3) $|a|_2 + |b|_2$

4) $a \times b$

Lösungsvorschlag:

```
>> a=[-1;2;-3], b=[2;0;-1]
a =
   -1
    2
   -3
b =
    2
    0
   -1
```

```
1)
>> a+b
ans =
     1
     2
    -4
```

```
2)
>> dot(a,b)
ans =
     1
```

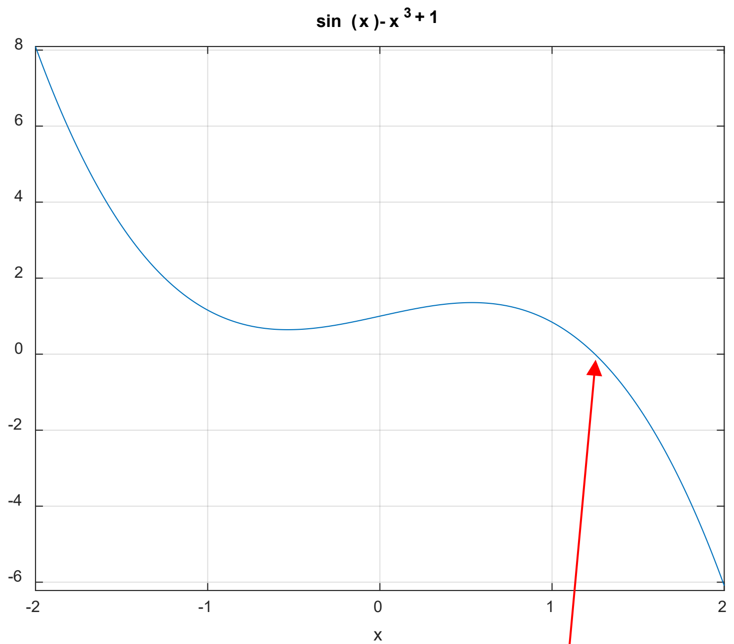
```
3)
>> norm(a)+norm(b)
ans =
    5.9777
```

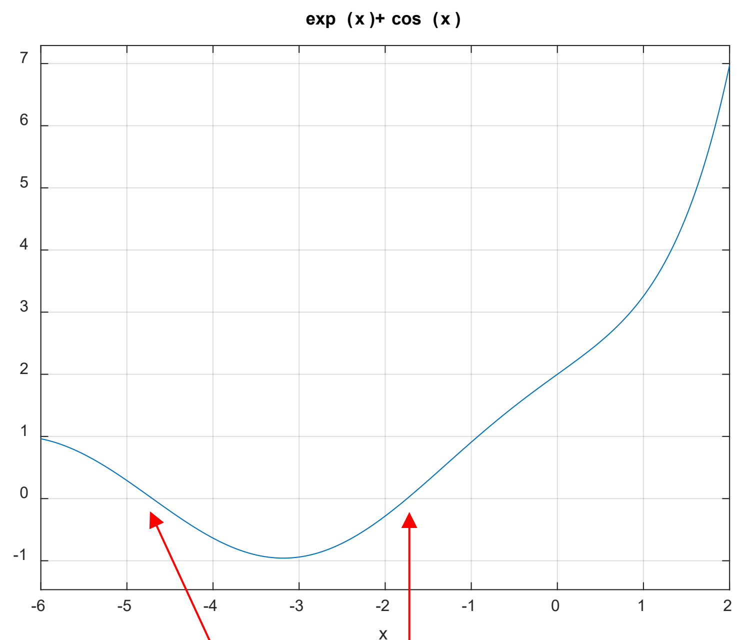
```
4)
>> cross(a,b)
ans =
    -2
    -7
    -4
```

3.4 Bestimmen Sie eine Nullstelle von

1) $\sin(x) - x^3 + 1$

2) $e^x + \cos(x)$





1.2491

$-4.7033, -1.7461, \cdots$

Newton Verfahren oder

```
>> fzero(@(x) sin(x)-x^3+1,1)
>> fzero(@(x) exp(x)+cos(x),1)
```

