Angewandte Mathematik

Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum

kaori.nagatou@kit.edu

Lösungsvorschlag für die Aufgaben 6.1-6.3

6.1 Bestimmen Sie die Länge des Geradenstücks C_1 zwischen $x=a$ und $x=b$, das durch

$$y = f(x) := kx + d$$

beschrieben wird.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+k^2}\,dx = (b-a)\sqrt{1+k^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2}$$

6.2 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))

$$\left(\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$y = f(x) = \cosh(x)$$

Bestimmen Sie die Bogenlänge der durch

definieren Kurve C_2 in einem Intervall $[a,b]$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx = \int_a^b \sqrt{\frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{4}}\,dx = \int_a^b \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\left(e^b - e^{-b} - e^a + e^{-a}\right)$$

Alternativ:

Wir können auch die folgenden Eigenschaften verwenden.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$$

$$\Downarrow$$

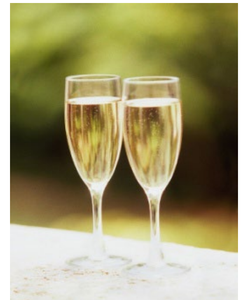
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\, dx$$

$$= \int_a^b \cosh(x) dx = \left[\sinh(x)\right]_a^b = \sinh(b) - \sinh(a)$$

6.3 Wir haben ein Sektglas, das näherungsweise durch Rotation einer Parabel

$$y = \frac{x^2}{a}$$

um die y-Achse beschrieben.



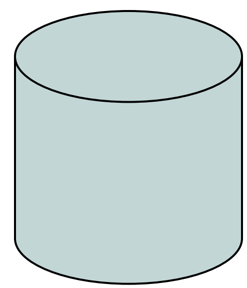
Bestimmen Sie das Volumen bei einer Füllung bis zu einer Höhe h und noch die Innenfläche des Glases.

$$x = \sqrt{a}\sqrt{y}$$

$$V_{\text{Sektglas}} = \pi \int_0^h ay\,dy = a\pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{1}{2}\pi a h^2$$

Deckflächenradius $r = \sqrt{ah}$

$$V_{\text{Sektglas}} = \frac{1}{2}\pi a h^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 h$$



$r = \sqrt{ah}$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h$$

Innenfläche des Glases

$$g(y) := \sqrt{a}\sqrt{y}$$

$$g'(y) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{y}}$$

$$2\pi\int_0^h g(y)\sqrt{1+g'(y)^2}\;dy$$

$$= 2\pi\int_0^h \sqrt{a}\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{a}{4y}}\;dy$$

$$= 2\pi\int_0^h \sqrt{ay+\frac{a^2}{4}}\;dy$$

$$= 2\pi\frac{2}{3a}\left[\left(ay+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^h$$

$$= \frac{4\pi}{3a}\left\{\left(ah+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{a^3}{8}\right\}$$

Heute

Mehrfachintegrale

- Einleitung
- Koordinatentransformationen
- Die Jacobi-Determinante
- Der Integraltransformationssatz
- Einige besondere Integrale

Zusammenhang von Ableitung und Integral

2. Hauptsatz der Differenzial - und Integralrechnung

Wenn $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige und auf (a,b) stetig differenzierbare

Funktion ist mit integrierbarer Ableitung F', dann gilt

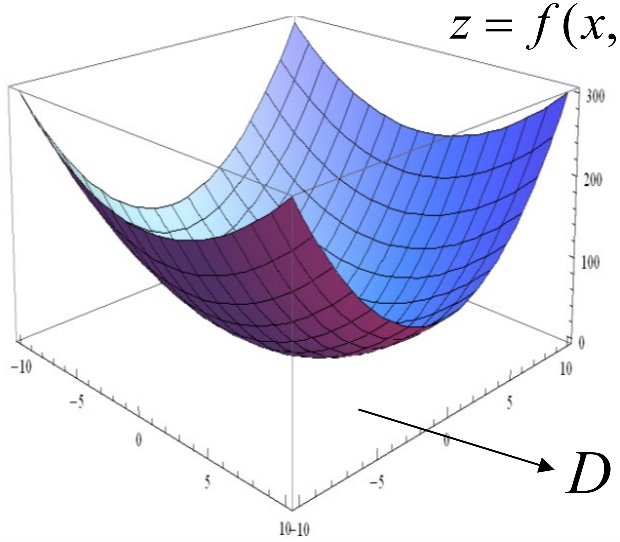
$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Einleitung

Motivation

Wie kann man den Integralbegriff für die Funktion mit einer Variable auf die Funktion mit mehreren Variablen verallgemeinern?

