Angewandte Mathematik

Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum

kaori.nagatou@kit.edu

1. Vorlesung

Aufbau der heutigen Vorlesung

- Vorstellung
- Themen des Semesters
- Übersicht – Differentialgleichungen und Numerishce Simulation
- Funktionen mehrerer Variablen

Wer bin ich?

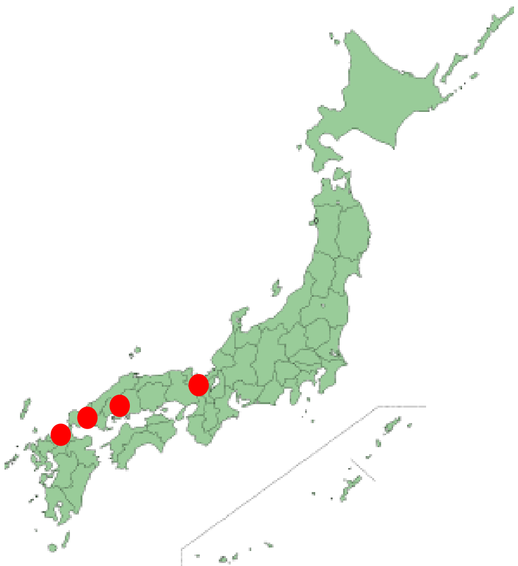
Geburtsdatum: 24.3.1972
Geburtsort: Hiroshima, Japan

1.10.2002 – 31.3.2012 Associate Professor, Kyushu Universität (Japan)
01.04.2011 – 31.03.2012 Gastprofessorin am KIT
24.3.2012 Heirat in Ettlingen

- Lehrbeauftragte am KIT:
  Studiengang Elektrotechnik
- Fremdsprachensekretärin am KIT (Institut für Analysis)
- Lehrbeauftragte an der Dualen Hochschule:
  Studiengang Informatik
- Dozentin an den Volkshochschulen
  (Ettlingen, Karlsruhe, Bad Herrenalb)

E-Mail: kaori.nagatou@kit.edu
Tel: 0721 608 42056

Hobby:
Jogging, Schwimmen, Kochen, Brot backen,
Singen (Chor), Stricken, Lesen
https://www.math.kit.edu/iana1/~nagatou/de

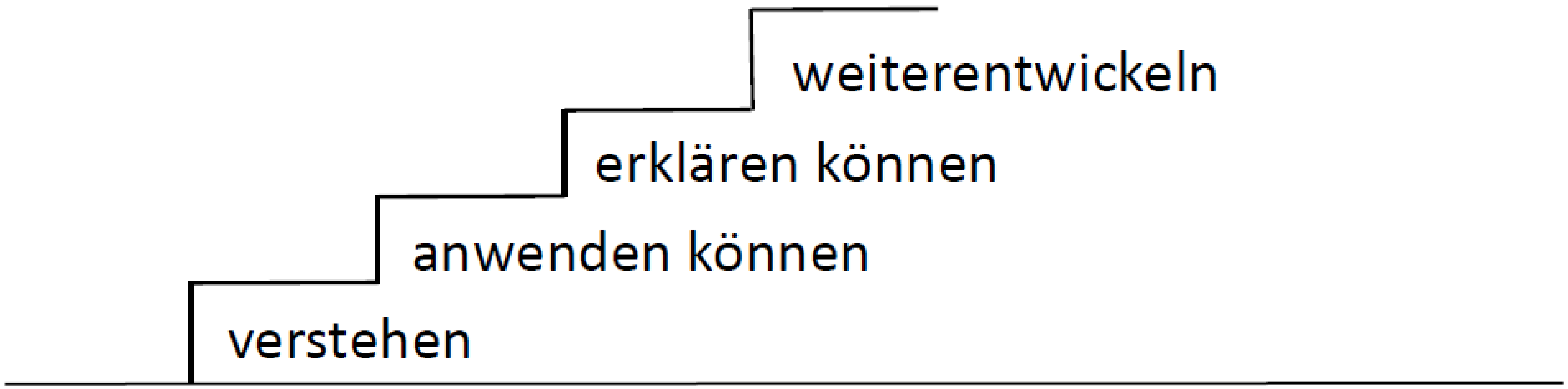


Themen

- Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen
- Differentialgleichungen
- Numerische Methoden (mit MATLAB)

- Wie kann man Funktionen von mehreren Variablen differenzieren?
- Kann man die Ableitung von Funktionen berechnen, die man gar nicht explizit kennt?
- Wie löst man Extremwertaufgaben in mehreren Variablen?
- Wie löst man Differentialgleichungen? (Analytisch und numerisch)

Stufen des Lernens



Theorie ohne Beispiele bleibt bedeutungslos.

Beispiele ohne Theorie bleiben uninterpretiert.

Wie kann man eine Tatsache einfacher erklären?

N, M : Mengen

$|N| > |M| \Rightarrow$ Es gibt keine Injektion von N nach M.

$\left(\exists n_1, n_2 \in N \text{ mit } n_1 \neq n_2 \text{ und } f(n_1) = f(n_2)\right)$ $\Leftrightarrow \exists m \in M \text{ mit } \left|f^{-1}(m)\right| \geq 2$

Falls man n Objekte auf m Mengen $(n, m > 0)$ verteilt, und n größer als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet.

$n = 10$ **Tauben**

$m = 9$ **Taubenschläge**

Schubfachprinzip (Taubenschlagprinzip)

Anwendung:

In München gibt es mindestens zwei Personen,
die exakt dieselbe Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben?

$\longrightarrow$ **Ja!**

Können wir das in 2 Minuten beweisen?

$\longrightarrow$ **Ja!**

Anzahl von Haaren: 100.000 $\sim$ 150.000

$\longrightarrow$ sicher weniger als 1 Million Haare

Man teilt alle Bewohner Münchens nach der Anzahl ihrer Haare in „Schubfächer“ ein.

0	1	...	999.999	1 Million Schubfächer

Es gibt etwa 1,4 Millionen Einwohner in München.

