Angewandte Mathematik

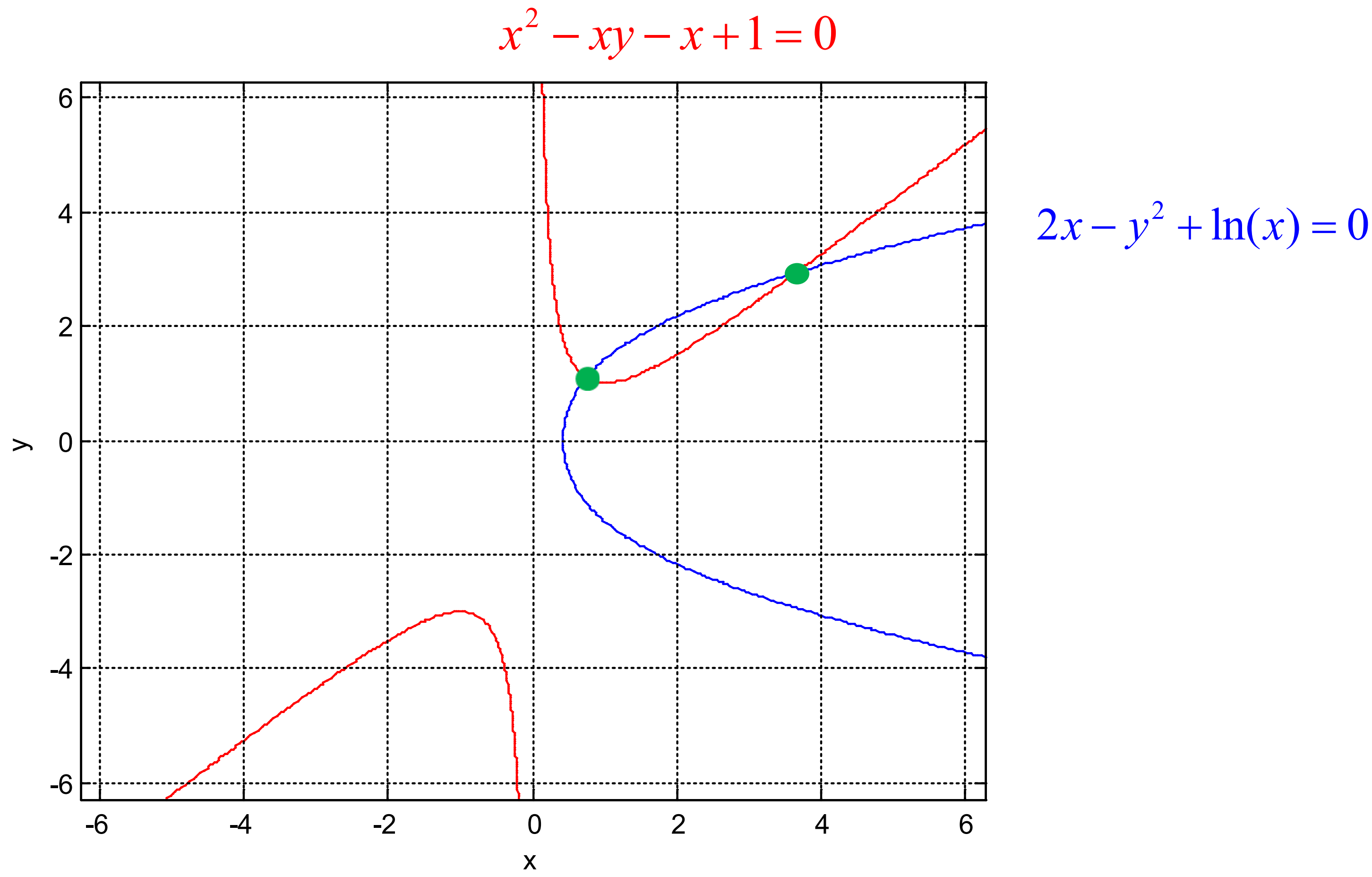
Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum
kaori.nagatou@kit.edu

