# Angewandte Mathematik

Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum
kaori.nagatou@kit.edu

# Lösungsvorschlag für die Aufgabe 4.1 & 4.2

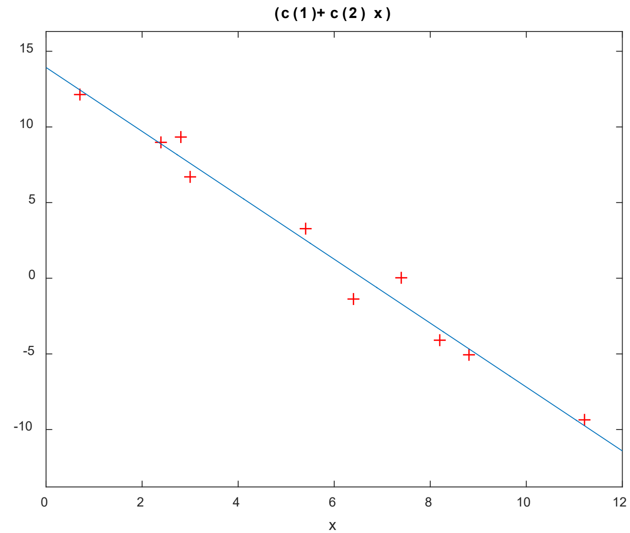
4.1 Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \cdots, (x_{10}, y_{10})$:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.7 | 2.4 | 2.8 | 3.0 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.2 | 8.8 | 11.2 |
| | 12.1 | 9.0 | 9.3 | 6.7 | 3.3 | -1.4 | 0.0 | -4.1 | -5.1 | -9.4 |

1) Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade $f = c_0 + c_1 x$ und skizzieren Sie diese zusammen mit den vorgegebenen Daten $(x_i, y_i), i = 1, \cdots, 10.$

```
>> x=[0.7;2.4;2.8;3.0;5.4;6.4;7.4;8.2;8.8;11.2];
>> y=[12.1;9;9.3;6.7;3.3;-1.4;0;-4.1;-5.1;-9.4];
>> A=zeros(10,2);
>> A(:,1)=ones(10,1); A(:,2)=x;
>> c=(A'*A)\(A'*y)
c =
  13.930250887550542
  -2.111945095479670
```

```
>> f=@(x)(c(1)+c(2)*x)
f =
   @(x)(c(1)+c(2)*x)
>> plot(x,y,'r+')
>> hold on
>> ezplot(f,[0,12])
```

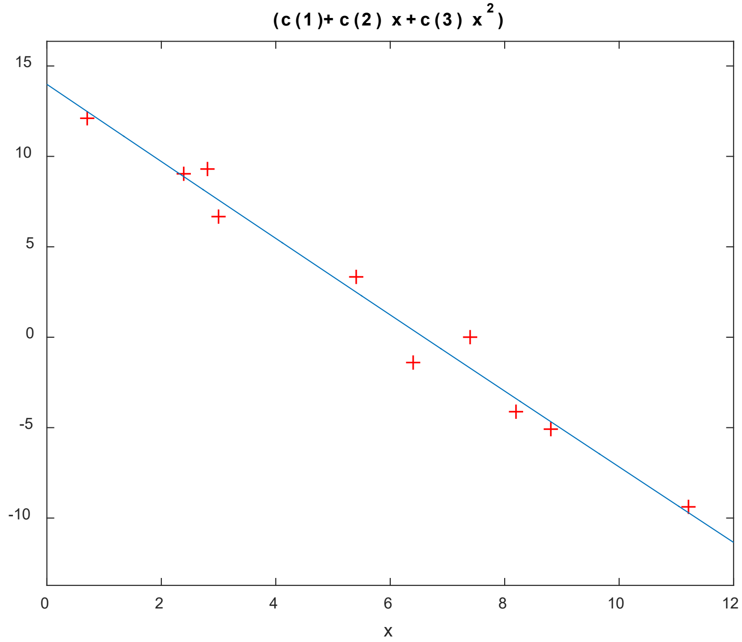



$$f = 13.930250887550542 - 2.111945095479670x$$

2) Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ und skizzieren Sie diese zusammen mit den vorgegebenen Daten $(x_i, y_i), i = 1, \cdots, 10.$

```
>> x=[0.7;2.4;2.8;3.0;5.4;6.4;7.4;8.2;8.8;11.2];
>> y=[12.1;9;9.3;6.7;3.3;-1.4;0;-4.1;-5.1;-9.4];
>> A=zeros(10,3);
>> A(:,1)=ones(10,1); A(:,2)=x; A(:,3)=x.^2;
>> c=(A'*A)\(A'*y)
c =
  13.985931886052725
  -2.139478644904329
   0.002375873251182
```

```
>> f=@(x)(c(1)+c(2)*x+c(3)*x^2)
f =
   @(x)(c(1)+c(2)*x+c(3)*x^2)
>> plot(x,y,'r+')
>> hold on
>> ezplot(f,[0,12])
```




