Angewandte Mathematik

Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum
kaori.nagatou@kit.edu

Lösungsvorschlag für die Aufgaben 7.1 -- 7.5

7.1 Berechnen Sie $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+2y)\,dxdy$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+2y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left[-\cos(x+2y)\right]_0^{\pi/2} dy = \int_0^{\pi/2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2y\right)+\cos(2y)\right)dy$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\sin(2y)+\cos(2y)\right)dy = 1$$

7.2 Berechnen Sie das dreidimensionale Gebietsintegral

$$\iiint_D \frac{x(x+z)}{1+y^2}\,dxdydz$$

über das Gebiet $D=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

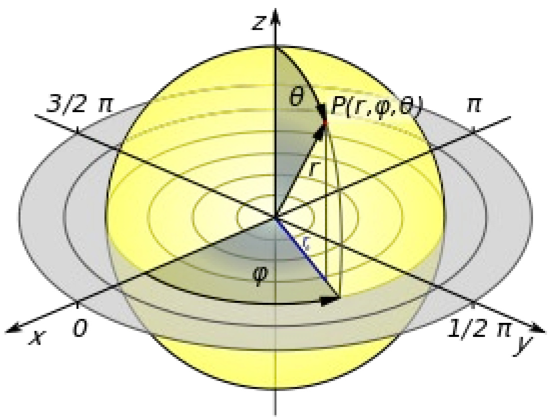
$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x(x+z)}{1+y^2}\,dydzdx = \int_0^1\int_0^1\left[x(x+z)\arctan(y)\right]_0^1 dzdx = \frac{\pi}{4}\int_0^1\left[x^2z+\frac{x}{2}z^2\right]_0^1 dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7\pi}{48}$$

7.3 (Kugelkoordinaten)   (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))

Berechnen Sie das Volumen von

$$D=\left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\}.$$



$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\boxed{0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}$$

$$\det(J(r,\theta,\varphi)) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

$$\text{Volumen } V_D = \iiint_D 1\,dxdydz = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^2\sin\theta\ d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{6}$$

7.4 Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $D=[0,1]\times[0,1]$.

$$\int_0^1\int_0^1 x\,dxdy=\int_0^1\int_0^1 y\,dxdy=\frac{1}{2}$$

Schwerpunkt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

7.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

mithilfe einer Transformation auf Polarkoordinaten.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2}drd\varphi=2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr=\pi$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

Heute

Differentialgleichungen

- Begriffsbildungen
- Analytische Lösungsmethoden

Begriffsbildungen

Beispiel

Wir bestimmen alle Funktionen $y:[0,1] \to \mathbb{R}$,
die die Gleichung

$$y'(x) = \cos(x), \quad x \in (0,1)$$

erfüllen.

Die Lösung dieser Aufgabe besteht einfach darin, die Stammfunktionen der cos-Funktion zu berechnen.

$$y(x) = \sin(x) + C, \quad x \in [0,1].$$

Dabei ist $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Integrationskonstante.

In diesem sehr einfachen Beispiel kommen schon die wesentlichsten Elemente einer Differentialgleichung vor:

- Wir haben es mit einer Gleichung zu tun, in der eine Funktion die Unbekannte ist.
- In der Gleichung tauchen Ableitungen der gesuchten Funktion auf.
- Zur Lösung der Gleichung ist eine Integration notwendig.
- Durch die Integration kommt eine Integrationskonstante ins Spiel. Die Lösung der Differentialgleichung ist also nicht eindeutig – es gibt viele Lösungen.

Diese Liste enthält typische Elemente, die beim Umgang mit Differentialgleichungen eine Rolle spielen.

Definition 8.1 (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Unter einer **Differentialgleichung 1. Ordnung** auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ versteht man eine Gleichung der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I.$$

Hierbei ist $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Variablen, $y : I \to \mathbb{R}$ ist eine gesuchte Funktion.

Beispiel

$$y'(x) = y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$y'(x) = x(y(x))^2, \quad x > 0.$$

$$y'(x) = 3x^2(y(x)+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definition 8.2 (Lösung einer Differentialgleichung)

Unter einer **Lösung einer Differentialgleichung** auf einem Intervall $J \subseteq I$ versteht man eine Funktion $y : J \to \mathbb{R}$, die die Differenzialgleichung für alle $x \in J$ erfüllt, wenn man sie und ihre Ableitungen in die Gleichung einsetzt. Insbesondere muss eine Lösung also differenzierbar sein.

Beispiel

Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = 3x^2(y(x)+1), \quad x \in \mathbb{R}\,?$$

$$(a)\ y(x) = e^{x^3}$$

$$(b)\ y(x) = -1$$

$$(c)\ y(x) = 2e^{x^3} - 1$$

$$(d)\ y(x) = -1 + \frac{1}{3x^2}$$

Definition 8.3 (Differentialgleichung n-ter Ordnung)

Unter einer **Differentialgleichung n-ter Ordnung** $(n \in \mathbb{N})$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ versteht man eine Gleichung der Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in I.$$

Hierbei ist $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion von $n+1$ Variablen, $y : I \to \mathbb{R}$ ist eine gesuchte Funktion.