$z = f(x, y)$



D

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$$

Wenn f auf D posotiv ist, ist V das Volumen zwischen den Graphen von f und der xy-Ebene .

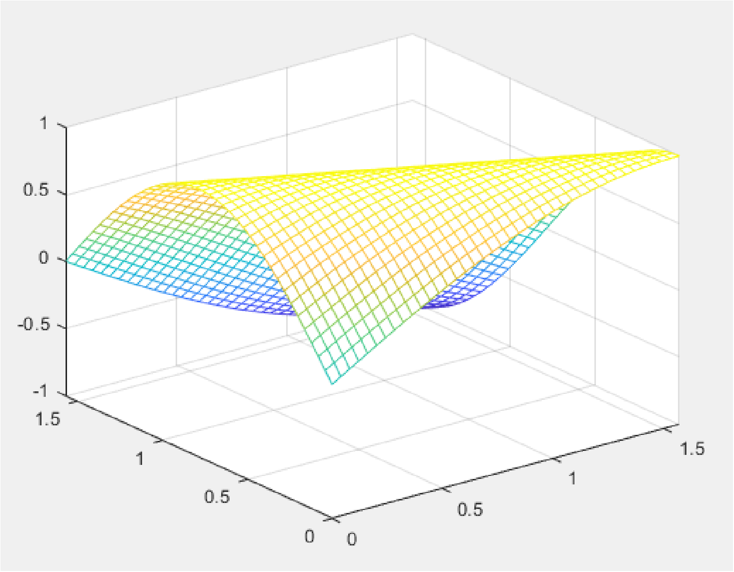
Berechnung der Mehrfachintegrale

Die Mehrfachintegrale werden ‚von innen nach außen' berechnet
(so wie Doppelsummen berechnet werden)

$$V = \iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{x=a}^{b} \left[\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right] dx = \int\limits_{y=c}^{d} \left[\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx \right] dy$$

$$D := [a,b] \times [c,d]$$

Beispiel $f(x,y)=\sin(x+2y), \quad (x,y)\in D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+2y)\,dydx$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}\cos(x+2y)\right]_0^{\pi/2}dx$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\right)dx$$
$$=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$
$$=1$$

Koordinatentransformationen

Definition 7.1 (Koordinatentransformation)

Eine Abbildung

$$T:\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in B \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u_1,\ldots,u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1,\ldots,u_n) \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

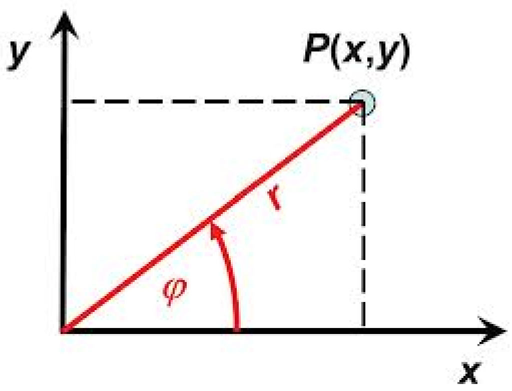
von $B \subseteq \mathbb{R}^n$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Koordinatentransformation von B nach D**, falls T und T^{-1} im Innern von B bzw. D partiell nach $u_1, \ldots, u_n$ bzw. nach $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbar sind.

Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ karthesische Koordinaten, so werden $(u_1, \ldots, u_n)$ als krummlinige Koordinaten bezeichnet.

