Angewandte Mathematik

Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum
kaori.nagatou@kit.edu

Lösungsvorschlag für die Aufgaben 1.2 & 1.3

1.2 (vergangene Klausur Aufgabe 1 (10 Punkte))

Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}, & (x,\ y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

Lösungsvorschlag:

Für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lässt sich Stetigkeit mittels Polarkoordinaten überprüfen.

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (0 \le r, 0 \le \theta < 2\pi)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{r^2} \to \infty \quad (r \to 0)$$

Also, f ist nicht stetig im Ursprung.

1.3 Untersuchen Sie die beiden Funktionen f und $g, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,\ y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,\ y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

Lösungsvorschlag:

Für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lässt sich Stetigkeit mittels Polarkoordinaten überprüfen.

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (0 \le r, 0 \le \theta < 2\pi)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \cos\theta \cdot (\sin\theta)^3 \to \cos\theta \cdot (\sin\theta)^3 \quad (r \to 0)$$

$$g(x,y) = r(\cos\theta)^3 \cdot (\sin\theta)^2 \to 0 \quad (r \to 0)$$

Also, f ist nicht stetig im Ursprung, g ist stetig.

Heute

- Partielle Ableitungen und partielle Differezierbarkeit
- Differenzierbarkeit und Tangentialebene
- Gradient
- Differenzial
- Höhere partielle Ableitungen
- Extremwerte

Partielle Ableitungen

Definition 2.1
Die partielle Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach einer Variable x_k im Punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$ ist definiert durch

$$f_{x_k}(\tilde{x}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\tilde{x}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\tilde{x} + he_k) - f(\tilde{x})}{h}$$

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Definition 2.2
Die Funktion f heißt partiell differenzierbar nach x_k an der Stelle $\tilde{x}$, falls die partielle Ableitung f_{x_k} an der Stelle $\tilde{x}$ existiert.

Die Funktion f heißt partiell differenzierbar nach x_k in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^n$, falls die partielle Ableitung f_{x_k} an jeder Stelle in B existiert.

Partielle Ableitungsfunktion

Definition 2.3
Bei einer partiell differenzierbaren Funktion $f(x)$ kann man neue Funktionen $f_{x_k}(x)$ dadurch definieren, dass man jede Stelle x die Steigung der Tangente in x_k-Richtung zuordnet:

$$x \mapsto f_{x_k}(x).$$

Diese Funktionen bezeichnet man als partielle Ableitungsfunktion in x_k.

Berechnung der partiellen Ableitung

Die partielle Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach der Variable x_k, berechnet man, indem man alle anderen Variablen konstant hält und f nach x_k „normal“, also als Funktion ableitet.

Beispiel

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,y,z) = x^2 + e^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ze^{yz}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ye^{yz}$$

$$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x,y,z) = \sin^3(xyz)$$

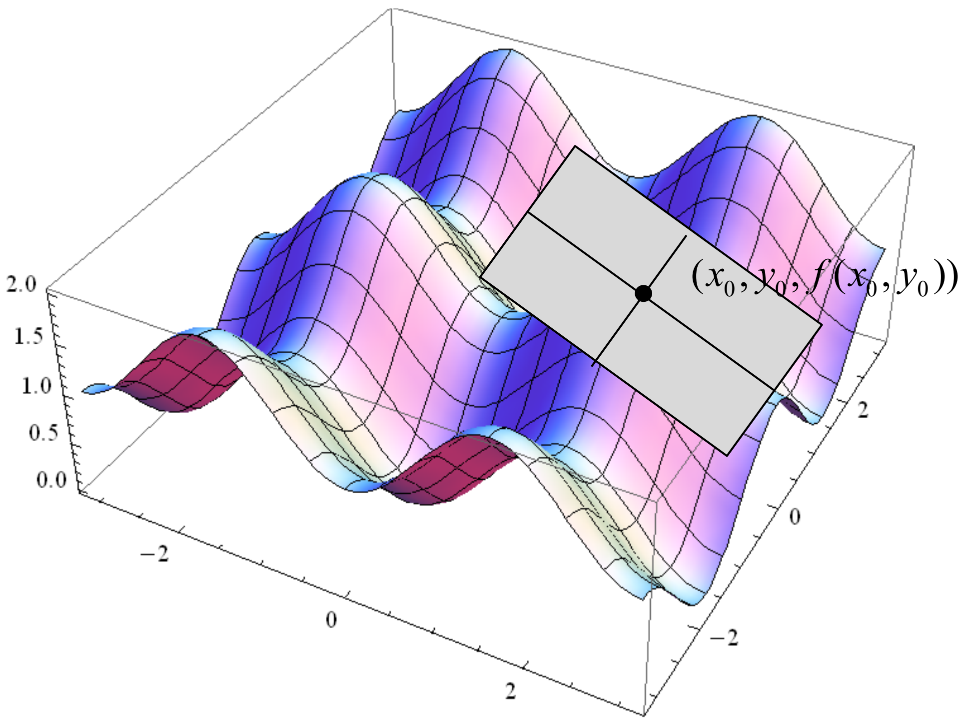
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3yz\sin^2(xyz)\cos(xyz), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 3xz\sin^2(xyz)\cos(xyz),$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3xy\sin^2(xyz)\cos(xyz)$$