$n =$ 1,4 Millionen > $m =$ 1 Million

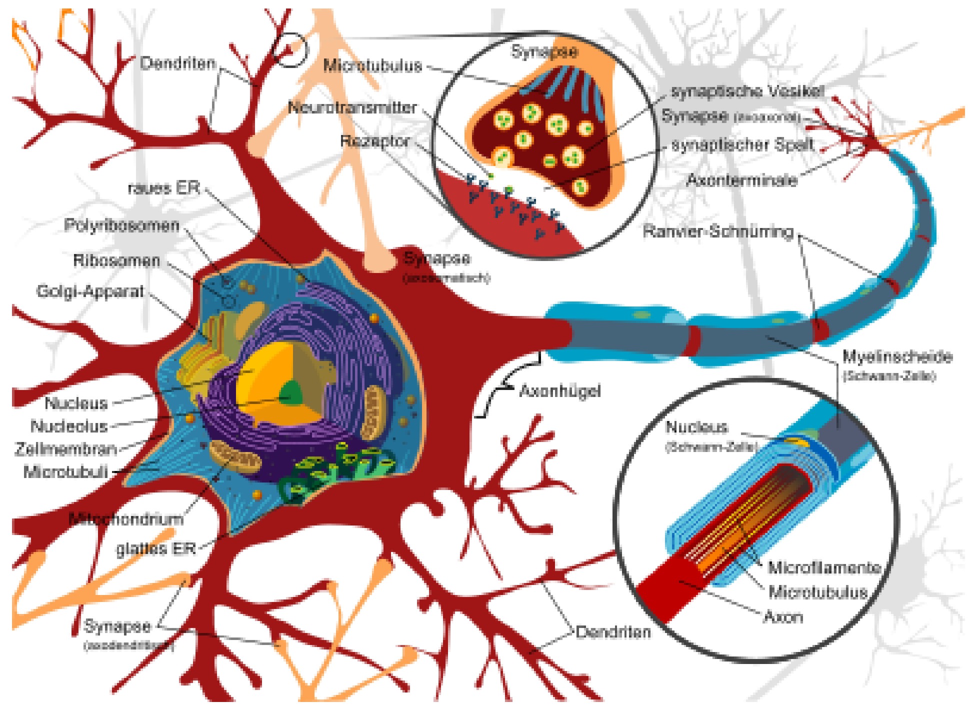
In mindestens einem Schubfach landen zwei oder mehr Personen!

Aha-Erlebnis

(Psychologe „ Karl Bühler“)

0,1 Sekunde → Viele Nervenzellen im Gehirn werden aktiviert.

Geistesblitz



Typischer Aufbau eines Neurons

wikipedia

Was sehen Sie im Bild?

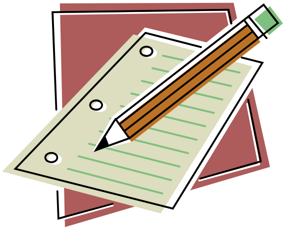
„The Great Book of Optical illusions“

Was sehen Sie im Bild?

Genießen Sie die Gelegenheit, etwas gar nicht zu verstehen (danach hoffentlich ein Aha-Erlebnis)!

“Werkzeug” für Berechnungen

Gehirn → Kopfrechnung, Vorstellung



Papier und Stift → Rechnung von Hand

Computer → Numerische Simulation, Veranschaulichung (Visualisierung)

Simulation

Bei der Simulation werden Experimente an einem Modell durchgeführt, um Erkenntnisse über das reale System zu gewinnen.

Lufthansa flight simulator

Fahr-Simulation

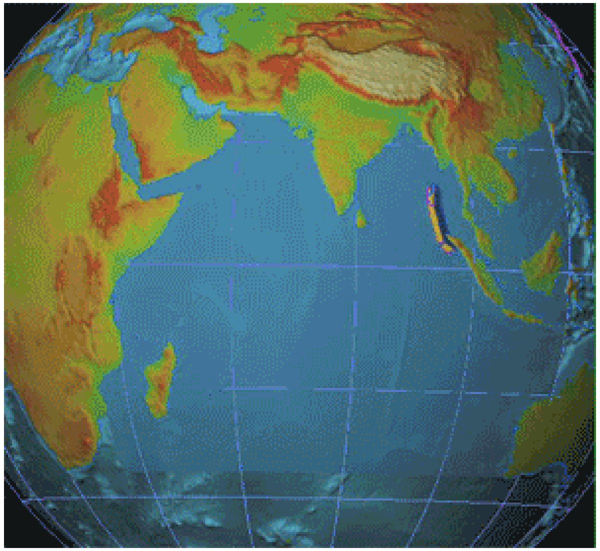
Numerische Simulation

= Die Durchführung einer Simulation mit Hilfe eines Computers

- Wir können mit einem Computer erleben, was wir praktisch nicht erleben können.

- Wir können eine Zeitspanne ändern. (10^{-12} Sekunde, Miliarde Jahren, ...)

- Ein mathematisches Modell könnte verschiedener Phänomene entsprechen.



Animation of 2004 Indonesia tsunami
(NOAA/PMEL - UW/JISAO, USA)

Numerische Simulation

- Wie können wir ein geeingnetes Modell für ein Phänomen entwickeln?
- Was ist eine geeignete mathematische Formel?

Mathematisches Modell für Numerische Simulation

Wir wollen wissen, wie ein Phänomen sich verändert.

Differentialgleichungen

Es eignet sich dafür, eine Veränderung darzustellen.

Numerische Simulation

Phänomen

Modellbildung

Mathematisches Modell

Diskretisierung

Computermodell

Linearisierung,
Iteration

Programm

Berechnung

**Numerische Ergebnisse
(Veranschaulichung)**

Fehler bei arithmetischen Operationen

Beispiel:

a=2,62347 ist eine Approximation von x (mit 5 Stellen Genauigkeit)

b=2,62315 ist eine Approximation von y (mit 5 Stellen Genauigkeit)

$$a - b = 0,00032 = 0,32 \times 10^{-3}$$

Relativer Fehler $\dfrac{|x-a|}{a}$ (Absoluter Fehler $|x-a|$)

$$\left|\frac{x-y-(a-b)}{a-b}\right| \le \frac{|x-a|+|y-b|}{a-b} \le \frac{2 \cdot 10^{-5}}{0,32 \times 10^{-3}} \approx 0,62 \times 10^{-1}$$

Beispiele

$$x = 192119201, \quad y = 35675640$$

$$z = \frac{1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832}{107751}$$

$$\Rightarrow \quad z = 1783$$

Computer (mit Matlab): $z = 0{,}00772150606490 9$

(Fließkommazahl mit doppelte Genauigkeit)

Quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Lösungen $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b > 0$ und $b^2 \gg 4ac \longrightarrow \sqrt{b^2-4ac} \simeq b$

$$x_1 = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$ muss benutzt werden.

