



**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET**

Luka Martinović

**PREDLOG DISTRIBUIRANOG ALGORITMA
ZA UPRAVLJANJE UMREŽENIM
MULTIAGENTNIM SISTEMIMA**

-MAGISTARSKI RAD-

Podgorica, 2021.

INFORMACIJE O MAGISTRANTU

Ime i prezime: Luka Martinović

Datum i mjesto rođenja: 11.11.1996. Bar, Crna Gora.

Naziv završenog osnovnog studijskog programa i godina diplomiranja: Energetika i automatika, 2018.

Naziv završenog specijalističkog studijskog programa i godina diplomiranja: Energetika i automatika – Automatika, 2019.

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RADU

Naziv postdiplomskog magistarskog studijskog programa: Automatika

Naslov rada: Predlog distribuiranog algoritma za upravljanje umreženim multiagentnim sistemima

Fakultet: Elektrotehnički fakultet, Univerzitet Crne Gore

OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave magistarskog rada: 01.07.2020.

Datum sjednice Vijeća Univerzitetske jedinice na kojoj je prihvaćena tema: 24.09.2020.

Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranta: Prof. dr Božo Krstajić
Prof. dr Milovan Radulović
Doc. dr Žarko Zečević

Mentor: Doc. dr Žarko Zečević

Komisija za ocjenu rada: Prof. dr Božo Krstajić
Prof. dr Milovan Radulović
Doc. dr Žarko Zečević

Komisija za odbranu rada:

Datum odbrane:

Sažetak

Predmet istraživanja ovog rada je upravljanje multiagentnim umreženim sistemima bez prisustva centralnog koordinatora ili globalne komunikacije. Ovakav način upravljanja zahtijeva razvijanje distribuiranih tehnika, u kojima svaki agent ima na raspolaganju samo lokalne informacije. Najčešće su to informacije o relativnim stanjima u odnosu na susjedne agente, a nekad to mogu biti i informacije o sopstvenim stanjima. Konkretno, biće korišćena metodologija lider-pratilac (eng. „leader-follower“) u kojoj se agenti dijele u dvije kategorije. Prvoj kategoriji pripadaju lideri – agenti koji imaju informaciju stanju autonomnog egzogenog sistema. Drugu kategoriju čine pratioci – agenti koji posredstvom međusobnih interakcija treba da prate trajektorije koje generiše egzosistem. Upravo interakcija agenata unutar ovih kategorija, kao i između samih kategorija predstavlja podlogu za razvijanje raznih algoritama za upravljanje stanjima ovih agenata, a samim tim i sistemom kao cjelinom.

U radu je najprije razmotrena mreža agenata čija se dinamika modeluje jednostrukim integratorom. Pokazano je da se problem praćenja referentnih trajektorija može riješiti pomoću distribuiranog upravljačkog algoritma koji pored relativnih mjerenja koristi i informacije o sopstvenim stanjima agenata. U slučaju kada apsolutna stanja agenata nisu dostupna, predloženo je korišćenje lokalnog opservera kojim se, na osnovu relativnih mjerenja, vrši estimacija nepoznatih stanja. Izvedena su jednostavna pravila za određivanje parametara kontrolera i opservera, na takav način da stabilnost kolektivnog umreženog sistema bude zagarantovana. Pored mreže jednostrukih integratora, u radu je razmotrena i mreža linearnih sistema višeg reda. Naime, predložen je upravljački zakon koji rješava problem praćenja referentnih trajektorija i izvedeni su potrebni uslovi za stabilnost.

Za razliku od postojećih algoritama, predložena rješenja ne zahtijevaju postojanje komunikacije među liderima, pa je samim tim moguće postići idealno praćenje referentnih trajektorija u stacionarnom stanju. Pored toga, pokazano je da važi princip separabilnosti, što omogućava da se kontroler i opserver dizajniraju nezavisno jedan od drugog. Efektivnost predloženih algoritama, kao i rezultati teorijskih razmatranja, potvrđeni su kroz brojne numeričke eksperimente.

Ključne riječi: Kooperativno upravljanje – Regulacija izlaza - Multiagentni sistemi – Distribuirana koordinacija

Abstract

In this thesis, the cooperative tracking control of multiagent systems is investigated. This is done without the central coordinator or the need for global communication. This approach leads to the development of distributed algorithms in which each agent possesses only local information, i.e. relative state measurements and sometimes the measurement of its own state. Namely, the leader-follower methodology will be used, in which the networked agents are partitioned into two groups, leaders and followers. Only the former have access to the state of an autonomous exogenous system and their role is to inject the control inputs into the network such that the followers track the predefined setpoint trajectories. The followers are controlled through local interaction rules based on the relative measurements from their neighbors. The interaction among the agents in each group, as well as between the two groups represents the conceptual framework for the development of advanced algorithms for controlling the states of these agents, thus controlling the system as a whole.

We will primarily be concerned with the networked multiagent systems in which each agent is modeled by the single-integrator dynamics. It is shown that the cooperative tracking control problem can be solved by the proposed distributed control law which incorporates relative state measurements as well as its own measurements. Furthermore, we extend the algorithm to the case when the absolute state measurements are not available. Instead, the unknown states are estimated by the means of local observer. Simple rules are provided for determining the controller and observer parameters which guarantee that the closed-loop system poles lie in the specified region. Furthermore, we extend the solution to the case in which the agents are described by the same, general linear, time-invariant state-space models. Sufficient conditions that guarantee the convergence of the tracking error to zero have been derived.

Contrary to the existing solutions, the proposed algorithm does not require communication among the leaders. Therefore, it is possible to achieve ideal tracking of the reference trajectories in steady state. Furthermore, it is shown that the separation principle holds, which enables the design of controller and observer to be carried out independently. The effectiveness of the proposed approach is verified through numerical examples.

Keywords: Cooperative control – Output regulation - Multiagent systems – Distributed coordination

Sadržaj

Rezime	ii
Abstract	ii
Spisak slika	1
Uvod	3
1 Umreženi sistemi	4
1.1 Uvod	4
1.2 Multiagentni sistemi	4
1.2.1 Boids model	5
1.2.2 Formacija sistema letilica	6
1.2.3 Senzorske mreže	7
1.2.4 Biološke mreže	7
1.2.5 Socijalne mreže	8
1.2.6 Energetske mreže	8
1.2.7 Zajedničke osobine u raznim primjenama	9
1.3 Razmjena informacija putem lokalnih interakcija	9
1.3.1 Lokalna komunikacija	9
1.3.2 Lokalni senzori	10
1.4 Interakcioni modeli zasnovani na grafovima	11
1.4.1 Statičke, dinamičke i slučajne mreže	11
1.5 Osnovni zadaci u mrežama	12
1.6 Teorija grafova	13
1.6.1 Grafovi	13
1.6.2 Neke standardne klase grafova	15
1.6.3 Podgrafovi	15
1.6.4 Težinski grafovi	15
1.7 Grafovi i matrice	16
1.7.1 Matrica susjedstva i stepen čvora	16
1.7.2 Matrica Laplasijana grafa	17
1.8 Algebarska i spektralna teorija grafova	17
2 Problem konsenzusa u multiagentnim sistemima	19
2.1 Statički konsenzus	19
2.1.1 Konsenzus u neusmjerenim grafovima	21
2.2 Konsenzus u mrežama sa ulazima i izlazima	23

2.2.1	Postavka problema	24
2.2.2	Particija mreže	24
2.2.3	Značenje konsenzusa u particionisanim mrežama	25
2.2.4	Kontrolabilnost i opservabilnost mreža sa ulazima i izlazima	25
2.2.5	Postizanje konsenzusa u mrežama sa ulazima i izlazima	27
2.2.6	Kvazi-statički ekvilibrijum sistema	31
2.3	Optimalno upravljanje	32
3	Kooperativna regulacija izlaza u multiagentnim sistemima	36
3.1	Osnovni pojmovi	37
3.1.1	Model egzosistema	37
3.1.2	Regulatorske jednačine	38
3.2	Kooperativno praćenje trajektorija u multiagentnim sistemima	40
3.2.1	Centralizovano rješenje problema praćenja referentnih trajektorija u multiagentnim sistemima	42
3.2.2	Decentralizovano rješenje problema praćenja referentnih trajektorija u multiagentnim sistemima	43
4	Predlog distribuiranog algoritma za kooperativno upravljanje multiagentnim sistemima	47
4.1	Kooperativno upravljanje mrežom agenata modelovanih jednostrukim integratorom	48
4.1.1	Postavka problema	48
4.1.2	Glavni rezultati	49
4.2	Kooperativno upravljanje mrežom agenata modelovanih opštom linearnom dinamikom	54
4.2.1	Postavka i rješenje problema	55
5	Rezultati simulacija	58
5.1	Kooperativno upravljanje mrežom jednostrukih integratora	58
5.2	Kooperativno upravljanje mrežom sistema višeg reda	64
	Zaključak	69
	Bibliografija	70
	Prilog	76

Spisak slika

1.1	Evolucija Rejnoldsovog boids modela.	5
1.2	Održavanje formacije pri izbjegavanju prepreke.	7
1.3	Razni tipovi senzora.	10
1.4	Mreža agenata opremljenih omnidirekcionim sensorima rastojanja može biti posmatrana kao graf, gdje čvorovi odgovaraju agentima, a grane odgovaraju interakcijama.	11
1.5	Neusmjereni graf sa 5 čvorova i 5 grana.	14
2.1	Konsenzus protokol na kvadratnoj mreži	20
2.2	Električno kolo: mreža kondenzatora i otpornika	20
2.3	Dva primjera razapinjućih stabala od osam čvorova.	22
2.4	Evolucija stanja agenata pri rješavanju randevu problema.	23
2.5	Dinamika srednje kvadratne greške svih agenata.	23
2.6	Mreža u kojoj su lideri prikazani crvenom, a pratiloci plavom bojom. Na prvoj slici je prikazan originalni graf \mathcal{G} , prije particije; na drugoj slici je prikazan graf \mathcal{G}_F dobijen particijom grafa \mathcal{G} . Isprekidane linije zapravo određuju vrijednosti matrice B_F u (2.9).	24
2.7	Mreža sa ulazima i izlazima.	28
5.1	Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata.	59
5.2	MSTE (puna linija) i MSOE (isprekidana linija) za $N = 8$ agenata.	60
5.3	MSTE (puna linija) i MSOE (isprekidana linija) u stacionarnom stanju za $N = 8$ agenata.	60
5.4	Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata za $t \geq 2s$	61
5.5	Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata za $t > 2s$	61
5.6	Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata za $t > 2s$	62
5.7	Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 9$ agenata.	62
5.8	Trajektorije pratilaca u trodimenzionalnom prostoru stanja (isprekidane linije – tranzijent, pune linije – stacionarno stanje).	63
5.9	Upravljački signali lidera u trodimenzionalnom prostoru stanja.	63
5.10	MSTE (puna linija) i MSOE (isprekidana linija) u stacionarnom stanju za $N = 9$ agenata.	64
5.11	Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 9$ agenata	65
5.12	Izlazni signal pratilaca.	65
5.13	Greške u praćenju referentnih trajektorija.	66
5.14	Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 9$ agenata za $t \geq 7s$	66
5.15	Izlazni signal pratilaca.	67
5.16	Greška u praćenju referentnih trajektorija.	67

Uvod

Posljednjih godina se sve više pažnje posvećuje multiagentnim sistemima, prije svega zbog njihove raznovrsne praktične primjene. Primjeri multiagentnih sistema od posebnog značaja su multirobotski sistemi, sistemi bespilotnih letilica, elektroenergetski sistemi i vozila [1–4]. Pojam agenta predstavlja apstrakciju stvarnih uređaja koji mogu biti roboti, dronovi ili senzori, pri čemu se njihova dinamika modeluje diferencijalnim jednačinama. Za kooperativno postizanje zajedničkog cilja neophodno je da postoji komunikacija među agentima. Stoga se multiagentni umreženi sistemi matematički modeluju grafom, pri čemu su agenti predstavljeni čvorovima, a komunikacioni veze granama [5, 6].

Kod upravljanja multiagentnim sistemima centralnu ulogu ima problem postizanja konsenzusa. Pojam postizanja konsenzusa podrazumijeva da je potrebno da agenti postignu saglasnost oko neke veličine od interesa, pri čemu se najčešće zahtijeva usaglašavanje oko srednje vrijednosti te veličine. Distribuirani algoritam kojim se postiže srednji (statički) konsenzus u mreži agenata sa fiksnom topologijom je prezentovan u [7]. Generalizacija ovog algoritma na vremenski-promjenljive grafove u kojima postoje komunikaciona kašnjenja data je u [8], dok je u [9] izvršena optimizacija težinskih koeficijenata grana grafa u cilju povećanja brzine konvergencije algoritma. Algoritmi za dinamički konsenzus koji se koriste za usaglašavanje agenata oko vremenski promjenljivih signala opisani su u [10, 11].

Glavni cilj upravljanja multiagentnim sistemima je postizanje određene vrste kolektivnog ponašanja, kao što su sinhronizacija [12], grupisanje [13] ili održavanje željenih formacija [14], i to bez učešća centralnog koordinatora. Željeno kolektivno ponašanje bez učešća centralnog koordinatora se postiže tako što svaki agent implementira lokalni upravljački zakon koji se formira na osnovu informacija o samom agentu i informacija dobijenih od susjednih agenata. Naravno, stabilnost kolektiva je od presudnog značaja, a metod koji se obično koristi za analizu stabilnosti je opisan u [15]. Sinhronizacija izlaza agenata je često razmatran problem u literaturi pod kojim se podrazumijeva da svi agenti prate jednu istu, vremenski-promjenljivu referentnu trajektoriju. Rješenje problema sinhronizacije za mrežu identičnih agenata je dato u [16], dok je mreža heterogenih agenata razmatrana u [17]. Problem koordinisane regulacije izlaza agenata je nešto složeniji problem, čijim rješavanjem se postiže da agenti prate unaprijed definisane, različite trajektorije koje zadovoljavaju neke uslove [18].

Dominantno korišćena metodologija za koordinisanu regulaciju izlaza agenata u multiagentnim sistemima naziva se lider-pratilac (eng. „leader-follower”) [1]. U ovoj metodologiji makar jedan agent ima ulogu lidera, dok se ostali agenti nazivaju

pratiocima. Zadatak lidera je da generiše signal koji će se putem mreže distribuirati do pratilaca. Na koji način će pratioci iskoristiti primljene informacije, zavisi od samog algoritma kojim se rješava problem koordinisane regulacije.

Algoritam za koordinisanu regulaciju multiagentnih sistema sa jednim liderom je predložen u radu [19]. Lider ima pristup autonomnom egzosistemu i njegov zadatak je da proslijedi stanja egzosistema pratiocima sa kojima je povezan. Svaki pratilac sadrži dinamički kompenzator, koji u suštini predstavlja distribuirani opserver stanja koji se takođe temelji na algoritmima za konsenzus. Koristeći stanje kompenzatora, svaki pratilac generiše sopstveni upravljački signal na takav način da prati željenu linearnu kombinaciju stanja egzosistema. U ovom radu razmatrana je opštija problematika — komunikaciona topologija je modelovana usmjerenim grafom, što čini analizu algoritama složenijom. Još opštiji problem je razmatran u radu [20] u kojem agenti nemaju potpunu informaciju o sopstvenom stanju, već na osnovu mjerenja, koristeći Luenbergerov opserver, estimiraju sopstveno stanje.

U radu [21] je prezentovan decentralizovani kontroler za multiagentne sisteme sa više lidera, kod kojeg lideri generišu upravljačke signale tako da se obezbijedi kretanje pratilaca po zadatim trajektorijama. To se postiže tako što se dinamika pratilaca modeluje u prostoru stanja, a zatim se upravljački signali lidera određuju rješavanjem klasičnih regulatorskih jednačina [22, 23]. Međutim, neophodno je da lideri posjeduju informaciju o stanjima svih pratilaca kako bi generisali odgovarajući upravljački signal, što je nerealan zahtjev. Ovo ograničenje se prevazilazi implementacijom standardnog Luenbergerovog opservera stanja, pomoću kojeg lideri na osnovu informacija dobijenih od susjednih pratilaca estimiraju stanje cijele mreže [21]. Pomenuti opserver stanja se može jednostavno decentralizovati ukoliko je uspostavljena direktna komunikacija među liderima. Međutim, ako direktna komunikacija nije dostupna, tada se informacije neophodne za decentralizaciju distribuiraju kroz mrežu lidera primjenom dinamičkog algoritma za konsenzus [24]. Zbog korišćenja dinamičkog konsenzus protokola, kod ovog pristupa se javlja greška u praćenju referentnih trajektorija koja postaje veća za trajektorije koje se brže mijenjaju.

U ovom radu je predložen distribuirani algoritam za kooperativnu regulaciju izlaza umreženog multiagentnog sistema sa više lidera. Najprije je razmotren problem upravljanja mrežom jednostrukih integratora. Naime, predložen je algoritam za opšti slučaj kada agenti nisu u mogućnosti da mjere sopstveno apsolutno stanje već posredstvom lokalnog opservera i komunikacije sa susjednim agentima vrše estimaciju sopstvenog stanja. Stabilizacijom svakog agenta zasebno, garantovana je i stabilnost kolektivnog sistema, čime je eliminisana potreba za dizajnom decentralizovanog opservera u mreži lidera. Uloga lidera se svodi na prosljeđivanje informacija o referentnim trajektorijama mreži pratilaca. Izvedeni su uslovi za odabir parametara regulatora i opservera tako da greška u praćenju referentnih trajektorija konvergira ka nuli. Predloženi algoritam je generalizovan na umrežene sisteme kod kojih se agenti opisuju istim, opštim, linearnim vremenski-invarijantnim modelom u prostoru stanja. Prilikom dizajna ovog algoritma smatrano je da svaki agent ima pristup apsolutnim mjerenjima sopstvenog izlaza i relativnim mjerenjima u odnosu na susjedne agenate. Pokazano je da će greška u praćenju referentnih trajektorija da konvergira ka nuli ukoliko se prethodno zadovolje uslovi koji su izvedeni.