Polarkoordinatentransformation

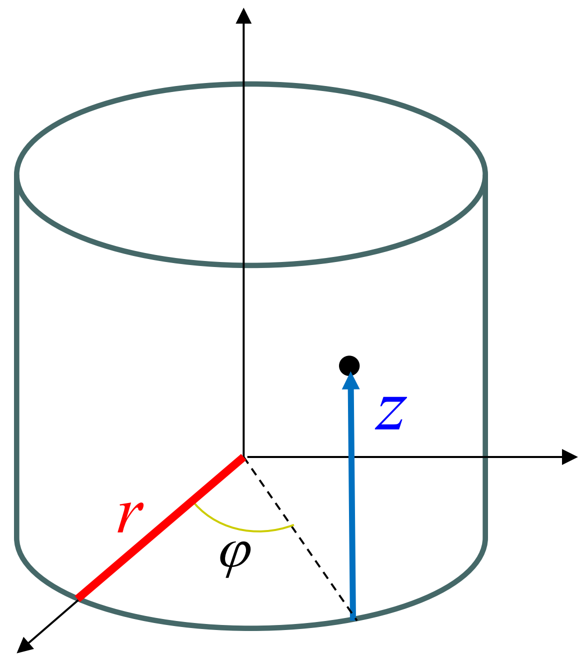
$$T:\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in B \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Ist $D = \mathbb{R}^2$, so ist $B = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$



Zylinderkoordinatentransformation

$$T:\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \in B \mapsto \begin{pmatrix} x(r,\varphi,z) = r\cos\varphi \\ y(r,\varphi,z) = r\sin\varphi \\ z(r,\varphi,z) = z \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^3$$



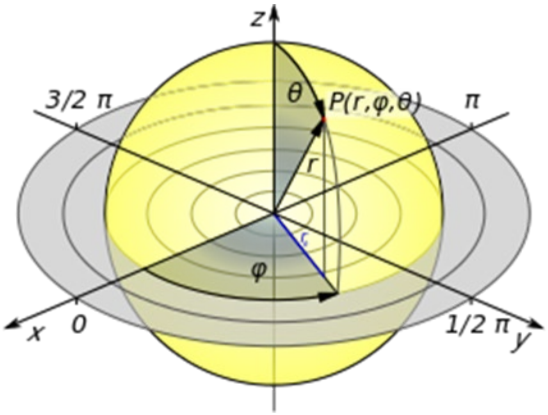
wobei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le r < \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

ist.

Kugeltransformationen

$$T : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \in B \mapsto \begin{pmatrix} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^3$$



wobei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \right\}$$

ist.

Die Jacobideterminante

Definition 7.2 (Jacobi-Determinante)

Sei $T:\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u_1,\ldots,u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1,\ldots,u_n) \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$

eine Koordinatentransformation. Dann heißt die Matrix:

$$J(u_1,\ldots,u_n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

Jacobi-Matrix von T.

Jacobideterminante der Polarkoordinatentransformation

Die Jacobi-Matrix:

$$J(r,\varphi)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x(r,\varphi)}{\partial r} & \dfrac{\partial x(r,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y(r,\varphi)}{\partial r} & \dfrac{\partial y(r,\varphi)}{\partial \varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Die Jacobideterminante:

$$\det(J(r,\varphi))=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r$$

Jacobideterminante der Zylinderkoordinatentransformation

$$\det(J(r,\varphi,z)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Jacobideterminante der Kugelkoordinatentransformation

$$\det(J(r,\theta,\varphi)) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

Der Integraltransformationssatz

Satz 7.3

Sei

$$T:\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u_1,\ldots,u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1,\ldots,u_n) \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine Koordinatentransformation.

Dann gilt:

$$\int\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in D} \cdots \int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

$$= \int\limits_{(u_1,\ldots,u_n)\in B} \ldots \int f(x_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,x_n(u_1,\ldots,u_n))\left|\det(J(u_1,\ldots,u_n))\right| du_1\ldots du_n$$

