Übungsblatt (3.12.2025)

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,0) \\ 2, & (x,\ y)=(0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche

$$z=f(x,y)=e^{3x+y^2}$$

im Punkt $\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Mehrfachintegrale:

(a) $\int_0^1\int_0^3 (x^2+\cos(\pi x))dxdy.$ (b) $\int_0^1\int_0^1 e^{2x+y}dxdy$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade zu den Daten

x_i	-2	-1	0	1
y_i	2	0	1	2

Aufgabe 5

Berechnen Sie die kritische Punkten von $f(x,y)=3xy-x^2y-xy^2$ und
$g(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2y^2}$.

Aufgabe 6

Im Folgenden sind alle Koordinaten in cm angegeben. Ein Glas entsteht durch Rotation um die y-Achse des durch $y > 0$ bestimmten Astes der Hyperbel

$$y^2 - x^2 = 1$$

(Innenfläche) sowie Rotation der Halbgeraden

$$y = x, \quad x \geq 0$$

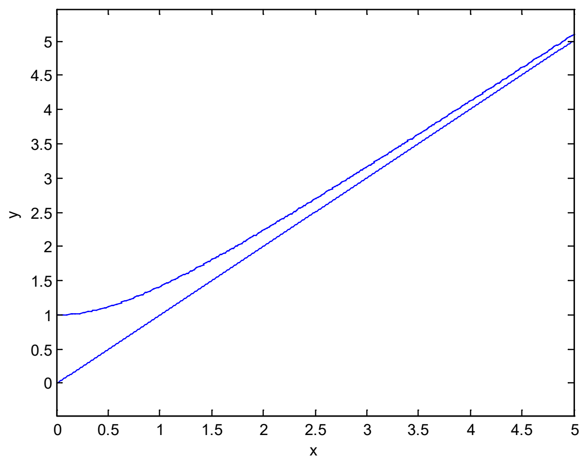
(Außenfläche). Es wird nach oben durch die Ebene

$$y = c > 1$$

begrenzt. Bestimmen Sie für $c = 3$ das Flüssigkeitsvolumen, das in dem Glas maximal Platz findet, sowie die Masse des leeren Glases, wenn dieses aus einem Material der Dichte

$$\rho = 2.2 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

besteht. Ermitteln Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Masse eines leeren Glases mit Höhe c und Dichte ρ.



Aufgabe 7

Lösen Sie die Differentialgleichungen erster Ordnung durch geeignete Separation:

a) $x'(t) = \dfrac{t}{x(t)}, \; x(0) = 1,$

wobei $x(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

b) $y'(x) = y(x)^2 - 1$

Hinweis: $\dfrac{1}{a^2 - 1} = \dfrac{1}{2(a-1)} - \dfrac{1}{2(a+1)}$

Aufgabe 8

Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Aufgabe 9

Das Risiko bei einem Portfolio aus drei Aktien ist gegeben durch

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2,$$

wobei $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ und $\alpha_j \in [0,1]$ die Anteile sind, die in der j-ten Aktie veranlagt wurden. Bei welchen Anteilen ergibt sich das minimale Risiko? Wie groß ist das minimale Risiko?

Hinweis: Verwenden Sie $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$, um α_3 zu eliminieren.

Aufgabe 10

Berechnen Sie die Bogenlänge der Funktion

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \le x \le 1).$$

Hinweis: Die Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $\arcsin(x)$.