Magistarski rad se sastoji od uvoda, pet poglavlja, zaključka, liste referenci i

priloga. Prva glava sadrži informacije o raznim vrstama umreženih sistema, njihovim karakteristikama i međusobnim sličnostima. Izvršeno je modelovanje mreža matematičkim konstrukcijama – grafovima i uvedeni su osnovni pojmovi iz (algebarske) teorije grafova. U drugoj glavi je razmotren problem postizanja konsenzusa u umreženim sistemima. Prezentovan je najčešće upotrebljavani algoritam za postizanje konsenzusa i analizirane su njegove karakteristike, prije svega u zavisnosti od topologije mreže. Nakon toga je izvršena analiza konsenzus protokola u slučaju kada neki čvorovi injektiraju egzogeni signal u mrežu. Problem kooperativne regulacije izlaza multiagentnog sistema je definisan u trećoj glavi. Prezentovan je centralizovani algoritam kojim se rješava ovaj problem, a zatim je izvršena njegova decentralizacija. U četvrtoj glavi su predloženi distribuirani algoritmi za koordinisano upravljanje mrežama jednostrukih integratora, kao i mrežama sistema višeg reda. Peta glava sadrži rezultate simulacija. Naime, izvršena je komparacija predloženog algoritma i postojećih rješenja, pri čemu su razmotrene različite topologije umreženih sistema, kao i agenti sa različitom dinamikom. U zaključku su diskutovani rezultati magistrskog rada, odnosno doprinosi u odnosu na postojeća rješenja. Takođe su date smjernice za buduća istraživanja. Konačno, u prilogu rada su dati primjeri Matlab kodova pomoću kojih su izvršene simulacije.

Glava 1

Umreženi sistemi

U ovoj glavi će biti dat uvod u umrežene multiagentne sisteme, njihovu primjenu i značaj u brojnim naučnim i tehničkim disciplinama. Takođe, biće dat pregled osnovnih definicija, pojmova i rezultata iz teorije grafova, koja predstavlja osnovu za izučavanje i analizu multiagentnih sistema.

1.1 Uvod

Teorija umreženih sistema predstavlja vrlo moćan konceptualni okvir za izučavanje brojnih oblasti nauke i inženjerstva. Konstrukcije i fenomeni poput međusobno povezanih mreža, slučajnih mreža [25, 26] i mreža malog-svijeta [27, 28] se sreću u širokom dijapazonu naučne literature – od društvenih mreža, preko statističke fizike, senzorskih mreža, ekonomije, pa sve do koordinacije i upravljanja multiagentnim sistemima. Razlog za veliko interesovanje istraživača za umrežene sisteme je dvostran. S jedne strane, u velikom broju disciplina, naročito biologiji i materijalima, od vitalnog je značaja bolje razumijevanje efekta prouzrokovanog interakcijama među elementima na kolektivnu funkcionalnost višeslojnih sistema. S druge strane, napredak u tehnologiji je omogućio sintezu umreženih inženjerskih sistema – kao što su sistemi koji se sastoje od više vozila, senzorske mreže i nanostrukture, koji su analogni sistemima u prirodi, u smislu njihove funkcionalnosti i kompleksnosti [29].

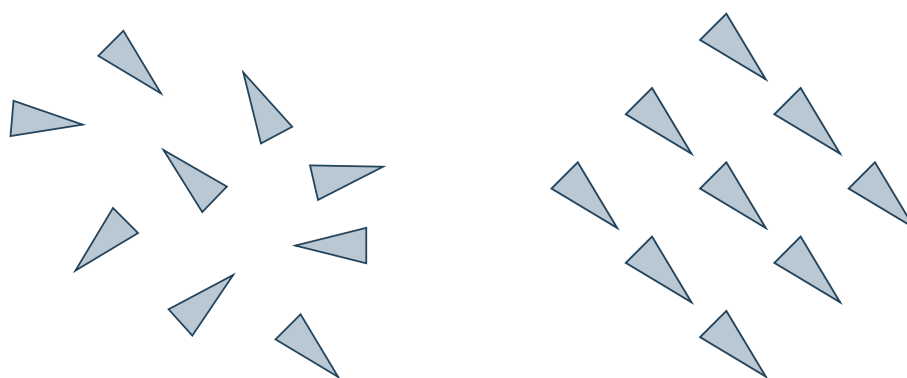
1.2 Multiagentni sistemi

Potreba za projektovanjem distribuiranih multiagentnih mreža, poput umreženih robota i mobilnih senzorskih mreža, dovodi do velikog broja izazova u pogledu teorijske analize i sinteze ovih sistema. Stoga je neophodno da u ovim mrežama svaki agent radi „u dogovoru” sa ostalima, kako bi se ostvarili globalni ciljevi, tj. ciljevi na nivou cjelokupnog (kolektivnog) umreženog sistema. Pri tome, agenti najčešće imaju mogućnost lokalne komunikacije uz ograničene komunikacione resurse, kao i mogućnost korišćenja lokalnih senzora, odnosno lokalnih mjerenja. U ovom poglavlju će biti riječi o nekim značajnijim reprezentativnim primjerima distribuiranih multiagentnih sistema, poput sistema letilica, senzorskih, bioloških mreža, itd [29].

1.2.1 Boids model

Termin boids potiče od izraza „bird-oid object” koji se može prevesti sa engleskog jezika kao objekat ptičjeg oblika, ili kao objekat koji podsjeća na pticu [30]. Rejnoldsov boids model, originalno predložen u kontekstu kompjuterske grafike i animacije, ilustruje osnovnu premisu u velikom broju problema koji se javljaju u multiagentnim sistemima, u kojima je potrebno da skup mobilnih agenata kolektivno riješi globalni zadatak koristeći lokalnu interakciju [31]. Ovim modelom se pokušava opisati ponašanje socijalnih životinja, naročito ptica, u rojevima, jatima i stadu. U boids modelu, svaki „agent”, koji je u ovom slučaju računarska konstrukcija u animaciji, dizajniran je tako da reaguje na susjedne agente, implementirajući ad hoc protokol koji se zasniva na tri pravila. Ova pravila su *razdvajanje* (izbjegavanje sudara sa susjednim agentima), *izjednačavanje* (usklađivanje brzine sa brzinom susjednih agenata) i *kohezija* (izbjegavanje situacije u kojoj dolazi do izolacije agenta, tj. prevelikog odvajanja od susjeda).

Od naročitog značaja je specijalni slučaj boids modela kada se svi agenti kreću istom, konstantnom brzinom, pri čemu se ažuriranje smjera vrši po pravilu u kojem svaki agent uzima u obzir stanja susjeda, kako bi se ostvarili izjednačavanje i kohezija na grupnom nivou. Naime, u radu [32] predložen je jednostavan, ali elegantan diskretni model kretanja N autonomnih agenata u ravni, pri čemu se svi agenti kreću istom brzinom, ali u različitim smjerovima. Smjer (ugao) kretanja svakog agenta se ažurira na osnovu lokalnog pravila (protokola), koje se zasniva na usrednjavanju sopstvenog smjera i smjerova njemu susjednih agenata. Simulacijama je pokazano da ovaj protokol dovodi do toga da se svi agenti kreću u istom smjeru, bez korišćenja neke vrste centralizovane komunikacije, i bez obzira što se skup susjeda svakog agenta mijenja u vremenu, u opštem slučaju. U radu [33] izvršena je teorijska analiza dinamike ovog sistema. Takođe, analiza konvergencije je odrađena i za neke druge, slične modele. Pokazano je da model [32] zapravo predstavlja grafički primjer komutiranog linearnog sistema (eng. switched linear system, SLS¹) koji je stabilan, ali za koji ne postoji zajednička kvadratna funkcija Ljapunova.



(a) Smjerovi agenata u početnom trenutku

(b) Smjerovi agenata u stacionarnom stanju

Slika 1.1: Evolucija Rejnoldsovog boids modela.

¹Dinamički sistem koji se sastoji od skupa modela linearnih kontinualnih sistema, pri čemu je model u datom trenutku određen nekim diskretnim signalom.

Ispostavlja se da je koristeći samo lokalna pravila, pored izjednačavanja, moguće ostvariti i neke druge vrste ponašanja. Primjer rezultirajućeg ponašanja iz prethodno opisanog primjera prikazan je na slici 1.1. Naime, na slici 1.1a prikazano je devet agenata sa proizvoljnim početnim usmjerenjem (zadatim orijentacijom trougla) i razmakom. Nakon određenog vremena, agenti se kreću u jedinstvenom smjeru, pri čemu održavaju jednake međusobne razmake, što je prikazano na slici 1.1b. Nakon postizanja formacije sa slike 1.1b, kaže se da je kretanje u vidu stada (eng. flocking) ostvareno.

Naprednije tehnike, u smislu brže konvergencije ili rješavanja izazovnijih zadataka, poput kretanja u vidu stada uz izbjegavanje prepreka mogu se pronaći u [34,35].

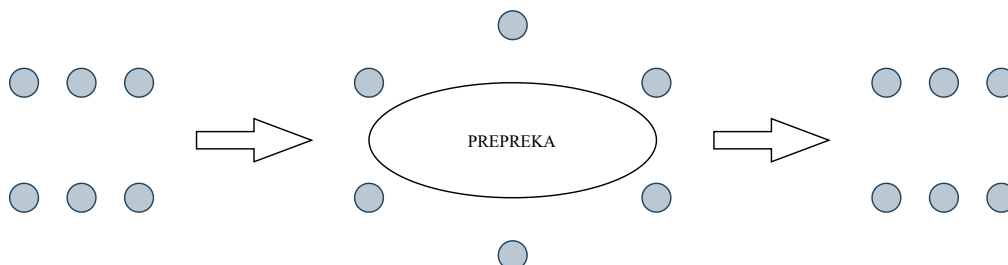
1.2.2 Formacija sistema letilica

Distribuirani vazduhoplovni sistemi, poput svemirskih brodova, bespilotnih letilica (dronova), i sl. identifikovani su kao nova paradigma za širok spektar primjena. Predviđa se da će razvoj distribuiranih protokola omogućiti implementaciju međusobne saradnje prostorno distribuiranih letilica, kako bi se ostvarili pojedinačni, kao i kolektivni naučni, vojni ili civilni ciljevi. Ovakvi sistemi su od naročitog značaja zato što distribuirana arhitektura dovodi do smanjenja troškova u njihovom dizajnu, proizvodnji i upravljanju.

Primjer vazduhoplovnog sistema sa više platformi je svemirska optička interferometrija. Svemirski interferometri se prevashodno razlikuju po sastavu i radnom okruženju. Sastoje se od razdvojenih optičkih instrumenata, koji dovode do tzv. prorijeđene aperture (otvora objektiva kod optičkih instrumenata). Iako optički interferometri mogu funkcionisati na površini zemlje, mnoge su prednosti u njihovom korišćenju iz svemira. Svemirski interferometri imaju veću optičku osjetljivost i rezoluciju, šire vidno polje i veću sposobnost za detekciju svemirskih tijela. Rezolucija ovih interferometra, za razliku od teleskopa (npr. Hubble) je određena razmakom među elementima koji prikupljaju svjetlost, a ne njihovom veličinom. Ovo znači da u suprotnosti teleskopima, kod kojih je najveća rezolucija određena skupocjenim naprednim tehnikama u proizvodnji, veličinom lansirnog vozila, kompleksnim mehanizmima za raspoređivanje, kod svemirskog optičkog interferometra kvalitet je ograničen time koliko je moguće precizno koordinisati razdvajanje optičkih elemenata. Takođe, svemirski optički interferometri mogu biti montirani na jednoj velikoj strukturi u svemiru, koja se sastoji od krutih i srednje krutih konstrukcija ili čak membrana na naduvavanje. U ovom slučaju, dinamika strukture svemirskog broda igra glavnu ulogu u operaciji i uspjehu misije. Alternativni pristup bi bio montiranje interferometra na više prostorno razdvojenih svemirskih brodova, tj. distribuirani svemirski sistem. Primjer ovakve misije je TPF (eng. Terrestrial Planet Finder), čiji je glavni zastupnik NASA.

Još jedan, vrlo značajan, problem u ovoj oblasti je koordinacija bespilotnih letilica raznovrsnih veličina i sposobnosti. Ove letilice omogućavaju izvršavanje velikog broja zadataka, poput nadzora, mapiranja i kartografije, detekcije mete i monitoringa životne sredine. Specijalan slučaj ovog problema, koji je privukao veliku pažnju naučne zajednice, je održavanje željene formacije letilica u prisustvu raznih smetnji i poremećaja. U radu [36] je dat algoritam za upravljanje formacijama koristeći lider-pratilac (eng. leader-follower) metodologiju, u kojoj se agentima (u ovom slučaju

letilicama) dodjeljuje uloga lidera ili pratioca. Pored metodologije lider-pratilac, postoji i tzv. metodologija virtuelnog lidera. U [37] je pokazano da se navedene metodologije mogu posmatrati kao specijalni slučajevi problema postizanja konsenzusa. U radovima [38], [39] razmatran je problem stabilizacije formacija koristeći koncepte rigidnosti grafa i strukturalnih potencijalnih funkcija, respektivno, pri čemu je razmotren i problem izbjegavanja prepreka, koji je ilustrovan na slici 1.2.



Slika 1.2: Održavanje formacije pri izbjegavanju prepreke.

1.2.3 Senzorske mreže

Bežične senzorske mreže se sastoje od prostorno distribuiranih autonomnih uređaja (senzora koji posjeduju određenu procesorsku moć) koji kooperativno vrše monitoring neke fizičke veličine, najčešće u životnim sredinama, poput temperature, zvuka, vibracija i pritiska. Svaki agent u mreži opremljen je uređajem za bežičnu komunikaciju, kao i napajanjem, npr. baterijom – koja mora biti efikasno iskorišćena. Veličina, cijena, preciznost i tačnost senzora (agenata) variraju i najčešće su u direktnoj zavisnosti od potrošnje energije, procesorske moći, kao i kompleksnosti integracije u mrežu. Svaki agent razmjenjuje informacije o svojim lokalnim mjerenjima sa ostalim agentima u mreži, kako bi se postigla precizna estimacija fizičke veličine od interesa. Zahtjev za efikasnim korišćenjem izvora napajanja uređaja najčešće diktira komunikacionu topologiju među čvorovima senzorske mreže.

U ovoj oblasti je od naročitog značaja problem optimalnog postavljanja senzora. Naime, potrebno je za dostupne senzore pronaći lokacije na kojim ih je potrebno postaviti, tako da bude obuhvaćena maksimalna površina za monitoring, ili da bude maksimizovana vjerovatnoća da će traženi objekat (nepoznate lokacije) biti pronađen [40]. Još jedna od značajnih primjena senzorskih mreža je u praćenju određene mete [41]. Pored osnovnih protokola, kao što je protokol za usrednjavanje, javlja se potreba i za distribuiranom implementacijom naprednijih tehnika, poput Kalmanovog filtriranja. U radovima [42], [43] i [44], opisan je proces obrade prikupljenih podataka koristeći distribuirani Kalmanov filter i Kalman-konsenzus filter.

1.2.4 Biološke mreže

Redukcionizam, koji je bio osnovna naučna tehnika u biologiji čitav jedan vijek, doveo je do značajnog spoznavanja komponenti ćelija i njihove funkcije. Uprkos velikom uspjehu, postaje sve jasnije da diskretne biološke funkcije veoma rijetko mogu biti pripisane samo jednom molekulu. Umjesto toga, biološke karakteristike nastaju iz kompleksnih interakcija sastavnih djelova ćelije, kao što su proteini, DNK, RNK i mali molekuli. Stoga, ključni izazov u savremenoj biologiji je razumijevanje

strukture i dinamike kompleksne ćelijske mreže interakcija koje doprinose strukturi i funkciji žive ćelije [45].

Razvoj visokopropusnih tehnika za prikupljanje velike količine podataka, praćeno širokom upotrebom mikroćipova, dozvoljava ispitivanje stanja sastavnih komponenti ćelija u bilo kom trenutku. Različiti tipovi interakcionih mreža (metaboličke i regulatorne interakcije) javljaju se kao zbir ovih interakcija. Nijedna od ovih mreža nije nezavisna, već zajedno formiraju „mrežu mreža” koja je odgovorna za ponašanje ćelije. Glavni cilj u modernoj biologiji, teorijskoj i eksperimentalnoj, je razumijevanje i modelovanje, u kvantitativnom smislu, topoloških i dinamičkih osobina raznovrsnih mreža koje kontrolišu ponašanje ćelije [45].

Ispostavlja se da već poznati pojmovi iz teorije mreža nude velike mogućnosti za razumijevanje unutrašnje organizacije ćelije, kao i njene evolucije. Ovi pojmovi i ideje, doveli su do realizacije da su gradivne karakteristike mreže molekularnih interakcija unutar ćelije slične, u velikoj mjeri, drugim kompleksnim sistemima kao što su internet, računarski ćipovi i socijalne mreže. Ova neočekivana univerzalnost ukazuje da slična pravila važe za većinu kompleksnih mreža u prirodi, što vodi do toga da ekspertiza u takvim sistemima, fundamentalno dalekih od biologije, može biti od značajne pomoći za razumijevanje relacija koje daju funkciju ćeliji [45].

1.2.5 Socijalne mreže

Socijalne mreže se sastoje od socijalnih entiteta, poput pojedinca i organizacija, koji imaju određenu međuzavisnost. Interakcije među ovim entitetima mogu biti razne, poput finansijske, socijalne i informacione povezanosti. Takve mreže su od interesa u velikom broju oblasti, kao što su teorijska sociologija, organizacione studije i sociolingvistika. Zapravo, *struktura* socijalnih mreža oduvijek je bila od fundamentalne važnosti za razumijevanje ovih mreža. U skorije vrijeme, pojam manipulacije mrežne strukture može biti posmatran kao održiv način promjene ponašanja mreže. Na primjer, koncept *promjenljivog agenta* odnosi se na mrežni entitet koji namjerno ili indirektno izaziva ili ubrzava socijalne promjene kao i promjene ponašanja u mreži.

Pored socioloških interakcija živih bića, proučavanje ovih mreža obuhvata i naučnu saradnju, odnosno zavisnost citiranosti od povezanosti naučnika, saradnju glumaca itd. U ovim mrežama se javlja interesantan fenomen samoorganizacije u bezrazmjerno (eng. scale-free) stanje, što je neočekivan rezultat [46]. Ovo znači da, nezavisno od sistema i entiteta koji ga čine, vjerovatnoća da je posmatrani čvor povezan sa k drugih čvorova, je oblika $P(k) \sim k^{-\gamma}$, gdje je γ neka konstanta.