Heute

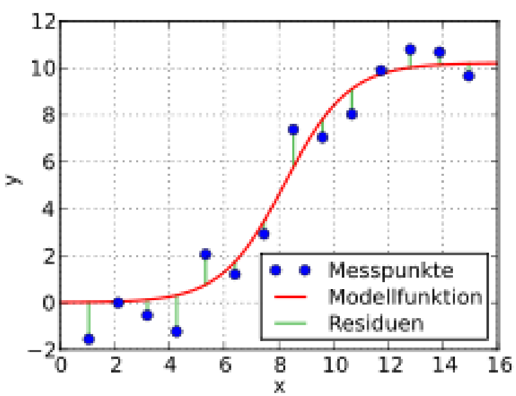
- Ausgleichsrechnung
  - Methode der kleinsten Fehlerquadrate
  - Ausgleichrechnung mit Polynomen
  - Lineare Ausgleichrechnung

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Eine Messung liefert zu den n verschiedenen Punkten $x_1, \cdots, x_n$ die jeweiligen Messwerte $y_1, \cdots, y_n$.
Gesucht ist eine Funktion f, welche die gegebenen Messwerte an den Stellen $x_1, \cdots, x_n$ *möglichst gut annähert*.

Bei der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate minimiert man die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den Messpunkten y_i und den Funktionswerten an den Messstellen $f(x_i)$ für $i = 1, \cdots, n$.

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$



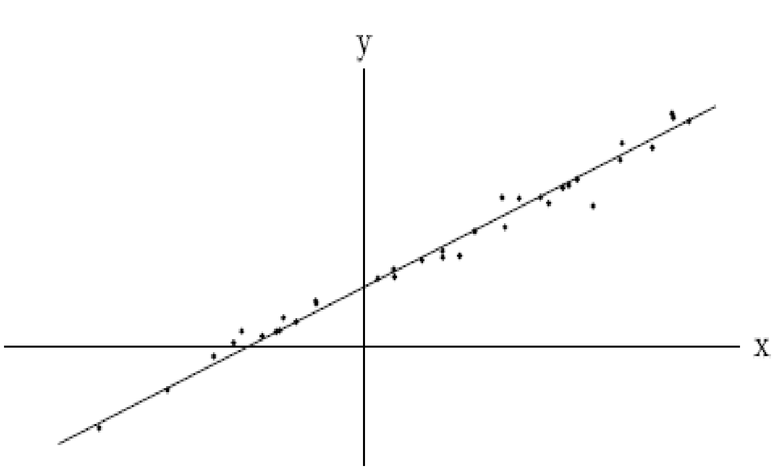
Ausgleichrechnung mit Polynomen

Definition 4.1

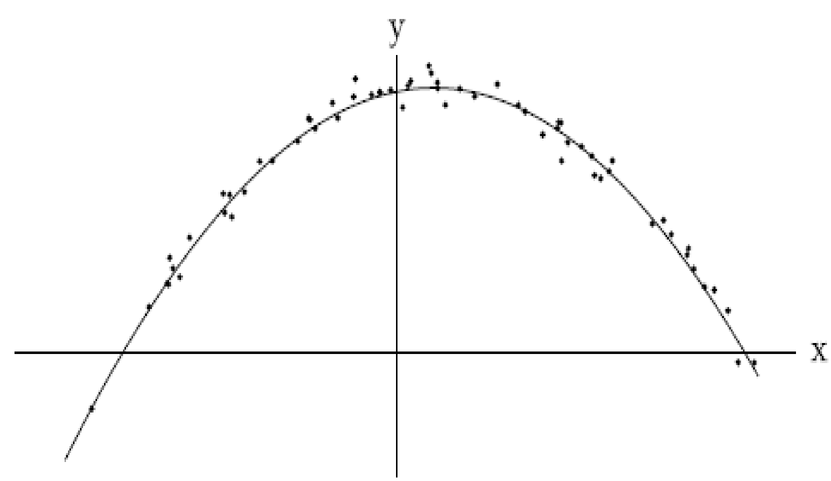
Ein Ausgleichspolynom ist ein Polynom vom Grad m,

welches die Modellparameter c_0 bis c_m enthält:

$$f(x, c_0, c_1, \cdots, c_m) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m.$$



$c_0 + c_1 x$



$c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Definition 4.2

Die Vandermondesche Matrix zu gegebenen Werten $x_1, \cdots, x_n$ und zu gegebenem Grad m besteht aus der Potenzen dieser Werte:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_m x_1^m \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_m x_2^m \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \dots + c_m x_n^m \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}, \mathbf{c} := \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Gesucht ist ein $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit der Eigenschaft, dass $\left\| A\mathbf{c} - \mathbf{y} \right\|$ minimal ist.