Lösungsvorschlag für die Aufgabe 5.1

5.1 Bestimmen Sie näherungsweise zwei Lösungen des Gleichungssystem

$$\begin{cases} f(x,y) := 2x - y^2 + \ln x = 0 \\ g(x,y) := x^2 - xy - x + 1 = 0 \end{cases}$$



newton.m

```
altX=zeros(2,1); newX=zeros(2,1);
f=zeros(2,1); J=zeros(2,2); newf=zeros(2,1);
epsilon=1.0e-6;
IMAX=30;

altX(1)=input('Initial Value x1?');
altX(2)=input('Initial Value x2?');

fid=fopen('result1.txt','w');
fprintf(fid,'%d %f %f %e %e\n',0, altX(1), altX(2),...
    2*altX(1)-altX(2)^2+log(altX(1)), altX(1)^2-altX(1)*altX(2)-altX(1)+1);

for i=1:IMAX
    n=i
    f=[2*altX(1)-altX(2)^2+log(altX(1)); altX(1)^2-altX(1)*altX(2)-altX(1)+1];

    J(1,1)=2+1/altX(1); J(1,2)=-2*altX(2);
    J(2,1)=2*altX(1)-altX(2)-1; J(2,2)=-altX(1);

    y=J\(-f);

    newX=altX+y
    newf=[2*newX(1)-newX(2)^2+log(newX(1)); newX(1)^2-newX(1)*newX(2)-newX(1)+1];
    fprintf(fid,'%d %f %f %e %e\n',n, newX(1), newX(2), newf(1), newf(2))

    if(norm(newX-altX)<epsilon*norm(altX))
        disp('Converged!')
        newX
        fclose(fid)
        return
    else
        altX=newX;
    end
end

fclose(fid);
```

$$\mathbf{f}(x,y)=\begin{pmatrix}2x-y^2+\ln x\\ x^2-xy-x+1\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}2+\dfrac{1}{x} & -2y\\ 2x-y-1 & -x\end{pmatrix}$$

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$f(x^{(n)},y^{(n)})$	$g(x^{(n)},y^{(n)})$
0	1.000000	1.000000	1.000000e+00	0.000000e+00
1	0.666667	1.000000	-7.213177e-02	1.111111e-01
2	0.740388	1.092946	-1.433665e-02	-1.417271e-03
3	0.742356	1.089404	-1.607066e-05	1.084505e-05
4	0.742365	1.089411	-1.282291e-10	2.208356e-11
5	0.742365	1.089411	-2.220446e-16	0.000000e+00

$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0	1.000000	3.000000	-7.000000e+00	-2.000000e+00
1	0.666667	1.666667	-1.849910e+00	-3.333333e-01
2	0.684691	1.130619	-2.877062e-01	9.986527e-03
3	0.738366	1.085528	-4.954284e-03	5.301343e-03
4	0.742359	1.089415	-2.968309e-05	4.217759e-07
5	0.742365	1.089411	-5.198431e-11	6.270418e-11
6	0.742365	1.089411	-2.220446e-16	0.000000e+00

$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

0	3.000000	1.000000	6.098612e+00	4.000000e+00
1	13.295837	16.061116	-2.287803e+02	-4.906253e+01
2	8.033508	8.598970	-5.579166e+01	-1.157616e+01
3	5.388116	5.028093	-1.282129e+01	-2.448272e+00
4	4.152087	3.484491	-2.413893e+00	-3.801696e-01
5	3.726258	3.001191	-2.392279e-01	-2.447261e-02
6	3.665547	2.938392	-4.077847e-03	-1.267776e-04
7	3.664324	2.937225	-1.417880e-06	6.912499e-08
8	3.664323	2.937225	-1.920686e-13	2.708944e-14

$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0	4.000000	3.000000	3.862944e-01	1.000000e+00
1	3.703012	2.953012	-5.108710e-03	7.424704e-02
2	3.664854	2.937480	-2.946887e-04	8.633890e-04
3	3.664323	2.937225	-7.568117e-08	1.458824e-07
4	3.664323	2.937225	-1.554312e-15	6.661338e-15

