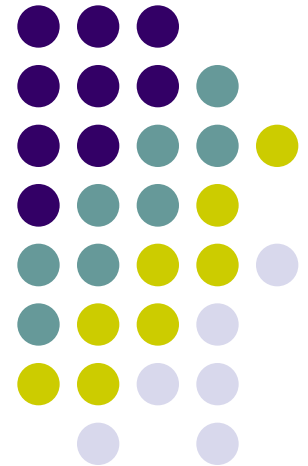


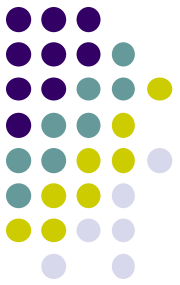
Angewandte Mathematik

Studiengang Informatik
Duale Hochschule BW Karlsruhe

Kaori Nagato-Plum
kaori.nagatou@kit.edu



Lösungsvorschlag für die Aufgabe 8.1 & 8.2



Aufgabe 8.1 (vergangene Klausur Aufgabe (10 Punkte))

Lösen Sie die Differentialgleichung erster Ordnung durch geeignete Separation:

$$y'(x) = xy(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Im Fall $y \neq 0$:

$$y'(x) = xy(x) \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\frac{x^2}{2} + c} \Rightarrow y = \pm e^c e^{\frac{x^2}{2}} = d e^{\frac{x^2}{2}} \quad (d \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$y \equiv 0$ ist auch eine Lösung.

$$\Rightarrow y = d e^{\frac{x^2}{2}} \quad (d \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 8.2

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$1) y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3) y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Zu 3): Lösen Sie das Anfangswertproblem mit
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(vergangene Klausur Aufgabe (20 Punkte))

$$1) \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$2) \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \pm i$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 \cos(x) + c_3 \sin(x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$



$$3) \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2, c_2 = -1$$

$$\Rightarrow y(x) = 2e^x - e^{2x}$$

$$4) y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\Rightarrow y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x$$

Nach der Formel auf S. 24 in der letzten Vorlesung

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{a_2(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))} = -xe^x, \quad c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{a_2(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))} = e^x$$

$$\Rightarrow c_1(x) = -xe^x + e^x, \quad c_2(x) = e^x$$

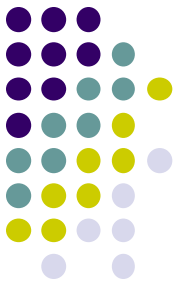
$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + (-xe^x + e^x)e^x + e^x(xe^x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



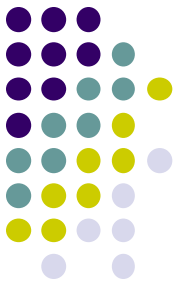
Heute

Differenzialgleichungen

- Numerische Lösungsmethoden



Numerische Lösungsmethoden

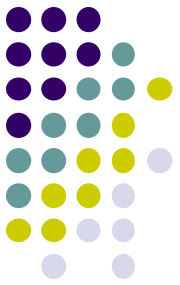


Anfangswertaufgabe
(Differenzialgleichung erster Ordnung)

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

mit $f(t, x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (t_0, x_0) \in \Omega$.

Beispiel



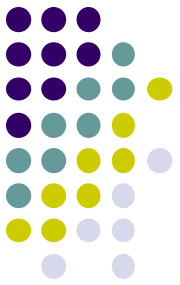
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

————→ $x(t) = e^t$ (exakte Lösung, geschlossene Lösung)

Wenn im allgemeinen keine geschlossene Lösung bestimmt werden kann, müssen wir generelle numerische Zugänge verwenden.

Grundtechnik

$x(t_i)$: gegeben —————→ Näherungswert für $x(t_i + \delta)$



Anfangswertaufgabe

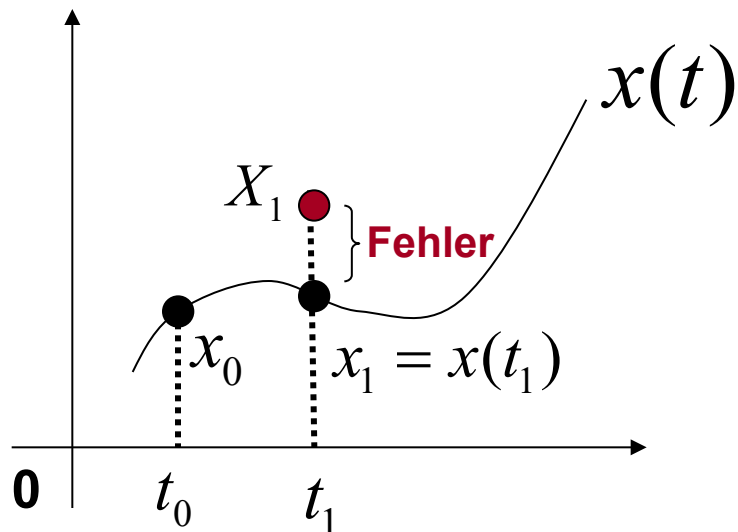
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0$$

Für ausgewählte t_1, t_2, \dots berechnen wir die Näherungswerte X_1, X_2, \dots für $x(t_1), x(t_2), \dots$.

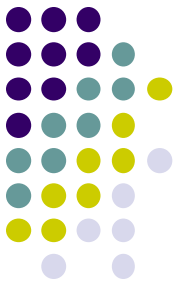
$$x(t_1) \approx X_1$$

$$x(t_2) \approx X_2$$

...



Euler-Verfahren



$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$



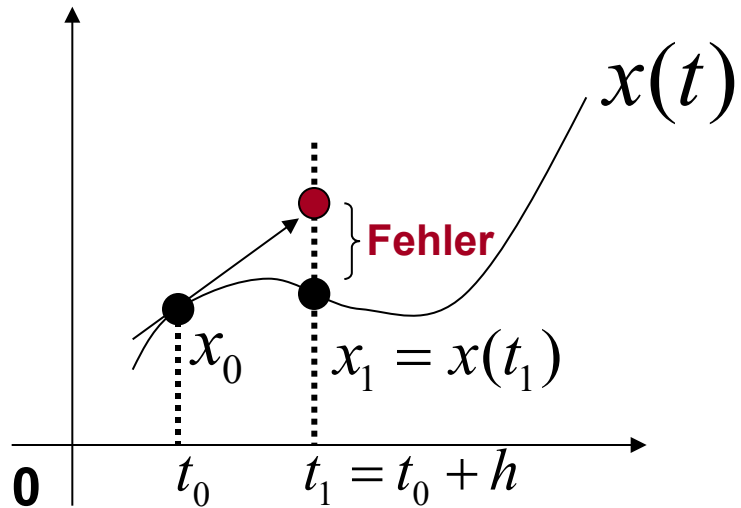
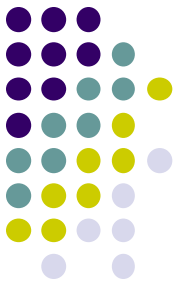
$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\Rightarrow x(t+h) \approx x(t) + h \cdot f(t, x(t)) \quad \dots (2)$$

$x_0 = x(t_0)$: gegeben

$$\longrightarrow x_1 = x(t_0 + h), x_2 = x(t_0 + 2h), \dots$$

Bedeutung vom Euler-Verfahren



Taylor-Entwicklung (Taylorreihe)

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{1!} x'(t) + \frac{h^2}{2!} x''(t) + \dots$$

Bedeutung vom Euler-Verfahren

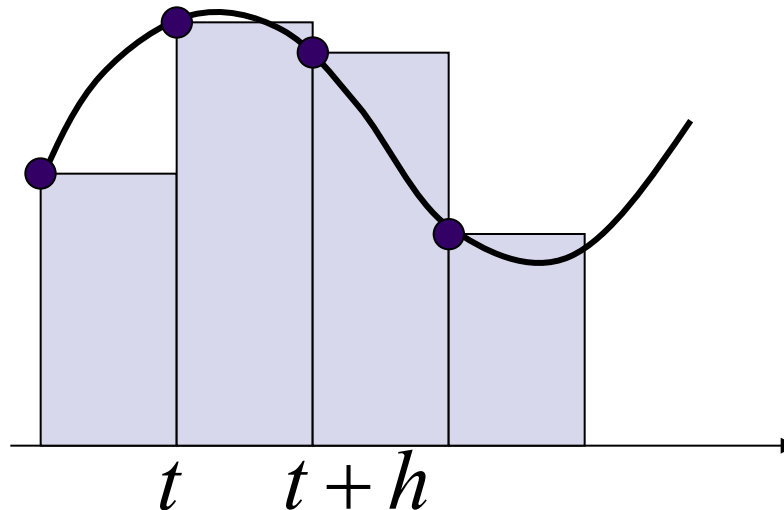


Nach dem 2. Hauptsatz der Differenzial - und Integralrechnung gilt

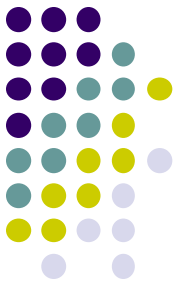
$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} f(t, x(t)) dt$$

Euler-Verfahren:

$$\int_t^{t+h} f(t, x(t)) dt \approx h \cdot f(t, x(t))$$



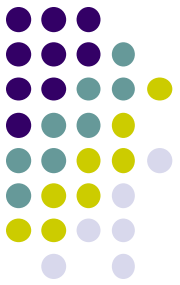
Heun-Verfahren



Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \boxed{x'(t_i)} + \frac{h^2}{2} \boxed{x''(t_i)} + O(h^3) \\ &\quad \downarrow \qquad \searrow \\ &\quad f(t_i, x_i) \quad \frac{f(t_i + h, x_i + h f(t_i, x_i)) - f(t_i, x_i) - O(h^2)}{h} \\ &= x_i + \frac{h}{2} \left(f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_i + h f(t_i, x_i)) \right) + O(h^3) \end{aligned}$$

$$X_{i+1} = X_i + \frac{h}{2} \left(f(t_i, X_i) + f(t_{i+1}, X_i + h f(t_i, X_i)) \right)$$