1-Variable: $I \subset \mathbb{R}$

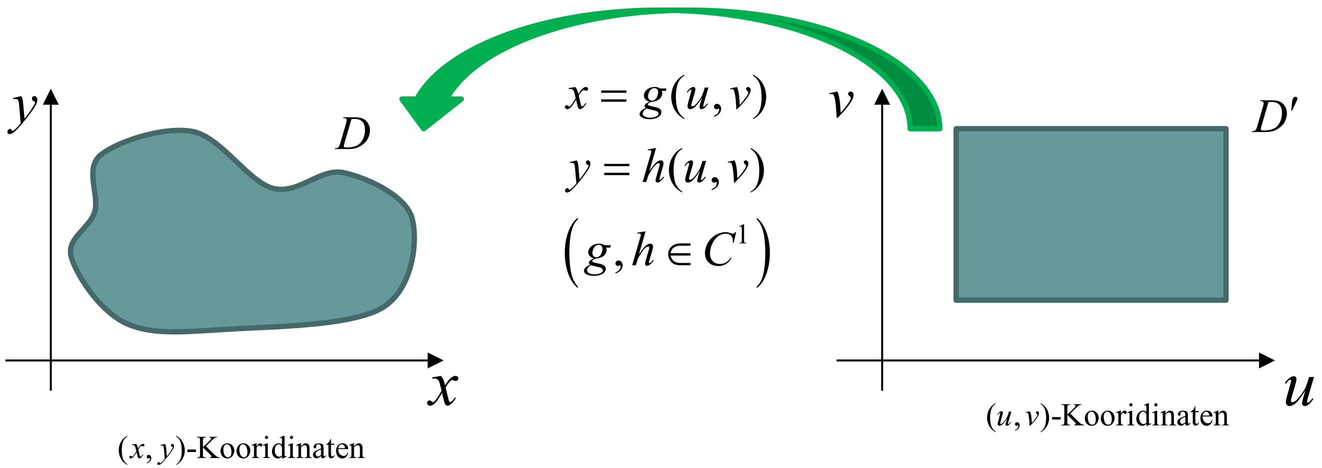
$f \in C(I),\ x = g(t),\ g \in C\left([\alpha,\beta]\right),\ g\left([\alpha,\beta]\right) \subset I,\ a = g(\alpha),\ b = g(\beta)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(g(t)\right) g'(t)\,dt$