$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Heute

Anwendungen des bestimmten Integrals

Länge, Flächeninhalt und Volumen

- Flächeninhalte
- Bogenlänge
- Rotationskörper

Flächeninhalte

Flächenberechnung

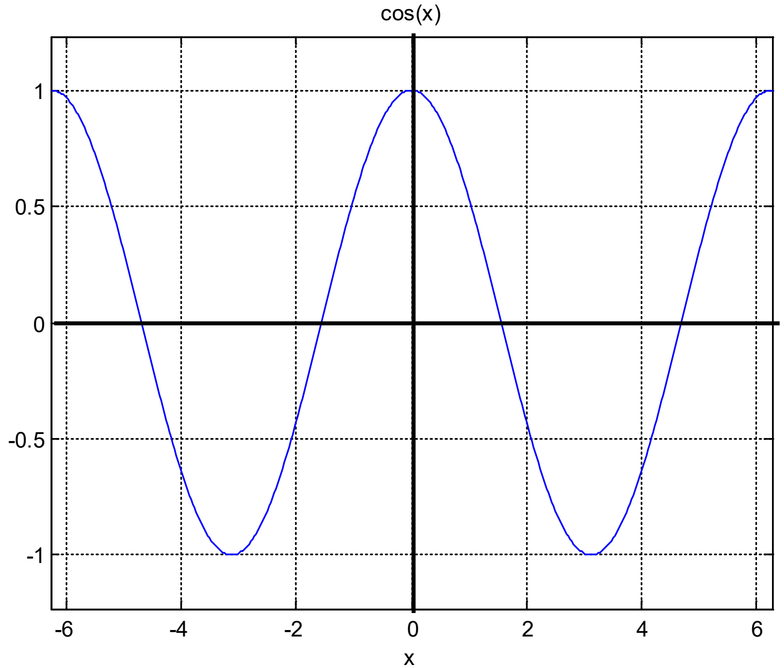
Die Fläche A, die das Schaubild einer nicht negativen Funktion f für x-Werte zwischen a und b mit der x-Achse einschließt, entspricht genau dem bestimmten Integral der Funktion f zwischen a und b:

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Flächenberechnung bei negativen Funktionswerten

Bei der Berechnung des Flächeninhaltes, den das Schaubild einer Funktion f mit der x -Achse bildet, benötigt man die alle Nullstellen $x_0, x_1, \ldots$ der Funktion im Intervall $[a,b]$. Auf Teilintervallen $[x_k, x_{k+1}]$, in denen die Funktion negative Werte annimmt, integriert man über die negative Funktion

$$A_+ = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-f(x))dx$$

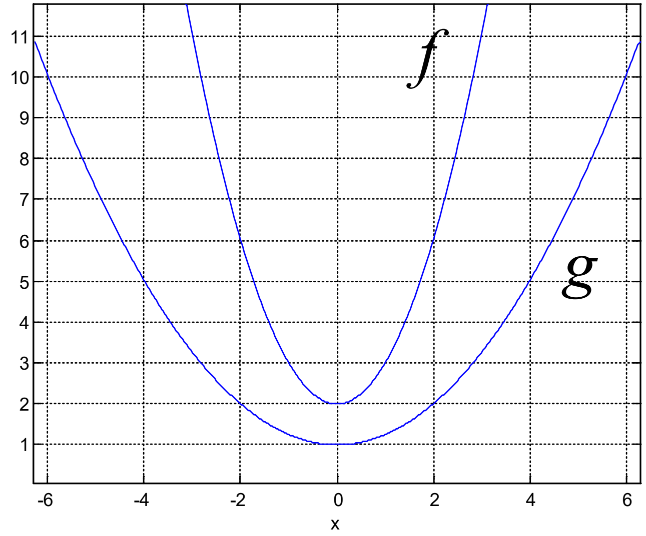


Flächen zwischen zwei Funktionen

Den Flächeninhalt A der Fläche, die durch das Schaubild der beiden Funktionen f und g für x -Werte zwischen a und b begrenz wird, kann man durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

berechnen. Dabei darf die Funktion f für alle x -Werte zwischen a und b nicht unterhalb der Funktion g verlaufen.