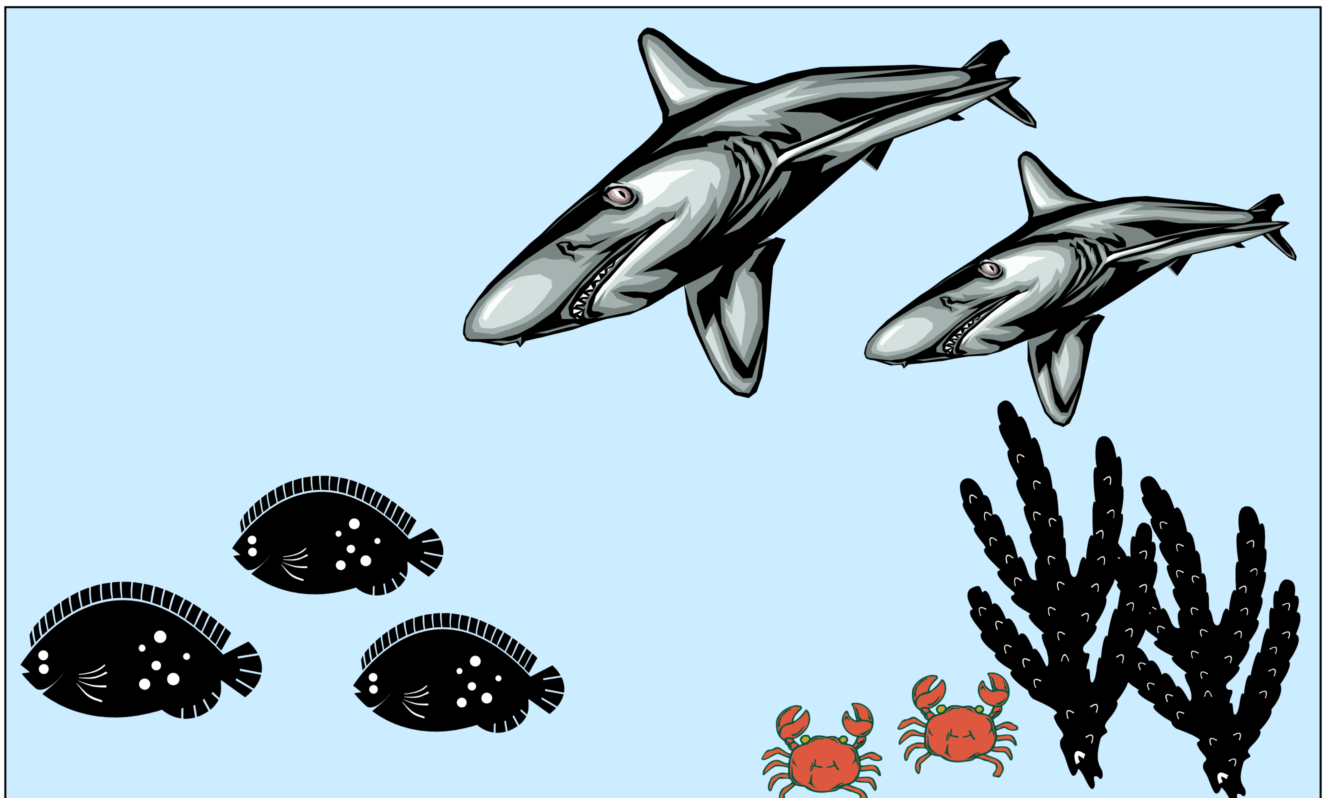
$b < 0$ und $b^2 \gg 4ac$

$$\longrightarrow \quad x_2 = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$ muss benutzt werden.

Beispiel: Räuber-Beute Gleichungen

Beute→ Seezunge
Räuber → Hai

Wie die Anzahl von Seezungen und Haie sich verändert?



Adriatisches Meer

Americanischer Mathematiker Lotka und Italienischer Mathematiker Volterra entwickelten ein mathematisches Modell für die Interaktion zwischen Seezunge und Hai.

f(t): Anzahl der Seezunge (zeitabhängig)
g(t): Anzahl des Haies (zeitabhängig)

Voraussetzung

- a: Reproduktionsrate der Seezunge ohne Störung und bei großem Nahrungsangebot $\quad f'(t) = af(t) \quad (a > 0)$
- c: Sterberate des Haies, wenn keine Seezunge vorhanden ist $\quad g'(t) = -cg(t) \quad (c > 0)$
- b: Fressrate des Haies pro Seezunge $\quad -bg(t) \quad (b > 0)$
- d: Reproduktionsrate des Haies pro Seezunge $\quad df(t) \quad (d > 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} f'(t) &= af(t) - bf(t)g(t) \\ g'(t) &= -cg(t) + df(t)g(t) \end{aligned}}$$

Lotka – Volterra Modell

Numerische Ergebnisse
(a = 0.01, b = d = 0.0001, c=0.05)