1.2.6 Energetske mreže

Kompleksni sistemi velikih razmjera kojima se vrši prenos i distribucija električne i mehaničke energije, od generatora pa do potrošača, su izuzetno korisni umreženi dinamički sistemi, stvoreni od strane čovjeka. Ovi sistemi se najčešće sastoje od heterogenog skupa dinamičkih sistema, poput uređaja energetske elektronike i logičkih kola, tj. prekidača, koji se mijenjaju u vremenu. Dinamika, stabilnost i upravljanje individualnim elementima u energetskim mrežama (npr. sinhronim i asinhronim mašinama) i njihovim interkonekcijama (npr. modelima više mašina) je posvećena

velika pažnja u literaturi. Međutim, kako je potreba za efikasnijom proizvodnjom i korišćenjem energije postala preovlađujuća, distribuirane i mrežne arhitekture poput pametnih elektroenergetskih mreža (eng. smart grid) su dobile na značaju.

1.2.7 Zajedničke osobine u raznim primjenama

Primjene koje su opisane, a koje dolaze iz širokog dijapazona naučnih i inženjerskih disciplina, dijele određene fundamentalne sistemske atribute. Ukratko, ovakvi sistemi se sastoje od (1) dinamičkih jedinica, potencijalno s mogućnošću donošenja odluka, i uređajima za komunikaciju sa ostalim jedinicama, i (2) infrastrukture (mreže) za razmjenu informacija (signala), koja može biti bežična i funkcioniše na osnovu protokola za komunikaciju u inženjerstvu, biohemijske reakcije u biološkim sistemima, i psihološke i sociološke interakcije u kontekstu socijalnih mreža.

Zajednička, fundamentalna osobina umreženih sistema, koja ih dijeli od sistema koji su tradicionalno razmatrani u teoriji sistema, je prisustvo mreže i njenog uticaja na ponašanje cjelokupnog sistema. Stoga, uspješna „teorija umreženih sistema” mora sadržati matematiku informacionih mreža sa konceptima koji su suština teorije dinamičkih sistema (stabilnost, kontrolabilnost, opservabilnost, optimalnost, itd). Jedan od izazova pri izučavanju ove interdisciplinarnosti u kontekstu teorije sistema je da mnoge osobine mreža, kao npr. geometrija mreže, imaju logički ili kombinatorni karakter.

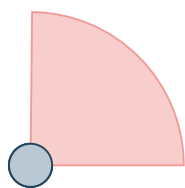
1.3 Razmjena informacija putem lokalnih interakcija

Da bi se dobio konkretan model lokalnih interakcija među agentima, neophodno je opisati lokalnu prirodu mehanizama za razmjenu informacija. Radi lakšeg razumijevanja, posmatraće se konkretan primjer mreža u kojima agenti predstavljaju robote [29].

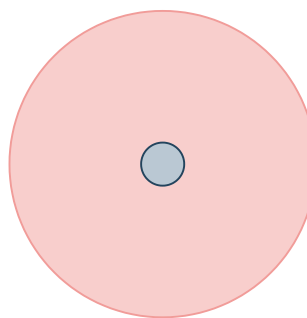
1.3.1 Lokalna komunikacija

Jedan način na koji agenti mogu da razmjenjuju informacije sa okruženjem je putem komunikacionih kanala. Međutim, potrebno je imati u vidu da transmisija i prijem informacija zahtijevaju energiju, koja je značajno ograničena u mnogim primjenama umreženih sistema, poput senzorskih mreža i mobilnih ad hoc komunikacionih mreža. Stoga, agenti mogu samo razmjenjivati informacije direktno, sa ograničenim komunikacionim dometom, na taj način vršeći propagaciju informacija kroz mrežu preko posrednih čvorova.

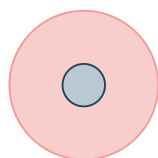
Drugo ograničenje u komunikaciji odnosi se na propusni opseg. Ako veliki broj agenata istovremeno emituje veliku količinu podataka, komunikacioni kanali ulaze u zasićenje, što dovodi do naglog pogoršanja komunikacionog sistema. Zato, u velikim mrežama, razmjena informacija se vrši rjeđe da bi se zadovoljila ograničenja propusnog opsega.



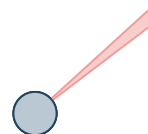
(a) Vizuelni senzor koji pokriva ograničeni dio vidnog polja.



(b) Omnidirekcionni senzor rastojanja sa ograničenim dometom.



(c) Taktini senzor koji obezbeđuje informacije o najbližem okruženju.



(d) Senzor rastojanja sa jedinstvenim snopom.

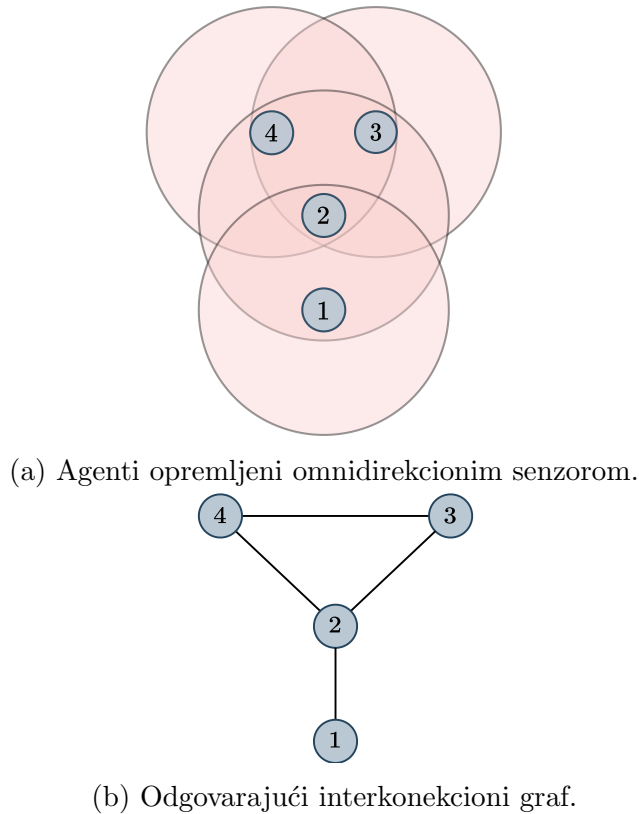
Slika 1.3: Razni tipovi senzora.

1.3.2 Lokalni senzori

Pored komunikacije, drugi način za prikupljanje informacija o susjednim agentima i okolini je putem senzora. Međutim, svaki senzor ima ograničenja u vidu dometa i rezolucije. Neki od najčešće upotrebljivanih senzora i njihova ograničenja su:

- **Vizuelni senzori:** Nazivaju se još sensorima zasnovanim na vještačkom vidu. Kamere uglavnom imaju veliki domet, ali pokrivaju samo određeni dio vidnog polja, kao što je prikazano na slici 1.3a.
- **Senzori rastojanja:** Najčešće upotrebljivani senzori rastojanja su sonari, infracrveni senzori i laserski skeneri. Senzori rastojanja mogu biti različitih rezolucija, a variraju i od onih veoma kratkih dometa (npr. jeftini infracrveni senzori) do onih koji pokrivaju na stotine metara (kvalitetni laserski skeneri). Ovi senzori emituju snopove u jednom pravcu, pa su tipično postavljeni u obliku prstena na uređaj, tako da omogućavaju očitavanje iz svih pravaca (omnidirekcionni, npr. sonari) ili imaju kretajuća ogledala koja omogućavaju skeniranje većeg prostora (laserski skeneri). Ovo je prikazano na slici 1.3b.

Pored pomenutih, koriste se i neki drugi senzori prikazani na slikama 1.3c i 1.3d, od kojih svaki ima određena geometrijska ograničenja. Međutim, u ovom radu, geometrija će biti sadržana u okviru grafovske interpretacije interakcija, koje su predstavljene kao grane u tzv. blizinskim grafovima (eng. proximity graphs), u kojima postojanje grane označava da se susjedni čvorovi nalaze u dometu senzora posmatranog agenta/čvora.



Slika 1.4: Mreža agenata opremljenih omnidirekcionim sensorima rastojanja može biti posmatrana kao graf, gdje čvorovi odgovaraju agentima, a grane odgovaraju interakcijama.

1.4 Interakcioni modeli zasnovani na grafovima

Geometrijski aspekt interakcija² ima važnu ulogu u analizi i sintezi umreženih multiagentnih sistema. Ispostavlja se da je dizajniranje interakcionog protokola i njegove eksplicitne geometrije, na nivou analize sistema i sinteze regulatora, daleko od trivijalnog. Samim tim, razumno je tretirati interakcije kao esencijalno kombinatorne, tj. da li interakcija postoji i u kojoj mjeri. Primjer ovoga je apstrakcija prikazana na slici 1.4, u kojoj je interakciona geometrija određena omnidirekcionim sensorima rastojanja. Ovakva apstrakcija, koja zaobilazi konkretnu realizaciju, omogućava da se istakne uloga interkonekcione topologije, ne samo u analizi ovih sistema već i u njihovoj sintezi [29].

1.4.1 Statičke, dinamičke i slučajne mreže

Kako grane grafa predstavljaju tok informacija između čvorova, jasno je da tok može biti usmjeren ili neusmjeren (obostran). Primjer jednosmjernog toka informacija je kada se j -ti agent nalazi u dometu i -tog agenta, ali se i -ti agent ne nalazi u dometu j -tog. Razlog za ovo može biti različit kvalitet senzora (senzor i -tog agenta ima veći domet od senzora j -tog agenta). U ovom slučaju, grana je usmjerena od čvora v_j ka čvoru v_i , gdje je čvor v_j „rep” grane, a čvor v_i je „glava” grane. Ako je

²Nezavisno od toga da li se razmjena informacija vrši komunikacionim putem ili korišćenjem senzora, odnosno da li je ona bežična, hemijskog, fizičkog ili sociološkog karaktera.

grana neusmjerena, što znači da je moguća obostrana komunikacija, čvorovi će biti povezani samo linijom.

Međutim, usmjerenost nije jedini aspekt grana o kojem treba voditi računa. Takođe je potrebno razmotriti različite tipove vremenske promjenljivosti grana. Prema tome, razlikuju se tri vrste mreža (grafova):

- **Statičke mreže:** U ovim mrežama grane su statičke, tj. skup grana nije vremenski promjenljiv. Ovaj slučaj se javlja kada je statička komunikaciona mreža formirana i kroz nju teku informacije.
- **Dinamičke mreže:** U ovim mrežama je skup grana vremenski zavisian, tj. grane se mogu pojavljivati i nestajati kao funkcije stanja agenata u mreži. Na primjer, ako čvorovi grafa predstavljaju mobilne robote koji sadrže senzore rastojanja, grane će se javljati kada određeni agent uđe u domet posmatranog agenta, a nestajati kada izađe.
- **Slučajne mreže:** Ove mreže čine specijalnu klasu dinamičkih mreža po tome što je postojanje određene grane dato raspodjelom vjerovatnoće, a ne nekim determinističkim, geometrijskim uslovom koji zavisi od senzora. Ovakve mreže se javljaju, na primjer, kada je kvalitet komunikacionih kanala stohastičke prirode.

Ova tri tipa mreža zahtijevaju različite matematičke metode za analizu. Za statičke mreže dovoljno je poznavati teoriju linearnih, vremenski-invarijantnih sistema. Kada je riječ o dinamičkim mrežama, potrebni su određeni koncepti iz domena hibridnih sistema, koji se uglavnom zasnivaju na teoriji Ljapunova. Slučajne mreže zahtijevaju kombinaciju teorije Ljapunova i pojmova iz stohastičke stabilnosti sistema.

1.5 Osnovni zadaci u mrežama

Grafovi su objekti koji se uglavnom posmatraju iz aspekta kombinatorike. Iako je ta perspektiva važna za razumijevanje grafova, nekim problemima u multiagentnim mrežama je teško prići iz ove strogo teorijske paradigme. Primjer ovoga je problem pokrivanja određene teritorije senzorskom mrežom, gdje je potrebno izvršiti eksplisitnu particiju teritorije i upravljanje sa povratnom spregom, pri čemu može doći do gubitaka i kašnjenja komunikacionih paketa. Stoga, tačka gledišta u ovom radu je odabrana tako da ne sadrži detaljnu analizu komunikacionih protokola koji predstavljaju podlogu, već se smatra idealna razmjena informacija. Na kraju, biće podrazumijevano da je moguće vršiti prenos realnih brojeva, te se neće voditi računa o kvantizaciji i ograničenosti propusnog opsega.

U ovom radu će se takođe koristiti pojednostavljena LTI dinamika agenata, tj. agenti će biti modelovani s jednim integratorom ili generalnim linearnim sistemom, pri čemu se smatra da svi agenti u mreži imaju istu dinamiku. Ovo je u suprotnosti sa realnim umreženim sistemima koji se najčešće sastoje od agenata sa netrivialnim dinamičkim karakteristikama i kod kojih se međusobna interakcija odvija već razrađenim interakcionim protokolima. U ovom slučaju, ponašanje cjelokupnog sistema zavisi, ne samo od interkomunikacione topologije i njenih atributa, već i od

toga kako se korišćeni interkonekcionni protokol uklapa sa nelinearnom i hibridnom prirodom dinamike agenata.

Usvajajući navedene pretpostavke, neki od glavnih zadataka u mrežama su [29]:

- **Konsenzus:** potrebno je da agenti postignu globalnu saglasnost/dogovor (konsenzus) oko vrijednosti veličine od interesa;
- **Formacije:** potrebno je da se agenti kreću u željenom geometrijskom obliku;
- **Raspodjela zadataka:** odlučivanje o ravnopravnoj raspodjeli zadataka među agentima;
- **Monitoring:** ostvarivanje maksimalne pokrivenosti sredine, pri čemu nijedan agent ne smije biti izolovan;
- **Kretanje u vidu stada/jata (flocking/swarming):** inspiracija za kretanje agenata u ovom problemu potiče iz prirode, kao što je jato ptica, roj socijalnih insekata itd.;
- **Socijalne mreže i igre:** analiza ishoda igara i socijalnih interakcija u zavisnosti od interakcione topologije koja predstavlja podlogu; i
- **Distribuirana estimacija:** grupa senzora koja kolektivno estimira (stohastički) veličinu od interesa. Značajan primjer je distribuirani Kalmanov filter.

U ovom radu od glavnog interesa su modeli mreža kojima se upravlja, tj. izučavanje uticaja egzogenih signala na ponašanje mreža.

1.6 Teorija grafova

Kao što je već rečeno, grafovi predstavljaju apstrakciju razmjene informacija među agentima u mreži. U ovoj sekciji biće uvedeni osnovni pojmovi teorije grafova, kao i neke operacije nad grafovima, potrebne za dalju analizu. Takođe će biti uvedena algebarska teorija grafova, a naročito će biti istaknuta uloga matrica koje opisuju grafove, poput matrice susjedstva i matrice Laplasijana.

Apstrakcija umreženih sistema grafovima gotovo da ne sadrži informacije o tome šta se razmjenjuje među agentima, posredstvom kojih protokola ili šta se radi sa primljenom informacijom. Umjesto toga, ova apstrakcija pruža detaljan opis topologije mreže preko objekata koje nazivamo čvorovima i granama. U ovoj sekciji će biti dat kratak pregled teorije grafova. Od naročitog značaja će biti oblast algebarske teorije grafova, koja sadrži značajne rezultate, neophodne za dalju analizu i povezivanje dinamičkih objekata (kao što su multiagentni sistemi) sa kombinatoričkim karakteristikama mreža (grafovima) [29].

1.6.1 Grafovi

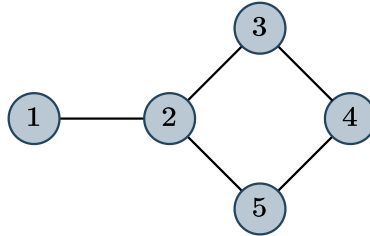
Konačan, neusmjeren, prost graf, ili samo *graf*, je objekat koji se zasniva na konačnom skupu, tj. skupu s konačnim brojem elemenata. Ovaj skup se naziva *skupom čvorova* i označava se sa \mathcal{V} ; dakle, svaki element skupa \mathcal{V} je čvor grafa. Skup

čvorova \mathcal{V} koji sadrži n elemenata se zapisuje kao

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}.$$

Razmotrimo sada skup podskupova, pri čemu svaki podskup sadrži dva elementa skupa \mathcal{V} , i označimo ga sa $[\mathcal{V}]^2$. Ovaj skup sadrži elemente oblika $\{v_i, v_j\}$ gdje $i, j = 1, 2, \dots, N$ i $i \neq j$. Konačan graf \mathcal{G} se formalno definiše kao par $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, gdje je \mathcal{V} konačan skup čvorova, dok je \mathcal{E} neki podskup $[\mathcal{V}]^2$. Skup \mathcal{E} se naziva *skupom grana* grafa \mathcal{G} . Često se koriste oznake $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ i $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ za čvorove i grane grafa \mathcal{G} , respektivno, kao i jednostavnije oznake za granu $\{v_i, v_j\}$ kao $v_i v_j$ ili ij .

Graf je u suštini objekat koji pripada teoriji skupova; međutim, grafovi su vrlo pogodni za grafičku reprezentaciju, odakle im i potiče ime. Grafička reprezentacija vodi do raznih definicija i opservacija o prirodi grafova. Na primjer, dva čvora v_i i v_j , između kojih postoji grana (u oznaci $v_i v_j \in \mathcal{E}$), nazivaju se *susjednim čvorovima*, u oznaci $v_i \sim v_j$. U ovom slučaju, za granu $v_i v_j$ kaže se da je *incidentna* sa čvorovima v_i i v_j . Na slici 1.5 prikazan je primjer neusmjerenog grafa, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, gdje je $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i $\mathcal{E} = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_5, v_2 v_5\}$.



Slika 1.5: Neusmjereni graf sa 5 čvorova i 5 grana.