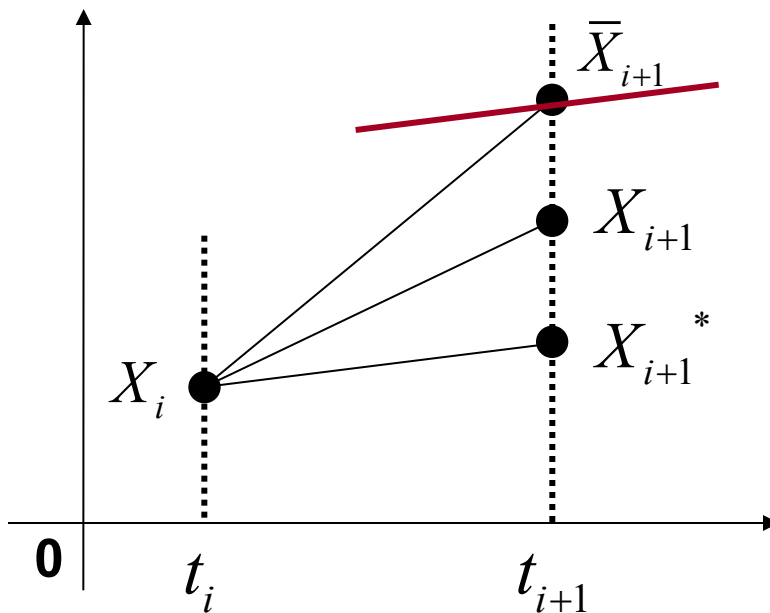
$$\bar{X}_{i+1} = X_i + h f(t_i, X_i)$$

← Euler-Verfahren

$$X_{i+1}^* = X_i + h f(t_{i+1}, \bar{X}_{i+1})$$

$$X_{i+1} = \frac{1}{2} (\bar{X}_{i+1} + X_{i+1}^*)$$

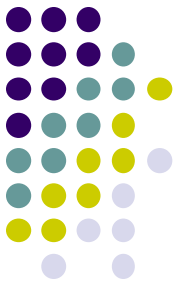
← Mittelwert



$$k_1 = h f(t_i, X_i)$$

$$k_2 = h f(t_i + h, X_i + k_1)$$

$$X_{i+1} = X_i + \frac{k_1 + k_2}{2}$$



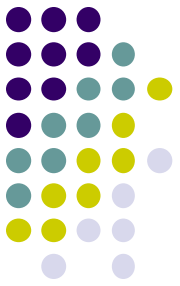
4-stufige Runge-Kutta- Verfahren

$$x(t+h) = x(t) + \underbrace{\int_t^{t+h} f(t, x(t)) dt}_{\text{Simpson}}$$

$$\frac{h}{6} \left\{ \underline{f(t, x(t))} + 4f\left(t + \frac{h}{2}, \underline{x\left(t + \frac{h}{2}\right)}\right) + \underline{f(t+h, x(t+h))} \right\}$$

approximieren

4-stufige Runge-Kutta- Verfahren



$$k_1 = h \cdot f(t_i, X_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

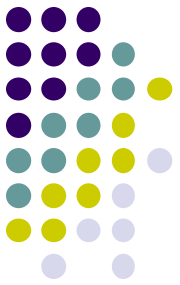
$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_i + h, X_i + k_3)$$

$$X_{i+1} = X_i + \frac{1}{6} \{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\}$$

Beispiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

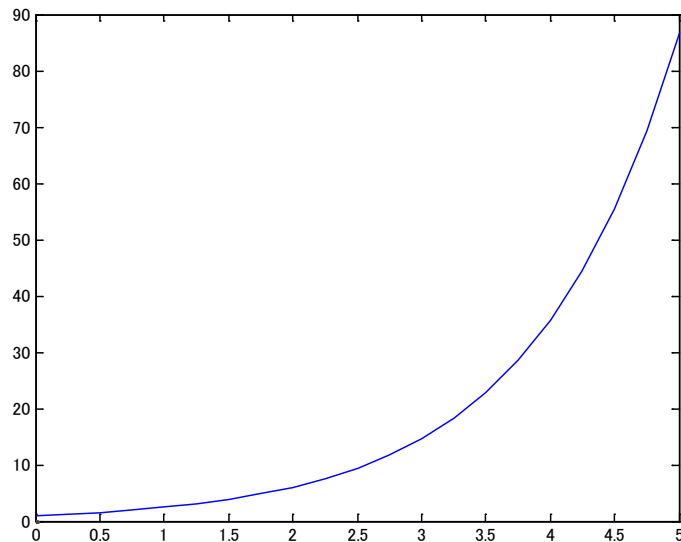


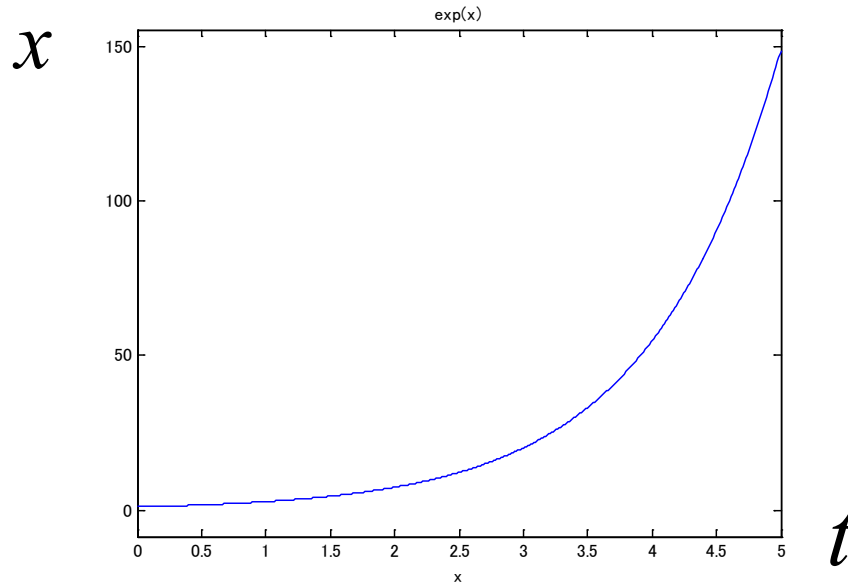
euler.m

```
N=20  
T=5  
h=T/N  
  
t=zeros(N+1); x=zeros(N+1);  
  
t(1)=0; x(1)=1;  
  
for i=1:N  
    x(i+1)=x(i)+h*f(t(i),x(i));  
    t(i+1)=t(i)+h;  
end  
  
plot(t,x)
```

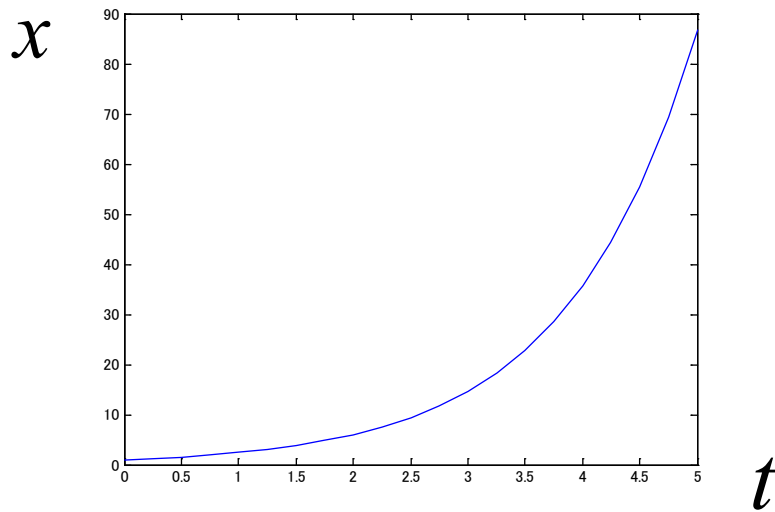
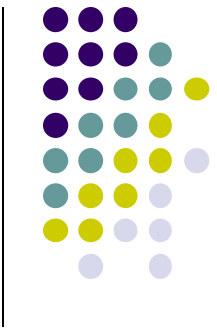
f.m

```
function [a] = f(t,x)  
a=x;  
end
```