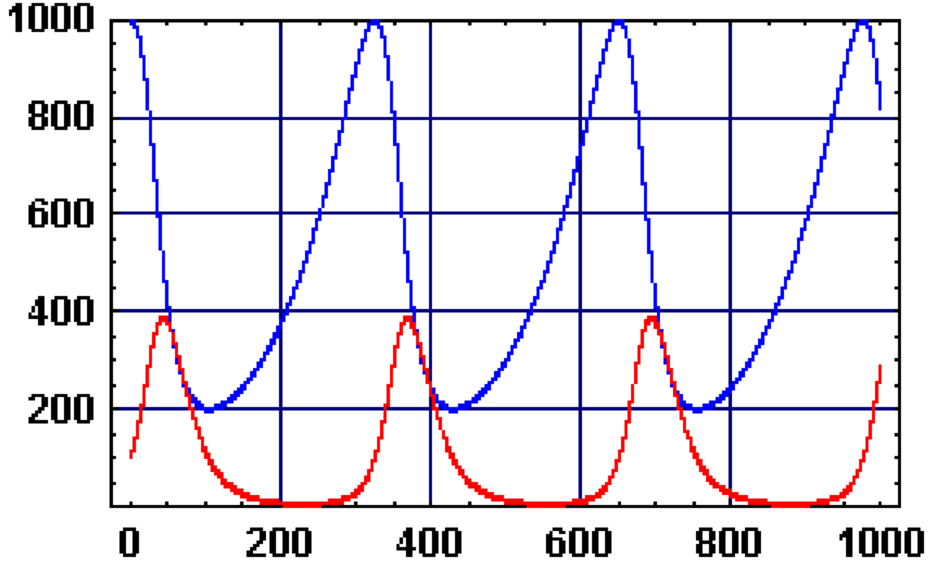
0.00000000000000	1000.0000000000000	0.00000000000000	100.00000000000000
0.10000000000000	999.99749583335165	0.10000000000000	100.50125124738071
0.20000000000000	999.98996666717426	0.20000000000000	101.00500995791107
0.30000000000000	999.97738750383076	0.30000000000000	101.51128353587602
0.40000000000000	999.95973334948997	0.40000000000000	102.02007931990096
0.50000000000000	999.93697921606554	0.50000000000000	102.53140458134952
0.60000000000000	999.90910012318136	0.60000000000000	103.04526652270535
0.70000000000000	999.87607110016302	0.70000000000000	103.56167227593808
0.80000000000000	999.83786718805482	0.80000000000000	104.08062890085351
0.90000000000000	999.79446344166297	0.90000000000000	104.60214338342793
1.00000000000000	999.74583493162538	1.00000000000000	105.12622263412673
1.10000000000000	999.69195674650746	1.10000000000000	105.65287348620735
1.20000000000000	999.63280399492396	1.20000000000000	106.18210269400652
1.30000000000000	999.56835180768746	1.30000000000000	106.71391693121188
1.40000000000000	999.49857533998306	1.40000000000000	107.24832278911822
1.50000000000000	999.42344977356947	1.50000000000000	107.78532677486804
1.60000000000000	999.34295031900683	1.60000000000000	108.32493530967690
1.70000000000000	999.25705221791065	1.70000000000000	108.86715472704331
1.80000000000000	999.16573074523239	1.80000000000000	109.41199127094350
1.90000000000000	999.06896121156649	1.90000000000000	109.95945109401094
2.00000000000000	998.96671896548401	2.00000000000000	110.50954025570091
⋮	⋮	⋮	⋮

Veranschaulichung

Lotka – Volterra Modell

Anfangswert: x(0)=1000, y(0)=100

Blau: Seezunge
Rot: Hai



Zeit

Mehr Beispiele

Beispiel: fortlaufende Welle [Breuer, Horak, McKenna, Plum (2006)]

Bericht:

“Observations of motions of Golden Gate wind storms of February 9, 1938 and February 11, 1941”

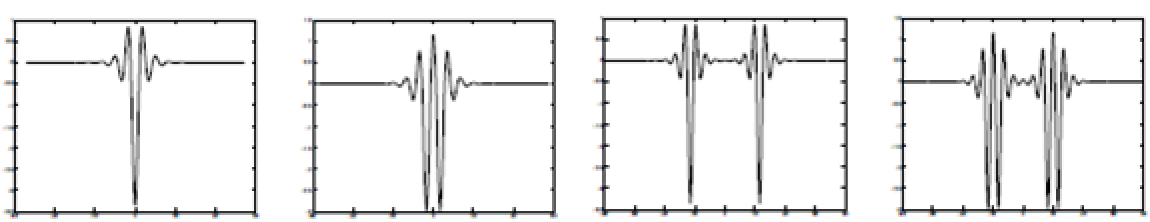
⇒ Mathematische Untersuchung von Hängebrücken

$$u_{tt} + u_{xxxx} + e^u - 1 = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

⇓ Solitäre Welle $u = \varphi(x - ct)$ c: Wellengeschwindigkeit

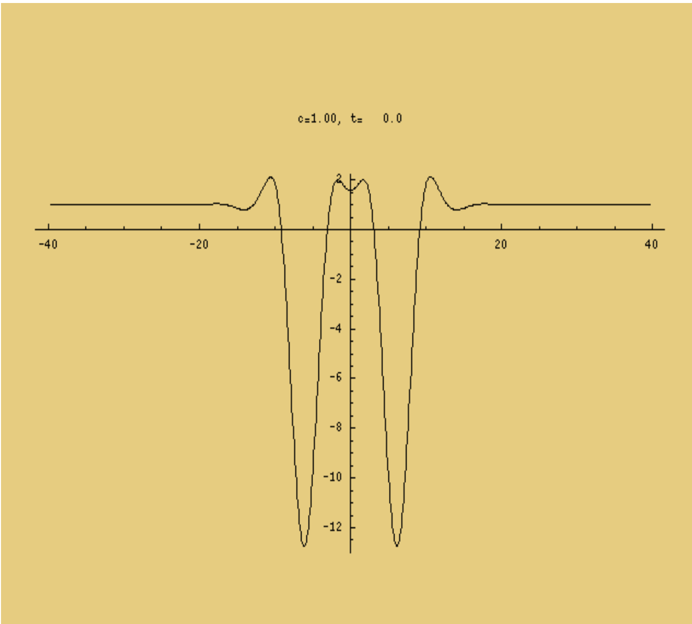
(1) $\varphi^{iv} + c^2\varphi'' + e^{\varphi} - 1 = 0$

Satz: Gleichung (1) hat wenigstens 36 Lösungen für c=1,3.

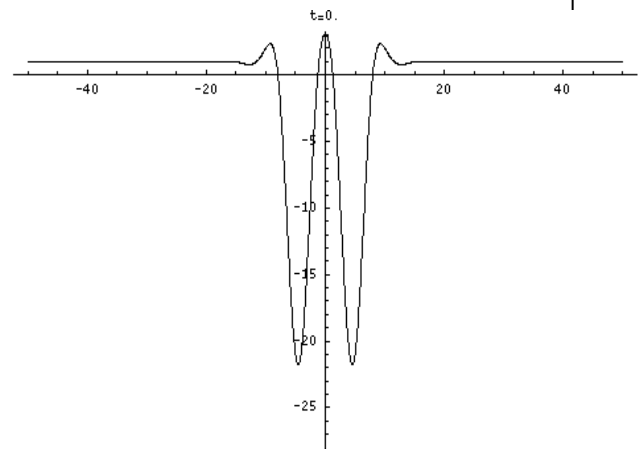


usw.