Skup susjeda, ili ukratko *susjedi*, čvora v_i , u oznaci $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{V}$, su svi čvorovi koji su susjedni čvoru v_i , tj. $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} \mid v_i v_j \in \mathcal{E}\}$. Za neusmjereni graf važi da je $v_j \in \mathcal{N}_i$ ako i samo ako je $v_i \in \mathcal{N}_j$. Kardinalnost skupa \mathcal{N}_i , u oznaci $|\mathcal{N}_i|$, naziva se stepenom čvora i ; dakle stepen čvora je broj njegovih susjeda. *Putanja* dužine m na grafu \mathcal{G} definisana je nizom različitih čvorova $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$, takvih da su, za $k = 0, 1, \dots, m-1$, čvorovi v_{i_k} i $v_{i_{k+1}}$ susjedni. Čvorovi v_{i_0} i v_{i_m} se nazivaju krajnjim čvorovima putanje; dok se čvorovi $v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-1}}$ nazivaju unutrašnjim čvorovima. Kada su unutrašnji čvorovi putanje različiti, a krajnji čvorovi isti, tada se ta putanja naziva ciklusom. Neusmjereni graf koji nema ciklusa naziva se neusmjerenim acikličnim grafom, ili *šumom*.

Neusmjereni graf \mathcal{G} je *povezan* ako svaki par čvorova iz skupa $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ može biti povezan putanjom, pri čemu su ta dva čvora krajnji čvorovi putanje. Ako to nije slučaj, kaže se da je graf *nepovezan*. Povezan graf predstavlja jednu povezanu komponentu, i zato se često naziva komponentom. Dakle, komponenta je podskup grafa, koja označava minimalnu particiju skupa čvorova, takvu da je svaka particija povezana. Stoga, slijedi da nepovezan graf sadrži više od jedne komponente. Šuma koja se sastoji od jedne komponente, naziva se *stablom*.

Definicija 1.1. Za dva grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ i $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ kaže se da su izomorfna ako imaju slične skupove čvorova i grana u smislu da postoji bijekcija $\beta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ takva da je $v_i v_j \in \mathcal{E}$ ako i samo ako je $\beta(v_i) \beta(v_j) \in \mathcal{E}'$. U tom slučaju, \mathcal{G} i \mathcal{G}' su izomorfni, u oznaci $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}'$.

1.6.2 Neke standardne klase grafova

Na osnovu opisanih pojmova moguće je izvršiti klasifikaciju grafova prema osobinama koje oni zadovoljavaju. Proučavanje svake od tih klasa detaljno predstavlja važnu problematiku u oblasti teorije grafova. Međutim, ovdje će samo biti uvedeni pojmovi kompletnog (potpunog) grafa, cikličnog grafa (aciklični je već uveden u prethodnom potpoglavlju) i regularnog grafa, koji su od značaja za posmatranu problematiku u ovom radu.

Kompletan (potpun) graf koji se sastoji od n čvorova, u oznaci \mathcal{K}_n , je graf u kojem su svakom čvoru susjedni preostalih $n - 1$ čvorova. Drugim riječima, to je graf u kojem su svaka dva čvora povezana granom.

Ciklični graf koji se sastoji od n čvorova, $\mathcal{C}_n = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \mathcal{E}_C)$, zadovoljava $v_i v_j \in \mathcal{E}_C$ ako i samo ako je $i - j = \pm 1 \pmod n$.

Za graf se kaže da je *k-regularan graf* ako je svaki njegov čvor k -tog stepena. Stoga, ciklični graf je 2-regularan, dok je kompletan graf od n čvorova $(n - 1)$ -regularan.

1.6.3 Podgrafovi

Kao što je već rečeno, grafovi se najčešće definišu kao kombinatorni objekti; međutim, veoma je korisno izvršavati skupovne operacije nad njima, kao što je analiza podskupova i razmatranje unija i presjeka tih podskupova.

Neka je zadat graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, i neka je sa \mathcal{S} označen podskup skupa čvorova, tj. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Kaže se da ovaj podskup skupa čvorova indukuje podgraf shodno početnom grafu. Ovaj indukovani podgraf je dat kao $\mathcal{G}_{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, \mathcal{E}_{\mathcal{S}})$, gdje je $\mathcal{E}_{\mathcal{S}} = \{\{v_i, v_j\} \in \mathcal{E} \mid v_i, v_j \in \mathcal{S}\}$. Drugim riječima, podgraf $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$ sastoji se od podskupa \mathcal{S} skupa $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ i grana grafa \mathcal{G} koje su incidentne čvorovima iz \mathcal{S} .

Naravno, indukovanje podgrafova nije neophodno. Zapravo, bilo koji graf $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ je podgraf grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, ako je $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ i $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$. Tada se još kaže da je \mathcal{G} nadgraf grafa \mathcal{G}' . Ako je $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$ za podgraf, tada se \mathcal{G}' naziva *razapinjućim* podgrafom. Razapinjuće stablo grafa \mathcal{G} je dakle razapinjući podgraf grafa \mathcal{G} , koji je i stablo.

1.6.4 Težinski grafovi

Pojam grafa može biti generalizovan na više načina. Najčešće su to usmjereni grafovi i težinski grafovi. Usmjereni grafovi su upotrebljivi u raznim primjenama, uključujući i problem analiziran u ovom radu. Međutim, kako se predstavljeni rezultati odnose na neusmjerene (bidirekzione) grafove, neće biti riječi o usmjerenim grafovima. S druge strane, težinski grafovi igraju važnu ulogu u ovom radu pa će biti detaljnije razmatrani.

Ako pored skupova čvorova i grana, postoji funkcija $\omega : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ koja dodjeljuje vrijednost (težinu) svakoj grani, rezultatni graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ naziva se *težinskim grafom*. Jedan od važnih problema kod težinskih grafova je pronalaženje najkraće putanje između određenih čvorova, koristeći pojam *dužine putanje*, koja se definiše kao suma težinskih koeficijenata svih grana koje pripadaju toj putanji. Konkretno,

neka je $\pi(v_i, v_j)$ skup svih putanja čiji su krajnji čvorovi v_i i v_j . Tada je najkraća putanja (u opštem slučaju nije jedinstvena) između ova dva čvora

$$\min_{p \in \pi(v_i, v_j)} \text{length}(p),$$

gdje je $\text{length}(p)$ dužina putanje p . Slično, *dijametar* ili *prečnik* težinskog, povezanog grafa je dužina njegove najduže putanje.

1.7 Grafovi i matrice

Kao što je rečeno, grafovi su konstrukcije koje služe za modelovanje odnosa konačnog broja objekata, a koje imaju jednostavnu grafičku reprezentaciju koristeći čvorove i grane. Pored ove grafičke, grafovi takođe posjeduju i matricnu reprezentaciju. Upravo je ona fokus ovog potpoglavlja [29].

1.7.1 Matrica susjedstva i stepen čvora

Pojam stepena čvora je već uveden za neusmjereni graf \mathcal{G} kao kardinalnost skupa susjeda tog čvora. U nastavku će biti korišćena oznaka $d(v_i) = |\mathcal{N}_i|$ za stepen čvora v_i . Dakle, za graf prikazan na slici 1.5, važi

$$d(v_1) = 1, \quad d(v_2) = 3, \quad d(v_3) = 2, \quad d(v_4) = 2, \quad d(v_5) = 2.$$

Matrica stepena grafa \mathcal{G} je dijagonalna matrica, koja se definiše kao

$$\Delta(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} d(v_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d(v_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d(v_N) \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

gdje je N broj čvorova grafa.

Matrica susjedstva $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ je simetrična matrica dimenzija $N \times N$, koja se formira tako što je

$$[\mathcal{A}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Na primjer, za graf sa slike 1.5, matrice stepena i susjedstva su, respektivno:

$$\Delta(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Postoji još jedna matrica koja je u čestoj upotrebi pri analizi grafova, a to je *matrica incidencije* grafa. Međutim, ova matrica nije od naročitog značaja za ovu problematiku pa joj neće biti posvećena pažnja.

1.7.2 Matrica Laplasijana grafa

Matrice stepena i susjedstva imaju veoma važnu ulogu u algebarskoj teoriji grafova, jer se njihovim proučavanjem može doći do nekih osobina grafa koje nije jednostavno uočiti posmatrajući graf kao kombinatorni objekat. Međutim, glavnu ulogu u problematici kojoj je posvećen ovaj rad imaće matrična reprezentacija grafa \mathcal{G} u vidu matrice Laplasijana, u oznaci $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. Ova matrica se može definisati na različite načine, pri čemu svi dovode do iste matrice. Matrice susjedstva i stepena su upravo definisane da bi se došlo do najlakše definicije matrice Laplasijana neusmjerenog grafa \mathcal{G} , a to je

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \Delta(\mathcal{G}) - \mathcal{A}(\mathcal{G}), \quad (1.3)$$

gdje je $\Delta(\mathcal{G})$ matrica stepena, dok je $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ matrica susjedstva grafa \mathcal{G} . Iz ove definicije proizilazi da je za svaki graf suma elemenata svake vrste Laplasijana jednaka nuli. Na primjer, Laplasijan grafa sa slike 1.5 je

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Posljedica ovakve strukture je da matrica Laplasijana ima vektor jedinica kao sopstveni vektor, koji odgovara nultoj sopstvenoj vrijednosti.

Alternativno, moguće je Laplasijan izračunati dodjeljivanjem proizvoljnih smjerova neusmjerenom grafu, tj. transformišući ga u usmjereni graf i korišćenjem određenih relacija. Međutim, ovaj postupak vodi do iste matrice Laplasijana tako da neće biti prikazan. Ono što je bitno naglasiti je da se ovim postupkom lako pokazuje da je matrica Laplasijana uvijek simetrična, pozitivno semidefinitna matrica.

Takođe, valja napomenuti, da se u algebarskoj teoriji grafova često definiše i matrica Laplasijana za grane, u oznaci $\mathcal{L}_e(\mathcal{G})$. Međutim, kako ona ne pronalazi primjenu u razmatranoj problematici, ovdje neće biti definisana.

1.8 Algebarska i spektralna teorija grafova

Algebarska teorija grafova povezuje algebarske objekte, poput matrica i polinoma, sa grafovima. Samim tim, čini dostupnim veliki broj algebarskih tehnika za izučavanje grafova. Od naročitog značaja je analiza, iz algebarske perspektive, matrica stepena, susjedstva i Laplasijana, pridruženih grafu. Izučavanje sopstvenih vrijednosti ovih matrica je od izuzetne koristi, pa je zbog toga ova podoblast dobila posebno ime - *spektralna teorija grafova*.

Na primjer, razmotrimo matricu Laplasijana grafa $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{G})$. Kao što je već rečeno, ova matrica je simetrična i pozitivno semidefinitna; prema tome, njene sopstvene vrijednosti su realne, i mogu se zapisati kao

$$\lambda_1(\mathcal{L}) \leq \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathcal{L}),$$

gdje je $\lambda_1(\mathcal{L}) = 0$.

Teorema 2.1. *Za neusmjeren graf \mathcal{G} kaže se da je povezan ako i samo ako je $\lambda_2(\mathcal{L}) > 0$.*

Neka je \mathcal{L}_v matrica koja se dobija uklanjanjem reda i kolone koji odgovaraju čvoru v iz matrice Laplasijana $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Teorema 2.2. *Za graf \mathcal{G} , koji se sastoji od n čvorova i $n - 1$ grana, važi $\det \mathcal{L}_v = 1$ ako i samo ako je \mathcal{G} razapinjuće stablo.*

Teorema 2.3. *Neka je $t(\mathcal{G})$ broj razapinjućih stabala grafa \mathcal{G} . Tada je*

$$t(\mathcal{G}) = \det \mathcal{L}_v,$$

za svako $v \in \mathcal{G}$.

Dakle, spektar matrice Laplasijana sadrži informacije o strukturalnim osobinama grafa, uključujući informacije o povezanosti grafa (izražene u vidu nejednakosti) i broju razapinjućih stabala grafa (izražene u vidu jednakosti). Takođe, sljedeće relacije su veoma korisne:

$$\begin{aligned} \lambda_2(\mathcal{L}) &= \min_{x \perp 1_n, \|x\|=1} x^T \mathcal{L}(\mathcal{G})x \\ \lambda_n(\mathcal{L}) &= \min_{\|x\|=1} x^T \mathcal{L}(\mathcal{G})x \end{aligned} \quad .$$

Glava 2

Problem konsenzusa u multiagentnim sistemima

2.1 Statički konsenzus

Postizanje konsenzusa je jedan od fundamentalnih problema koji se javlja prilikom koordinacije multiagentnih sistema, pod čime se podrazumijeva da svi agenti iz posmatranog skupa treba da ostvare saglasnost oko vrijednosti veličine od interesa. U ovom poglavlju će biti riječi o dinamici protokola za postizanje konsenzusa (ili ukratko konsenzus protokola), u neusmjerenim statičkim mrežama [29]. Glavni cilj je uspostavljanje uzročno-posljedične veze između strukture interkonekcije (grafova) i osobina konvergencije ovog protokola.

Kao primjer situacije u kojoj je potrebno koristiti protokol za konsenzus, razmotrimo grupu senzora koja mjeri temperaturu u neravnomjerno zagrijanoj prostoriji velikih dimenzija. Iako temperatura varira u zavisnosti od lokacije senzora, neophodno je da ova grupa, razmjenu informacija, postigne konsenzus oko jedne vrijednosti koja predstavlja temperaturu prostorije. Radi postizanja ovog cilja, potrebno je dizajnirati mrežni protokol za konsenzus.

Značaj konsenzusa je dvostran. S jedne strane, postizanje konsenzusa je blisko povezano sa velikim brojem drugih problema u multiagentnim sistemima, kao što su kretanje u vidu jata (eng. flocking), randevu, distribuirana estimacija i mnogi drugi. S druge strane, ovaj protokol ima konciznu formulaciju koja omogućava proučavanje uticaja topologije mreže na dinamičke procese koji se odvijaju u njoj.

Posmatrajmo mrežu koja se sastoji od N dinamičkih jedinki, nazvanih agentima, označenih sa $1, 2, \dots, N$. Pretpostavlja se da su agenti povezani tako da mogu da vrše razmjenu relativnih informacija. Promjena stanja svakog agenta definisana je sumom relativnih stanja u odnosu na susjedne agente. Princip funkcionisanja protokola za konsenzus u mreži koja se sastoji od četiri agenta, dinamike prvog reda, ilustrovan je na slici 2.1.

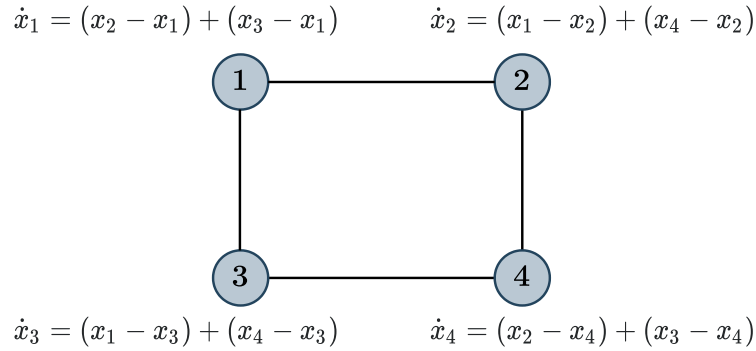
Ako se stanje i -tog agenta označi sa x_i , protokol za konsenzus se može zapisati kao

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

gdje je \mathcal{N}_i skup agenata susjednih i -tom agentu u mreži, tj. $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} \mid (i, j) \in \mathcal{E}\}$. Kako se radi o neusmjerenom grafu, matrica susjedstva $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{G})$ i matrica Laplasijsana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ su simetrične, pa se dinamika (2.1) za slučaj $x_i \in \mathbb{R}$, može zapisati kao

$$\dot{x}(t) = -\mathcal{L}x(t), \quad (2.2)$$

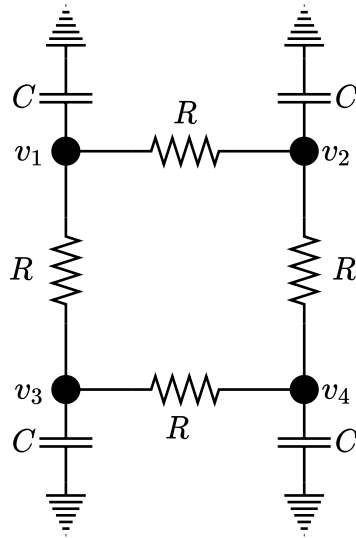
gdje je $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T \in \mathbb{R}^N$, dok je \mathcal{L} pozitivno semidefinitna matrica. Jednačina (2.2) predstavlja *dinamiku usaglašavanja*, odnosno *dinamiku konsenzusa* [7, 8].



Slika 2.1: Konsenzus protokol na kvadratnoj mreži

Dinamika konsenzusa se vrlo često sreće u prirodi i tehničkim sistemima, što je demonstrirano u sljedećem primjeru sa električnim kolom.

Primjer 2.1. Razmatra se električno kolo prikazano na slici 2.2. Vrijednosti otpornosti i kapacitivnosti su 1Ω i $1F$, respektivno.



Slika 2.2: Električno kolo: mreža kondenzatora i otpornika

Primjenjujući Kirchofove zakone na ovo kolo, dobija se jednačina

$$\dot{v}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (v_j(t) - v_i(t)), \quad i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

kojom se opisuje dinamika napona na kondenzatorima, gdje je \mathcal{N}_i skup čvorova u kolu koji su preko otpornika povezani sa čvorom i . Ova dinamika se može kompaktno predstaviti u matricnoj formi (2.2), gdje je \mathcal{G} kvadratni graf sa slike 2.1.

Važno je uočiti da konsenzus protokol funkcioniše tako što evoluciju stanja svakog čvora usmjerava ka stanjima susjednih čvorova. Zbog toga se može pretpostaviti da će stanja svih čvorova asimptotski konvergirati ka nekoj ponderisanoj aritmetičkoj sredini početnih stanja, koja je zapravo predstavlja fiksnu tačku njihove kolektivne dinamike. Kako je to stanje oko kojeg je postignut konsenzus od ključnog interesovanja, potrebno ga je i formalno definisati.