Beispiel

$$y''(x) + y(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir werden später herausfinden, dass sich jede Lösung dieser Differentialgleichung in der Form

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

schreiben lässt. Hierbei sind c_1 und c_2 zwei beliebige Integrationskonstanten.

Die Anzahl der Integrationskonstanten in der Lösung einer Differentialgleichung entspricht gerade der Ordnung der Gleichung.

Definition 8.4 (Anfangswertproblem)

Ist zusätzlich zu der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in I.$$

noch ein Satz von n Bedingungen

$$y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

gegeben, so sprechen wir von einem **Anfangswertproblem** für die gesuchte Funktion y.

Dabei muss x_0 eine Stelle aus dem Abschluss des Intervalls I sein.

Beispiel

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0,\, y'(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x), \quad y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{x}{2}\sin(x)$$

$$\Rightarrow c_1 = 0,\, c_2 = 1 \Rightarrow y(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x)$$

Analytische Lösungsmethoden

Definition 8.5 (separable Differentialgleichung)

Eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = g(y(x))h(x), \quad x \in I,$$

wird **separable Differentialgleichung** genannt. Hierbei sind $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen einer Variable.

Beispiel

$$y'(x) = y(x)$$

$$xy'(x) = y(x)^2 - 1$$

$$y'(x) = x(y(x))^2$$

Bei einer separablen Gleichung kann nach x und y getrennt integriert werden.

$$y'(x) = y(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

Da uns die triviale Lösung nicht interessiert, nehmen wir $y(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int 1 \, dx$$

Durch unbestimmte Integrale können wir zur Stammfunktion übergehen.

$$\Rightarrow \ln|y| = x + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Logarithmische Integration

$$\Rightarrow |y| = e^{x+d} = e^d e^x$$

$$\Rightarrow y = \pm e^d e^x = ce^x, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$c := \pm e^d$$

$y \equiv 0$ ist auch eine Lösung.

$\Rightarrow$ **Lösungen** $y = ce^x \; (c \in \mathbb{R})$

$$y'(x) = g(y(x))h(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int h(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(z)} dz = \int h(x) dx$$

Substitutionsmethode
$z = y(x) \Rightarrow dz = y'(x) dx$

Man muss nun hoffen, dass die Integrale über h und $1/g$ berechnet werden können und die resultierende Gleichung nach $y(x)$ aufgelöst werden kann. Falls dies gelingt, hat man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung explizit bestimmt.

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'(x) = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

lässt sich mit der Substitution

$$u = ax + by + c$$

in eine separierbare Differentialgleichung transformieren.

Beispiel $\quad y'(x) = (x + y)^2$

$$u := x + y \Rightarrow u' = 1 + y' = 1 + u^2$$

$\boxed{\text{separable Differenzialgleichung!}}$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2} dx = \int 1\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+z^2} dz = \int 1\, dx \quad (z = u(x))$$

$$\Rightarrow \arctan(z) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z = \tan(x + c)$$

$$\Rightarrow y(x) = \tan(x + c) - x$$

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

lässt sich mit der Substitution

$$u = \frac{y}{x}$$

in eine separierbare Differentialgleichung transformieren.

$$u := \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$\Rightarrow u + xu' = f(u)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

separable Differenzialgleichung!

Definition 8.6 (lineare Differentialgleichung)

Eine **lineare Differentialgleichung** n-ter Ordnung hat die Gestalt

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x)$$

für alle $x\in I$ mit Funktionen $a_j:I\to\mathbb{R},\ j=0,\cdots,n$ und $f:I\to\mathbb{R}$.

$$f\equiv 0$$

$$\Rightarrow a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=0$$

Diese Gleichung wird **homogen** genannt.

Lösungsstrategie für lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung y einer linearen Differentialgleichung

bestimmt man durch:

1. Die allgemeine Lösung $y_{\mathrm{h}}(x)$ der homogenen Differentialgleichung wird bestimmt.

2. Eine partikuläre Lösung $y_{\mathrm{p}}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung wird bestimmt.

3. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe dieser beiden: $y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$

4. Bei einem Anfangswertproblem bestimmt man die Integrationskonstanten aus den Anfangswerten.

Definition 8.6
(lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)

Eine lineare Differentialgleichung, bei der die Faktoren vor den Ableitungen keine echten Funktionen, sondern nur Konstanten $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sind,
nennt man eine **lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**.

Beispiel

$$y''(x) + 8y'(x) + 16 = 0$$

$$y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

Die Idee ist, die Lösung durch einen **Ansatz** zu bestimmen.

Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

$$\Big\Downarrow \quad y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\left(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Dieses Polynom nennt man das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung.

Nullstellen Bestimmung des charakteristischen Polynoms

$$\longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

1) Einfache reelle Nullstellen

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}, \quad c_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \cdots, n)$$

Beispiel $\quad y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$.

Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von der Form

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Mehrfache reelle Nullstellen

Man kann allgemein zeigen, dass bei m-fachen Auftreten einer Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms die weiteren Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung durch Multiplikation des Exponenzialansatzes mit den Monomen x^p für $p = 1, \cdots, m-1$ bestimmt sind:

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \cdots, x^{m-1} e^{\lambda x}$$

Beispiel $\quad y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = 0$

Die Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

ist $\lambda = -4$ und

Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von der Form

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Komplexe Nullstellen

$$\lambda = \alpha \pm i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Eine allgemeine Lösung ist von der Form

$$e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel $y''(x) + 0.2y'(x) + 4.01y(x) = 0$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 0.2\lambda + 4.01 = 0$$

sind $\lambda_1 = -0.1 + 2i$ und $\lambda_2 = -0.1 - 2i.$

Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von der Form

$$y(x) = e^{-0.1x}\left(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Variation der Konstante

(Eine partikuläre Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu finden)

Wir betrachten die Gleichung

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x).$$

Angenommen, dass wir bereits die allgemeine Lösung

$$y_{\mathrm{h}}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

der homogenen Differentialgleichung

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

berechnet haben. Wir suchen eine partikuläre Lösung $y_{\mathrm{p}}(x)$ von der Form

$$y_{\mathrm{p}}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x). \qquad \text{(Variation der Konstante)}$$

Dann haben wir

$$y_{\mathrm{p}}'(x) = \left(c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x)\right) + \left(c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)\right).$$

Wir finden $c_1(x)$ und $c_2(x)$, damit $y_{\mathrm{p}}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$ eine partikuläre Lösung wird,

und gleichzeitig

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \quad (1)$$

gilt, d.h.

$$y_{\mathrm{p}}''(x) = c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_1(x) y_1''(x) + c_2(x) y_2''(x).$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt uns

$$a_2\left(c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_1(x) y_1''(x) + c_2(x) y_2''(x)\right) + a_1\left(c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)\right) + a_0\left(c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)\right) = f(x)$$

d.h.

$$c_1(x)\left(\underbrace{a_2 y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_0 y_1(x)}_{=0}\right) + c_2(x)\left(\underbrace{a_2 y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_2(x)}_{=0}\right) + a_2\left(c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x)\right) = f(x)$$

$$\Rightarrow a_2\left(c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x)\right) = f(x) \quad (2)$$

Lösung für das Gleichungssystem (1)-(2) für $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$ sind

$$c_1'(x) = -\frac{f(x) y_2(x)}{a_2\left(y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)\right)}, \quad c_2'(x) = \frac{f(x) y_1(x)}{a_2\left(y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)\right)}.$$

Dann integrieren wir sie, um $c_1(x)$ und $c_2(x)$ zu erhalten.

Beispiel

$$y''(x)+y(x)=\sin(x),\quad x\in\mathbb{R}.\qquad \left(a_2=a_0=1,\ a_1=0,\ f(x)=\sin(x)\right)$$

Die Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2+1=0$$

sind $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von der Form

$$y_{\mathrm{h}}(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Das Gleichungssystem (1)-(2) auf der letzten Seite mit $y_1(x)=\cos(x)$ und $y_2(x)=\sin(x)$ lautet

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(x)+c_2'(x)\sin(x)=0,\\ -c_1'(x)\sin(x)+c_2'(x)\cos(x)=\sin(x).\end{cases}$$

Daher erhalten wir

$$c_1'(x)=-\sin^2(x),\ \ c_2'(x)=\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\qquad \left(\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)$$

also

$$c_1(x)=-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x),\ \ c_2(x)=-\frac{1}{4}\cos(2x).$$

Dann ist eine partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}(x)&=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)\\ &=\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)\right)\cos(x)-\frac{1}{4}\cos(2x)\sin(x)\qquad \left(\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}\right)\\ &=-\frac{x}{2}\cos(x)+\frac{1}{4}\sin(x),\end{aligned}$$

aber da $\frac{1}{4}\sin(x)$ in der allgemeinen Lösung enthalten ist, nehmen wir nur $-\frac{x}{2}\cos(x)$ als eine partikuläre Lösung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist daher

$$y(x)=y_{\mathrm{h}}(x)+y_{\mathrm{p}}(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Aufgabe 8.1 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))

Lösen Sie die Differentialgleichung erster Ordnung durch geeignete Separation:

$$y'(x) = xy(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 8.2

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

1) $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

3) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

Zu 3): Lösen Sie das Anfangswertproblem mit
$y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$ (vergangene Klausur Aufgabe (20 Punkte))

4) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$