Gesucht ist also ein $\mathbf{u} \in \left\{ A\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$, sodass $\left\| \mathbf{u} - \mathbf{y} \right\|$ minimal wird.

Es ist $\left\| \mathbf{u} - \mathbf{y} \right\|$ genau dann minimal, wenn $\mathbf{u}$ die senkrechte Projektion von $\mathbf{y}$ auf $\left\{ A\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$ ist.

Mit $A = \left(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m \right)$ erhalten wir:

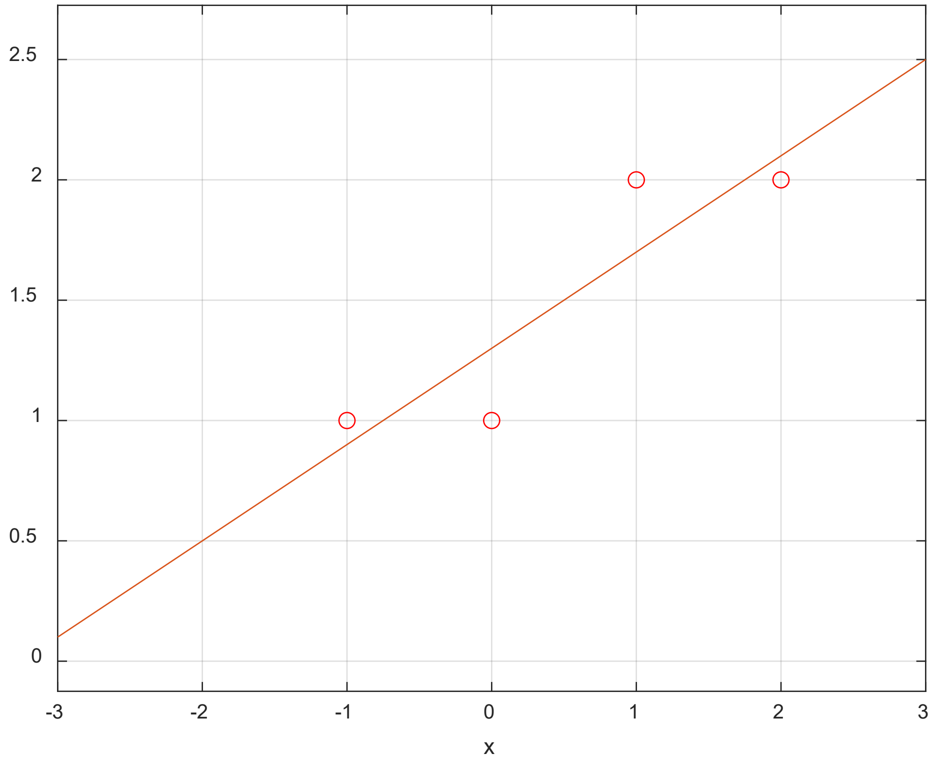
$$\begin{aligned} & \left(A\mathbf{c} - \mathbf{y} \right) \perp \mathbf{a}_i && \text{für alle } i = 0, \cdots, m \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{a}_i \cdot \left(A\mathbf{c} - \mathbf{y} \right) = 0 && \text{für alle } i = 0, \cdots, m \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{a}_i^T \left(A\mathbf{c} - \mathbf{y} \right) = 0 && \text{für alle } i = 0, \cdots, m \\ \Leftrightarrow\ & A^T \left(A\mathbf{c} - \mathbf{y} \right) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ & A^T A\mathbf{c} = A^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung nennt man die Normalengleichung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Beispiel

Eine Messreihe liefert

$$(x_1, y_1) = (-1,1), (x_2, y_2) = (0,1), (x_3, y_3) = (1,2), (x_4, y_4) = (2,2).$$



Aufgrund der Verteilung der Punkte suchen wir nach einer Ausgleichsgeraden $f = c_0 + c_1 x$.