Definicija 2.2. Skup $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^N$, koji odgovara stanju mreže nakon postignutog konsenzusa, je podskup linearnog omotača vektora 1_N , u oznaci $\text{span}\{1_N\}$, to jest

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_i = x_j, \forall i, j\}. \quad (2.3)$$

2.1.1 Konsenzus u neusmjerenim grafovima

Kao što je već pokazano u dijelu koji se odnosi na spektralnu teoriju grafova, spektar matrice Laplasijana \mathcal{L} povezanog neusmjerenog grafa je

$$0 = \lambda_1(\mathcal{L}) < \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathcal{L}), \quad (2.4)$$

pri čemu je 1_N sopstveni vektor koji odgovara nultoj sopstvenoj vrijednosti $\lambda_1(\mathcal{L})$. Poznato je da je $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ simetrična matrica, kao i da za neusmjereni graf \mathcal{G} važi $\mathcal{L}1_N = 0_N$. Neka je $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]$ matrica koja se sastoji od normalizovanih i međusobno ortogonalnih sopstvenih vektora matrice \mathcal{L} , sortiranih tako da odgovaraju sopstvenim vrijednostima iz (2.4). Dalje, neka je

$$\Lambda(\mathcal{G}) = \text{diag}(\lambda_1(\mathcal{L}), \dots, \lambda_N(\mathcal{L})).$$

Spektralnom faktorizacijom matrice Laplasijana, dobija se

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{L}(\mathcal{G})t} &= e^{-(U\Lambda U^T)t} = Ue^{-\Lambda t}U^T = \\ &= e^{-\lambda_1(\mathcal{L})t}u_1u_1^T + e^{-\lambda_2(\mathcal{L})t}u_2u_2^T + \dots + e^{-\lambda_N(\mathcal{L})t}u_Nu_N^T, \end{aligned}$$

što znači da rješenje diferencijalne jednačine (2.2), čiji je početni uslov $x(0) = x_0$,

$$x(t) = e^{-\mathcal{L}(\mathcal{G})t}x_0$$

može biti razloženo po sopstvenim vektorima kao

$$x(t) = e^{-\lambda_1(\mathcal{L})t} (u_1^T x_0) u_1 + e^{-\lambda_2(\mathcal{L})t} (u_2^T x_0) u_2 + \dots + e^{-\lambda_N(\mathcal{L})t} (u_N^T x_0) u_N. \quad (2.5)$$

Teorema 2.3. *Neka je \mathcal{G} povezan graf. Tada konsenzus protokol (2.2) konvergira ka skupu (2.3), pri čemu je brzina konvergencije određena sa $\lambda_2(\mathcal{L})$.*

Dokaz. Dokaz proizilazi direktno iz (2.5) uočavanjem da je za povezani graf $\lambda_i(\mathcal{G}) > 0$, $i \geq 2$; gdje je, kao i uvijek, $\lambda_1(\mathcal{G}) = 0$. Stoga

$$x(t) \rightarrow (u_1^T x_0) u_1 = \frac{1_N^T x_0}{N} 1_N, \text{ kad } t \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

a samim tim $x(t) \rightarrow \mathbb{A}$. Kako je $\lambda_2(\mathcal{G})$ najmanja pozitivna sopstvena vrijednost Laplasijana grafa, ona se koristi kao mjera brzine konvergencije (2.6).

■

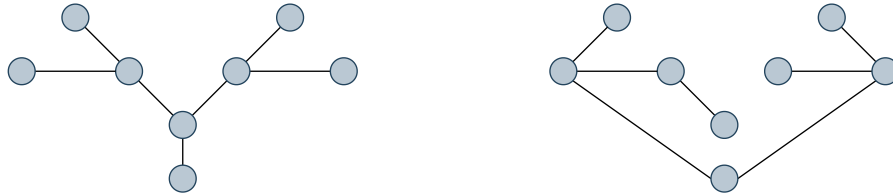
Važno je uočiti da se pri konvergenciji stanja čvorova ka skupu \mathbb{A} održava jednakost

$$\frac{d}{dt} (1_N^T x(t)) = 1_N^T (-\mathcal{L}(\mathcal{G})x(t)) = -x(t)^T \mathcal{L}(\mathcal{G})1_N = 0.$$

Iz tog razloga, veličina $1_N^T x(t) = \sum_i x_i(t)$, koja inače predstavlja centroid stanja mreže za svako $t \geq 0$, se naziva konstanta kretanja umreženog sistema (2.2).¹ Štaviše, na osnovu dokaza Teoreme 2.3 pokazuje se da trajektorija stanja, koju generiše konsenzus protokol, konvergira ka projekciji njenog početnog stanja na potprostor konsenzusa, po Euklidovoj normi, jer je

$$\arg \min_{x \in \mathbb{A}} \|x - x_0\| = \frac{1^T x_0}{1^T 1} 1 = \frac{1^T x_0}{N} 1. \quad (2.7)$$

Opšta forma rješenja data jednačinom (2.5), ukazuje da je za konvergenciju ka potprostoru konsenzusa, za bilo koje početne uslove, potrebno i dovoljno da je $\lambda_2(\mathcal{L}) > 0$. Kako pozitivnost $\lambda_2(\mathcal{L})$ odgovara povezanosti grafa \mathcal{G} , može se zaključiti da je za postizanje konsenzusa potrebno da graf sadrži razapinjuće stablo. Primjer razapinjućih stabala dat je na slici 2.3.



Slika 2.3: Dva primjera razapinjućih stabala od osam čvorova.

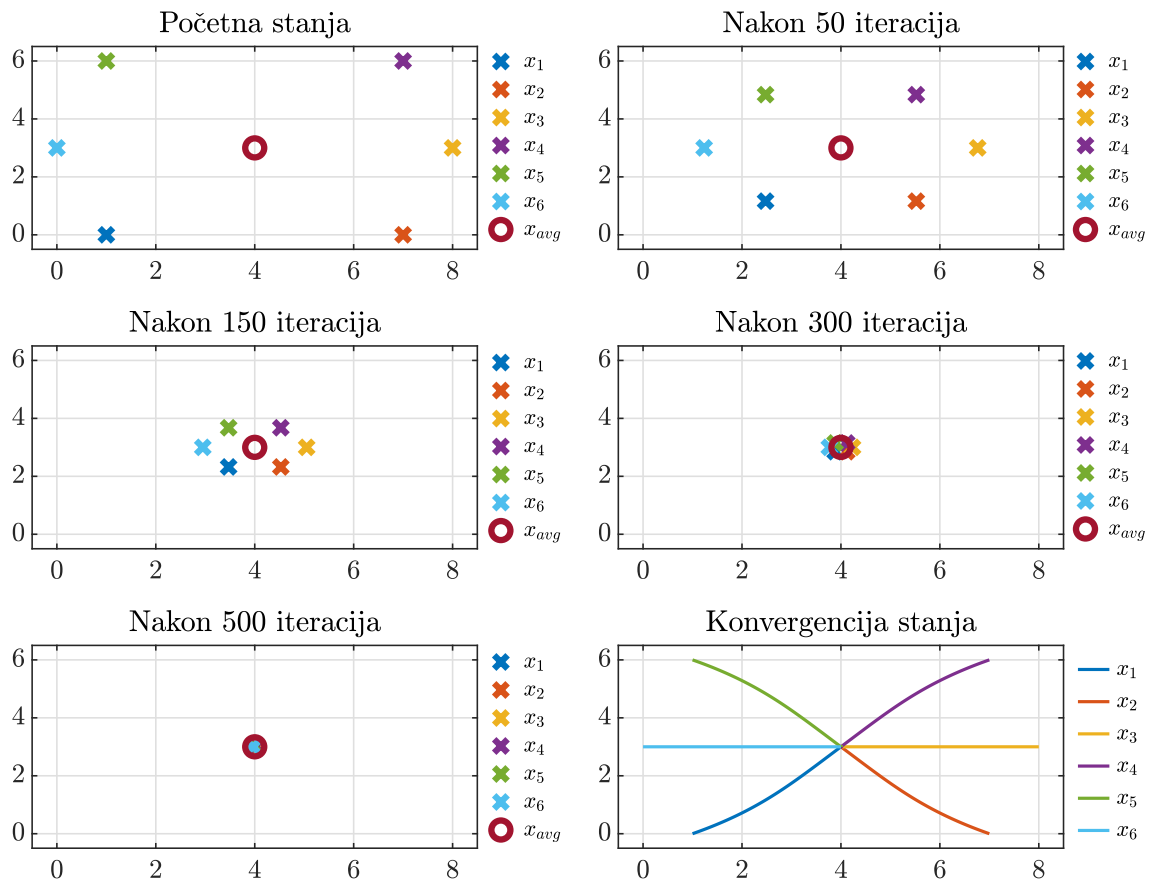
Primjedba 2.4. Potreban i dovoljan uslov za konvergenciju konsenzus protokola (2.2), za proizvoljne početne uslove, ka potprostoru konsenzusa (2.3) je da odgovarajući graf sadrži razapinjuće stablo.

Primjer 2.5. Da bi ilustrovali princip rada konsenzus protokola razmotrićemo randevu problem, u kojem je potrebno da se skup mobilnih agenata, čija se dinamika može opisati jednostrukim integratorom, sastane na jedinstvenoj, unaprijed nepoznatoj lokaciji. Pretpostavlja se da agenti nemaju pristup svojim globalnim pozicijama, kao i da svaki agent može da vrši relativna mjerenja, tj. rastojanje od susjednih agenata. Simulacijom konsenzus protokola

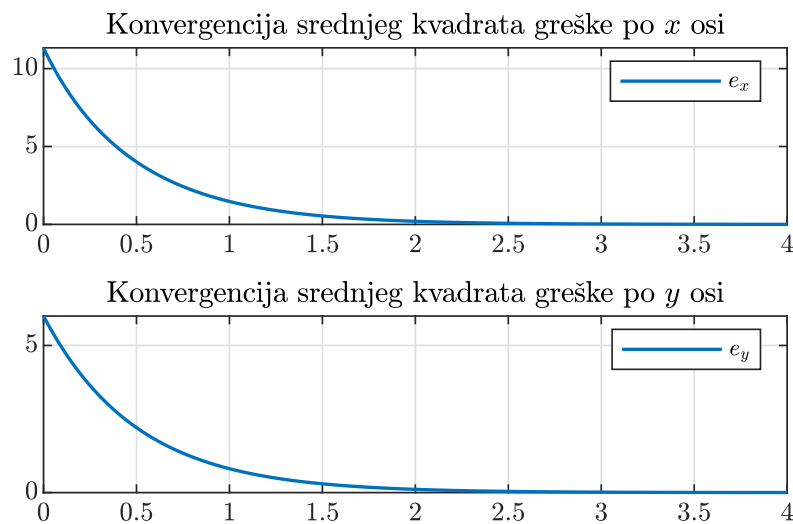
$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j(t) - x_i(t)),$$

gdje je pozicija i -tog agenta označena sa $x_i \in \mathbb{R}^p$ (npr. slučaj $p = 2$ se odnosi na planarne robote itd), dobijaju se trajektorije individualnih agenata u različitim trenucima, što je prikazano na slici 2.4. Dinamika usrednjene kvadratne greške za sve agente, po x i y osi, respektivno, prikazana je na slici 2.5.

¹Može se napraviti analogija sa veličinama poput energije u konzervativnim dinamičkim sistemima.



Slika 2.4: Evolucija stanja agenata pri rješavanju randevu problema.



Slika 2.5: Dinamika srednje kvadratne greške svih agenata.

2.2 Konsenzus u mrežama sa ulazima i izlazima

Kada jedan skup čvorova u mreži preuzme ulogu regulatora i senzora, dok preostali čvorovi izvršavaju lokalni konsenzus protokol, dobija se linearni sistem na čijem ulazu se nalazi određeni signal. U ovakvim sistemima potrebno je definisati i izlazni

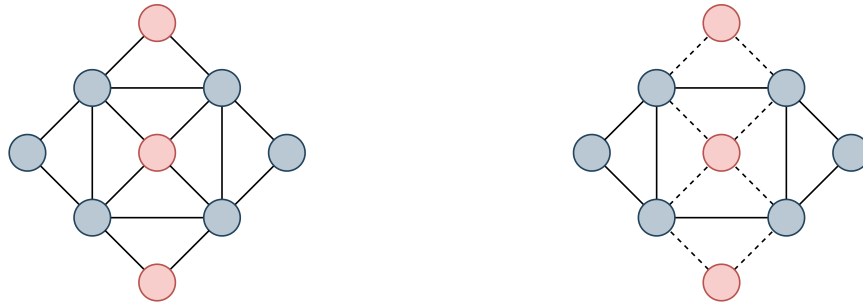
signal, kako bi se mogao analizirati uticaj strukture mreže na dinamiku kolektivnog sistema [29].

2.2.1 Postavka problema

Implementacija uvedenog konsenzus protokola omogućava da stanja agenata u mreži evoluiraju tokom vremena. Baš kao što je obezbjeđivanje stabilnosti sistema prvi korak prilikom dizajna regulatora, tako je i uloga konsenzus protokola da omogućí koheziju u mreži. U ovom dijelu biće analiziran konsenzus protokol u statičkim mrežama u slučaju kada na neke čvorove u mreži djeluju spoljašnji signali. Smatraće se da određeni čvorovi mogu da utiču na samu mrežu tako što injektiraju signale koji se propagiraju kroz mrežu, kao i da mogu da mjere izlazne signale svojih susjeda. Sa druge strane, podrazumijevaće se da ostali čvorovi implementiraju lokalni konsenzus protokol.

2.2.2 Particija mreže

Osnovna postavka problema dovodi do razlikovanja uloge pojedinih čvorova u konsenzus protokolu (2.2) za fiksnu mrežu \mathcal{G} . Čvorove koji imaju ulogu ulaza i izlaza nazivaćemo liderima, dok ćemo preostale čvorove, koji izvršavaju lokalni konsenzus protokol, nazivati pratiocima. U nastavku će indeksi L i F označavati da li se radi o liderima ili pratiocima, respektivno. Na primjer, graf pratioca \mathcal{G}_F je subgraf grafa \mathcal{G} , $\mathcal{V}(\mathcal{G}_F) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G})$, koji se dobija tako što se uklone lideri iz grafa \mathcal{G} , kao i sve njima susjedne grane. Način dobijanja grafa \mathcal{G}_F od \mathcal{G} prikazan je na slici 2.6, gdje su isprekidanim linijama prikazane prekinute grane, pri čemu graf \mathcal{G}_F čine samo plavi čvorovi (pratioci).



Slika 2.6: Mreža u kojoj su lideri prikazani crvenom, a pratioci plavom bojom. Na prvoj slici je prikazan originalni graf \mathcal{G} , prije particije; na drugoj slici je prikazan graf \mathcal{G}_F dobijen particijom grafa \mathcal{G} . Isprekidane linije zapravo određuju vrijednosti matrice B_F u (2.9).

Ovakav pristup dovodi do sljedeće particije matrice incidencije $\mathcal{D}(\mathcal{G})$:

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_F \\ \mathcal{D}_L \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

gdje je $\mathcal{D}_F \in \mathbb{R}^{N_F \times m}$ i $\mathcal{D}_L \in \mathbb{R}^{N_L \times m}$; N_F i N_L predstavljaju broj pratilaca i lidera, odnosno kardinalnost skupova $\mathcal{V}(\mathcal{G}_F)$ i $\mathcal{V}(\mathcal{G}_L)$, respektivno, dok je m broj grana u grafu \mathcal{G} , tj. kardinalnost skupa $\mathcal{E}(\mathcal{G})$. Bez gubitka opštosti, za ovakvu particiju,

fundamentalna pretpostavka je da su čvorovi originalnog grafa \mathcal{G} indeksirani tako da prvih N_F indeksa korespondira liderima, dok preostalih N_L korespondira pratiocima.

Kako je $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{D}(\mathcal{G})\mathcal{D}(\mathcal{G})^T$ particija matrice incidencije (2.8) implicira

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ B_F^T & A_L \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

gdje je $A_F = \mathcal{D}_F\mathcal{D}_F^T$, $A_L = \mathcal{D}_L\mathcal{D}_L^T$, i $B_F = \mathcal{D}_F\mathcal{D}_L^T$.

2.2.3 Značenje konsenzusa u particionisanim mrežama

Lako se zaključuje da se particijom agenata na lidere i pratioce dobija linearni vremenski-invarijantan (eng. linear time-invariant, LTI) sistem. Samim tim, u daljnjem će se proučavati konsenzus u mrežama sa ulazima i izlazima u kontekstu pratilaca čija je dinamika

$$\dot{x}_F(t) = -A_F x_F(t) - B_F u(t), \quad (2.10)$$

$$y(t) = -B_F^T x_F(t), \quad (2.11)$$

gdje u označava egzogeni upravljački signal, injektiran od strane lidera. Štaviše, iz (2.10) i (2.11) se vidi da ulazni čvorovi istovremeno imaju ulogu i izlaznih čvorova, pri čemu je matrica B_F definisana u skladu sa geometrijom same mreže. Takođe, važno je uočiti da su matrice sistema (2.10) i (2.11) funkcije grafa \mathcal{G} i načina na koji je izvršena particija.

2.2.4 Kontrolabilnost i opservabilnost mreža sa ulazima i izlazima

Kako je sistem čija je dinamika opisana jednačinama (2.10) i (2.11) linearan, moguće je ispitati njegove osobine standardnim metodama za linearne sisteme. Pri analizi kontrolabilnosti i opservabilnosti ovog sistema, dovoljno je razmotriti samo jednu od ove dvije osobine, jer je struktura jednačina (2.10) i (2.11) takva da jedna osobina implicira drugu.²

Ako je sistem (2.10), (2.11) kontrolabilan, tada se ulazni čvorovi mogu koristiti za upravljanje stanjima pratilaca, tako što će lokalno injektirati odgovarajuće kontinualne signale u mrežu. Slično, ako je sistem opservabilan, tada ulazni čvorovi mogu vršiti estimaciju stanja čitave mreže na osnovu stanja susjednih agenata. U nastavku ovog potpoglavlja će biti prezentovana standardna matično-teorijska perspektiva kontrolabilnosti i opservabilnosti sistema opisanog sa (2.10), (2.11).

Kako je (2.10), (2.11) LTI sistem, kontrolabilnost i opservabilnost mogu biti ispitane koristeći PBH (Popov-Belevitch-Hautus) test. Naime, sistem (2.10) je nekontrolabilan i neopservabilan ako i samo ako postoji lijevi sopstveni vektor matrice A_F koji je ortogonalan na sve vektore kolona matrice B_F , tj. ako je sistem linearnih jednačina

$$v^T A_F = \lambda v^T, \quad v^T B_F = 0,$$

po promjenljivima λ i v , rješiv.³ Kako je matrica A_F simetrična, njeni lijevi i desni

²Imati na umu usvojenju pretpostavku da su lideri i ulazni i izlazni čvorovi sistema, tj. da na isti način interaguju sa ostatkom mreže.