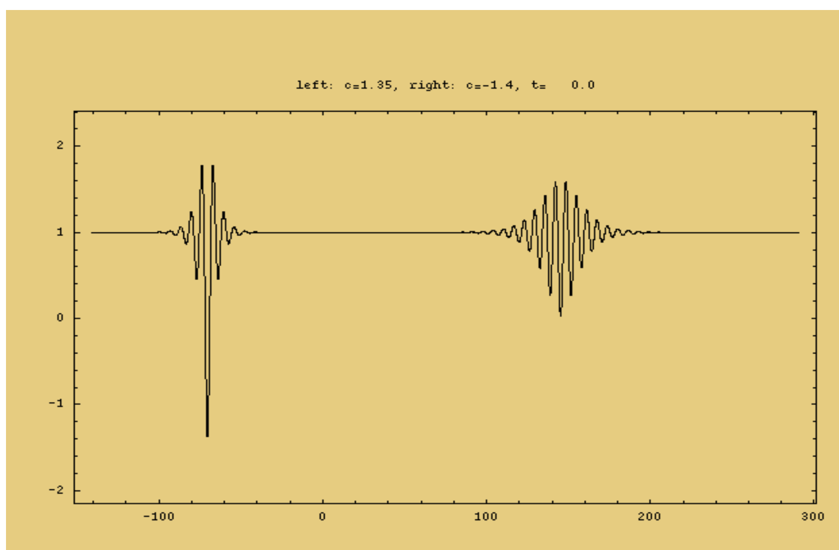
http://www.mi.uni-koeln.de/~jhorak/waves/



$c = 1.0$
stabil



$c = 1.0$ **instabil**



links: $c = 1.35$
rechts: $c = -1.4$

Computerunterstützter Beweis für biologische Musterbildung



Zeitlich begrenzter dynamischer Prozess, der zur Musterbildung führt

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + D \cdot \Delta \mathbf{c}$$

Turing (1952)

$\mathbf{c}$: Vektor der morphogenen Konzentrationen

$\mathbf{f}$: Reaktions-Kinetik

D: Diagonalmatrix der positiven konstanten Diffusionskoeffizienten

Zwei chemische Spezies $A(\mathbf{r}, t),\ B(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = F(A, B) + D_A \cdot \Delta A$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = G(A, B) + D_B \cdot \Delta B$$

F, G: Kinetik (nichtlinear)

Dimensionslose Reaktions-Diffusions-Gleichungen

$$u_t = \gamma f(u, v) + \Delta u$$
$$v_t = \gamma g(u, v) + d \cdot \Delta v$$

$\gamma, d > 0$ Konstanten

(Dimensionslose) Thomas-Modelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma f(u,v) + \Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma g(u,v) + d \cdot \Delta v$$

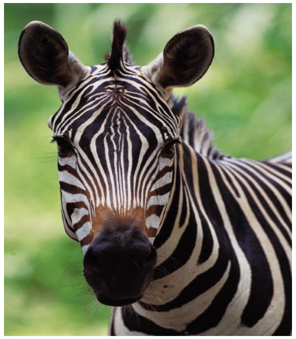
$$f(u,v) = a - u - h(u,v), \quad g(u,v) = \alpha(b-v) - h(u,v)$$

$$h(u,v) = \frac{\rho u v}{1 + u + K u^2} \qquad \left(\begin{array}{l} d > 1 \\ a, b, \alpha, \rho, K > 0 \end{array} \right)$$

Säugetierfellmuster

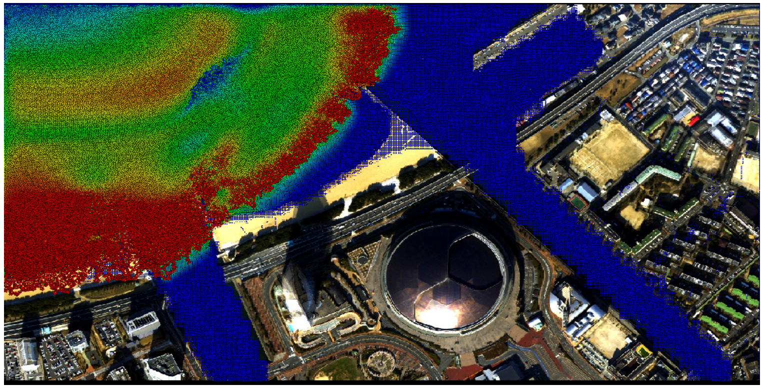
Giraffe

Gepard

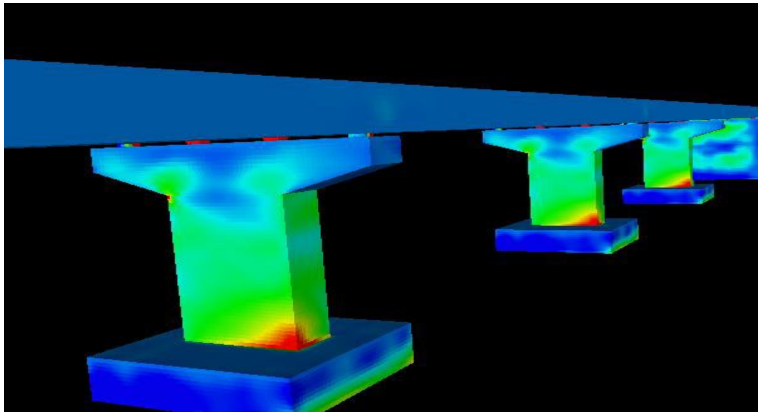


Zebra

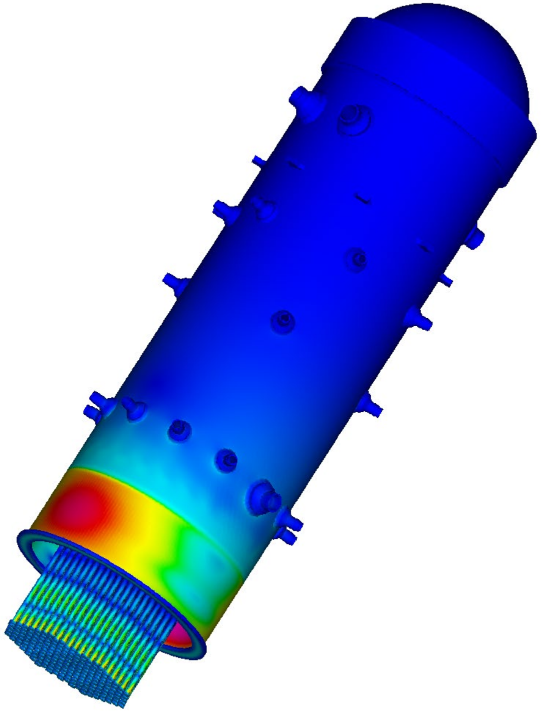
Ein großangelegter Simulator für umfassende Katastrophenverhütung