Differenzierbarkeit und Tangentialebene $(\mathbb{R}^2)$

Definition 2.4

Eine Funktion f heißt differenzierbar an einer Stelle (x_0, y_0) wenn sie dort eine eindeutige Tangentialebene besitzt.



Definition 2.5
Die Ebene durch den Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ mit den Steigungen

$$f_x(x_0, y_0), \qquad f_y(x_0, y_0)$$

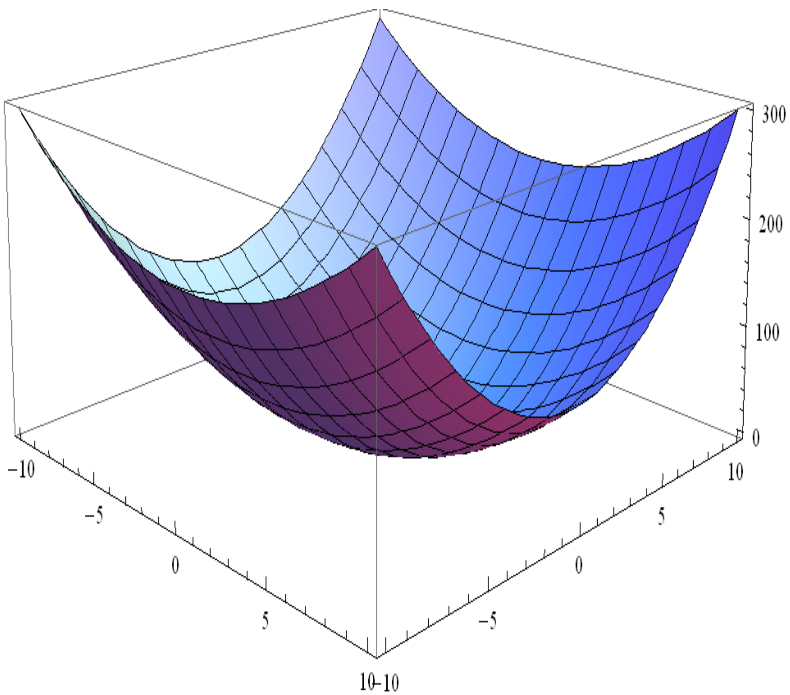
in Richtung x und y nennt man die Tangentialebene der Funktion f an der Stelle (x_0, y_0).
Sie existiert, falls f_x und f_y an der Stelle (x_0, y_0) stetig sind.

Die **Tangentialebenengleichung**:

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt P bedeutet, dass die Funktion in einer Umgebung von P hinreichend gut durch die entsprechende Tangentialebene angenähert werden kann.

Beispiel: Wir bestimmen die Tangentialebene an die Fläche
$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ im Punkt (-1,-1,3).



