

STOHAŠTIČNI ABAKUS

LUKA HOUŠKA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku je podrobno predstavljen stohastični abakus, kako algoritem deluje, zakaj deluje in zakaj se ustavi. S pomočjo stohastičnega abakusa so analizirane igre "podajanja evra" na različnih grafih, kar razkrije naravno povezavo s Fibonaccijevimi števili.

PROBABILISTIC ABACUS

The article presents stochastic abacus in detail, how the algorithm works, why it works and why it stops. Using the stochastic abacus, pass-the-buck games are analyzed on various graphs, revealing a natural connection with the Fibonacci numbers.

1. Uvod

Igra podajanja evra se začne z n igralci postavljenimi kot vozlišča grafa. En igralec ima v roki evro. Igra se igra izmenično, kjer v vsakem koraku igralec naključno zmaga ali pa poda evro enemu od igralcev na sosednjih vozliščih. Če ima vozlišče trenutnega igralca stopnjo d je vsak od $d + 1$ izidov enako verjeten. Pri igri bomo uporabljali koncept chip firing, katerega je kot sredstvo za poučevanje verjetnosti osnovnošolcem razvil oče stohastičnega abakusa Arthur Engel. Osnovna ideja chip firinga je preprosta. Če imamo podan graf, si predstavljamo, da na vozlišča postavimo nekaj žetonov. Če je število žetonov na vozlišču v večje ali enako kot stopnja v , potem lahko "izstrelimo" v tako, da po vsaki povezavi, ki ima za eno od krajišč vozlišče v pošljemo en žeton do sosednjega vozlišča. Število žetonov v vozlišču v se po izstrelitvi zmanjša za stopnjo v , vsakemu od sosednjih vozlišč v pa se število žetonov poveča za ena. Koncept chip firing bomo implementirali na *usmerjene grafe*, kjer bo izstrelitev vozlišča v pomenila, da bo po vsaki izhodni povezavi iz v pošljemo en žeton. Natančneje, usmerjeni graf bo prehodni graf za absorbirajočo Markovsko verigo, ki ustreza igri podajanja evra. Naša naloga je, da natančno predstavimo Engelov originalni koncept, ki uporablja chip firing algoritem kot sredstvo za računanje verjetnosti in pričakovanih vrednosti. Naš prvi korak je spoznati Engelov algoritem.

2. Stohastični abakus

V začetku 1970-ih je Engel razvil svoj algoritem, ki ga je kasneje poimenoval stohastični abakus, saj premikanje žetonov po povezavah v grafu za namen računanja spominja na tradicionalni abakus.

Predpostavimo, da imamo tako časovno diskretno, absorbirajočo Markovsko verigo s končnim številom stanj, da so vse prehodne verjetnosti racionalne. Predstavimo jo z usmerjenim grafom, kjer so stanja vozlišča in usmerjena povezava med vozliščema u in v obstaja natanko tedaj, ko je verjetnost direktnega prehoda iz u v v pozitivna. Natančneje, če je q najmanjši skupni imenovalec vseh prehodnih verjetnosti iz stanja u in je verjetnost prehoda iz u v v enaka p/q , potem postavimo p usmerjenih povezav iz u v v . Če to naredimo za vse sosedje u , je izhodna stopnja u enaka q . Zato se prehodne verjetnosti lahko razberejo iz usmerjenega grafa brez uporabe uteži na povezavah. Uporabljali bomo izraza *notranja vozlišča* za minljiva stanja in *končna vozlišča* za absorbirajoča stanja.

Ideja algortima je, da začnemo s praznimi vozlišči in dodajamo žetone na začetno stanje, ki ga bomo poimenovali začetno vozlišče. Ko je v začetnem vozlišču dovolj žetonov, ga izstrelimo tako,

da po povezavah do sosednjih vozlišč pošljemo žetone v razmerju, ki odražajo prehodne verjetnosti. Ponavljamo postopek dodajanja žetonov v začetno vozlišče in izstreljevanja dokler nima vsak od sosedov dovolj žetonov, da izstrelimo te itn. Predstavljajmo si, da ponavljamo postopek dodajanja žetonov in izstrelitev vozlišč in da je na neki točki število žetonov na notranjih vozliščih enako začetnemu. Engel je utemeljil, da je v tem trenutku število žetonov v končnih vozliščih proporcionalno njenim verjetnostim, saj premikanje žetonov po grafu upošteva prehodne verjetnosti. Če smo bolj natančni: če ima končno vozlišče k žetonov in je število vseh dodanih žetonov v začetno vozlišče c , potem je verjetnost, da pridemo v to absorbirajoče stanje iz začetnega stanja enaka k/c . Ker smo ustvarili periodičen proces; če dodajamo žetone v začetno vozlišče in ponovimo celoten postopek, bo končna razporeditev žetonov v končnih vozliščih enaka, saj more po zakonu o velikih številih biti v razmerju z verjetnostmi. Ker pa je proces periodičen je ena iteracija dovolj, da odkrijemo pravilna razmerja žetonov v končnih vozliščih.