2-Variablen: $D \subset \mathbb{R}^2$

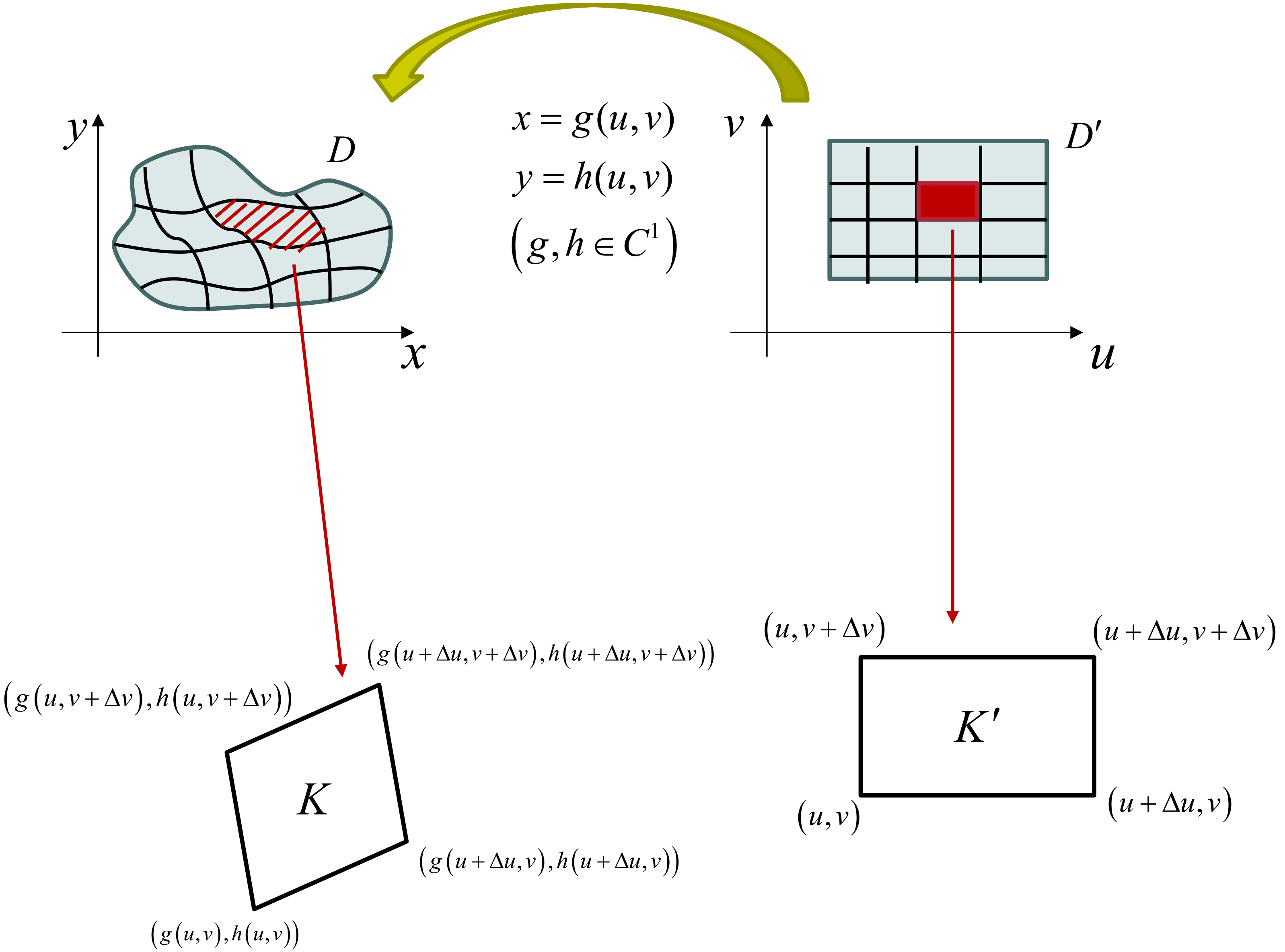
$\iint_D f(x,y)\,dxdy$

Sei f stetig.

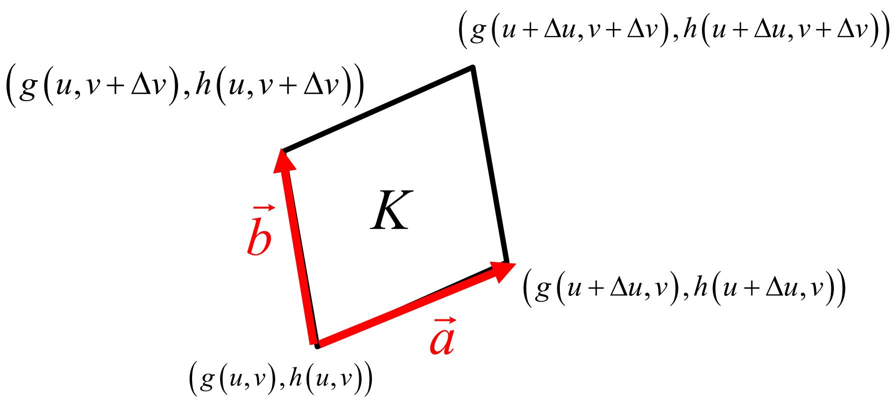


Hier nehmen wir an, dass es eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen D and D' gibt, d.h.

Es existierten $\tilde{g}, \tilde{h}$ mit $\tilde{g}(x,y) = u,\ \tilde{h}(x,y) = v.$



Falls Δu und Δv sehr klein sind, wird K durch eine Parallelogramm approximiert.



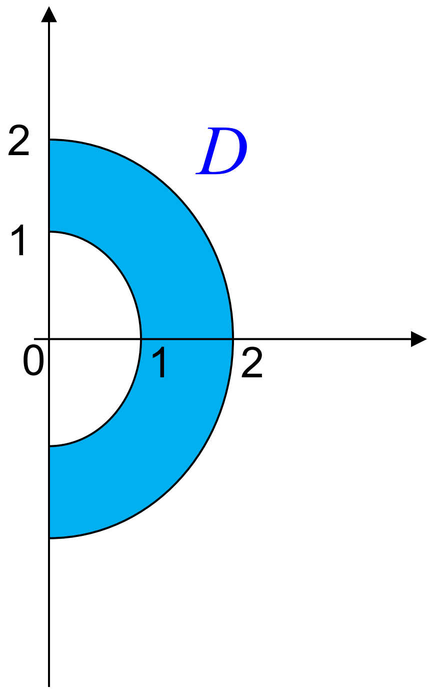
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} g(u+\Delta u, v) - g(u,v) \\ h(u+\Delta u, v) - h(u,v) \end{pmatrix} \approx \Delta u \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} g(u, v+\Delta v) - g(u,v) \\ h(u, v+\Delta v) - h(u,v) \end{pmatrix} \approx \Delta v \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Flächeninhalt von } K \approx \left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} \cdot \Delta u & \dfrac{\partial g}{\partial v} \cdot \Delta v \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} \cdot \Delta u & \dfrac{\partial h}{\partial v} \cdot \Delta v \end{pmatrix} \right| = \Delta u \cdot \Delta v \left| \det \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}}_{=:J(u,v)} \right|$$