Als Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ erhalten wir somit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nun berechnen wir $A^T\mathbf{y}$ und $A^T A$:

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Zu lösen bleibt nun das System

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir als die beste lineare Annäherung die Gerade

$$f = \frac{2}{5}x + \frac{13}{10}.$$

MATLAB

```
>>  A=[1 -1;1 0;1 1;1 2]
A =
     1    -1
     1     0
     1     1
     1     2
>>  y= [1;1;2;2]
y =
     1
     1
     2
     2
>> c=(A'*A)\(A'*y)
c =
   1.30000000000000
   0.40000000000000
```

LGS: A x = b

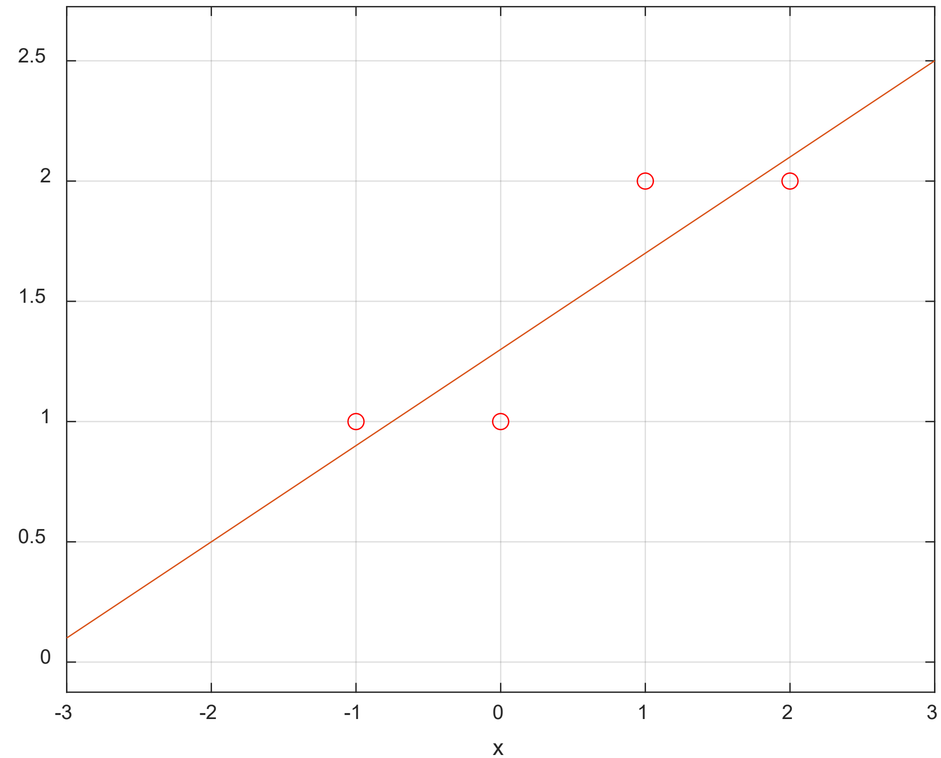
x = A \ b

Ausgleichungspolynom $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

```
>> x=[-1;0;1;2]
x =
   -1
    0
    1
    2
>> y=[1;1;2;2]
y =
    1
    1
    2
    2
>> A=zeros(4,3)
A =
    0     0     0
    0     0     0
    0     0     0
    0     0     0
```

```
>> A(:,1)=ones(4,1)
A =
     1     0     0
     1     0     0
     1     0     0
     1     0     0
>> A(:,2)=x
A =
     1    -1     0
     1     0     0
     1     1     0
     1     2     0
>> A(:,3)=x.^2
A =
     1    -1     1
     1     0     0
     1     1     1
     1     2     4
>>  c=(A'*A)\(A'*y)
c =
   1.30000000000000
   0.40000000000000
                  0
```