$$f = 13.985931886052725 - 2.139478644904329x + 0.002375873251182x^2$$

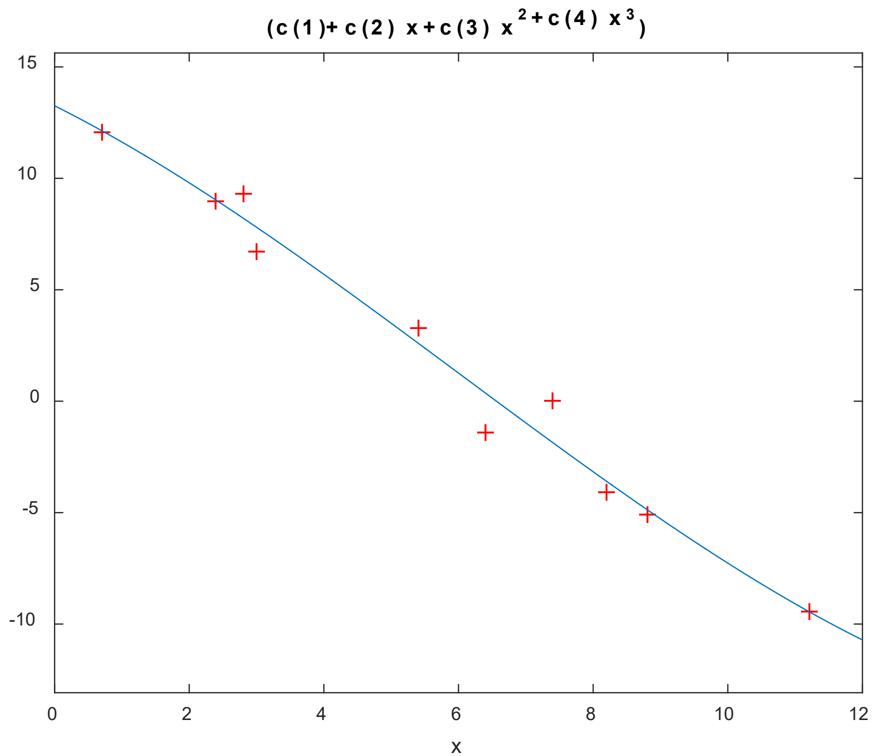
# Fehler $d = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$

1) $f = c_0 + c_1 x \Rightarrow d = 10.172781519170092$

2) $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \Rightarrow d = 10.167727189733997$

$f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \Rightarrow d = 9.761567467161886$

$f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 \Rightarrow d = 9.760923747627750$



4.2 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte) )
Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade zu den Daten

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 3 | 2 | 1 |

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{LGS: } \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow c_0 = 5, c_1 = -1$$

$$\text{Ausgleichsgerade: } y = c_0 + c_1 x = 5 - x$$

# Heute

- Ausgleichsrechnung (Teil 2)
  - Vektorwertige Funktionen
  - Mehrdimensionales Newton-Verfahren
  - Gradientenverfahren

# Vektorwertige Funktionen

**Definition 5.1**
Unter einer **vektorwertigen Funktion** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
versteht man eine Abbildung,
die jedem Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

genau einen Vektor

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \left( f_k(x_1, \cdots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (k = 1, \cdots, m) \right)$$

zuordnet.

Hier ist es nun mit wenigen Ausnahmen nicht mehr möglich,
sinnvolle grafische Darstellungen zu finden.

# Ableitung vektorwertiger Funktionen, Jakobi-Matrix

Unter der **Ableitung einer vektorwertigen Funktion** $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ versteht man die von $x_1,\cdots,x_n$ abhängige Matrix

$$J_f\Big|_p := \frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Sie enthält alle partiellen Ableitungen der Komponenten $f_1,\cdots,f_m$ von $f$.