Mit Limes $\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$:

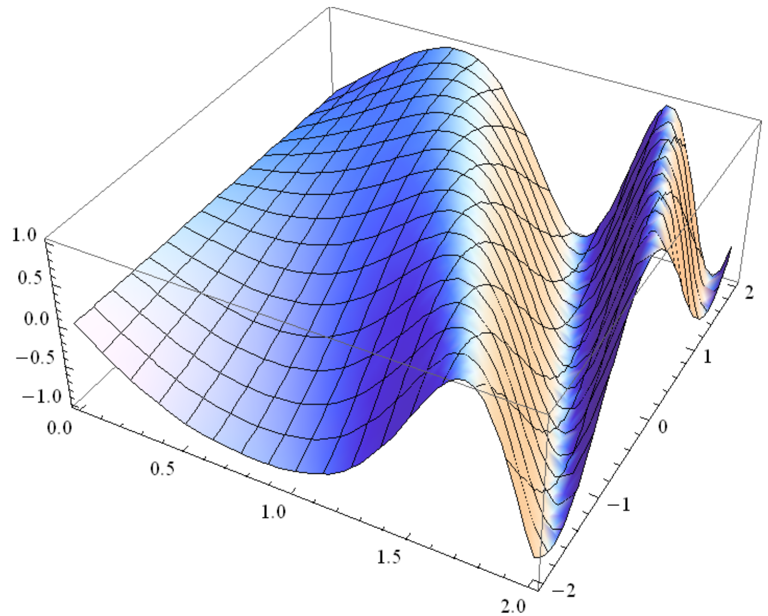
$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D'} f(\mathrm{g}(u,v), h(u,v))\, \left|\det J(u,v)\right| dudv$$

Beispiel $D=\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x>0, 1<x^2+y^2<4\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) := x(x^2+y)$$



Polarkoordinaten

$$D=\left\{\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)^T \in \mathbb{R}^2 : 1<r<2, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$B=\left\{\left(r,\varphi\right)^T \in \mathbb{R}^2 : 1<r<2, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iint_D x(x^2+y)\,dxdy = \iint_B \left(r^3\cos^3\varphi + r^2\cos\varphi\sin\varphi\right) r\,drd\varphi$$

$$= \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^4\cos^3\varphi + r^3\cos\varphi\sin\varphi\right) d\varphi dr$$

$$= \int_1^2 r^4 \cdot \frac{4}{3} dr + \int_1^2 \left[\frac{r^3}{2}\sin^2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr \qquad \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\right)$$

$$= \int_1^2 \frac{4r^4}{3} dr = \frac{124}{15}$$

Einige besondere Integrale

Doppelintegrale

Der **Flächeninhalt** F_A einer Fläche A im $\mathbb{R}^2$ ist in kartesischen Koordinaten wie folgt definiert: $F_A = \iint\limits_{(x,y)\in A} dxdy$

Der **Schwerpunkt** $S = (x_S, y_S)$ dieser Fläche ist definiert durch:

$$x_s = \frac{1}{F_A} \iint\limits_{(x,y)\in A} xdxdy, \qquad y_s = \frac{1}{F_A} \iint\limits_{(x,y)\in A} ydxdy$$

Das **arithmetische Mittel von** $f(x,y)$ **über alle** $(x,y) \in A$ ist definiert als $\bar{f}_A = \frac{1}{F_A} \iint\limits_{(x,y)\in A} dxdy$

Dreifachintegrale

Das **Volumen** V_K eines Körpers K im $\mathbb{R}^3$ ist in kartesischen Koordinaten wie folgt definiert: $V_K = \iiint\limits_{(x,y,z)\in K} dxdydz$

Der **Schwerpunkt** $S=(x_S, y_S, z_S)$ dieses Körpers ist definiert durch:

$$x_s = \frac{1}{V_K} \iiint\limits_{(x,y,z)\in K} xdxdydz, \quad y_s = \frac{1}{V_K} \iiint\limits_{(x,y,z)\in K} ydxdydz, \quad z_S = \frac{1}{V_K} \iiint\limits_{(x,y,z)\in K} zdxdydz$$