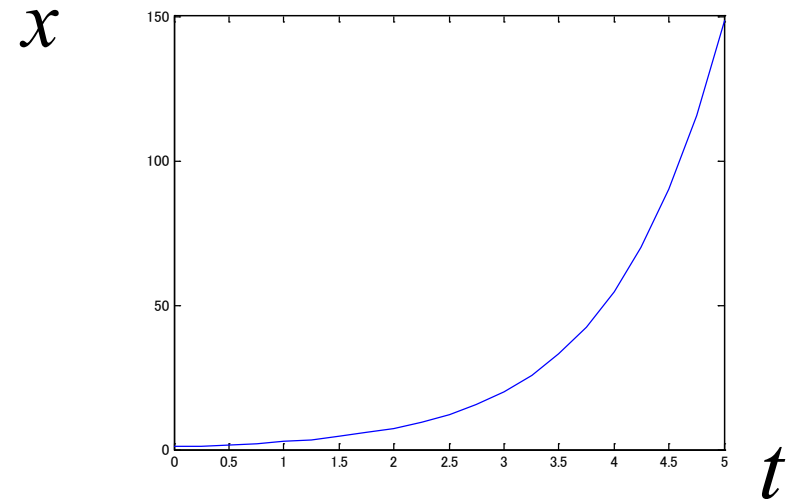




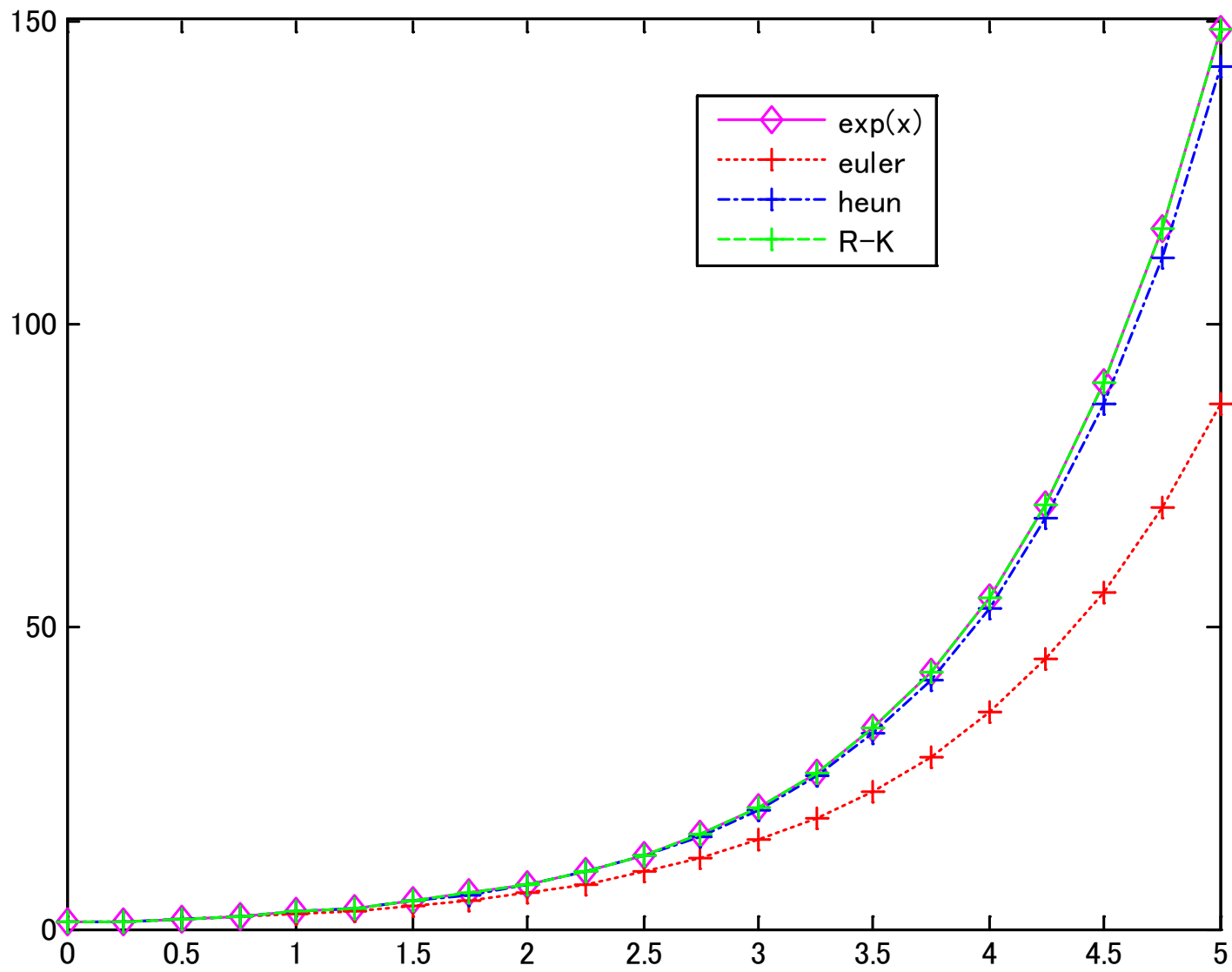
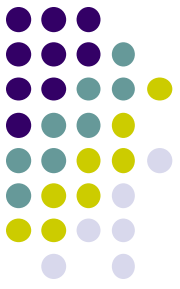
$$x = e^t$$



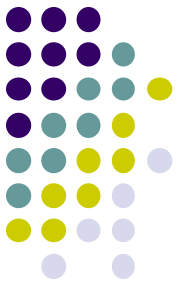
Euler-Verfahren



Runge - Kutta - Verfahren



Differentialgleichungssystem

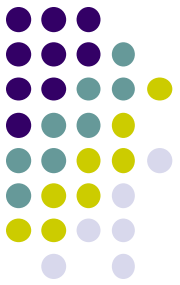


$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x, y) \\ f_2(t, x, y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Differentialgleichung zweiter Ordnung

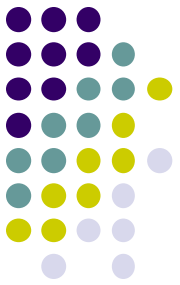


$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x, x') \\ x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1 \end{cases}$$

$$y(t) := x'(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \longleftarrow f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f(t, x, y) \longleftarrow f_2(t, x, y) \\ x(t_0) = a_0, y(t_0) = a_1 \end{cases}$$

Differentialgleichungssystem



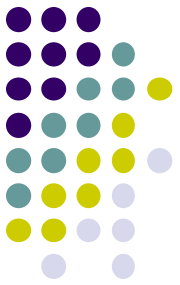
Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = \eta_0, x'(t_0) = \eta_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1} \end{cases}$$

$$u_1 := x, u_2 := x', u_3 := x'', \dots, u_n := x^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u_1' &= u_2, \dots, u_{n-1}' = u_n, u_n' = f(t, u_1, \dots, u_n), \\ u_1(t_0) &= \eta_0, \dots, u_n(t_0) = \eta_{n-1} \end{aligned}$$

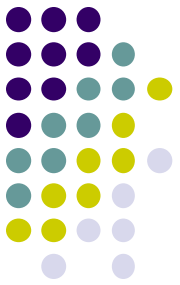
Differentialgleichungssystem



$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ u_n' = f_n(t, u_1, \dots, u_n) \\ u_1(t_0) = \eta_0, \dots, u_n(t_0) = \eta_{n-1} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0 \end{cases}$$

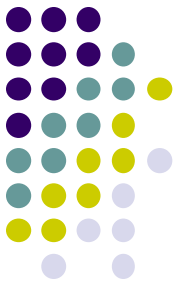


Beispiel (n=2)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

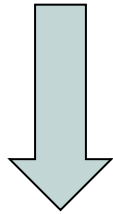
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x, y) \\ f_2(t, x, y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Euler-Verfahren



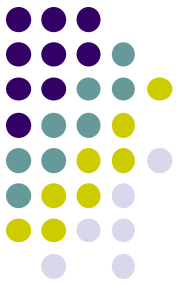
Vektorform

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + h \cdot \mathbf{f}(t_i, \mathbf{X}_i)$$



$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i + h \cdot f(t_i, X_i, Y_i) \\ Y_{i+1} = Y_i + h \cdot f(t_i, X_i, Y_i) \end{cases}$$

Runge-Kutta-Verfahren



Vektorform

$$\mathbf{k}_1 = h \cdot \mathbf{f}(t_i, \mathbf{X}_i)$$

$$\mathbf{k}_2 = h \cdot \mathbf{f}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{X}_i + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right)$$

$$\mathbf{k}_3 = h \cdot \mathbf{f}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{X}_i + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right)$$

$$\mathbf{k}_4 = h \cdot \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{X}_i + \mathbf{k}_3)$$

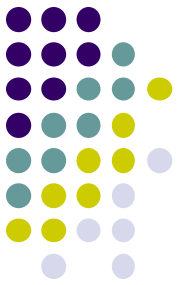
$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \frac{1}{6} \{ \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \}$$

Beispiel

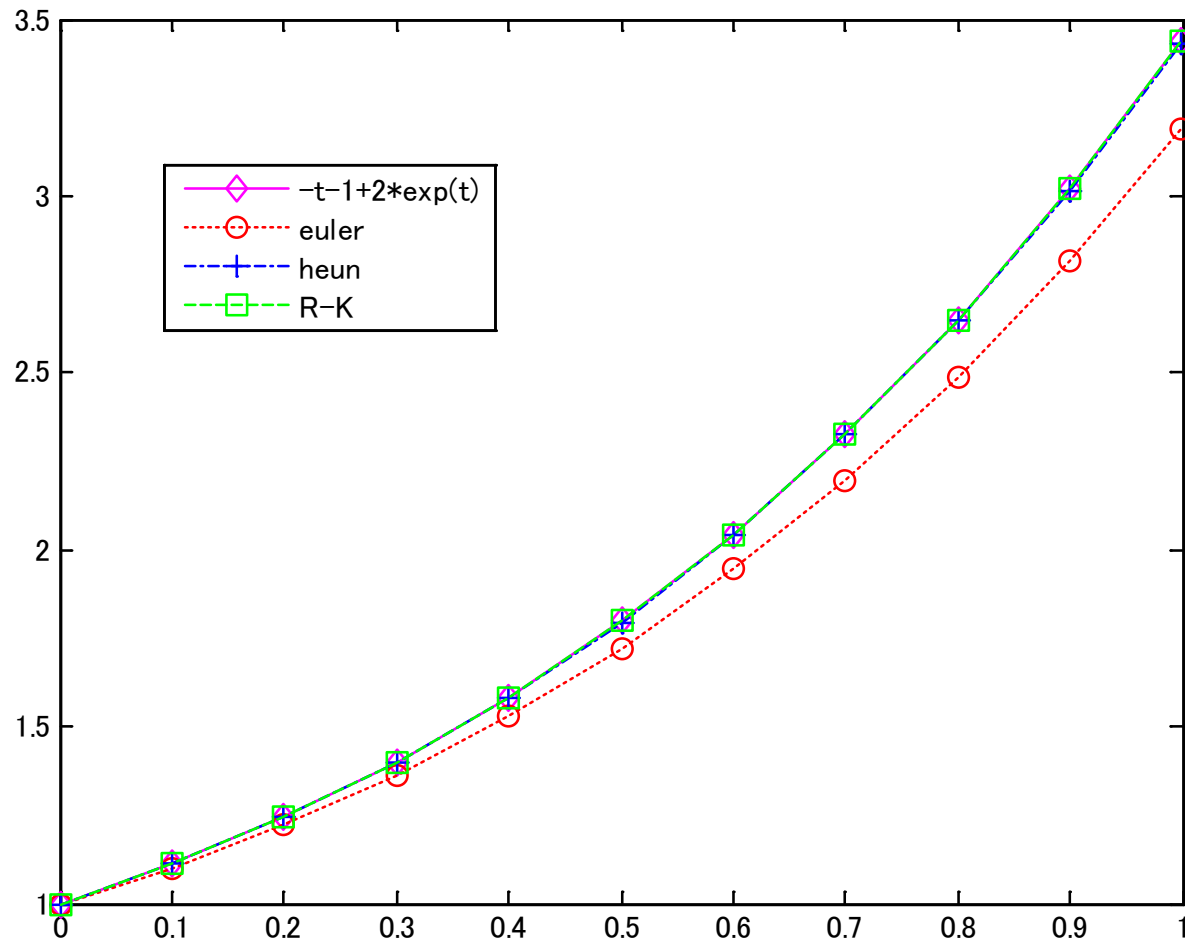
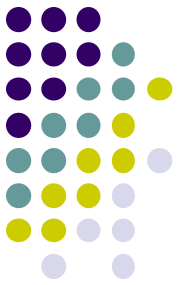
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t + x, & 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Wir rechnen die Näherungswerte von $x = x(t)$ mit Euler-Verfahren, Heun-Verfahren und Runge – Kutta-Verfahren für $h = 0.1, 0.05, 0.025$ und die jeweilige Fehler.