Simulation eines Tsunami im Momochi-Gebiet



Simulation eines Erdbebens



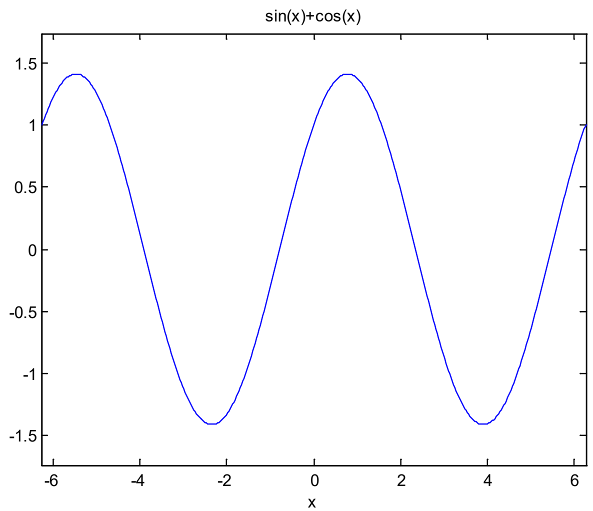
Seismische Verhaltensanalyse eines Heißwasserreaktor-Druckbehälters

Funktionen mehrerer Variablen

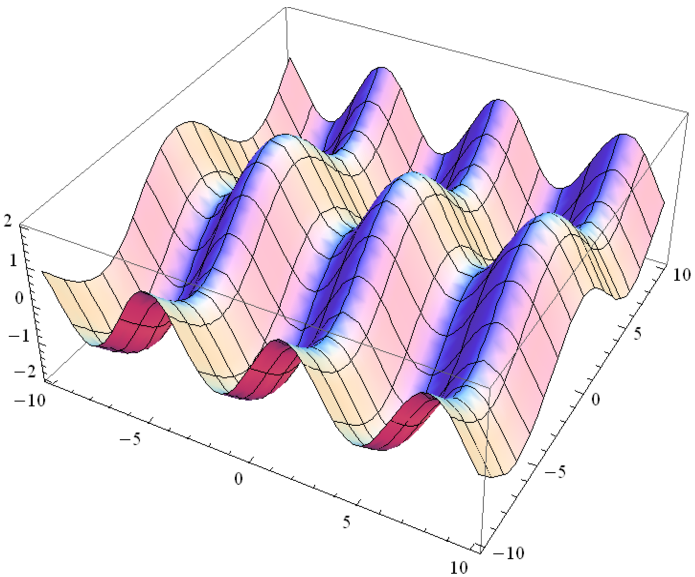
- Wozu Funktionen von mehreren Variablen?
- Grundbegriffe: Funktion, Niveaulinie, implizierte Funktion
- Eigenschaften: Linearität, Separabilität, Konvexität
- Grenzwerte und Stetigkeit

Wozu Funktionen von mehreren Variablen?

Bisher haben wir uns in der Analysis vor allem mit reellwertigen Funktion einer reellen Variablen beschäftigt.
In der Natur hängen relevante Größen aber oft von mehreren voneinander unabhängigen Variablen ab.



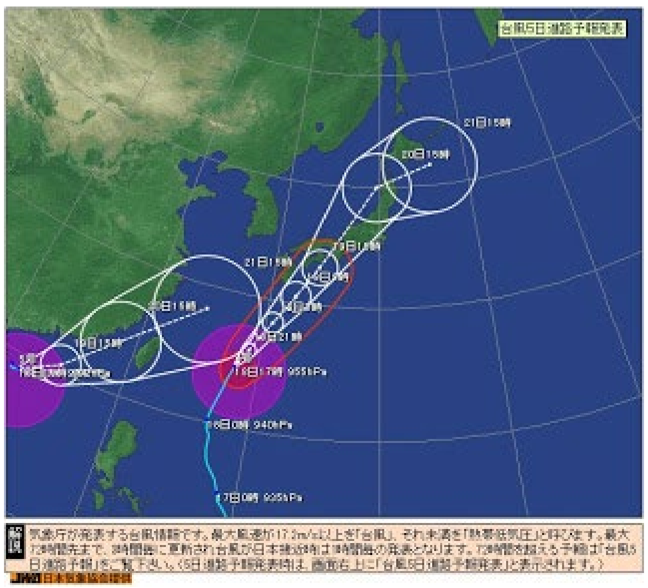
$$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$$



$$f(x, y) = \sin(x) + \cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

Anwendungsbeispiel

Das Wetter der Erde ist ein hochkomplexes System, dessen Entwicklung auch von den besten Simulationen nur für kurze Zeit vorhergesagt werden kann. Qualitative Aspekte des Klimas lassen sich allerdings schon mit einfachen mathematischen Modellen erfassen.



18.06.2012, zwei Taifune (Japan)

Die Temperatur T in der Atmosphäre wird von

- geografischer Lage (Länge l und Breite b)
- Höhe h
- Zeit t
- Minimaltemperatur T_0
- Größenordnung der Temperaturskala T_1
- wie stark die Temperatur nach Norden hin abnimmt: α
- Temperaturabfall mit steigender Höhe β
- tägliche Schwankungen γ
- Rotationsgeschwindigkeit der Erde ω

abhängen.

$$T = f(l, b, h, t, T_0, T_1, \alpha, \beta, \gamma, \omega)$$

z.B.

$$T = T_0 + T_1 \cdot (1 + \cos(b)) \cdot \mathrm{e}^{-\beta h} \cdot (1 + \gamma \sin(\omega t))$$

Einflussfaktoren $\xrightarrow{f}$ Zielgröße

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- Stelle der elektrischen Bauelemente ⟶ Flächeninhalt der elektronischen Schaltung
- Abfahrt oder nicht von den Zügen ⟶ Verspätung nach einem Unfall
- Verhältnis der Kapitalanlage für die Waren ⟶ Gewinn (Risiko)
- Verbrauchte Menge des i-ten Faktors ⟶ Menge des neuen Produktes

Zielgröße werden durch Einflussfaktoren beeinflusst.
Die Beziehungen zwischen Zielgröße und ihren Einflussfaktoren werden als funktionale Abhängigkeiten dargestellt.