S tem algoritmom sta dva potencialna problema in Engel je uspel razrešiti oba. Prvič, ni težko pokazati, da je vrstni red izstrelitev vozlišč nepomemben. To pomeni, da je sproščanje sistema, izstrelitev vseh primernih vozlišč, dobro definirano. Drugič, treba je ugotoviti kako prvotno postaviti žetone na notranjih vozliščih, da imamo zagotovljeno, da se bo sistem vrnil v to razporeditev. Izkaže se, da če na začetku vsako notranje vozlišče "kritično naložimo", tj. ima en žeton manj kot ima izhodnih povezav, dosežemo, da se bodo notranja vozlišča vrnila v "kritično naloženo" stanje po končnem številu dodanih žetonov v začetno vozlišče. Podajmo še dokaz.

Dokaz: Zapišimo prehodne verjetnosti kot $p_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_i}$, $r_{ij}, r_i \in \mathbb{N}$. Potezo, kjer iz vozlišča i izstrelimo r_{ij} žetonov v vozlišče j za vsak j , bomo poimenovali poteza *tipa 1*. Potezo, kjer vozlišču u dodamo žeton bomo poimenovali poteza *tipa 2*. Izberimo še neko minljivo stanje u , ki bo naše začetno vozlišče. Začnimo z neko začetno porazdelitvijo žetonov, ki je manjša ali enaka kot kritična. Nadaljujemo z algoritmom dokler se neka porazdelitev b_1, b_2, \dots, b_r ne ponovi. Takšna porazdelitev zagotovo obstaja, saj imamo lahko le končno mnogo različnih porazdelitev. Vzemimo to porazdelitev b_1, b_2, \dots, b_r za začetno. Lahko predpostavimo, da je $b_i < r_i$ za $i \neq u$ in $b_u = r_u$. Izberimo za to porazdelitev zelene žetone. Nato dodajmo rdeče žetone, da razporeditev dopolnimo do kritične. Nato nadaljujemo z enakim zaporedjem potez, vendar uporabljamo samo zelene žetone. Ko se bo naša začetna porazdelitev ponovila, bomo spet imeli kritično razporeditev, saj se rdečih žetonov nismo dotaknili. Poimenujmo ta modificiran postopek *metoda A*. Poimenovali smo ga modificiran, saj nismo upoštevali Engelovih pravil o začetni porazdelitvi žetonov. Predpostavimo, da smo v metodi A v vozlišče u dodali m žetonov. Poglejmo zdaj še drugo metodo, ki jo bomo poimenovali *metoda B*. V metodi B bomo začeli s kritično porazdelitvijo žetonov in izvajali algoritem dokler ne dodamo m žetonov in ne moremo narediti več nobene poteze prvega tipa. Pokazali bomo, da obe metodi pripeljeta do enake končne razporeditve. Ker vemo, da je končna razporeditev v metodi A kritična, bo enako veljalo tudi za metodo B.

Naj bo e_1, e_2, \dots, e_n zaporedje potez, ki smo jih naredili v metodi A in naj bo f_1, f_2, \dots, f_v zaporedje potez v metodi B. Potezi e_1 in f_1 sta enaki, saj v obeh primerih izstrelimo r_u žetonov iz vozlišča u . Z indukcijo bomo dokazali, da se vse poteze $e_i, i \in [n]$ pojavijo nekje v zaporedju $\{f_j\}_{j \in [v]}$. Predpostavimo, da smo za poteze e_1, e_2, \dots, e_k našli enake poteze $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}$. Poglejmo potezo e_{k+1} . Če je to poteza tipa 2, mora obstajati enaka poteza $f_{i_{k+1}}$, saj v obeh metodah naredimo m takšnih potez. Predpostavimo sedaj, da je e_{k+1} poteza tipa 1, recimo, da izstrelimo r_t žetonov iz vozlišča t . Če obstaja taka poteza $f_{i_{k+1}}$, ki se pojavi poleg $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}$ in preden se vse te izvedejo, potem lahko to potezo izberemo kot ujemajočo se s e_{k+1} . Predpostavimo sedaj, da take poteze ni. Poteza e_{k+1} je bila omogočena z zaporedjem potez e_1, e_2, \dots, e_k . Torej more biti omogočena tudi z zaporedjem potez $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}$. Druge poteze, ki bi se lahko zgodile medtem ko se izvajajo te poteze, lahko kvečjemu povišajo število žetonov v stanju t . Zato ponovno, imamo

potezo, ki jo lahko enačimo z e_{k+1} in indukcijski korak je dokazan. Analogno dokažemo, da so vsi $f_j, j \in [v]$ vsebovani v $\{e_i\}_{i \in [n]}$. Zato sta ti dve množici potez enaki, kar implicira, da metodi A in B vodita do enake končne porazdelitve, kar smo hoteli dokazati. ■