Diese Matrix nennt man **Jacobi-Matrix**.

$$n = 3, m = 1 \qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$J_f \Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \frac{\partial(f)}{\partial(x,y,z)}$$

$$= \left( f_x(x_0,y_0,z_0), f_y(x_0,y_0,z_0), f_z(x_0,y_0,z_0) \right)$$

$$= \nabla f(x_0,y_0,z_0)^T$$

Die Jacobi-Matrix ist für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einfach das Transponierte des Gradienten.

$$n = m = 2 \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$J_f \Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} (f_1)_x(x_0,y_0) & (f_1)_y(x_0,y_0) \\ (f_2)_x(x_0,y_0) & (f_2)_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

## Beispiel

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = x^2 + ye^z$$

$$J_f = \left(2x, e^z, ye^z\right)$$

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

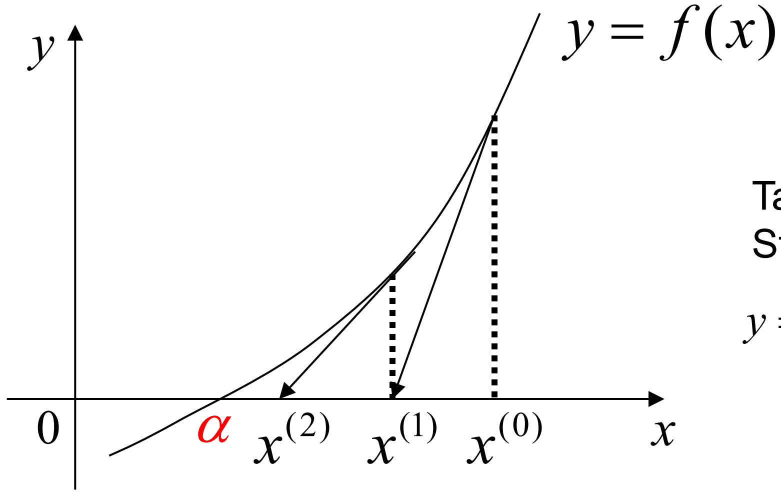
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ x^2 - y^2 \\ \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$J_f = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 2x & -2y \\ 0 & -\sin(y) \end{pmatrix}$$

# Mehrdimensionales Newton-Verfahren

1D-Newton-Verfahren

$$\boxed{x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}}$$




Tangente Gerade an der Stelle $(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$ :

$$y = f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + f(x^{(n)})$$

Das mehrdimensionale Newton-Verfahren hat ein ganz ähnliches Aussehen wie sein eindimensionales Gegenstück.

Die Iterationsvorschrift

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

überträgt sich nahezu unverändert ins Mehrdimensionale

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \left(J_f(\mathbf{x}^{(n)})\right)^{-1} f(\mathbf{x}^{(n)}).$$

$$\left(\mathbf{x}^{(n)} \to \alpha \quad (n \to \infty),\ f(\alpha) = 0\right)$$

## Abbrucchkriterien

### 1D-Newton-Verfahren

$$\text{(i)}\ \left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < \varepsilon \quad \text{(ii)}\ \left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < \varepsilon \left|x^{(n)}\right| \quad \text{(iii)}\ \left|f(x^{(n)})\right| < \varepsilon$$

### Mehrdimensionales Newton-Verfahren

$$\text{(i)}\ \left\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right\| < \varepsilon \quad \text{(ii)}\ \left\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right\| < \varepsilon \left\|x^{(n)}\right\| \quad \text{(iii)}\ \left\|f(x^{(n)})\right\| < \varepsilon$$

## Lokale quadratische Konvergenz

$$\left\|x^{(n+1)} - \alpha\right\| \le C \left\|x^{(n)} - \alpha\right\|^2$$

## Welche Norm sollen wir verwenden?

Es sei $V$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, mit $\mathbf{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbf{K}=\mathbb{C}$.

Ferner sei $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

N1) (Definitheit) $\|u\| \geq 0$, und $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, für alle $u \in V$.

N2) (Homogenität) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ für alle $u \in V, \lambda \in \mathbf{K}$.

N3) (Dreiecksungleichung) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$.

Dann heißt $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum oder normierter linearer Raum oder normierter Raum. Die Abbiludng $\|\cdot\|$ heißt Norm auf $V$.

Beispiel: $V = \mathbf{K}^n$ wird mit

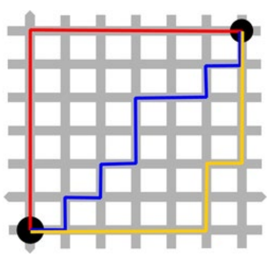
$$\|u\|_p := \left( \sum_{k=1}^{n} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \left( u = (u_1, \cdots, u_n)^T \in \mathbf{K}^n \right)$$

und festem $p \in [1, \infty)$ zu einem normierten Raum $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)$. Auch mit

$$\|u\|_\infty := \max_{k=1,\cdots,n} |u_k| \qquad \left( u = (u_1, \cdots, u_n)^T \in \mathbf{K}^n \right)$$

wird $\mathbf{K}^n$ zu einem normierten Raum $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

$p = 1$ (Taxi-cab norm, Manhattan Distanz)