Exakte Lösung : $x(t) = -t - 1 + 2e^t$

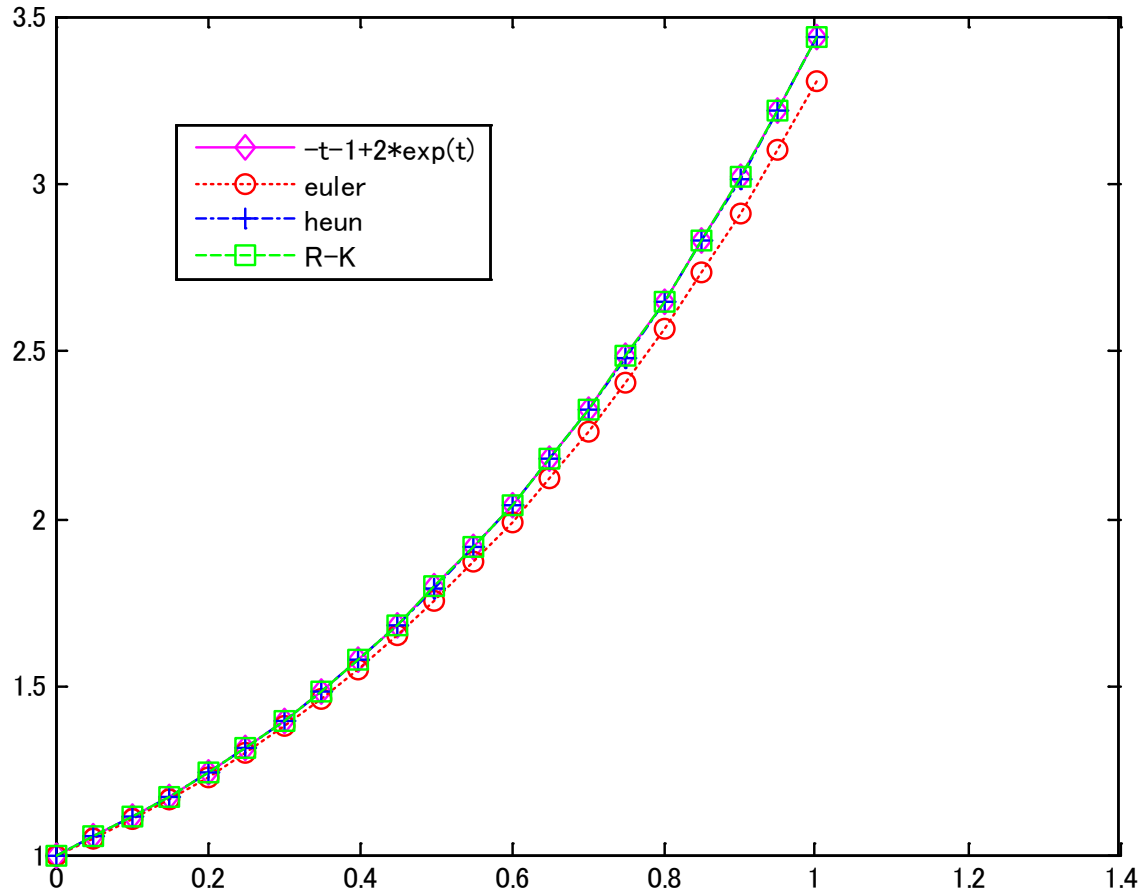
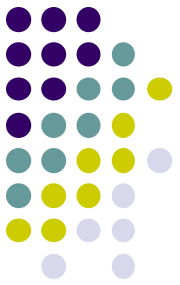


$h = 0.1$



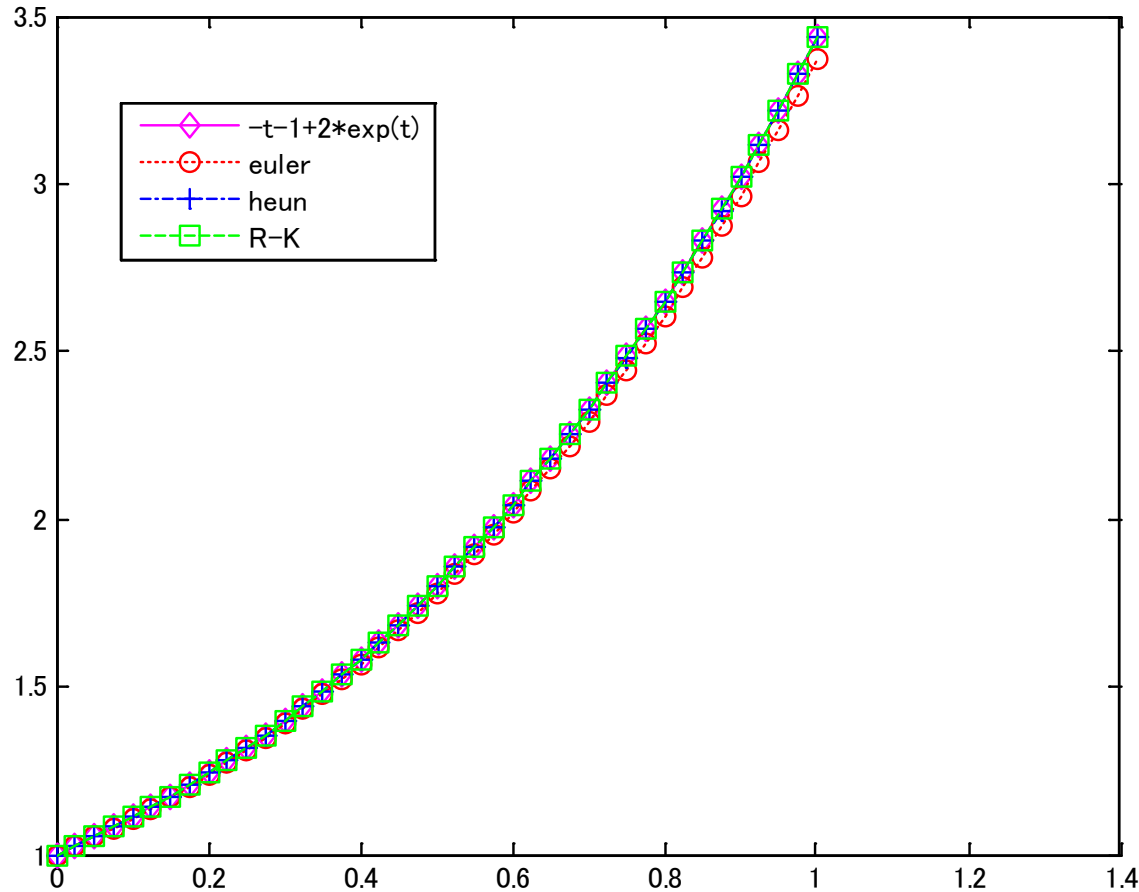
Runge-Kutta: $\max_{1 \leq i \leq N+1} |x(t_i) - X_i| = 4.168647758096000\text{e-}006$

$$h = 0.05$$



Runge-Kutta: $\max_{1 \leq i \leq N+1} |x(t_i) - X_i| = 2.716054234852550e-007$

$$h = 0.025$$



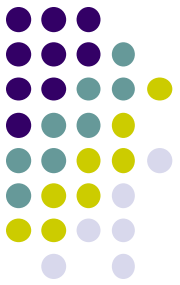
Runge-Kutta: $\max_{1 \leq i \leq N+1} |x(t_i) - X_i| = 1.733237908752017e-008$