³Primijetiti da su kontrolabilnost i opservabilnost parova (A_F, B_F) i $(-A_F, -B_F)$ ekvivalentne.

sopstveni vektori su isti. Samim tim, potreban i dovoljan uslov za kontrolabilnost i opservabilnost sistema (2.10), (2.11) je da nijedan sopstveni vektor matrice A_F nije istovremeno ortogonalan na sve vektore kolona matrice B_F . Ovo će biti formalizovano u vidu primjedbe.

Primjedba 2.7. Sistem opisan sa (2.10), (2.11), koji modeluje dinamiku konsenzus protokola u mrežama sa ulazima i izlazima, je kontrolabilan i opservabilan ako i samo ako nijedan sopstveni vektor matrice A_F nije istovremeno ortogonalan na sve vektore kolona matrice B_F .

Primjedba 2.7 je od izuzetnog značaja zato što povezuje multiplikativnost sopstvenih vrijednosti matrice A_F i kontrolabilnost mreže u SISO slučaju. Konkretno, pretpostavimo da jedna od sopstvenih vrijednosti matrice A_F nije prosta, tj. da ima geometrijsku multiplikativnost veću od jedan. Kako je A_F simetrična matrica, ova pretpostavka je ekvivalentna tome da skup sopstvenih vrijednosti matrice A_F ne sadrži isključivo različite elemente. Na primjer, neka su v_1 i v_2 dva sopstvena vektora A_F koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrijednosti, čija je geometrijska multiplikativnost veća od jedan; štaviše, pretpostavimo da nijedan od ovih sopstvenih vektora nije ortogonalan na matricu B_F . Tada je $v = v_1 + cv_2$ takođe sopstveni vektor matrice A_F . Konkretno, odabirom $c = \frac{-v_1^T B_F}{v_2^T B_F}$, dobija se

$$v^T B_F = 0.$$

Drugim riječima, uvijek je moguće pronaći sopstveni vektor matrice A_F koji je ortogonalan na matricu B_F , kada neka sopstvena vrijednost ima geometrijsku multiplikativnost veću od jedan. Ova činjenica dovodi do sljedećih opservacija.

Primjedba 2.8. Mreža sa jednim ulazom, u kojoj agenti implementiraju distribuirani konsenzus protokol, čija je kolektivna dinamika opisana sa (2.10), (2.11), je nekontrolabilna (neopservabilna) ako A_F ima makar jednu sopstvenu vrijednost sa geometrijskom multiplikativnošću većom od jedan.

Još jedan važan rezultat iz teorije matrica koji se odnosi na kontrolabilnost sistema (2.10), a koji važi i u SISO i u MIMO slučaju, je dat sljedećom lemom.

Lema 2.9. *Za povezan graf \mathcal{G} , sistem (2.10) je kontrolabilan ako i samo ako matrice $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ i A_F nemaju zajedničkih sopstvenih vrijednosti.*

Dokaz. Ova lema se može preformulisati na sljedeći način – sistem je nekontrolabilan, ako i samo ako postoji makar jedna zajednička sopstvena vrijednost matrica $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ i A_F .

Pretpostavimo da sistem nije kontrolabilan. Tada, na osnovu Primjedbe 2.7 postoji vektor $v_i \in \mathbb{R}^{N_F}$ takav da je $A_F v_i = \lambda v_i$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$, pri čemu je

$$B_F^T v_i = 0.$$

Kako je

$$\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ B_F^T & A_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F v_i \\ B_F^T v_i \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

λ takođe mora biti sopstvena vrijednost matrice $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, sa odgovarajućim sopstvenim vektorom $[v_i^T, 0]^T$. Potreban uslov slijedi odavde.

Dovoljno je pokazati da sistem (A_F, B_F) nije kontrolabilan ukoliko $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ i A_F nemaju zajedničkih sopstvenih vrijednosti. Kako je A_F principalna podmatrica matrice

$\mathcal{L}(\mathcal{G})$, one se može zapisati na sljedeći način

$$A_F = P_F^T \mathcal{L}(\mathcal{G}) P_F,$$

gdje je $P_F = [I_{N_F}, 0]^T$ matrica dimenzija $N \times N_F$. Ako A_F i $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ imaju zajedničku sopstvenu vrijednost, npr. λ , tada odgovarajući sopstveni vektor zadovoljava

$$v = P_F v_F = \begin{bmatrix} v_F \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdje su v i v_F sopstveni vektori matrica $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ i A_F koji odgovaraju sopstvenoj vrijednosti λ , respektivno. Štaviše, poznato je da

$$L(G)v = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ B_F^T & A_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_F \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_F \\ 0 \end{bmatrix},$$

što daje $B_F^T v_F = 0$, pa samim tim sistem nije kontrolabilan. ■

Na kraju, važno je napomenuti da postoji čitava jedna oblast koja se bavi problemom kontrolabilnosti i opservabilnosti mreža iz perspektive teorije grafova. Međutim, rezultati prikazani u ovom potpoglavlju su dovoljni za analizu algoritama u ovoj tezi, tako da ovaj pristup neće biti prezentovan. Više informacija je moguće pronaći u [5, 6, 47, 48].

2.2.5 Postizanje konsenzusa u mrežama sa ulazima i izlazima

Nakon prethodne analize kontrolabilnosti, u ovom dijelu će pažnja biti posvećena problemu dovođenja stanja sistema u potprostor saglasnosti $\text{span}\{1_{N_F}\}$, za šta je potrebno uvesti dodatnu notaciju.

Drugi način za konstrukciju sistemskih matrica A_F i B_F iz (2.10), (2.11) je korišćenjem matrice Laplasijana originalnog grafa:

$$\begin{aligned} A_F &= P_F^T \mathcal{L}(\mathcal{G}) P_F \\ B_F &= P_F^T \mathcal{L}(\mathcal{G}) T_{FL} \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdje se matrica $P_F \in \mathbb{R}^{N \times N_F}$ dobija eliminacijom kolona koje odgovaraju ulaznim čvorovima iz jedinične matrice dimenzija $N \times N$, dok se matrica $T_{FL} \in \mathbb{R}^{N \times N_L}$ formira grupisanjem eliminisanih kolona u novu matricu.

Na primjer, za mrežu prikazanu na slici 2.7 imamo

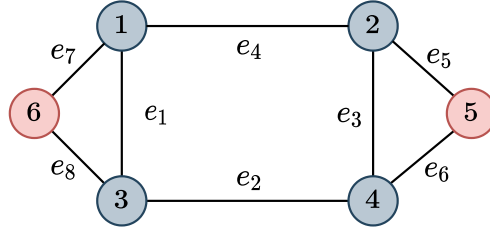
$$\mathcal{V}(\mathcal{G}_L) = \{5, 6\} \text{ i } \mathcal{V}(\mathcal{G}_F) = \{1, 2, 3, 4\},$$

dok je particija matrice incidencije⁴ originalne mreže

$$\mathcal{D}_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathcal{D}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

⁴Sa proizvoljnom orijentacijom grana.



Slika 2.7: Mreža sa ulazima i izlazima.

gdje indeksi kolona matrica \mathcal{D}_F i \mathcal{D}_L odgovaraju granama $e_1 - e_8$. Samim tim,

$$A_F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B_F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

dok je

$$P_F = \begin{bmatrix} I_4 \\ 0_{2 \times 4} \end{bmatrix} \text{ i } T_{FL} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Primjedba 2.10. Ako postoji samo jedan ulazni čvor u mreži, tada je

$$T_{FL} = (I_N - \tilde{P})1_N \text{ i } l_{FL} = -A_F 1_{N_F},$$

gdje je $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_F & 0_{N \times N_L} \end{bmatrix}$ kvadratna matrica dimenzija $N \times N$, koja se dobija proširivanjem matrice P_F blokom nula odgovarajućih dimenzija.

Dokaz. Prva jednačina direktno slijedi iz definicija matrica P_F i T_{FL} . Bez gubitka opštosti, ako pretpostavimo da je posljednji čvor (po indeksu) ulazni čvor, tada važi jednakost $\begin{bmatrix} P_F & T_{FL} \end{bmatrix} = I_N$. Množeći obje strane sa 1_N i uzimajući u obzir da je $\tilde{P}1_N = P_F 1_{N_F}$, lako je pokazati da je $T_{FL} = (I_N - \tilde{P})1_N$.

Štaviše,

$$l_{FL} = P_F^T L(G) \{(I - \tilde{P})1_N\} = P_F^T L(G)1_n - P_F^T L(G)P_F 1_{N_F}. \quad (2.15)$$

Prvi član sa desne strane jednakosti je jednak nuli zato što 1_N pripada jezgru $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, dok je drugi član jednak $A_F 1$. ■

Alternativno, za slučaj kada je egzogeni signal konstantan, dinamika kolektivnog sistema se može zapisati na sljedeći način

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_F(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_F(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Jasno je da se (2.16) dobija kada se vrste koje odgovaraju indeksima lidera u originalnom Laplasijanu grafa postave na nulu. Ova operacija se može matematički definisati pomoću redukovane jedinične matrice Q_r koja ima nule na dijagonalnim elementima koji odgovaraju indeksima lidera, dok su njeni ostali dijagonalni elementi jedinice. U ovom slučaju važi

$$\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_r \mathcal{L}(\mathcal{G}), \quad (2.17)$$

gdje su matrice nula odgovarajućih dimenzija i

$$Q_r = \begin{bmatrix} I_{N_F} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Konvergencija konsenzus protokola sa ulazima

Prvo pitanje koje se nameće je da li konsenzus protokol sa ulazom može da konvergira ka potprostoru saglasnosti $\text{span}\{1\}$, pod uslovom da je egzogeni signal konstantan, tj. $x_i = c$, $\forall i \in \mathcal{V}_L$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Uzimajući u obzir (2.17), u ovom slučaju se konsenzus protokol sa ulazom može predstaviti kao

$$\dot{x}(t) = -Q_r \mathcal{L}(\mathcal{G})x(t) = -\mathcal{L}_r(\mathcal{G})x(t), \quad (2.18)$$

gdje je Q_r redukovana jedinična matrica i $\mathcal{L}_r(\mathcal{G}) = Q_r \mathcal{L}(\mathcal{G})$ redukovana matrica Laplasijana.

Da bi ispitali konvergenciju izraza (2.18) ka $\text{span}\{1\}$ definisaćemo $\zeta(t)$ kao projekciju stanja pratilaca $x_F(t)$ na potprostor koji je ortogonalan na potprostor $\text{span}\{1\}$. Ovaj potprostor se označava sa 1^\perp i naziva *potprostorom nesaglasnosti*. Sada je moguće modelovati dinamiku nesaglasnosti kao

$$\dot{\zeta}(t) = -\mathcal{L}_r(\mathcal{G})\zeta(t). \quad (2.19)$$

Za sistem (2.19) možemo odabrati sljedeću standardnu funkciju Ljapunova,

$$V(\zeta(t)) = \frac{1}{2}\zeta(t)^T \zeta(t),$$

pri čemu je njen izvod jednak

$$\dot{V}(\zeta(t)) = -\zeta(t)^T \bar{\mathcal{L}}_r(\mathcal{G})\zeta(t),$$

gdje je $\bar{\mathcal{L}}_r(\mathcal{G}) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}_r(\mathcal{G}) + \mathcal{L}_r(\mathcal{G})^T]$.

Primjedba 2.11. Konsenzus protokol sa ulazima konvergira ka potprostoru saglasnosti.

Dokaz. Kako je $\dot{V}(\zeta) < 0$ za svako $\zeta \neq 0$ i $Q_r \mathcal{L}(\mathcal{G})1 = 0$, za sve ulazne čvorove, potprostor saglasnosti je globalno privlačan potprostor za (2.18). ■

Primjedba 2.12. Za slučaj jednog ulaznog čvora, spektar matrice $\mathcal{L}_r(\mathcal{G})$ je čisto realan i sadrži isti broj nultih i pozitivnih sopstvenih vrijednosti kao $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Dokaz. Neka je $E = 11^T$ oznaka za matricu svih jedinica. Kako je $E\mathcal{L}(\mathcal{G}) = 0$ i $Q_r \mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}_r(\mathcal{G})$, imamo

$$(Q_r + E)\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}_r(\mathcal{G}).$$

Samim tim $\mathcal{L}_r(\mathcal{G})$ je proizvod pozitivno definitne matrice $Q_r + E$ i simetrične matrice $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. Kao posljedica, $\mathcal{L}_r(\mathcal{G})$ je dijagonalizabilna i ima realni spektar sa jednakim brojem nultih i pozitivnih sopstvenih vrijednosti kao i $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. ■

Stepen konvergencije

Kao što je poznato iz standardne teorije, kada je sistem kontrolabilan, tada stanja čvorova mogu konvergirati ka željenom potprostoru proizvoljno brzo. U ovom slučaju to znači da čvorovi mogu postići konsenzus unaprijed zadatom brzinom.

Primjedba 2.13. Stanje kontrolabilnog sistema (mreže) može konvergirati ka potprostoru saglasnosti proizvoljno brzo.

Dokaz. Invertibilna Gramova matrica kontrolabilnosti (Gramijan kontrolabilnosti) se definiše na sljedeći način

$$W_a(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{sA_F} B_F B_F^T e^{sA_F^T} ds. \quad (2.20)$$

Za bilo koje $t_f > t_0$, ulazni čvor može da injektira u mrežu signal

$$u(t) = B_F^T e^{A_F^T(t_f-t_0)} W_a(t_0, t_f)^{-1} (x_f - e^{A_F(t_f-t_0)} x_0), \quad (2.21)$$

gdje su x_0 i x_f početna i krajnja stanja pratilaca, dok su t_0 i t_f početno i krajnje vrijeme upravljačke akcije (manuvra).

■

U nastavku će biti razmotrene osobine konvergencije mreže (2.18) u koju ulazni čvor injektira konstantan signal. Prije toga definišimo veličinu

$$\mu_2(\mathcal{L}_r(\mathcal{G})) = \min_{\substack{\zeta \neq 0 \\ \zeta \perp 1}} \frac{\zeta^T \bar{\mathcal{L}}_r(\mathcal{G}) \zeta}{\zeta^T \zeta}. \quad (2.22)$$

Primjedba 2.14. Stepen konvergencije vektora $\zeta(t)$, čija je dinamika opisana relacijom (2.19), u slučaju kada ulazni čvor injektira u mrežu konstantan signal je ograničen sa $\mu_2(\mathcal{L}_r(\mathcal{G}))$ i $\lambda_2(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$.

Dokaz. Za drugu najmanju sopstvenu vrijednost matrice Laplasijana grafa, važi

$$\begin{aligned} \lambda_2(\mathcal{L}(\mathcal{G})) &= \min_{\substack{\zeta \neq 0 \\ \zeta \perp 1}} \frac{\zeta^T \mathcal{L}(\mathcal{G}) \zeta}{\zeta^T \zeta} \\ &\leq \min_{\substack{\zeta \neq 0 \\ \zeta \perp 1 \\ \zeta = Q\beta}} \frac{\zeta^T \mathcal{L}(\mathcal{G}) \zeta}{\zeta^T \zeta} \\ &= \min_{\substack{Q\beta \neq 0 \\ Q\beta \perp 1}} \frac{\beta^T Q \mathcal{L}(\mathcal{G}) Q \beta}{\beta^T Q \beta} \\ &= \min_{\substack{Q\beta \neq 0 \\ Q\beta \perp 1}} \frac{\beta^T Q \left\{ \frac{1}{2} (Q \mathcal{L}(\mathcal{G}) + \mathcal{L}(\mathcal{G}) Q) \right\} Q \beta}{\beta^T Q \beta} \\ &= \min_{\substack{Q\beta \neq 0 \\ Q\beta \perp 1}} \frac{\beta^T Q \left(\frac{1}{2} (\mathcal{L}_r(\mathcal{G}) + \mathcal{L}_r(\mathcal{G})^T) \right) Q \beta}{\beta^T Q \beta} \\ &= \min_{\substack{\zeta \neq 0 \\ \zeta \perp 1}} \frac{\zeta^T \bar{\mathcal{L}}_r(\mathcal{G}) \zeta}{\zeta^T \zeta} = \mu_2(\bar{\mathcal{L}}_r(\mathcal{G})), \end{aligned}$$

gdje je β proizvoljan vektor odgovarajućih dimenzija, Q je matrica definisana jednačinom (2.17), pri čemu važi $Q^2 = Q$. U posljednjem tvrđenju se može uočiti da ζ ima specijalnu strukturu, tj. $\zeta = Q\beta$ (nula u redu koji odgovara lideru). Razmatranje dinamike greške ukazuje da ovakva struktura uvijek postoji. Kako ulazni čvor ne ažurira svoju vrijednost, razlika između stanja ulaznog čvora i usaglašene vrijednosti je uvijek nula. Samim tim, uzimajući u obzir dinamiku nesaglasnosti (2.19), važi

$$\dot{V}(\zeta) = -\zeta^T \bar{\mathcal{L}}_r(\mathcal{G})\zeta \leq -\mu_2(\mathcal{L}_r(\mathcal{G}))\zeta^T \zeta \leq -\lambda_2(\mathcal{L}(\mathcal{G}))\zeta^T \zeta.$$

■

Intuitivno se nameće zaključak da će stanja mreže brže konvergirati ka potprostoru saglasnosti ukoliko je ulazni čvor dobro povezan. Međutim, sa povećanjem povezanosti ulaznog čvora takođe se povećava vjerovatnoća da će se pojaviti simetričan graf (u odnosu na taj ulazni čvor), koji je zapravo nekontrolabilan. Najgori slučaj predstavlja potpuni graf kod kojeg je potrebno da $N - 1$ čvorova bude proglašeno liderima kako bi sistem bio kontrolabilan. Naravno, ovaj uslov nije poželjan, jer to znači da skup ulaznih čvorova čine svi čvorovi izuzev jednog.