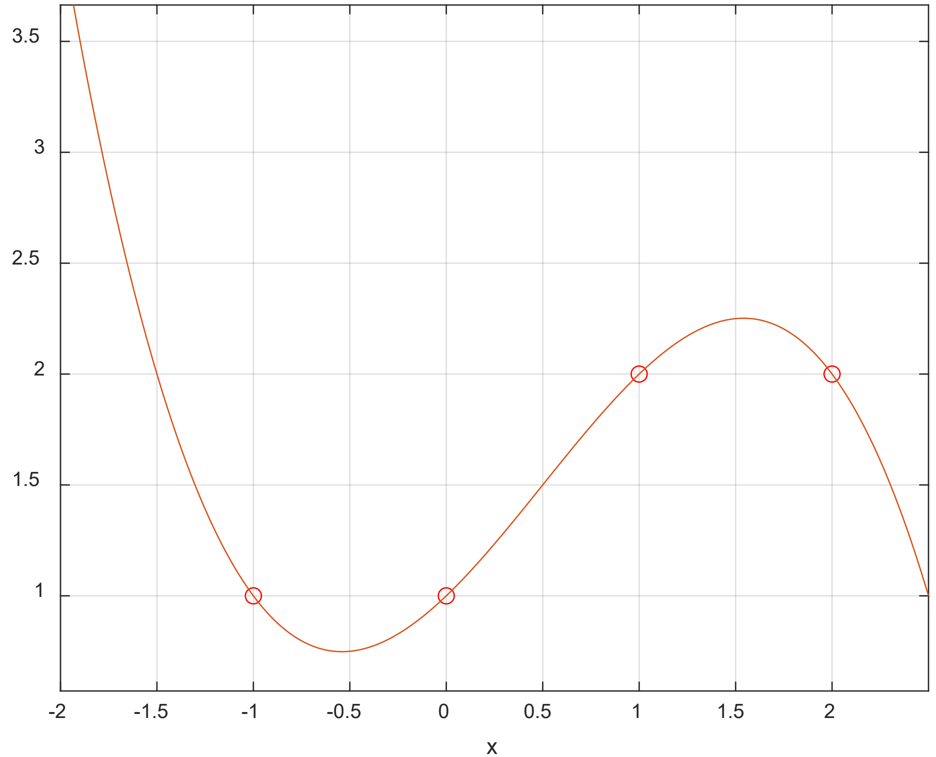
$$f = 1.3 + 0.4x$$



Ausgleichungspolynom $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

```
>> A=zeros(4,4)
A =
    0    0    0    0
    0    0    0    0
    0    0    0    0
    0    0    0    0

>> A(:,1)=ones(4,1); A(:,2)=x; A(:,3)=x.^2; A(:,4)=x.^3
A =
    1   -1    1   -1
    1    0    0    0
    1    1    1    1
    1    2    4    8
>> c=(A'*A)\(A'*y)
c =
   0.999999999999999
   0.833333333333335
   0.500000000000002
  -0.333333333333335
```



Definition 4.3

Eine lineare Ausgleichsfunktion ist eine Funktion, die linear in den Modellparametern $c_1, \cdots, c_m$ ist:

$$f(x, c_1, c_2, \cdots, c_m) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_m g_m(x).$$

Normalengleichungen für lineare Ausgleichsprobleme

Die Normalgleichungen der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu den Messpunkten (x_i, y_i) mit $i = 1, \cdots, n$ für ein lineares Ausgleichsproblem mit Komponenten $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ und Koeffizienten $c_1, \cdots, c_m$ lauten

$$A^T A\mathbf{c} = A^T \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_m(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \dots & g_m(x_n) \end{bmatrix}.$$

Aufgabe

4.1 Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \cdots, (x_{10}, y_{10})$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.7	2.4	2.8	3.0	5.4	6.4	7.4	8.2	8.8	11.2
y_i	12.1	9.0	9.3	6.7	3.3	-1.4	0.0	-4.1	-5.1	-9.4

1) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade $f = c_0 + c_1 x$ und skizzieren Sie diese zusammen mit den vorgegebenen Daten $(x_i, y_i), i = 1, \cdots, 10.$

2) Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ und skizzieren Sie diese zusammen mit den vorgegebenen Daten $(x_i, y_i), i = 1, \cdots, 10.$

4.2 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))
Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade zu den Daten

x_i	1	2	3	4
y_i	4	3	2	1