Bogenlänge eines Graphen

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist die Bogenlänge L, der durch den Graphen $\{(x,f(x)): x\in[a,b]\}\subseteq\mathbb{R}^2$ beschriebenen Kurve, gegeben durch

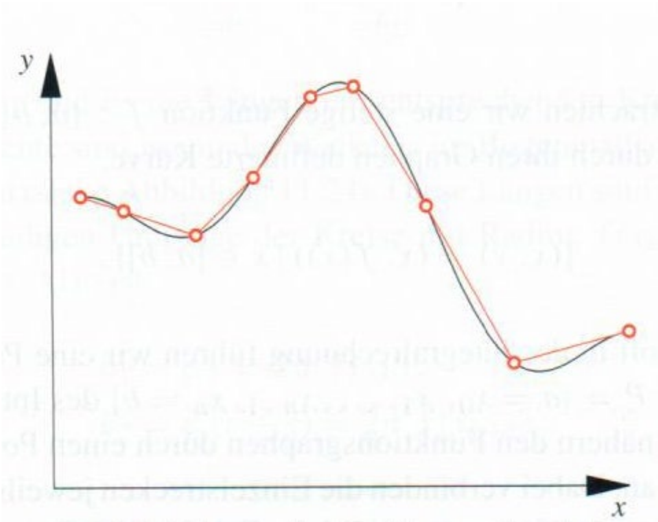
$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Hilfsmittel: **Der Mittelwertsatz**

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist, dann gibt es eine Zwischenstelle $z\in(a,b)$ mit

$$f(b)-f(a)=f'(z)(b-a).$$

Annäherung eines Funktionsgraphen durch einen Polygonzug



Wir unterteilen das Interval $[a,b]$ in viele kleine Teilstücke $[x_{k-1}, x_k]$.

$$x_0 = a, x_n = b, \ \ x_{k-1} < x_k \quad (k = 1, \cdots, n)$$

Die Länge eines solchen Polygonzugs ist

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Ist f stetig differenzierbar, gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung Stellen $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit

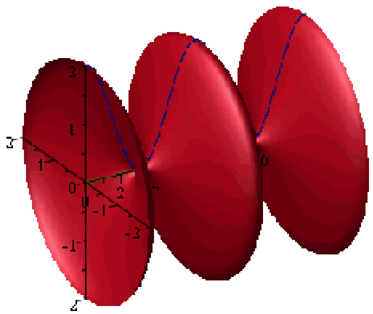
$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(t_k).$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(t_k))^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

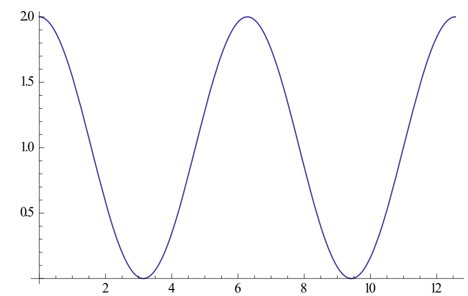
Rotationskörper

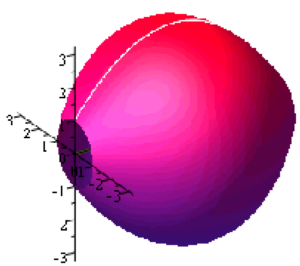
Rotationskörper wird in der Geometrie ein Körper genannt, dessen Oberfläche durch Rotation einer erzeugenden Kurve um eine Rotationsachse gebildet wird.