Generalno, najviše $N - 1$ ulaznih čvorova je potrebno da bi bilo koja mreža bila kontrolabilna. Poznato je da je putanja (kao tip grafa) sa ulaznim čvorom na jednom kraju je kontrolabilan graf. Dakle, moguće je dobiti kontrolabilan graf tako što se, počevši od potpunog grafa, održavaju veze na najdužim putanjama između ulaznog čvora i svih ostalih čvorova, dok se nepotrebne veze brišu, kako bi se eliminisala inherentna simetrija. Ova procedura nije uvijek izvodljiva; na primjer, graf zvijezda nije podložan ovakvim alteracijama grafova.

2.2.6 Kvazi-statički ekvilibrijum sistema

Na osnovu prethodne diskusije, u kojoj se mreža tretira kao dinamički sistem, pri čemu su određeni čvorovi ulazi tog sistema, od naročitog značaja je ispitati na koji način ova perspektiva može biti iskorišćena tako da mreža izvršava željene zadatke.

Pomenuti problem se može neformalno predstaviti kao varijanta ili modifikacija problema „autonomnog upravljanja stadom”. Drugim riječima, *kako je potrebno da se kreću psi (čuvari stada), tako da se stado ponaša na željeni način?* Jasno je da su psi zapravo lideri, koji ujedno predstavljaju i ulaze u mrežu. Kada je skup lidera izabran, mogu se primjeniti razne tehnike upravljanja sistemom. Zapravo, biće pokazano da je ovaj problem ekvivalentan problemu upravljanja invertabilnim linearnim sistemom na takav način da se sistem prevodi iz jednog u drugi takzovani „kvazi-statički” ekvilibrijum.

Smatraćemo da su stanja n -dimenzionalna i međusobno nezavisna, što znači da je moguće raspregnuti dinamiku sistema po svakoj dimenziji, što omogućava analizu performansi predloženih zakona upravljanja u samo jednoj dimenziji. Drugim riječima, neka je $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, stanje i -tog agenta u posmatranoj dimenziji, i neka je $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ vektor stanja grupe agenata u toj dimenziji, gdje je N ukupan broj agenata. Kao što je ranije pokazano, konsenzus protokol će riješiti randevu problem (dovesti stanja svih agenata u istu tačku) dok god je mreža povezana. Ova činjenica će biti korišćena kao polazna tačka za koordinaciju

pratilaca. Razlog za to je, ne konkretna zainteresovanost za randevu problem, već što taj protokol obezbeđuje određenu koheziju među pratiocima.

Imajući na umu particiju mreže na lidere i pratioce, kao što je dato u (2.9), ovdje će biti formalizovana lema od izuzetnog značaja za dalju analizu.

Lema 2.15. *Ako je graf povezan, tada je matrica A_F , dobijena particijom matrice Laplasijana (2.9), pozitivno definitna.*

Dokaz. Poznato je da je matrica Laplasijana $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ pozitivno semidefinitna. Takođe, za povezan graf \mathcal{G} imamo $\ker(\mathcal{L}(\mathcal{G})) = \text{span}\{1\}$. Štaviše, kako je

$$x_F^T A_F x_F = \begin{bmatrix} x_F^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{L}(\mathcal{G}) \begin{bmatrix} x_F \\ 0 \end{bmatrix}$$

i $\begin{bmatrix} x_F^T & 0 \end{bmatrix}^T \notin \ker(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$, kada je $x_F \neq 0$, imamo

$$\begin{bmatrix} x_F^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{L}(\mathcal{G}) \begin{bmatrix} x_F \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \text{ za sve nenulte } x_F \in \mathbb{R}^{N_F},$$

čime je dokazana lema. ■

Kao što je pokazano, konsenzus protokol funkcioniše tako što usrednjava doprinos susjednih čvorova na distribuirani način. Samim tim, za određivanje trajektorija pratilaca, prirodno je početi od

$$\dot{x}_F(t) = -A_F x_F(t) - B_F x_L(t). \quad (2.23)$$

Teorema 2.16. *Za fiksne pozicije lidera x_L , stanja pratilaca će konvergirati ka kvazi-statičkom ekvilibrijumu*

$$x_F = -A_F^{-1} B_F x_L, \quad (2.24)$$

koji je globalno asimptotski stabilan.

Dokaz. Na osnovu leme slijedi da je matrica A_F invertabilna, što znači da je vrijednost sa desne strane jednakosti (2.24) konačna. Samim tim, tačka ekvilibrijuma je jedinstvena. Štaviše, kako je A_F pozitivno definitna matrica, ova tačka ekvilibrijuma je globalno asimptotski stabilna. ■

2.3 Optimalno upravljanje

Kako se lideri tretiraju kao ulazi u mrežu, zbog jednostavnosti i podudaranja sa standardnim oznakama u literaturi uvešćemo matrice $A = -A_F$ i $B = -B_F$, kao i oznake x za x_F i u za x_L . Koristeći ovu notaciju, dinamika pratilaca umreženog sistema se može zapisati kao

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (2.25)$$

Jasno je da ovakva notacija odgovara modifikaciji dekompozicije Laplasijana (2.9), tako što se dodaje predznak minus, tj.

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = - \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -A_L \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Kako ne postoje ograničenja na vrijednosti stanja lidera, neka je

$$\dot{u}(t) = v(t),$$

gdje je $v(t)$ upravljački signal.

Za fiksno u , kvazi-statički ekvilibrijum sistema (2.25) dat je sa

$$x^* = -A^{-1}Bu. \quad (2.27)$$

Razmatrimo sada problem premještanja (x, u) iz početne tačke, koja zadovoljava (2.27), u finalnu tačku koja takođe zadovoljava (2.27). Štaviše, cilj je odraditi ovo u konačnom vremenskom intervalu, te se stoga funkcija performanse definiše na sljedeći način:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\dot{x}(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{u}(t)^T Q \dot{u}(t) \right) dt, \quad (2.28)$$

gdje je pretpostavljeno da su P i Q pozitivno semidefinitna i pozitivno definitna matrica, respektivno. Problem optimalnog upravljanja se sada može formalizovati kao

$$\min_v J, \quad (2.29)$$

pod uslovom da je $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, sa graničnim uslovima $x(0) = -A^{-1}Bu_0$ i $x(T) = -A^{-1}Bu_T$, za zadato u_0 i u_T .

Potrebno je uočiti da u ovom slučaju nije neophodno da je mreža kontrolabilna, iako je za generalni problem prevođenja sistema iz jednog stanja u drugo potrebna. Da bi se ovo jasnije vidjelo pretpostavimo, bez gubitka opštosti, da postoji (parcijalna) Kalmanova dekompozicija,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

gdje je x_c kontrolabilno, a x_u je nekontrolabilno stanje⁵. Sada, za fiksno u^e , gdje eksponent e označava ekvilibrijum, kvazi-statički ekvilibrijum je dat sa

$$0 = \begin{bmatrix} A_{11}x_c^e + A_{12}x_u^e + B_1u^e \\ A_{22}x_u^e \end{bmatrix}.$$

Kako je matrica A invertabilna (samim tim i A_{22}) što znači da će važiti $x_u^e = 0$. Samim tim važiće $x_u(0) = 0$ i $x_u(T) = 0$, tako da se pažnja može ograničiti na netrivialan dio ovog sistema, tj.

$$\dot{x}_c(t) = A_{11}x_c(t) + A_{12}x_u(t) + B_1u(t).$$

Međutim, kako je $x_u(t) = 0$ na intervalu $[0, T]$, imamo

$$\dot{x}_c(t) = A_{11}x_c(t) + B_1u(t),$$

a kako je (A_{11}, B_1) kontrolabilan par, prevođenje iz tačke u tačku je uvijek moguće.

⁵Korišćena je ova parcijalna Kalmanova dekompozicija pošto nema matrice opservacije.

Sada, da bi se riješio problem optimalnog upravljanja [49, 50], prvo je potrebno formirati Hamiltonijan

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left(\dot{x}(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{u}(t)^T Q \dot{u}(t) \right) + \lambda(t)^T (Ax(t) + Bu(t)) + \mu(t)^T v(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[x(t)^T A^T P A x(t) + 2x(t)^T A^T P B u(t) + u(t)^T B^T P B u(t) + v(t)^T Q v(t) \right] \\ &\quad + \lambda(t)^T (Ax(t) + Bu(t)) + \mu(t)^T v(t),\end{aligned}$$

gdje su λ i μ ko-stanja. Potreban uslov optimalnosti prvog reda daje

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} &= v^T Q + \mu^T = 0 \Rightarrow v = -Q^{-1} \mu, \\ \dot{\lambda}(t) &= -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)^T = -A^T P A x(t) - A^T P B u(t) - A^T \lambda(t), \\ \dot{\mu}(t) &= -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\right)^T = -B^T P A x(t) - B^T P B u(t) - B^T \lambda(t).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Drugim riječima, uvođenjem $z(t) = [x(t)^T, u(t)^T, \lambda(t)^T, \mu(t)^T]^T$ dobija se Hamiltonov sistem

$$\dot{z}(t) = M z(t),\tag{2.31}$$

gdje je

$$M = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} \\ -A^T P A & -A^T P B & -A^T & 0 \\ -B^T P A & -B^T P B & -B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je dovoljno pronaći početne uslove ko-stanja. Sa tim ciljem, uvedimo sljedeći vektor:

$$z_0 = [x_0^T, u_0^T, \lambda_0^T, \mu_0^T]^T,$$

gdje je $x_0 = -A^{-1} B u_0$, a λ_0 i μ_0 su nepoznati parametri koje je potrebno odrediti. Zapravo, problem se svodi na egzaktan odabir ko-stanja λ_0 i μ_0 na takav način da važi

$$x(T) = -A^{-1} B u_T = x_T.$$

Da bi ovo postigli, izvršićemo particiju matričnog eksponenta na sljedeći način

$$e^{MT} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xu} & \phi_{x\lambda} & \phi_{x\mu} \\ \phi_{ux} & \phi_{uu} & \phi_{u\lambda} & \phi_{u\mu} \\ \phi_{\lambda x} & \phi_{\lambda u} & \phi_{\lambda\lambda} & \phi_{\lambda\mu} \\ \phi_{\mu x} & \phi_{\mu u} & \phi_{\mu\lambda} & \phi_{\mu\mu} \end{bmatrix}.\tag{2.32}$$

Početne uslove ko-stanja je moguće pronaći rješavanjem jednačine

$$\begin{bmatrix} x_T \\ u_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xu} & \phi_{x\lambda} & \phi_{x\mu} \\ \phi_{ux} & \phi_{uu} & \phi_{u\lambda} & \phi_{u\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \\ \lambda_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}.$$

Uvođenjem smjena

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xu} \\ \phi_{ux} & \phi_{uu} \end{bmatrix}, \text{ i } \Phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{x\lambda} & \phi_{x\mu} \\ \phi_{u\lambda} & \phi_{u\mu} \end{bmatrix},$$

dobija se

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = \Phi_2^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_T \\ u_T \end{bmatrix} - \Phi_1 \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \right).$$

Kako se razmatra problem kvazi-statičkog ekvilibrijuma, imamo

$$x_0 = -A^{-1}Bu_0 \text{ i } x_T = -A^{-1}Bu_T,$$

pa su početni uslovi ko-stanja:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = -\Phi_2^{-1}\Psi \begin{bmatrix} u_0 \\ u_T \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \phi_{xx}A^{-1}B - \phi_{xu} & -A^{-1}B \\ \phi_{ux}A^{-1}B - \phi_{uu} & I \end{bmatrix}.$$

Invertabilnost matrice Φ_2 slijedi direktno iz činjenice da ovaj konkretni problem prevođenja iz jedne tačke u drugu ima jedinstveno rješenje [29].

Glava 3

Kooperativna regulacija izlaza u multiagentnim sistemima

Tokom prethodne dvije decenije posvećena je značajna pažnja od strane istraživača kooperativnom upravljanju multiagentnim sistemima (MAS). Glavni razlog za veliku zainteresovanost je široka primjenljivost ove oblasti u kooperaciji multirobotskih sistema [51, 52], distribuiranim senzorskim mrežama [53, 54], mikromrežama [55, 56], mrežama za transport [57], biološkim mrežama [58] itd. Dominantno proučavani problemi iz oblasti kooperativnog upravljanja multiagentnim sistemima su: problemi konsenzusa/sinhronizacije/randevu [59–63], distribuirano upravljanje formacijama [64–66] i kooperativna regulacija izlaza sistema [19, 20, 67].

U prethodnoj glavi je razmatrano upravljanje mrežom na takav način što određeni čvorovi u mreži (lideri) injektiraju konstantan signal u mrežu. Ukoliko je potrebno da pratioci zauzmu novu poziciju u prostoru stanja, tada lideri treba da generišu novi upravljački signal u skladu sa željenim ekvilibrijumom. Ovakav način upravljanja predstavlja specijalan slučaj problema kooperativne regulacije izlaza sistema. Konkretno, problem kooperativne regulacije podrazumijeva da svaki agent treba da prati (neprekidnu) referentnu trajektoriju koja je zadata linearnom kombinacijom stanja autonomnog egzogenog sistema (egzosistema) [19]. Ovaj problem može biti riješen za svakog agenta u mreži zasebno, upravljačkim zakonom koji sadrži informacije o stanju agenta i stanju egzosistema. Kada stanje egzosistema nije direktno dostupno, potrebno ga je estimirati pomoću distribuiranog opservera. Međutim, za realizaciju opservera je potrebno da informacija o modelu egzosistema bude dostupna svim agentima. Adaptivni algoritam koji rješava problem regulacije izlaza sistema u slučaju kada agenti nemaju informaciju o modelu egzosistema je predložen u [68, 69].

U međuvremenu, razvijeni su razni pristupi u kojima agenti nemaju informacije o cilju koji je potrebno ostvariti, tj. o referentnim trajektorijama koje je potrebno pratiti [21, 70–72]. Naime, dinamika individualnih agenata u mreži je modelovana jednostrukim integratorom, pri čemu su agenti podijeljeni na lidere i pratiocce. Polazna pretpostavka je da se liderima, koji imaju pristup stanjima egzosistema, može direktno upravljati. Njihova uloga je da injektiraju odgovarajuće upravljačke signale u mrežu, na takav način da pratioci prate željene referentne trajektorije. Sa druge strane, smatra se da pratioci implementiraju standardni konsenzus protokol [21, 71]. Ovaj pristup pronalazi primjene u multirobotskim sistemima, u kojima se upra-

vlja timom mobilnih robota tako da kooperativno izvršavaju kompleksne dinamičke zadatke [21, 24]. Drugi primjer primjene ovog pristupa su mikromreže koje formiraju komunikacionu mrežu u kojoj je potrebno da distribuirani generatori usklade proizvodnju u zavisnosti od potražnje [73, 74].

Ova glava je organizovana na sljedeći način. U potpoglavlju 3.1 je prezentovan uobičajen način za modelovanje dinamike egzosistema i izvedene su regulatorske jednačine koje imaju centralnu ulogu pri rješavanju problema regulacije izlaza sistema. Potpoglavlje 3.2 sadrži opis upravljačkog algoritma za kooperativno praćenje željenih trajektorija. Naime, prvo je dato centralizovano rješenje, nakon čega je izvršena decentralizacija algoritma. Dobijeni decentralizovani algoritam služi kao referenca za poređenje sa algoritmom koji je predložen u ovoj tezi.

3.1 Osnovni pojmovi

U prvom dijelu ovog potpoglavlja će biti definisan egzosistem, čije se stanje koristi za generisanje željene referentne periodične trajektorije [75]. Konkretno, biće pokazano na koji način se generiše referentni signal koji aproksimira generičnu periodičnu funkciju kao linearnu kombinaciju $h \in \mathbb{N}$ harmonika.

Problem regulacije izlaza sistema, koji je riješen u drugom dijelu ovog potpoglavlja za slučaj statičke sprege po stanjima, je od izuzetnog značaja ne samo u modernoj, već i klasičnoj teoriji upravljanja. Osnovni cilj je dizajn regulatora koji na osnovu povratne sprege, uz prisustvo spoljašnjih poremećaja: (1) obezbjeđuje unutrašnju stabilnost spregnutog sistema, (2) eliminiše ili minimizuje grešku u praćenju referentnog signala. Pri rješavanju problema regulacije izlaza sistema pretpostavlja se da su poznate frekvencije od kojih se sastoje referentni signal i signal poremećaja, pri čemu su oba signala izlazi egzosistema.

3.1.1 Model egzosistema

Neka je data generična periodična funkcija $f(t) \in \mathbb{R}$, sa periodom $T > 0$, tj.

$$f(t) = f(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Egzosistem se definiše kao autonomni sistem, opisan vektorom stanja $\xi \in \mathbb{R}^{2h+1}$. Dinamika stanja egzosistema je opisana relacijom

$$\dot{\xi} = S\xi, \quad (3.2)$$

gdje je $S \in \mathbb{R}^{(2h+1) \times (2h+1)}$ blok-dijagonalna matrica

$$S = \begin{bmatrix} S_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_h \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

pri čemu su individualni blokovi S_p definisani na sljedeći način

$$S_p = \begin{cases} 0, & \text{za } p = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & p\frac{2\pi}{T} \\ -p\frac{2\pi}{T} & 0 \end{bmatrix}, & \text{za } p = 1, \dots, h. \end{cases} \quad (3.4)$$

Za ovako definisan egzogeni sistem (3.2), (3.3) i (3.4), lako je uočiti da bilo koja periodična funkcija sa periodom T može biti aproksimirana linearnom kombinacijom elemenata vektora ξ .

Razmotrimo generičnu periodičnu funkciju $f(t)$, sa periodom $T > 0$, formalno definisanu u (3.1). Poznato je da se svaka periodična funkcija može razviti u Furijeov red

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\alpha_p \cos\left(\frac{2\pi}{T}pt\right) + \beta_p \sin\left(\frac{2\pi}{T}pt\right) \right], \quad (3.5)$$

gdje članovi α_p i β_p označavaju Furijeove koeficijente koji su definisani na sljedeći način, $\forall p \geq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}pt\right) dt, \\ \beta_p &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}pt\right) dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Za konačan broj harmonika h , periodična funkcija $f(t)$ se može aproksimirati sumom konačnog broja elemenata

$$f(t) \approx \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{p=1}^h \left[\alpha_p \cos\left(\frac{2\pi}{T}pt\right) + \beta_p \sin\left(\frac{2\pi}{T}pt\right) \right]. \quad (3.7)$$

Rješenje diferencijalne jednačine (3.2) je

$$\xi(t) = e^{St}\xi_0, \quad (3.8)$$

gdje je $\xi_0 \in \mathbb{R}^{2h+1}$ početno stanje egzosistema. Za specijalan slučaj, kada je

$$\xi_0 = [1, 0, 1, 0, \dots, 1]^T,$$

rješenje diferencijalne jednačine (3.2) je

$$\xi(t) = \left[1 \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \cdots \quad \sin\left(h\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \cos\left(h\frac{2\pi}{T}t\right) \right]^T. \quad (3.9)$$

Tada, uzimajući u obzir (3.7), periodična funkcija $f(t)$ se može aproksimirati linearnom kombinacijom komponenti vektora stanja egzosistema ξ .