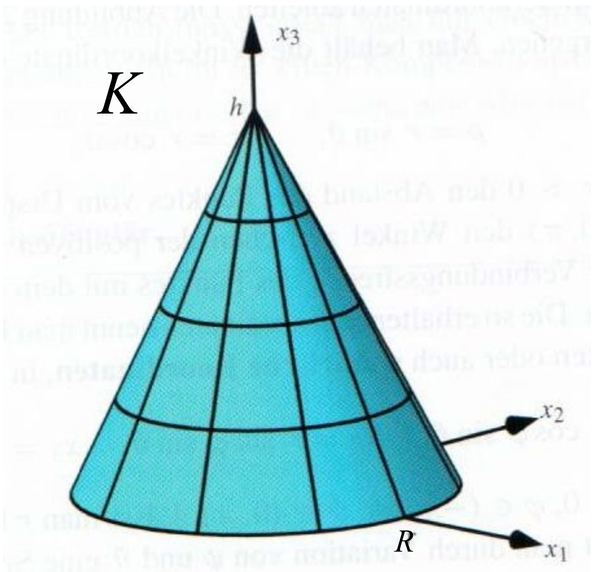
Das **arithmetische Mittel von** $f(x,y,z)$ **über alle** $(x,y,z)\in K$ ist definiert als $\bar{f}_k = \frac{1}{V_K} \iiint\limits_{(x,y,z)\in K} dxdydz$

Anwendungsbeispiel 1

Wir bestimmen das Volumen eines Kegels K, dessen Grundfläche ein Kreis mit Radius R ist und der die Höhe h besitzt.

Wir werden die Menge der Punkte im Innern des Kegels durch Zylinderkoordinaten beschreiben. Dabei wählt man die x_3-Achse als Verbindungsgerade der Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkt der Grundfläche. Der maximale Abstand eines Punktes des Kegels von der x_3-Achse nimmt dann linear ab vom Wert R am Boden bis zu 0 an der Spitze. Es folgt also

$$K = \left\{ \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z \right)^T \, : \, 0 < r < R\left(1 - \frac{z}{h}\right), 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < h \right\}$$



$$B = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 0 < r < R\left(1 - \frac{z}{h}\right), 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < h \right\}$$

$$V_K = \iiint_K dxdydz = \iiint_B r\,drd\varphi dz$$

$$= \int_0^h \int_0^{R(1-z/h)} \int_0^{2\pi} r\,drd\varphi dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Es ergibt sich genau der bekannte Ausdruck
ein Drittel mal Grundfläche mal Höhe.

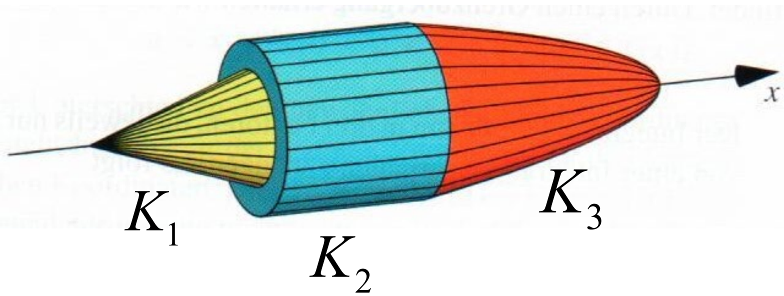
Anwendungsbeispiel 2

Der Schwerpunkt eines zylindrischen Körpers

Der Schwerpunkt eines dreidimensionalen Körpers soll bestimmt werden. Der Körper setzt sich dabei aus der Teilen zusammen, deren Symmetrieachse jeweils die x_1-Achse ist:

- ein Kegel mit Höhe 2, Spitze bei $(-4,0,0)^T$ und Radius der Grundfläche 2/3,
- daran anschließend ein Zylinder mit Höhe 2 und Radius 1,
- schließlich ein halbes Paraboloid mit Scheitelpunkt bei $(3,0,0)^T$ und Radius der Grundfläche 1.