$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 4y$$

Tangentialebene der Funktion f an der Stelle $(-1,-1,3)$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(-1,-1) + f_x(-1,-1)(x-(-1)) + f_y(-1,-1)(y-(-1)) \\ &= 3 - 2(x+1) - 4(y+1) \\ &= -2x - 4y - 3 \end{aligned}$$

Satz 2.6

Eine Funktion $f(x, y)$ ist genau dann differenzierbar auf einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, wenn beiden partiellen Ableitungen auf B existieren und stetig sind.

Definition 2.7

Der Gradient einer partiell differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt p ist der Vektor der partiellen Ableitungen in diesem Punkt:

$$\nabla f(p) := \begin{pmatrix} f_{x_1}(p) \\ \vdots \\ f_{x_n}(p) \end{pmatrix}$$

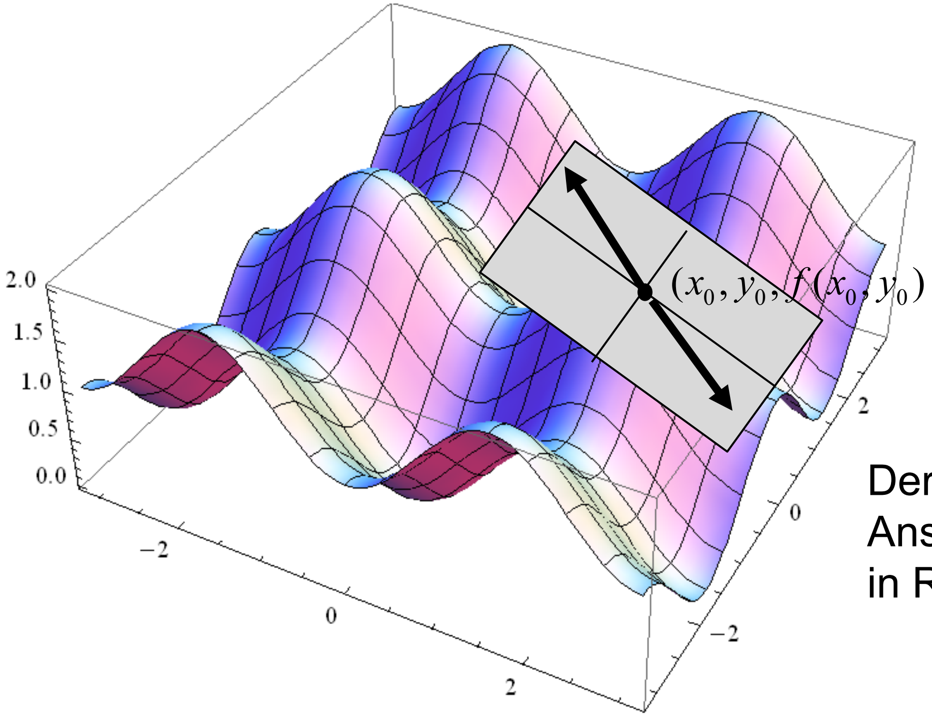
Manchmal schreibt man für den Gradienten auch

$$\nabla f = grad\ f$$

Beispiel: Wir bestimmen den Gradienten der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) = x^2 e^{\sin y}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{\sin y} \\ x^2 \cos y\, e^{\sin y} \end{pmatrix}$$



Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs einer Funktion, - grad entsprechend in Richtung des steilsten Abfalls.

Definition 2.8 (nicht klausurrelevant)

Das totale Differenzial einer Funktion f an der Stelle (x_0, y_0)

ist definiert durch

$$df\,|_{(x_0,\, y_0)} = f_x(x_0,\, y_0)dx + f_y(x_0,\, y_0)dy.$$

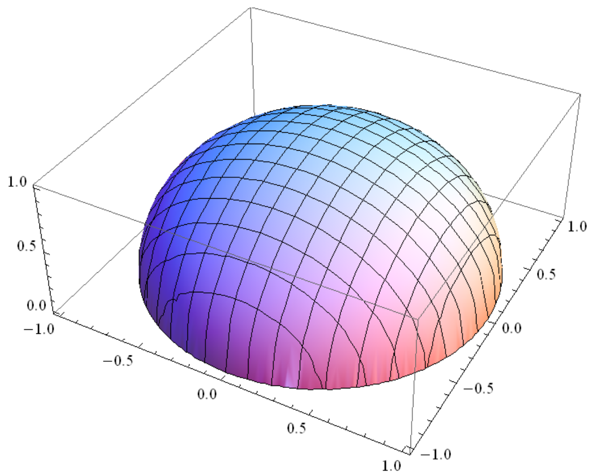
Es besteht die Veränderung des z-Wertes an der Stelle (x_0, y_0) entlang der Tangentialebene, wenn sich die Variablen x und y um die Werte Δx und Δy ändern.