Auf beliebigen endlichdimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent, also

$$\exists c, C > 0, \; c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a$$

## Beispiel

Wir bestimmen näherungsweise eine Lösung des Gleichungssystem

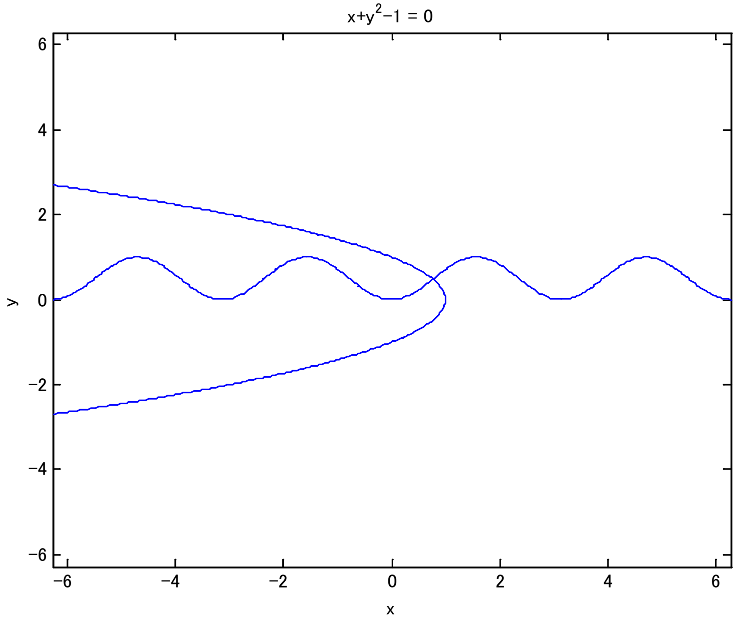
$$\sin^2 x = y, \quad x + y^2 = 1$$

$$f_1(x,y) := \sin^2 x - y$$

$$f_2(x,y) := x + y^2 - 1$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} 2\sin x\cos x & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \left(J_f(\mathbf{x}^{(n)})\right)^{-1} f(\mathbf{x}^{(n)})}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[J_f(\mathbf{x}^{(n)})\right]\mathbf{z}^{(n)} = -f(\mathbf{x}^{(n)}) \quad \text{LGS}$$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{z}^{(n)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0.708073 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.708073 \\ 0.508793 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.767891 \\ 0.482494 \end{pmatrix}$$

$$\left(x^*, y^*\right) \approx (0.767538, 0.482143)$$

# Gradientenverfahren $(f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

Mit dem **Gradientenverfahren** kann man ein lokales Minimum einer Funktion $f$ in mehreren Variablen nährungsweise berechnen:

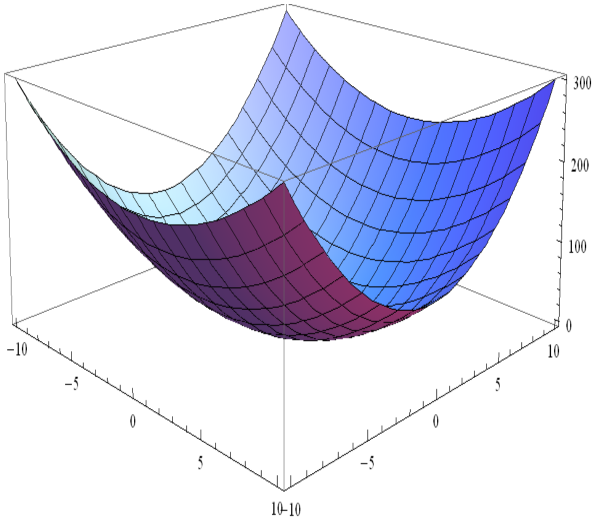
1. Finde einen geeigneten Startwert $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$
2. Berechne Nährungswerte $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \ldots$ mit der Iterationsvorschrift

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \end{bmatrix} - \alpha \nabla f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots \quad (0 < \alpha \ll 1)$$

3. Führe die Iteration so lange durch, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

## Beispiel

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$




$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 4y$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 2\tilde{x}_k \\ 4\tilde{y}_k \end{bmatrix}, \; k = 0,1,2,\ldots \quad (0 < \alpha \ll 1)$$

# Aufgabe

5.1 Bestimmen Sie näherungsweise zwei Lösungen des Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x - y^2 + \ln x = 0 \\ x^2 - xy - x + 1 = 0 \end{cases}$$

1) $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = 2x - y^2 + \ln x, \quad g(x,y) = x^2 - xy - x + 1$$

Ergänzen Sie die folgende Tabelle für 1) – 4).

| $n$ | $x^{(n)}$ | $y^{(n)}$ | $f(x^{(n)}, y^{(n)})$ | $g(x^{(n)}, y^{(n)})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0 | 1.0 | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| ⋮ | | | | |