$$y = \cos(x) + 1 \quad (0 \le x \le 4\pi)$$

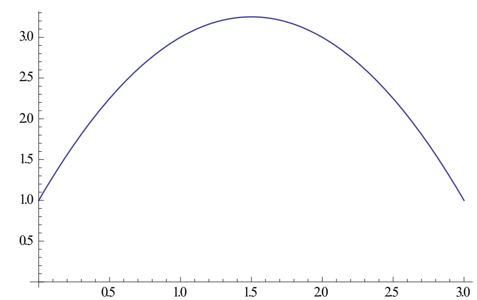
Rotation um x-Achse

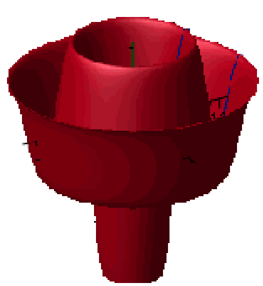




$$y = 1 + x(3 - x) \quad (0 \le x \le 3)$$

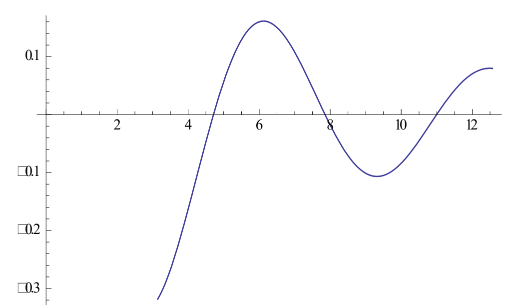
Rotation um x-Achse





$$y = \frac{\cos(x)}{x} \quad (\pi \le x \le 4\pi)$$

Rotation um y-Achse



Volumen von Rotationskörpern

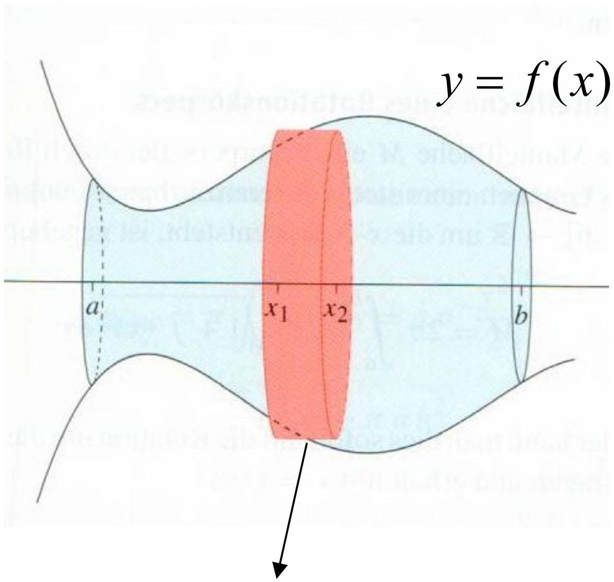
Das Volumen V eines Körpers im Anschauungsraum, der durch Rotation des Graphen einer stetigen Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ um die x-Achse entsteht, ist gegeben durch

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Analog erhält man bei Rotation einer Funktion g mit $g(y)=x$ um die y-Achse in einem Intervall $[c,d]$ das Volumen

$$V=\pi\int_c^d g(y)^2\,dy.$$

Annäherung des Volumes eines Rotationskörpers durch Zylinder



Wir unterteilen das Interval $[a,b]$
in viele kleine Teilstücke $[x_{k-1}, x_k]$.

$$x_0 = a, x_n = b$$

$$x_{k-1} < x_k \quad (k = 1, \cdots, n)$$

Das Volumen eines solchen Zylinders erhält man aus seiner Höhe $x_k - x_{k-1}$
und dem Radius $f(t_k)$, wobei t_k ein Punkt aus dem Teilinterval $[x_{k-1}, x_k]$ ist.

Für das Volumen folgt

$$V_{\text{zyl}} = \pi f(t_k)^2 (x_k - x_{k-1}).$$

Die Summe aller dieser Zylindervolumina ist dann eine gute Näherung für das Volumen des untersuchten Körpers.

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f(t_k)^2 (x_k - x_{k-1}) \to \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Mantelfläche von Rotationskörpern

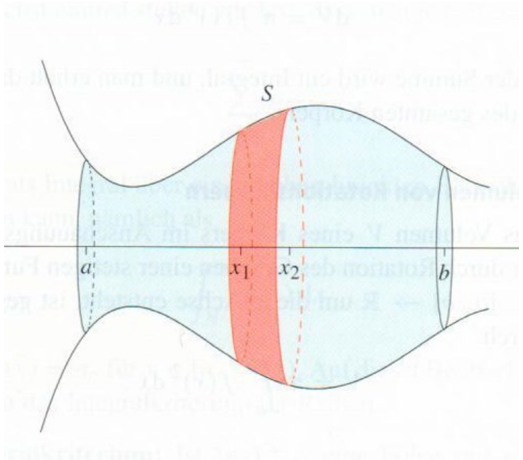
Die Mantelfläche M eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ um die x-Achse entsteht, ist gegeben durch