Der Körper besteht aus einem homogenen Material.



$$K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -4 < x_1 < -2,\ x_2^2 + x_3^2 < \frac{(4+x_1)^2}{9} \right\}$$

$$K_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -2 < x_1 < 0,\ x_2^2 + x_3^2 < 1 \right\}$$

$$K_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < 3,\ x_2^2 + x_3^2 < 1 - \frac{x_1}{3} \right\}$$

$$S=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\qquad S=\frac{1}{V_K}\begin{pmatrix} \iiint_K x\,dxdydz \\ \iiint_K y\,dxdydz \\ \iiint_K z\,dxdydz \end{pmatrix}$$

$$V_{K_1}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2=\frac{8\pi}{27}$$

$$V_{K_2}=\pi\cdot 1^2\cdot 2=2\pi$$

Für das Paraboloid können wir das Volumen schnell über die Formel für Rotationskörper bestimmen:

$$V_{K_3}=\pi\int_0^3\left(1-\frac{x_1}{3}\right)dx_1=\pi\left[x_1-\frac{x_1^2}{6}\right]_0^3=\frac{3\pi}{2}$$

Damit ist das Gesamtvolumen

$$V_K=V_{K_1}+V_{K_2}+V_{K_3}=\frac{205\pi}{54}$$

Zur Schwerpunktsberechnung bestimmen wir das Gebietsintegral für jeden Körper separat.

Aus Symmetriegründen ist klar, dass die x_2-und x_3-Koordinaten des Schwerpunkts null sein müssen und deswegen nur die x_1-Koordinaten berechnet werden muss.

Dazu verwenden wir Zylinderkoordinaten mit der x_1-Achse als z-Achse, d.h.

$$x_1 = z, \quad x_2 = r\cos\varphi, \quad x_3 = r\sin\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\iiint_{K_1} x_1 dx &= \int_{-4}^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{(4+z)/3} z\, r\, dr\, d\varphi\, dz = -\frac{20\pi}{27} \\
\iiint_{K_2} x_1 dx &= \int_{-2}^{-0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1} z\, r\, dr\, d\varphi\, dz = -2\pi \\
\iiint_{K_3} x_1 dx &= \int_{0}^{3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{1-z/3}} z\, r\, dr\, d\varphi\, dz = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \quad s_1 = \frac{\iiint_K x_1 dx}{V(K)} = \frac{-\frac{20\pi}{27} - 2\pi + \frac{3\pi}{2}}{\frac{205\pi}{54}} = -\frac{67}{205}$$

Schwerpunkt

$$\Big(\underbrace{-\frac{67}{205}}_{\approx -0.33}, 0, 0\Big)$$

Aufgaben

7.1 Berechnen Sie $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+2y)\, dxdy$

7.2 Berechnen Sie das dreidimensionale Gebietsintegral

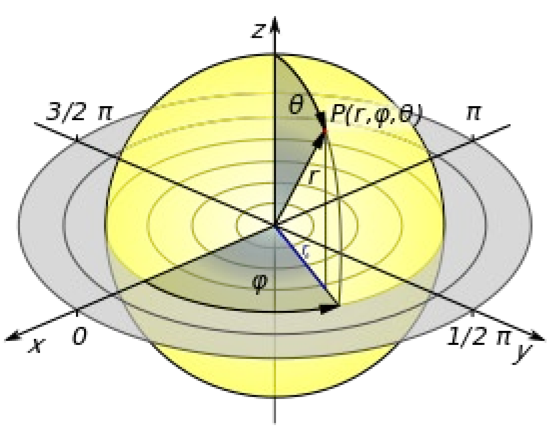
$$\iiint_D \frac{x(x+z)}{1+y^2}\, dxdydz$$

über das Gebiet $D = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

7.3 (Kugelkoordinaten) (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))

Berechnen Sie das Volumen von

$$D = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0 \right\}.$$



$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

Aufgaben

7.4 Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $D = [0,1] \times [0,1]$.

7.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

mithilfe einer Transformation auf Polarkoordinaten.

Hinweise: Die Funktion e^{-x^2} ist zwar integrierbar, es ist jedoch nicht möglich, ihre Stammfunktion durch die uns bekannten Funktionen in einer expliziten Formel auszudrücken. Mittels einer Darstellung durch ein Gebietsintegral und der Verwendung von Polarkoordinaten kann aber der Wert des oben angegebenen Integrals bestimmt werden.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$