Problemstellungen

- Wie verändert sich die Zielgröße, wenn man ihre Einflussfaktoren in bestimmter Weise verändert?
  (Homogenität, Linearität und Konvexität von Funktionen)
- Gibt es mehrere Faktorkombinationen $x = (x_1, \cdots, x_n)$, die eine fixierte Realisierung y der Zielgröße liefern?
  (Höhen- oder Niveaulinien, implizite Funktion)
- Entsprechen kleinen Änderungen der Einflussfaktoren x_i auch kleine Änderungen der Zielgröße y?
  (Grenzwertbegriffe und Stetigkeit)
- Wie kann die Reaktion der Zielgrößen auf Änderungen einzelner Einflussfaktoren x_i bzw. ganzer Faktorkombinationen $x = (x_1, \cdots, x_n)$ gemessen werden?
  (partielle Ableitungen sowie vollständiger Differential)
- Nimmt die Zielgröße y auf der Menge aller zulässigen Faktorkombinationen ihren maximalen und minimalen Wert an? *(Extremwertprobleme)*

Grundbegriffe

Definition 1.1

Gegeben sei eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Unter einer Funktion von n (reellen) Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_n$

versteht man eine Vorschrift, die jedem n-Tupel

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$ genau eine reelle Zahl y zuordnet.

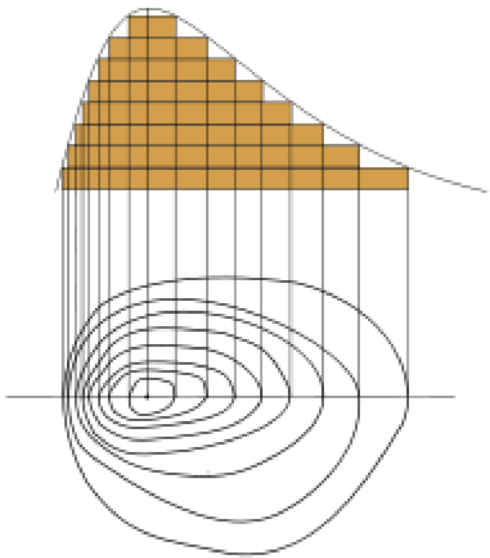
Schreibweise:

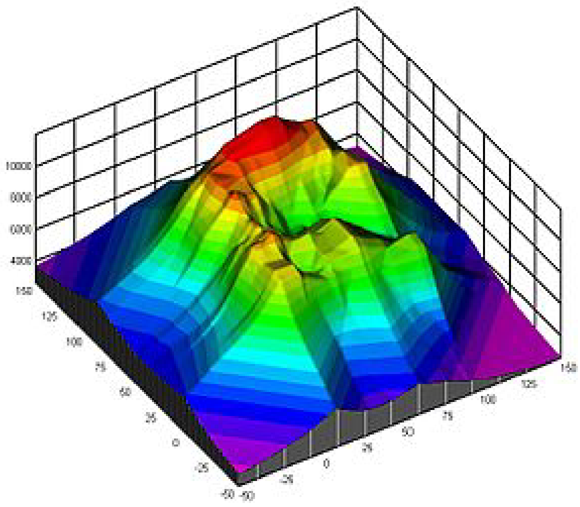
$$y = f(x),\ x \in D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Grundbegriffe

Definition 1.2

Eine Höhen- oder Niveaulinie für Funktionen $y = f(x),\ x \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist der geometrische Ort aller Punkte $(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3$, für die y konstant ist.





Grundbegriffe

Implizite Funktion

Die Gleichung

$$f(x_1, x_2) = c, \quad (x_1, x_2) \in D$$

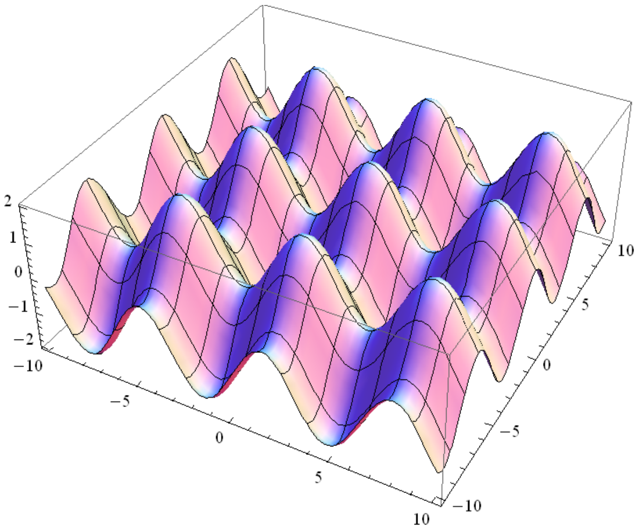
ergibt sich zur analytischen Ermittlung des Graphen von Niveaulinien in der (x_1, x_2) - Ebene.

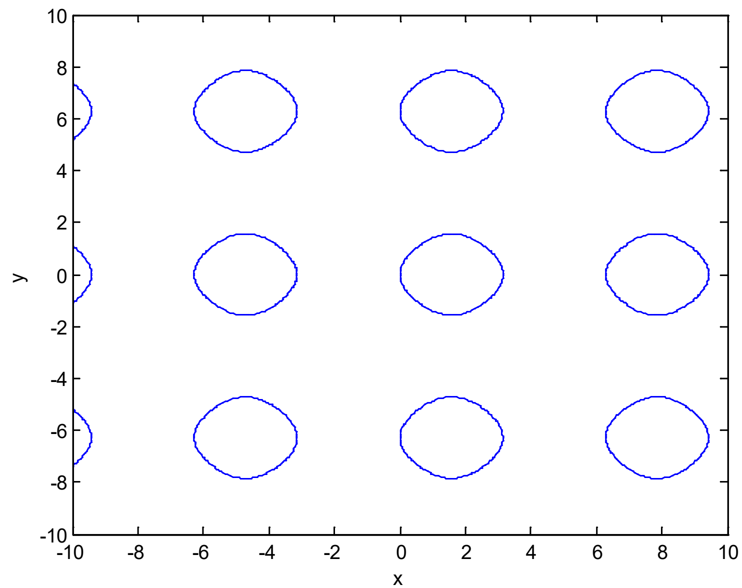
Sie stellt eine funktionale Beziehung zwischen den Variablen x_1 und x_2 dar, von denen jeweils die eine als unabhängig die andere als abhängig aufgefasst werden kann.