Beispiel

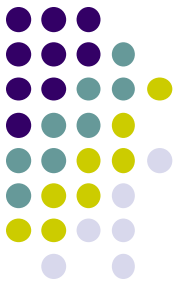
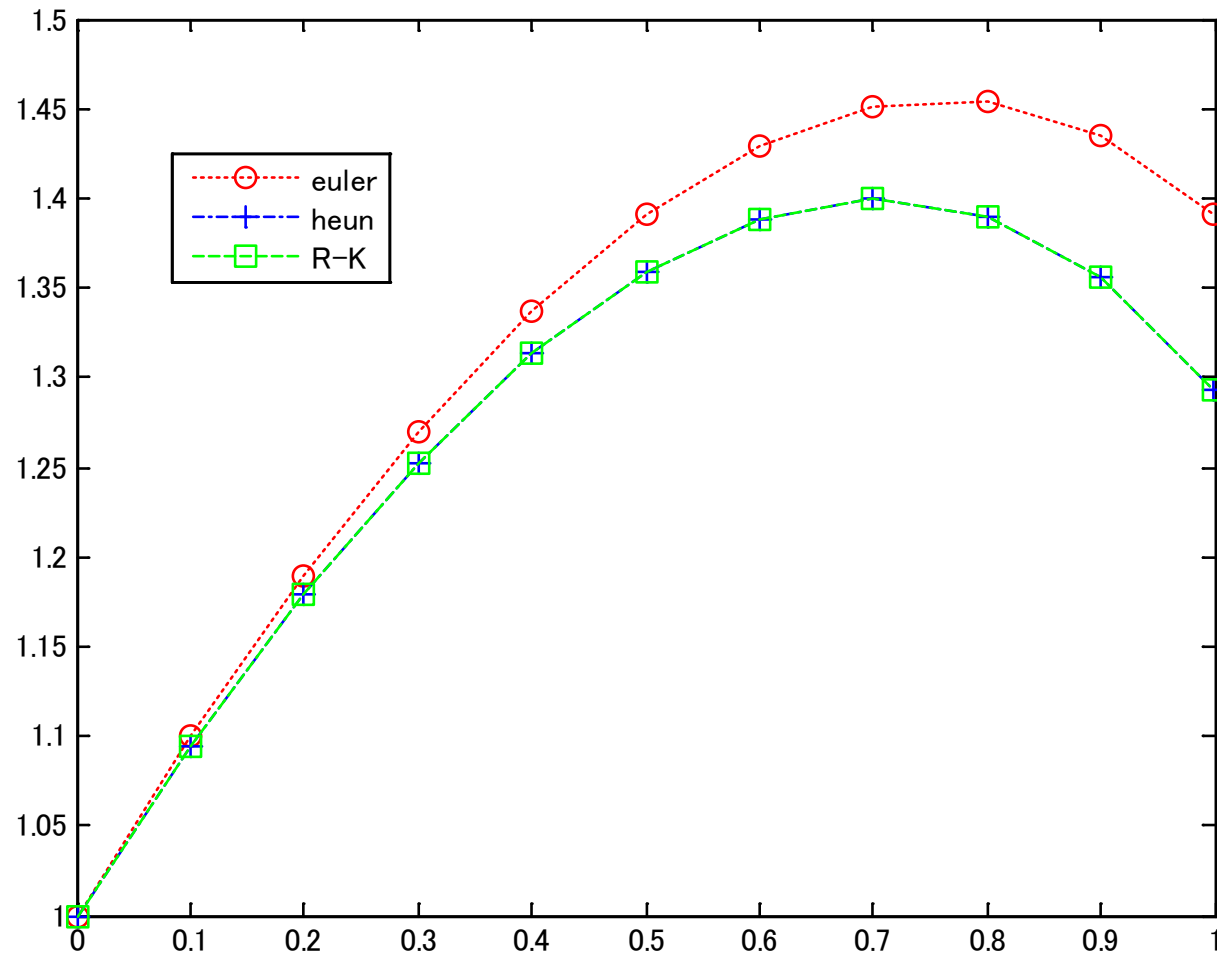
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - t^2 - \frac{t}{x(t)}, & 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Wir rechnen die Näherungswerte von $x = x(t)$ mit Euler-Verfahren, Heun-Verfahren und Runge – Kutta-Verfahren für $h = 0.1, 0.01, 0.001$

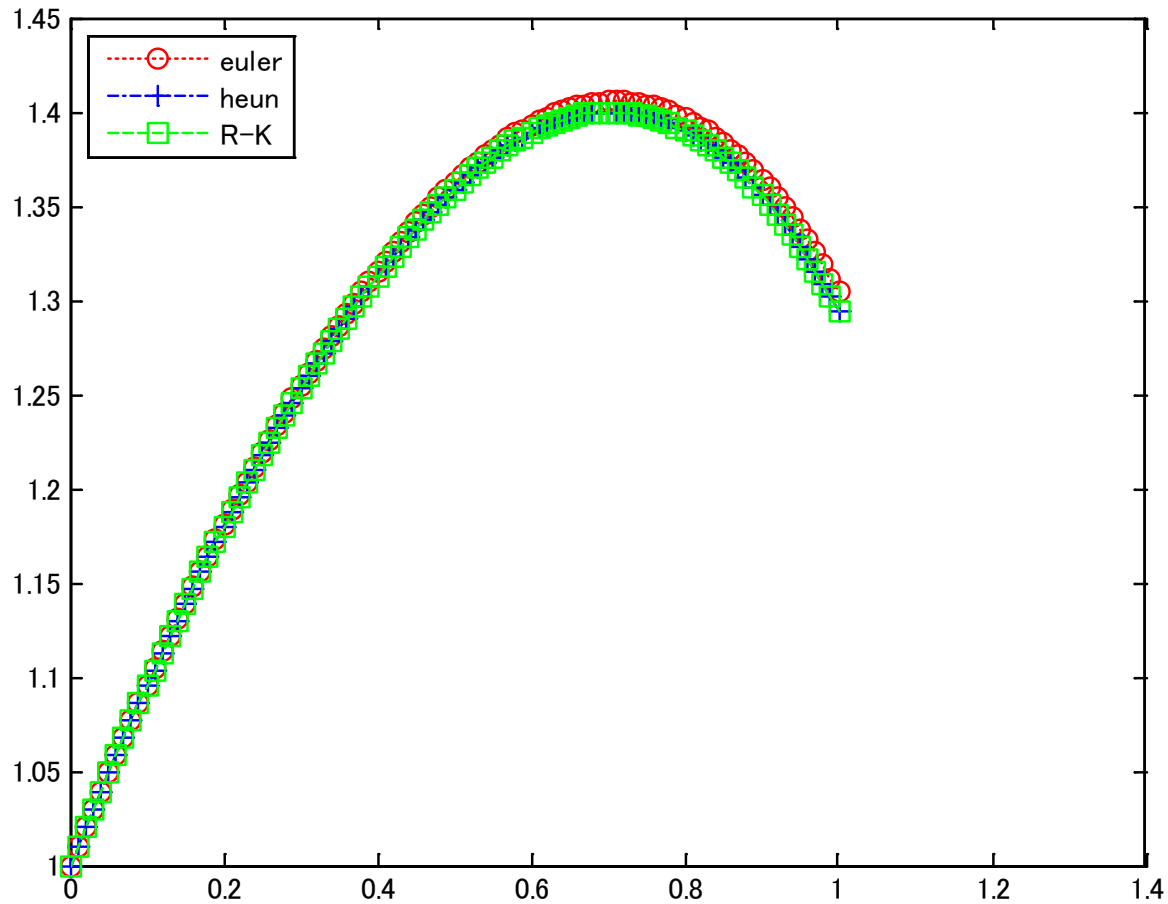
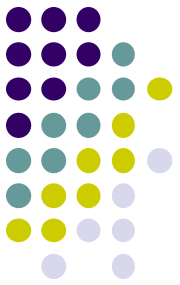
(Dieses Problem lässt sich nicht geschlossen lösen.)



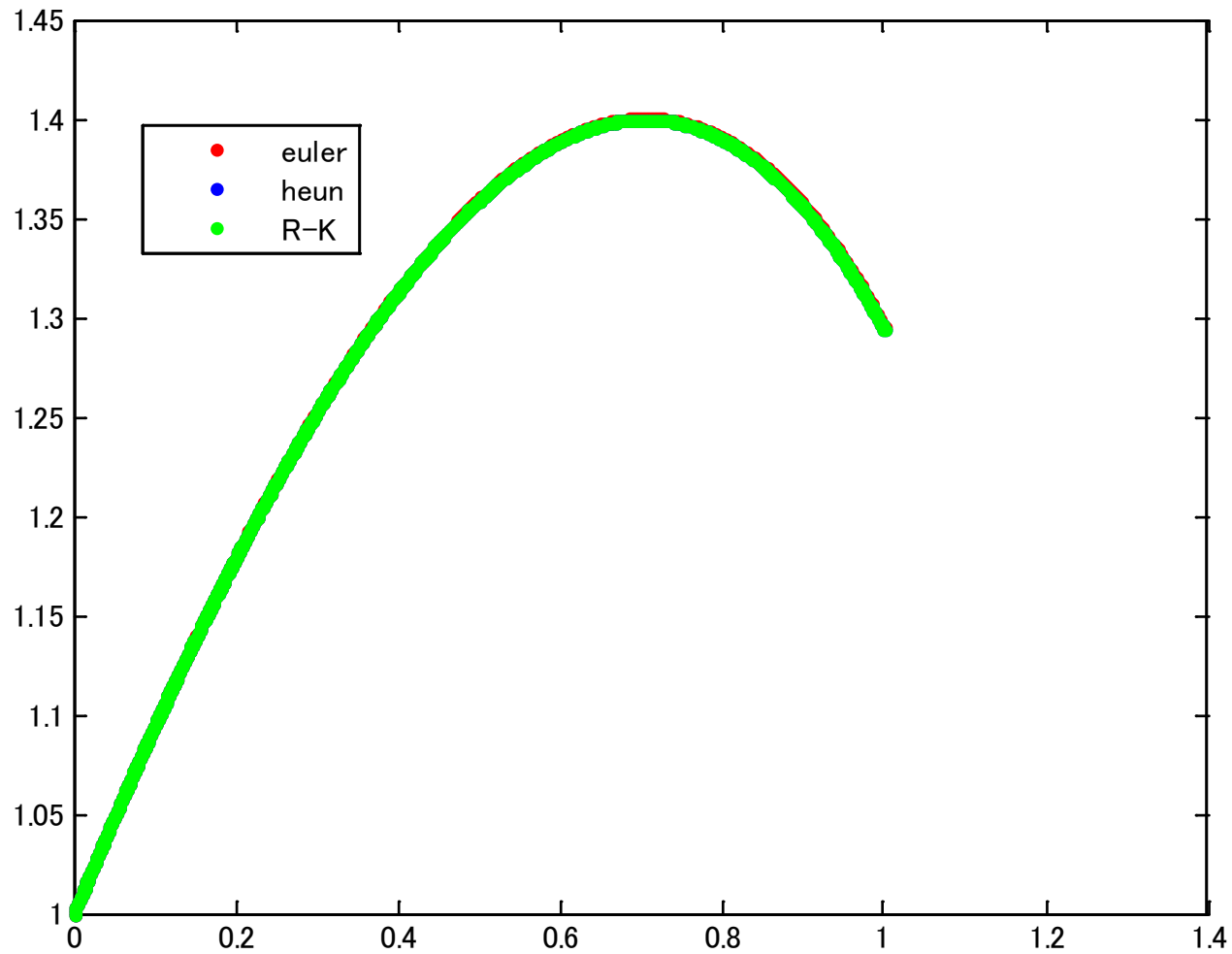
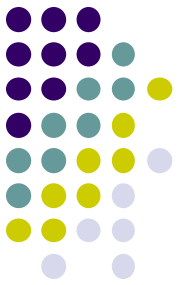
$h = 0.1$