Das Differenzial der Funktion f an der Stelle (x_0, y_0) liefert für kleine Änderungen Δx und Δy eine gute Näherung für die tatsächliche Änderung des Funktionswertes:

$$\begin{aligned} df\,|_{(x_0,\, y_0)} &= f_x(x_0,\, y_0)dx + f_y(x_0,\, y_0)dy \\ &\approx \Delta f = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0). \end{aligned}$$

Beispiel:

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (x^2+y^2<1)$$



$$df=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx+\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy$$

Allgemeine Kettenregel

Die verkettete Funktion $g(t) = f(x(t),\, y(t))$ mit der Variable t hat die Ableitung

$$g'(t) = f_x(x(t),\, y(t))x'(t) + f_y(x(t),\, y(t))y'(t).$$

Die verkettete Funktion $g(u,v) = f(x(u,v),\, y(u,v))$ mit den Variablen u,v hat die Ableitung

$$g_u(u,v) = f_x(x(u,v),\, y(u,v))x_u(u,v) + f_y(x(u,v),\, y(u,v))y_u(u,v)$$
$$g_v(u,v) = f_x(x(u,v),\, y(u,v))x_v(u,v) + f_y(x(u,v),\, y(u,v))y_v(u,v)$$

Beispiel:

$$z = f(x, y), x = 2\sin t, y = 3\cos t$$

$$\Rightarrow z'(t) = f_x \cdot 2\cos t + f_y \cdot (-3\sin t)$$

$$z = f(x, y), x = 2u + 3v, y = 4u - 5v$$

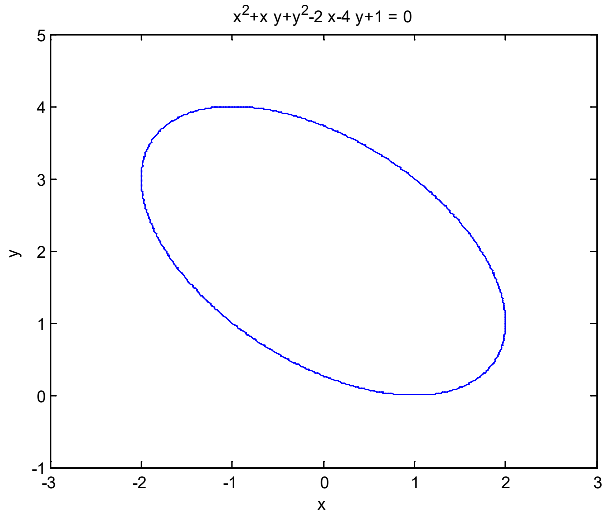
$$\Rightarrow z_u = 2f_x + 4f_y, \quad z_v = 3f_x - 5f_y$$

Implizite Differenziation

Beim Ableiten einer impliziten Gleichung $F(x,y)=0$ in den Variablen x und y nach x erhält man $y'(x)$ mit der allgemeinen Kettenregel in der Form

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,\, y(x))}{F_y(x,\, y(x))}.$$

Beispiel: $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$



$$y'(x) = -\frac{2x + y - 2}{x + 2y - 4}$$

$$(x,y) = (1,0), (-1,4) \Rightarrow y' = 0$$

Höhere partielle Ableitungen

Definition 2.9

Wenn die partielle Ableitungsfunktion wieder eine partiell differenzierbare Funktion ist, dann kann man auch die Ableitungsfunktion ableiten. Die partielle Ableitung der partiellen Ableitung bezeichnet man als zweite partielle Ableitung. Durch wiederholtes Differenzieren erhält man so Partielle Ableitungen höherer Ordnung

$$f \to f_x, f_y \to f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} \to \ldots$$

$$f \to \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \to \ldots$$

Beispiel:

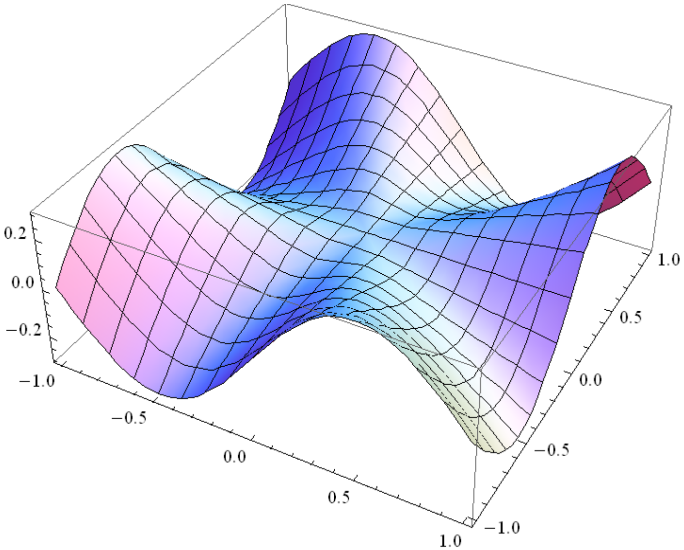
$$f(x,y) = e^{ax}\cos(ay) \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$f_x(x,y) = ae^{ax}\cos(ay),\ f_y(x,y) = -ae^{ax}\sin(ay)$$

$$f_{xx}(x,y) = a^2e^{ax}\cos(ay),\ f_{xy}(x,y) = -a^2e^{ax}\sin(ay)$$

$$f_{yy}(x,y) = -a^2e^{ax}\cos(ay),\ f_{yx}(x,y) = -a^2e^{ax}\sin(ay)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,\ y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,\ y) = (0,0) \end{cases}$$



$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h} = -y$$

$$f_{xy}(0,0) = -1$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,0+k)-f(x,0)}{k} = x$$

$$f_{yx}(0,0) = 1$$

$$\Rightarrow f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

Satz von Schwarz

Die gemischten partiellen Ableitungen höher Ordnung einer Funktion $f(x, y)$ sind von der Reihenfolge der Differenziationsvariablen unabhängig, falls sie stetig sind.

Dann gilt also insbesondere

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}.$$

Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix einer Funktion f ist eine Matrix, die aus allen zweiten partiellen Ableitungen von f besteht:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Beispiel: $f(x, y) = x^3 + \sin(xy) + y^2 + \cos(x) + y$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} & f_x(x, y) = 3x^2 + y\cos(xy) - \sin(x), \quad f_y(x, y) = x\cos(xy) + 2y + 1, \\ & f_{xx}(x, y) = 6x - y^2 \sin(xy) - \cos(x), \quad f_{xy}(x, y) = \cos(xy) - xy\sin(xy), \\ & f_{yx}(x, y) = \cos(xy) - xy\sin(xy), \quad f_{yy}(x, y) = -x^2 \sin(xy) + 2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - y^2 \sin(xy) - \cos(x) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2 \sin(xy) + 2 \end{bmatrix}.$$

Extremwerte

Definition 2.10 (Lokaler Extremwert)

Eine Funktion f mit zwei Variablen besitzt an der Stelle (x_0, y_0)