Hierbei ist aber die Abhängigkeit nicht immer in expliziter Form gegeben.

Beispiel

$$f(x_1, x_2) := \sin(x_1) + \cos(x_2)$$





$$f(x_1, x_2) = 1$$

Eigenschaften

Definition 1.3

Eine Funktion $z = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ist

- linear, wenn $f(ax+by) = a f(x) + b f(y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n,\ a, b \in \mathbb{R}$
- separabel, wenn $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i), \quad x = (x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n, \quad x \in D$
- konvex, wenn $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$
- konkav, wenn $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

$\alpha \in [0,\ 1]$

- homogen vom Grad p, wenn $f(ax) = a^p f(x)$ (a ist fixiert)

Grenzwerte und Stetigkeit

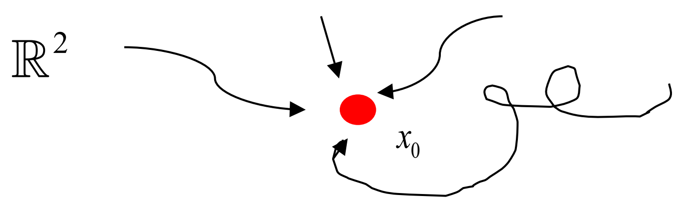
Grenzwert einer Funktion

Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ den Grenzwert G, wenn für jede Annährung von $x \in \mathbb{R}^n$ an x_0 in einer Umgebung von x_0 die Funktionswerte $f(x)$ gegen G konvergieren.

Schreibweise

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G.$$

Achtung: Alle denkbaren Möglichkeiten, sich im $\mathbb{R}^n$ einem Punkt zu nähern, müssten untersucht werden, um den Grenzwert einer Funktion an diesem Punkt definieren zu können.



Grenzwerte und Stetigkeit

Rechnen mit Funktionsgrenzwerten

Wenn f und g Funktionen mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = F$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = G$ sind, dann gilt an der Stelle x_0 für die Funktionsgrenzwerte von:

- $f(x) \pm g(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$
- $f(x) \cdot g(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$
- $f(x) / g(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) / g(x)) = F / G$, $G \neq 0$

wobei $x = (x_1,\ x_2, \cdots, x_n)$ ist.

Grenzwerte und Stetigkeit

Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig an der Stelle x_0, falls gilt:

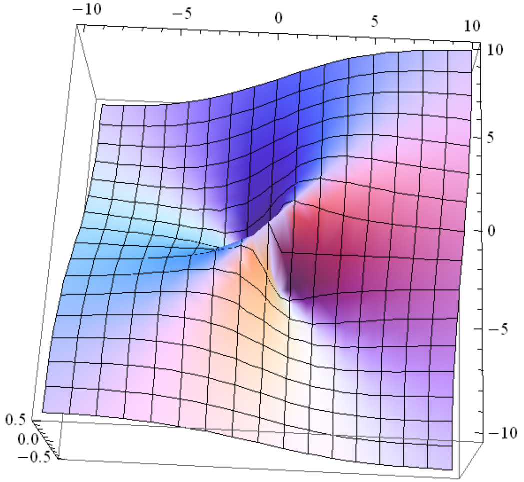
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Sie ist stetig in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in B$ stetig ist.

Grenzwerte und Stetigkeit

Beispiel

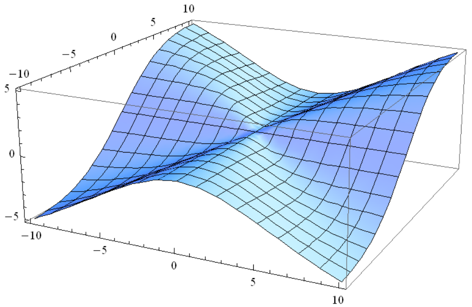
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,0)\end{cases}\qquad (n\in\mathbb{N})$$



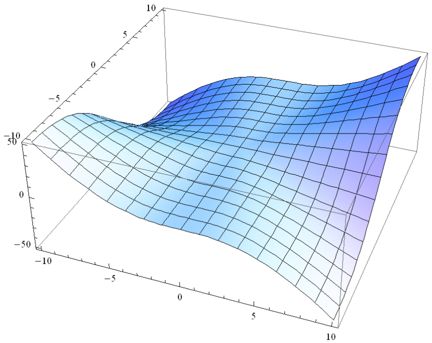
$n=1$

$n=1 \Rightarrow f$ ist nicht stetig an der Stelle (0,0).

$n\geq 2 \Rightarrow f$ ist stetig in $\mathbb{R}^2$.



$n=2$



$n=3$

Für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lässt sich Stetigkeit mittels Polarkoordinaten überprüfen:

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (0 \le r, 0 \le \theta < 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x,y) &= \frac{x^n y}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{r^n (\cos\theta)^n \cdot r\sin\theta}{r^2} \\
&= r^{n-1} (\cos\theta)^n \sin\theta \\
&= \begin{cases} \cos\theta\sin\theta & (n=1) \quad \to \cos\theta\sin\theta \quad (r \to 0) \\ r^{n-1}(\cos\theta)^n \sin\theta & (n \ge 2) \quad \to 0 \quad (r \to 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Also, f ist nicht stetig wenn $n = 1$ ist, und stetig wenn $n \ge 2$ ist.

Achtung

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ne \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ne \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

$$\left(\text{Für das Beispiel gilt } \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0\right)$$

Aufgaben

1.1 Suchen Sie selbst ein praktisch relevantes Beispiel für eine Funktion von mehreren Variablen.

1.2 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))

Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}, & (x,\ y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

1.3 Untersuchen Sie die beiden Funktionen $f,g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,\ y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,\ y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.