$$M=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

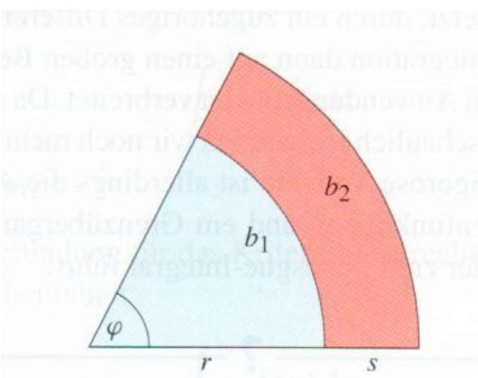
Analog erhält man bei Rotation einer Funktion g mit $g(y)=x$ um die y-Achse in einem Intervall $[c,d]$ die Mantelfläche

$$M=2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+g'(y)^2}\,dy.$$

Annäherung des Oberfläche eines Rotationskörpers durch Kegelstümpfe



Ein Oberflächenelement zwischen x_k und x_{k+1} wird angenähert durch den Mantel eines Kegelstumpfes.



Rollt man den Kegel ab, so ergibt sich für die Mantelfläche eines Stumpfes

$$\Delta O_k = \frac{\varphi}{2}\left((r+s)^2 - r^2\right) = \frac{\varphi}{2}(2rs + s^2) = s \cdot \frac{1}{2}\left(r\varphi + (r+s)\varphi\right)$$

$$b_1 = \varphi r = 2\pi f(x_k)$$

$$b_2 = \varphi(r+s) = 2\pi f(x_{k+1})$$

Für das Stück s ergibt sich nach Pytagoras

$$s = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta f_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\ \Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$$

Damit folgt für die Mantelfläche des Kegelstumpfs

$$\Delta O_k = 2\pi \sqrt{1+\left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\Delta x_k .$$

Mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung erhält man Stellen $\xi_k, \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ mit

$$\Delta O_k = 2\pi \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\, f(\eta_k)\Delta x_k .$$

Wir summieren wieder diese Flächeninhalte über dem gesamten Intervall $[a,b]$, um eine Approximation

$$\sum_{k=0}^{n} 2\pi \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\, f(\eta_k)\Delta x_k$$

an die gesuchte Mantelfläche M zu bekommen.

$$\sum_{k=0}^{n} 2\pi \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\, f(\eta_k)\Delta x_k \to 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\; dx$$

Beispiel: Volumen und Oberfläche der Kugel mit Radius R

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R kann man sich entstanden denken durch Rotation des oberen Halbkreises um die x-Achse. Um das Volumen zu erhalten, muss man also nur die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = R^2$ nach y auflösen und $y = f(x)$ in die Volumenformel einsetzen.

Für die Oberfläche kann man im Grunde analog vorgehen, abgesehen davon, dass man hier noch die Ableitung von $y = f(x)$ benötigt.

Für den oberen Halbkreis erhalten wir

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

mit $x \in [-R, R]$. Das Volumen bei Rotation um die x-Achse ergibt sich damit zu

$$V = \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2\,dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Für die Oberfläche erhält man zunächst

$$f'(x) = -x\left(R^2 - x^2\right)^{-1/2}$$

und daraus

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_{-R}^{R} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\,dx \\ &= 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Aufgaben

6.1 Bestimmen Sie die Länge des Geradenstücks C_1 zwischen $x = a$ und $x = b$, das durch

$$y = f(x) := kx + d$$

beschrieben wird.

6.2 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))

Bestimmen Sie die Bogenlänge der durch

$$y = f(x) = \cosh(x)$$

definieren Kurve C_2 in einem Intervall $[a,b]$.

$$\left(\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

6.3 Wir haben ein Sektglas, das näherungsweise durch Rotation einer Parabel

$$y = \frac{x^2}{a}$$

um die y-Achse beschrieben.

Bestimmen Sie das Volumen bei einer Füllung bis zu einer Höhe h und noch die Innenfläche des Glases.