$h = 0.01$



$h = 0.001$



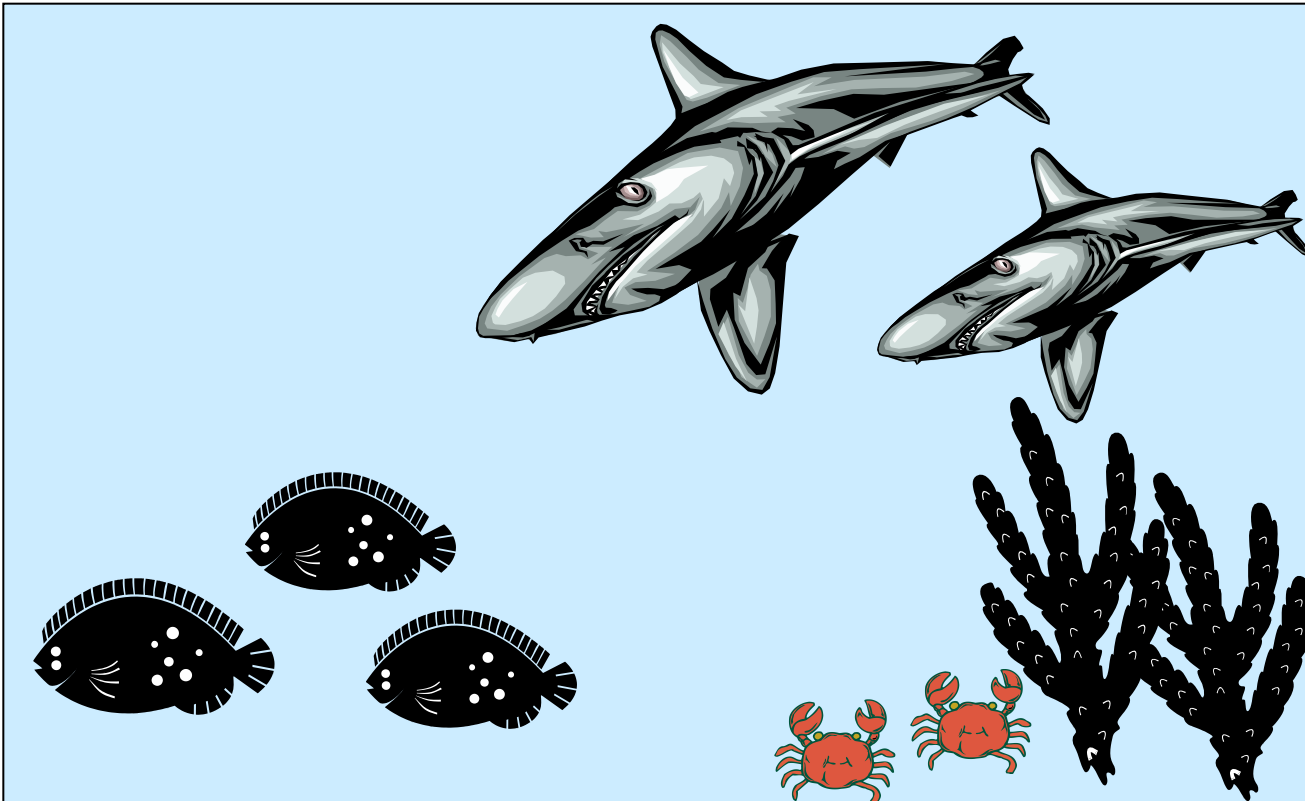
Anwendungsbeispiele

1) Lotka-Volterra-Model

Beute → Seezunge

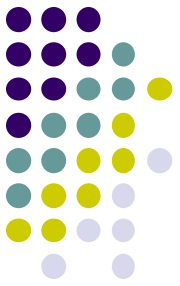
Räuber → Hai

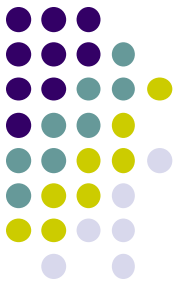
Wie die Anzahl der Seezungen und der Haie sich verändert?



Adriatisches Meer

Amerikanischer Mathematiker Lotka und Italienischer Mathematiker Volterra entwickelten ein mathematisches Modell für die Interaktion zwischen Seezungen und Hai.





$f(t)$: Anzahl der Seezunge (zeitabhängig)

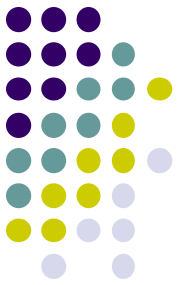
$g(t)$: Anzahl des Hai (zeitabhängig)

Voraussetzung

a: Reproduktionsrate der Seezunge ohne Störung und bei großem Nahrungsangebot	$f'(t) = af(t) \quad (a > 0)$
c: Sterberate des Haies, wenn keine Seezunge vorhanden ist	$g'(t) = -cg(t) \quad (c > 0)$
b: Fressrate des Haies pro Seezunge	$-bg(t) \quad (b > 0)$
d: Reproduktionsrate des Haies pro Seezunge	$df(t) \quad (d > 0)$

$$\begin{aligned}f'(t) &= af(t) - bf(t)g(t) \\g'(t) &= -cg(t) + df(t)g(t)\end{aligned}$$

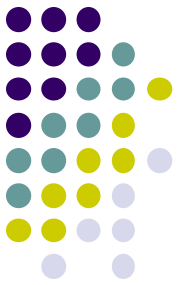
Lotka – Volterra Modell



Numerische Ergebnisse

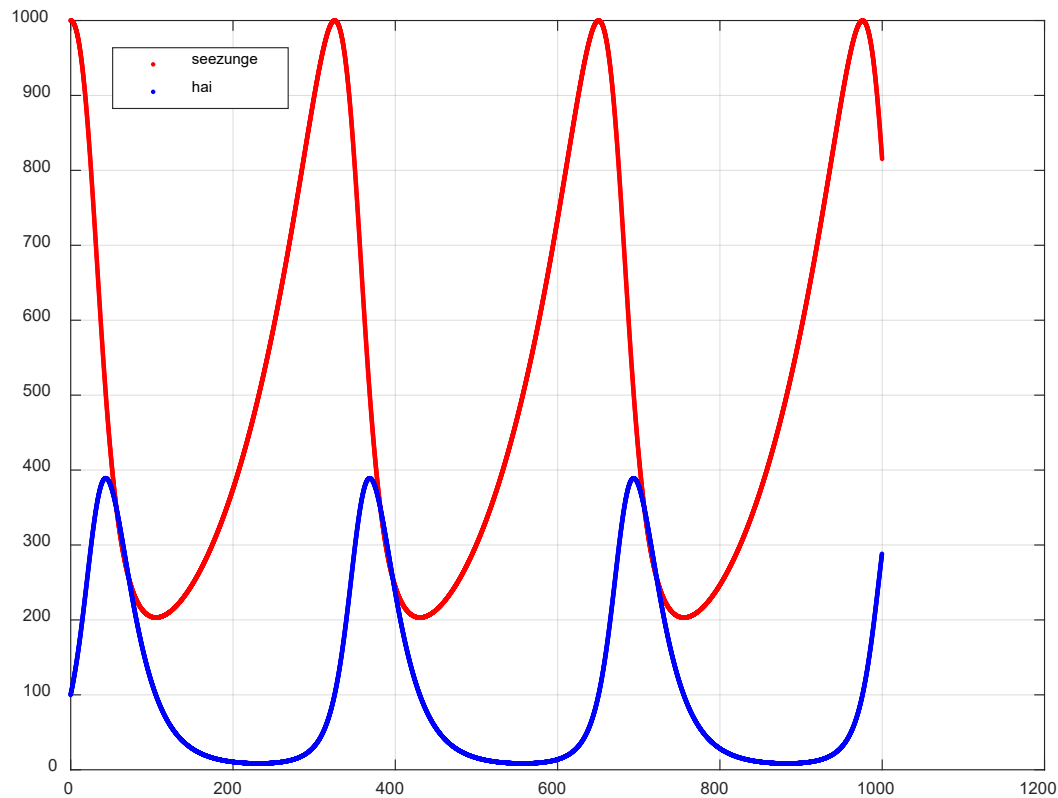
($a = 0.01$, $b = d = 0.0001$, $c=0.05$)