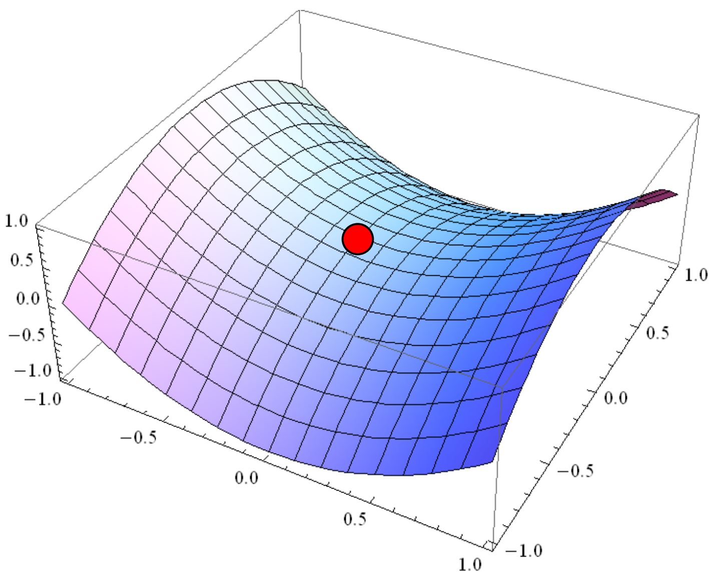
- ein lokales Minimum, wenn alle Funktionswerte in der Umgebung von (x_0, y_0) größer sind als der Funktionswert an der Stelle (x_0, y_0) .
- ein lokales Maximum, wenn alle Funktionswerte in der Umgebung von (x_0, y_0) kleiner sind als der Funktionswert an der Stelle (x_0, y_0) .

Notwendige Bedingungen für einen Extremwert

Wenn eine Funktion f mit zwei Variablen an der Stelle (x_0, y_0) einen Extremwert besitzt, dann sind beide partiellen Ableitungen erster Ordnung an der Stelle (x_0, y_0) null:

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \; f_y(x_0, y_0) = 0. \qquad \text{(kritische Punkte)}$$

$f(x, y) = x^2 - y^2$



$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

Aber f besitzt an der Stell (0,0) keinen Extremwert!

Hinreichende Bedingungen für einen Extremwert

Eine Funktion f mit zwei Variablen besitzt an der Stelle (x_0, y_0) einen Extremwert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Beide partiellen Ableitungen erster Ordnung an der Stelle (x_0, y_0) sind null:

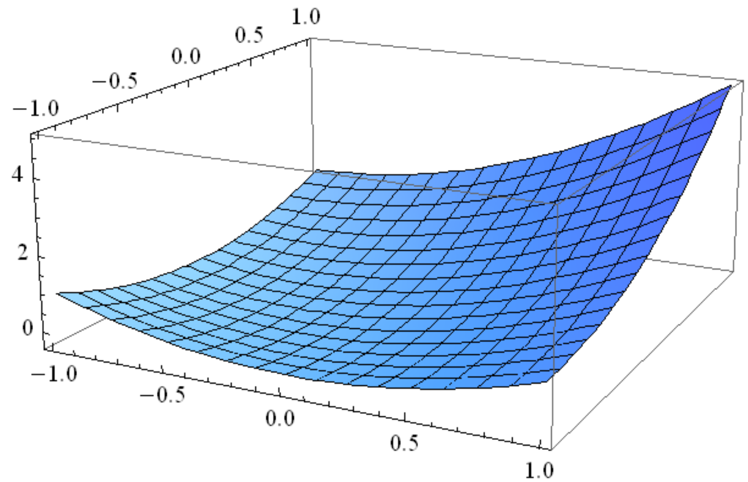
$$f_x(x_0, y_0) = 0, \; f_y(x_0, y_0) = 0.$$

- Die Determinante der Hesse-Matrix mit den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle (x_0, y_0) ist positiv:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Ein lokales Maximum ergibt sich, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ und ein lokales Minimum, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$



$$f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{yy} = 2$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + y + 1 = 0 \\ f_y(x,y) = x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) & f_{xy}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ f_{yx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) & f_{yy}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{vmatrix} > 0$$

$f_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) > 0$ $\Longrightarrow$ Lokares Minimum $f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

Aufgaben

2.1 Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktionen:

$$f(x,y) = x^2 e^y + e^{xy}$$

$$g(x,y) = \sin^2(xy)$$

$$h(x,y) = e^{\cos x + y^3}$$

2.2 Berechne Sie die Hesse-Matrizen der Abbildungen:

$$f(x,y) = e^{xy} + \cos^2 y$$

$$g(x,y) = xy - e^{x+y}$$

$$h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

2.3 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))
Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche

$$z = f(x,y) = x^2 - y - xe^y$$

im Punkt $\left(1, 0, f(1,0)\right)$.

2.4 Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (1+2x-y)^2 + (2-x+y)^2 + (1+x-y)^2.$$