0.0000000000000000	1000.00000000000000	0.0000000000000000	100.00000000000000
0.1000000000000000	999.99749583335165	0.1000000000000000	100.50125124738071
0.2000000000000000	999.98996666717426	0.2000000000000000	101.00500995791107
0.3000000000000000	999.97738750383076	0.3000000000000000	101.51128353587602
0.4000000000000000	999.95973334948997	0.4000000000000000	102.02007931990096
0.5000000000000000	999.93697921606554	0.5000000000000000	102.53140458134952
0.6000000000000000	999.90910012318136	0.6000000000000000	103.04526652270535
0.7000000000000000	999.87607110016302	0.7000000000000000	103.56167227593808
0.8000000000000000	999.83786718805482	0.8000000000000000	104.08062890085351
0.9000000000000000	999.79446344166297	0.9000000000000000	104.60214338342793
1.0000000000000000	999.74583493162538	1.0000000000000000	105.12622263412673
1.1000000000000000	999.69195674650746	1.1000000000000000	105.65287348620735
1.2000000000000000	999.63280399492396	1.2000000000000000	106.18210269400652
1.3000000000000000	999.56835180768746	1.3000000000000000	106.71391693121188
1.4000000000000000	999.49857533998306	1.4000000000000000	107.24832278911822
1.5000000000000000	999.42344977356947	1.5000000000000000	107.78532677486804
1.6000000000000000	999.34295031900683	1.6000000000000000	108.32493530967690
1.7000000000000000	999.25705221791065	1.7000000000000000	108.86715472704331
1.8000000000000000	999.16573074523239	1.8000000000000000	109.41199127094350
1.9000000000000000	999.06896121156649	1.9000000000000000	109.95945109401094
2.0000000000000000	998.96671896548401	2.0000000000000000	110.50954025570091
⋮	⋮	⋮	⋮

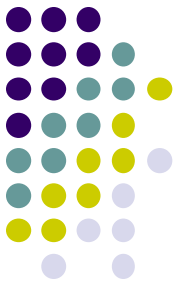


Lotka – Volterra Modell (Graphik 1)

Anfangswert: $x(0)=1000$, $y(0)=100$

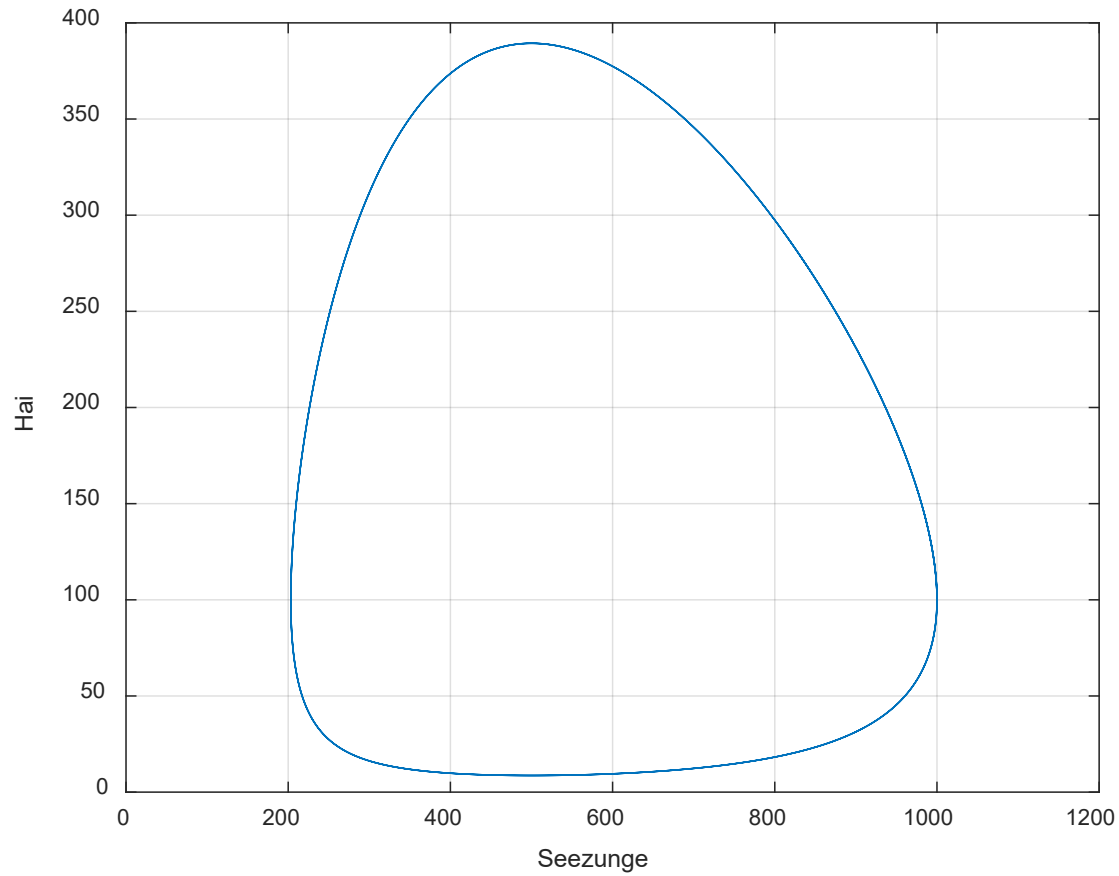


Zeit



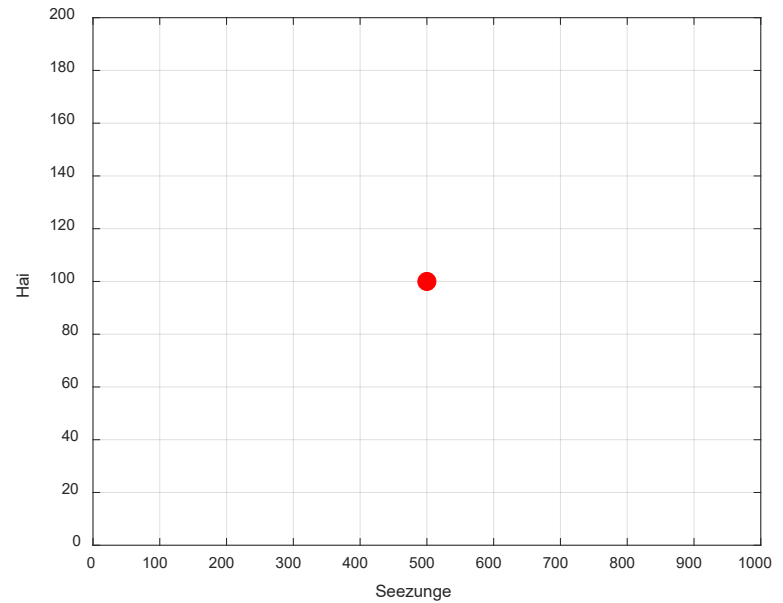
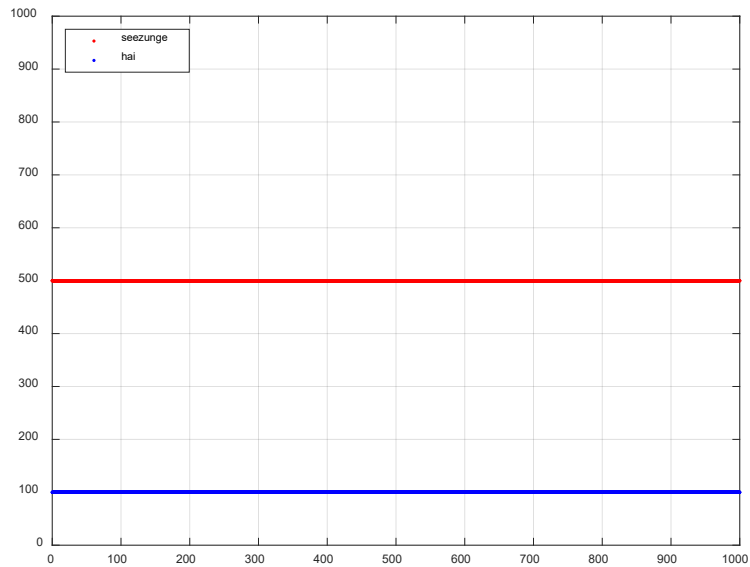
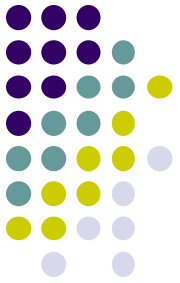
Lotka – Volterra Modell (Graphik 2)

Anfangswert: $x(0)=1000$, $y(0)=100$



Lotka – Volterra Modell

Anfangswert: $x(0)=500$, $y(0)=100$



$$(f(t), g(t)) = (0, 0), \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$$

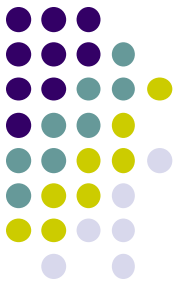
$$\Leftrightarrow af(t) - bf(t)g(t) = -cg(t) + df(t)g(t) = 0$$



$$f'(t) = af(t) - bf(t)g(t) = 0$$

$$g'(t) = -cg(t) + df(t)g(t) = 0$$

$$a = 0.01, b = d = 0.0001, c = 0.05 \Rightarrow \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right) = (500, 100)$$



2) Modellierung eines Ökosystems



Bezeichnet man die Menge Gras, die Zahl der Hasen und die Zahl der Füchse mit g , h bzw. f , so kann man folgendes Modell aufstellen.

$$g'(t) = 1 - h(t)g(t),$$

$$h'(t) = h(t)(g(t) - f(t)),$$

$$f'(t) = f(t)h(t) - c_1 f(t) - c_2 \sqrt{f(t)}, \quad c_1 > 0, c_2 > 0, c_1 + c_2 = \text{const.}$$

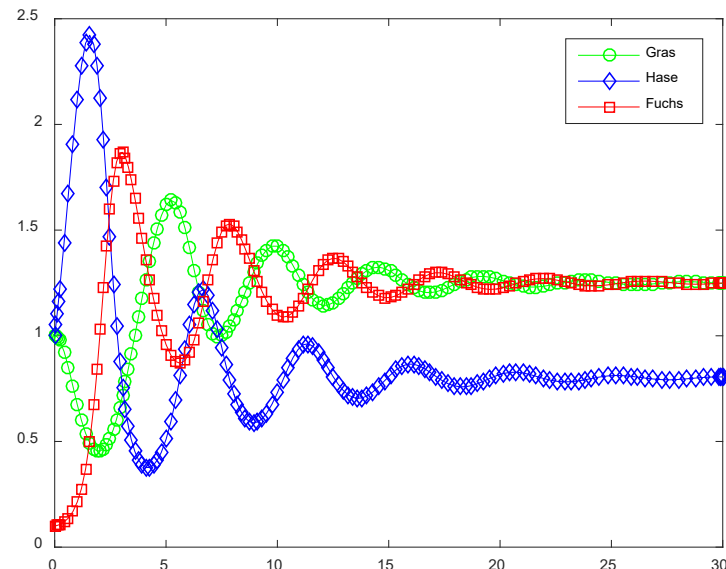
Mögliche Anfangsbedingungen sind $g(0) = h(0) = 1, f(0) = 0.1$.

Beispiele:

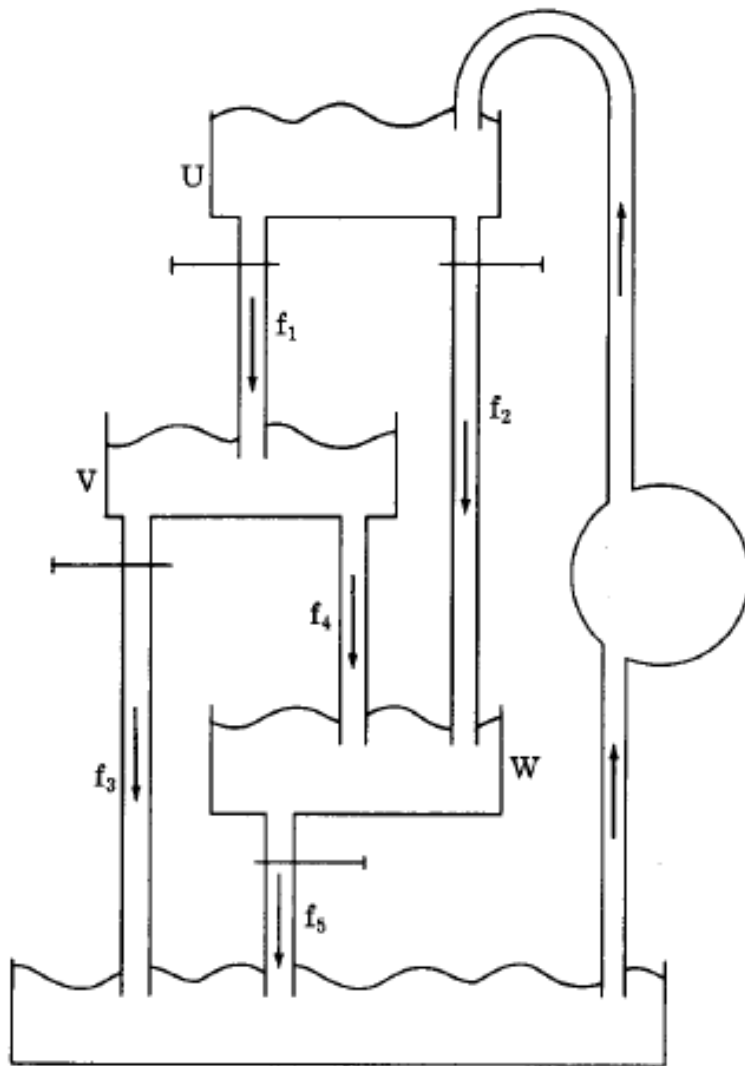
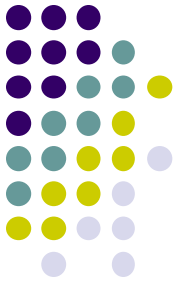
Parameter: $c_1 = 0.8, c_2 = 0$

oder

Parameter: $c_1 = 0.3, c_2 = 0.5$



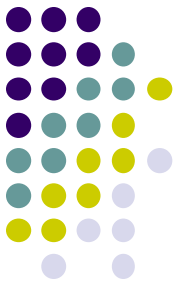
3) Wasserkreislauf



—| Ventil

Quelle: Technische Universität Bergakademie Freiberg

Physikalische Grundlagen



Evangelista Torricelli (1608-1647):

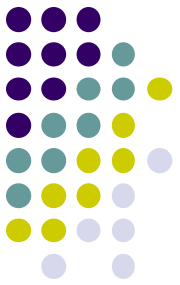
Abflussgeschwindigkeit $\sqrt{2gh}$, $g = 9.81$ (Gravitationsbeschleunigung),
 h = Höhe des Wasserspiegels.

Abflussrate als Funktion des im Behälter befindlichen Wasservolumens v
(falls es sich um einen Zylinder mit Grundfläche A handelt)

$$f(v) = a\sqrt{2gv / A} = c\sqrt{v} \quad \text{mit} \quad c := a\sqrt{2g / A}.$$

Der Parameter c kann über a variiert werden, wenn der Abfluss einen Hahn besitzt. Wir sprechen von einem **Steuerungsparameter**.

Mathematisches Modell



$U(t), V(t), W(t), R(t)$: Wassermengen zur Zeit t in den Behältern.

f_1, \dots, f_5 : Abflussfunktionen mit den Steuerungsparametern

c_1, \dots, c_5 .

$p = p(t)$: „Pumpenfunktion“

Änderungsraten der Wasservolumina: Zuflüsse weniger Abflüsse, d.h.

$$\begin{aligned}U'(t) &= p(t) - f_1(U(t)) - f_2(U(t)) \\V'(t) &= f_1(U(t)) - f_3(V(t)) - f_4(V(t)) \\W'(t) &= f_2(U(t)) + f_4(V(t)) - f_5(W(t)) \\R'(t) &= f_3(V(t)) + f_5(W(t)) - p(t).\end{aligned}$$

$$f_i(v) = c_i \sqrt{v}$$

Addiert man alle Gleichungen, so ergibt sich

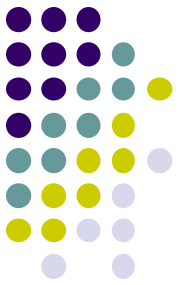
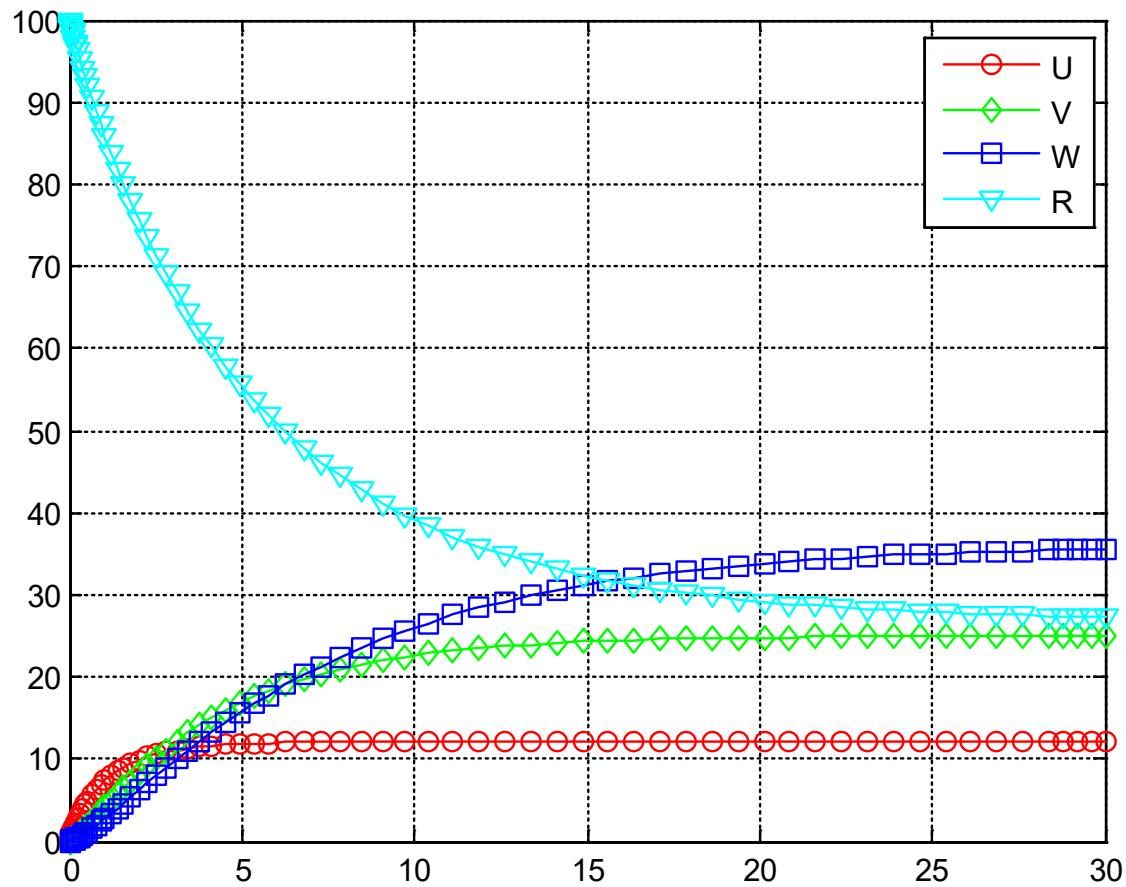
$$U'(t) + V'(t) + W'(t) + R'(t) = 0$$

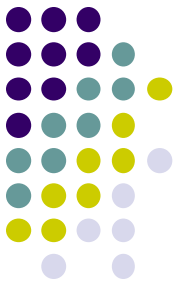
→ **Die Gesamtwassermenge verändert sich nicht.**

Beispiel:

$$U(0) = V(0) = W(0) = 0, R(0) = 100$$

$$c_1 = \sqrt{12}, c_2 = c_4 = \sqrt{2}, c_3 = 1, c_5 = 2, p \equiv 17$$





Aufgabe 9.1 Räuber-Beute Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1000$$

$$(a=0.01, b=d=0.0001, c=0.05)$$

Rechnen Sie die Näherungswerte von $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit Runge – Kutta-Verfahren unter folgenden Bedingungen.

$$h = 0.1$$

Anfangswerte:

- 1) $x(0)=y(0)=100$
- 2) $x(0)=500, y(0)=100$
- 3) $x(0)=700, y(0)=100$
- 4) $x(0)=1000, y(0)=100$