3.1.2 Regulatorske jednačine

Neka je model sistema zadat standardnim modelom u prostoru stanja

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_x\xi(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_yu(t) + E_y\xi(t) \\ e(t) = C_ex(t) + D_eu(t) + E_e\xi(t) \end{cases}, \quad (3.10)$$

gdje je $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ i $e \in \mathbb{R}^q$. Egzosistem je opisan modelom u prostoru stanja (3.2):

$$\dot{\xi} = S\xi.$$

Cilj je definisati upravljački zakon $u(t)$, tako da regulisani signal e teži nuli u stacionarnom stanju. Za potrebe analize u ovoj tezi dovoljno je razmatrati statički slučaj,

tj. smatraće se da je upravljački zakon u trenutku t , $u(t)$, funkcija stanja sistema $x(t)$ i egzogenog signala $\xi(t)$ u datom trenutku. Važno je uočiti da dostupnost $x(t)$ omogućava zatvaranje povratne sprege po stanjima. Najjednostavnije je definisati upravljački signal kao linearnu kombinaciju stanja sistema x i egzogenog signala ξ , tj.

$$u(t) = Fx(t) + G\xi(t). \quad (3.11)$$

Uvrštavanjem (3.11) u (3.10), dobija se

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + (BG + E_x)\xi(t) \\ y(t) = (C_y + D_yF)x(t) + (D_yG + E_y)\xi(t) \\ e(t) = (C_e + D_eF)x(t) + (D_eG + E_e)\xi(t) \end{cases} .$$

Neka je matrica Π takva da je $\Pi\xi$ željena trajektorija sistema u stacionarnom stanju. Tada, uzimajući u obzir (3.2), može se definisati devijacija stanja sistema od vrijednosti u stacionarnom stanju

$$\tilde{x} = x - \Pi\xi \Rightarrow x = \tilde{x} + \Pi\xi \text{ odnosno } \dot{\tilde{x}} = \dot{\tilde{x}} + \Pi S\xi,$$

čijim uvrštavanjem u prethodni izraz se dobija

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A + BF)\tilde{x} + [(A + BF)\Pi + (E_x + BG) - \Pi S] \xi(t) \quad (3.12a)$$

$$e(t) = (C_e + D_eF)\tilde{x}(t) + [C_e\Pi + D_e(F\Pi + G) + E_e] \xi(t) \quad (3.12b)$$

Izjednačavanjem izraza uz ξ iz (3.12a) sa nulom, dobija se *prva regulatorska jednačina*

$$(A + BF)\Pi + (E_x + BG) - \Pi S = 0.$$

Rješenje dobijene diferencijalne jednačine je

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A + BF)\tilde{x}(t) \Rightarrow \tilde{x}(t) = e^{(A+BF)t}\tilde{x}(0),$$

koje zajedno sa (3.8), uvrštavanjem u (3.12b), daje

$$e(t) = (C_e + D_eF)e^{(A+BF)t}\tilde{x}(0) + [C_e\Pi + D_e(F\Pi + G) + E_e] e^{St}\xi(0).$$

Kako je cilj da je sistem stabilan, tj. $\lambda(A + BF) \in \mathbb{C}^-$, pravilnim odabirom matrice F tako da je ovaj uslov ispunjen, prvi član s desne strane asimptotski konvergira ka nuli. Budući da je matrica stanja egzosistema S takva da je $\lambda(S) \in \mathbb{C}^+$, veličina e^{St} neće konvergirati ka nuli, pa je za rješavanje posmatranog problema potrebno da izraz uz taj član bude jednak nuli. Na ovaj način se dobija *druga regulatorska jednačina*

$$C_e\Pi + D_e(F\Pi + G) + E_e = 0.$$

Konačno, uvođenjem smjene

$$\Gamma = F\Pi + G, \quad (3.13)$$

sređivanjem prve i druge regulatorske jednačine dobija se

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + E_x \quad (3.14a)$$

$$0 = C_e\Pi + D_e\Gamma + E_e \quad (3.14b)$$

što je najčešći zapis *regulatorskih jednačina*. Konačno, uvrštavanjem Γ u (3.11), zakon upravljanja dobija oblik

$$u(t) = Fx(t) + (\Gamma - F\Pi)\xi(t). \quad (3.15)$$

Važno je primijetiti da je pri izvođenju regulatorskih jednačina implicitno usvojena pretpostavka da je par (A, B) stabilizabilan. Takođe, osvrćući se na potpoglavlje 3.1.1, jasno je da je matrica S anti-Hurwitz stabilna, tj. $\lambda(S) \in \mathbb{C}^+$. Jednačina (3.14a) je Silvestrova jednačina, i ima jedinstveno rješenje Π ako važi $\lambda(A + BF) \cap \lambda(S) = \emptyset$. Ovaj uslov je zadovoljen usvajanjem prethodno pomenutih pretpostavki.

Sam proces rješavanja regulatorskih jednačina nije trivijalan. Zbog toga će biti ukratko prikazan postupak rješavanja specijalnog slučaja regulatorskih jednačina, prikazanog u (3.25), koji se javlja u nastavku teze¹.

Definišimo matricu $\bar{S} \in \mathbb{R}^{(2h+1)N_F \times (2h+1)}$ na sljedeći način:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^1 \\ \vdots \\ S^{N_F-1} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Neka je $Z \in \mathbb{R}^{N_L \times (2n+1)}$ proizvoljno odabrana matrica parametara. Dalje, uvedimo matricu $Q \in \mathbb{R}^{N_F N_L \times (2n+1)}$ koja je definisana kao

$$Q = \begin{bmatrix} Z \\ ZS \\ \vdots \\ ZS^{N_F-1} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Kao što je pokazano u [76], moguće je definisati $\Xi \in \mathbb{R}^{N_F \times N_F N_L}$ i $\Theta \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}$ tako da generalizovanu Silvestrovu jednačinu (3.25a) rješavaju matrice

$$\begin{cases} \Pi = \Xi Q \\ \Gamma = Z\Theta \end{cases}. \quad (3.18)$$

3.2 Kooperativno praćenje trajektorija u multia- gentnim sistemima

Razmotrimo mrežu koja se sastoji od N povezanih agenata, čija je komunikaci-
ona topologija modelovana neusmjerenim, povezanim, prostim, fiksним, težinskim
grafom $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Skup čvorova grafa je označen sa $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$, dok je skup
grana označen sa $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Ovaj graf je opisan simetričnom, težinskom matri-
com susjedstva $\mathcal{A} = [w_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, gdje je $w_{ij} > 0$ za svako $(i, j) \in \mathcal{E}$ i $w_{ij} = 0$
u suprotnom. Grana $(i, j) \in \mathcal{E}$ znači da agent j može da šalje informacije agen-
tu i , kao i da mjeri relativno stanje u odnosu na njega, i obratno. Potrebno je
napomenuti da težinska matrica susjedstva, koja će ubuduće biti kratko nazivana

¹Zbog korišćenja oznaka uvedenih u narednom potpoglavlju, najbolje je vratiti se na ovaj dio nakon čitanja ostatka glave.

matricom susjedstva, predstavlja generalizaciju matrice susjedstva uvedene u Glavi 1, za koju važi $w_{ij} = 1$, $(i, j) \in \mathcal{E}$. Skup susjeda se definiše na identičan način $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}\}$, dok je matrica stepena $\mathcal{D} = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ dijagonalna matrica, pri čemu je $d_{ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}$. Matrica Laplasijana grafa \mathcal{G} je data izrazom $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, što znači da je suma članova svake vrste matrice \mathcal{L} jednaka nuli.

Particija agenata se vrši na one kojima je moguće direktno upravljati – lidere, i one koji implementiraju konsenzus protokol – pratioce. Pretpostavlja se da se dinamika pratilaca može modelovati jednostrukim integratorom. U praksi, na ovaj način je moguće modelovati nekoliko tipova robota, poput mobilnih robota sa točkovima [77] i UAV [78], [24]. Ako se sa x_i označi stanje i -tog agenta, tada se individualna dinamika agenata može zapisati na sljedeći način:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_j - x_i), & \text{za } i \in \mathbb{F} \\ x_i = u_i, & \text{za } i \in \mathbb{L} \end{cases}, \quad (3.19)$$

gdje su agenti indeksirani tako da prvih N_F agenata predstavlja pratioce, dok preostalih N_L agenata predstavlja lidere. U skladu sa usvojenim načinom indeksiranja, pratioci i lideri će biti definisani skupovima $\mathbb{F} \triangleq \{1, \dots, N_F\}$ i $\mathbb{L} \triangleq \{N_{F+1}, \dots, N\}$, respektivno. Veličina $u_i = u_i(t) \in \mathbb{R}$ predstavlja upravljački signal i -tog lidera, pri čemu je korisno napomenuti da se podrazumijeva da se stanjem lidera može direktno upravljati, iako ova pretpostavka nije realna. Ovakva pretpostavka omogućava jednostavnu notaciju, dok se u stvarnosti željeno ponašanje lidera može postići dovoljno brzim i preciznim kontrolerom.

Pored već navedene pretpostavke da su agenti opremljeni sensorima kojima mogu da mjere relativno stanje susjednih agenata, takođe će biti usvojena dodatna pretpostavka da svaki lider može da izmjeri i prvi izvod stanja susjednih agenata. Particija matrice Laplasijana će biti izvršena u skladu sa (2.26). Uvođenjem oznaka $x_F = [x_1, \dots, x_{N_F}]^T$ i $x_L \triangleq u = [x_{N_{F+1}}, \dots, x_N]^T$ za stanja pratilaca i lidera, respektivno, dinamiku mreže pratilaca je moguće modelovati u prostoru stanja kao standardni LTI sistem

$$\begin{cases} \dot{x}_F = Ax_F + Bu \\ y = B^T x_F \end{cases}. \quad (3.20)$$

Veličina $y \in \mathbb{R}^{N_L}$ je izlazni vektor mreže pratilaca, odnosno ulazni vektor mreže lidera. Korisno je napomenuti da je y linearna kombinacija stanja onih pratilaca koji za susjede imaju lidere, tj. elementi vektora y su veličine koje lideri mogu izmjeriti. Prije daljeg izlaganja biće uvedena sljedeća pretpostavka:

Pretpostavka 1. Između lidera postoji povezan, neusmjeren graf.

Referentne trajektorije koje pratioci treba da prate, u oznaci $x_S(t) \in \mathbb{R}^{N_F}$, su date izrazom

$$x_S(t) = J\xi(t), \quad (3.21)$$

gdje je $J \in \mathbb{R}^{N_F \times (2h+1)}$, dok je $\xi(t)$ stanje egzosistema, definisanog u potpoglavlju 3.1.1. Matricom J se zapravo zadaje odgovarajuća linearna kombinacija konačnog broja harmonika, koja aproksimira željenu periodičnu funkciju. Dakle, nakon odabira periode T i broja harmonika h , preostaje da se specifikacijom matrice J definiše jedinstvena, željena referentna trajektorija x_S .

U nastavku rada će biti opisana metodologija za rješavanje problema regulacije izlaza u multiagentnom sistemu (3.20). Cilj je definisati upravljački zakon $u(t)$ (stanja lidera), tako da stanje mreže pratilaca x_F konvergira ka željenoj trajektoriji x_S . Prvo će biti prezentovan centralizovani pristup, a zatim i odgovarajuće decentralizovano rješenje.

3.2.1 Centralizovano rješenje problema praćenja referentnih trajektorija u multiagentnim sistemima

Odstupanje stanja pratilaca od zadatih trajektorija (greška u praćenju) $e(t) \in \mathbb{R}^{N_F}$ se definiše na sljedeći način

$$e(t) = x_F(t) - \underbrace{J\xi(t)}_{x_S(t)}. \quad (3.22)$$

Uzimajući u obzir (3.2), (3.20) i (3.22), jednačine koje opisuju dinamiku multiagentnog sistema se mogu zapisati na sljedeći način:

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = Ax_F(t) + Bu(t) \\ y(t) = B^T x_F(t) \\ e(t) = x_F(t) - J\xi(t) \\ \dot{\xi}(t) = S\xi(t) \end{cases}. \quad (3.23)$$

U potpoglavlju 3.1.2 je pokazano da se problem regulacije izlaza sistema može riješiti upravljačkim zakonom

$$u(t) = Fx_F(t) + (\Gamma - F\Pi)\xi(t). \quad (3.24)$$

Poređenjem (3.23) sa postavkom problema regulacije u generalizovanom slučaju (3.10), lako je zaključiti da se regulatorske jednačine za sistem (3.23) dobijaju uvrštavanjem $E_x = 0$, $D_y = 0$, $E_y = 0$, $D_e = 0$, $C_y = B^T$, $C_e = I$, $E_e = -J$, i oblika su

$$A\Pi + B\Gamma = \Pi S \quad (3.25a)$$

$$\Pi - J = 0 \quad (3.25b)$$

Jednačina (3.25a) je generalizovana Silvestrova jednačina [76], dok se (3.25b) može riješiti zadovoljavanjem jednakosti

$$J = \Pi, \quad (3.26)$$

što ujedno predstavlja i ograničenje pri izboru referentnih trajektorija. Rješenje jednačine (3.25a) je dato izrazom (3.18). Ovo rješenje postoji ako matrice A i I nemaju zajedničkih sopstvenih vrijednosti sa matricom S [24]. Iako je ovaj uslov uvijek ispunjen za I , nije i za A . Međutim, moguće je odabrati težinske koeficijente grana grafa \mathcal{G} tako da uslov uvijek bude zadovoljen.

Za implementaciju zakona upravljanja (3.24), potrebno je da svaki lider ima informaciju o stanju čitave mreže pratilaca x_F . Sistem zadat izrazom (3.20) je standardni LTI sistem što znači da klasični pojmovi poput kontrolabilnosti i opservabilnosti mogu biti primijenjeni. Već je rečeno u potpoglavlju 2.2.4 da je ovakav multiagentni

sistem opservabilan ako i samo ako je kontrolabilan. Štaviše, u radu [79] je pokazano da slučajnim odabirom težinskih koeficijenata povezanog grafa gotovo je zagarantovana kontrolabilnost i opservabilnost mreže. U nastavku će se podrazumijevati da je topologija definisana na takav način da je multiagentni sistem opservabilan. Tada je moguće dizajnirati standardni Luenbergerov opserverser za estimaciju stanja x_F [75, 80], koja će u nastavku biti označena sa $\hat{x}_F \in \mathbb{R}^{N_F}$. Opserverser ima sljedeću dinamiku

$$\dot{\hat{x}}_F = A\hat{x}_F + Bu - L(y - B^T\hat{x}_F), \quad (3.27)$$

pri čemu se adekvatnim odabirom pojačanja opserversera $L \in \mathbb{R}^{N_F \times N_L}$ može obezbijediti da estimirana stanja konvergiraju ka stvarnim vrijednostima.

Greška u estimaciji, u oznaci $\eta \in \mathbb{R}^{N_F}$, će biti definisana kao

$$\eta = x_F - \hat{x}_F. \quad (3.28)$$

Greška u estimaciji će konvergirati ka nuli ako i samo ako sopstvene vrijednosti matrice $(A + LB^T)$ imaju negativan realan dio. Kao što je poznato, ako je sistem opservabilan, tada je uvijek moguće odrediti matricu L takvu da ovaj uslov bude ispunjen.

Konačno, uvrštavanjem stanja opserversera (3.27) u (3.24), upravljački zakon $u(t)$ poprima oblik

$$u(t) = F\hat{x}_F(t) + (\Gamma - F\Pi)\xi(t). \quad (3.29)$$

3.2.2 Decentralizovano rješenje problema praćenja referentnih trajektorija u multiagentnim sistemima

Centralizovani upravljački algoritam se može decentralizovati tako što će svaki lider implementirati opserverser (3.27) i izračunati upravljački zakon (3.29), pri čemu h -ti lider treba da izvrši samo h -tu komponentu upravljačkog vektora $u(t)$. Važno je uočiti da je za implementaciju opserversera potrebno da lideri imaju informaciju o kompletnom izlaznom vektoru y . Međutim, kako h -ti lider komunicira samo sa susjednim pratiocima, njemu će biti poznata samo h -ta komponenta vektora y .

Pod Pretpostavkom 1, u nastavku će biti opisana decentralizovana metodologija na osnovu koje lideri estimiraju kompletan vektor y . Neka je $\hat{y}_h \in \mathbb{R}^{N_L}$ estimacija vektora y od strane h -tog lidera, i neka je $\hat{y} = [\hat{y}_1^T, \hat{y}_2^T, \dots, \hat{y}_{N_L}^T]^T$ vektor koji sadrži estimacije svih lidera. Štaviše, neka je $v_h = y - \hat{y}_h$ greška u estimaciji izlaznog vektora od strane h -tog lidera. Definišimo $v = [v_1^T, v_2^T, \dots, v_{N_L}^T]^T$, te je

$$v = 1_{N_L} \otimes y - \hat{y}, \quad (3.30)$$

gdje simbol \otimes označava Kronekerov proizvod.

Izlazni vektor y se sastoji od N_L elemenata, pa je potrebno implementirati decentralizovani estimator za svaku komponentu vektora y , tako da svaki lider može da formira estimaciju cjelokupnog vektora. Konkretno, estimator za h -tu komponentu izlaznog vektora k -tog lidera je označen sa $\hat{y}_k[h]$, $\forall k = 1, \dots, N_L$ i taj estimator treba dizajnirati tako da važi

$$\hat{y}_k[h] \rightarrow y[h], \quad \forall k = 1, \dots, N_L. \quad (3.31)$$

Konvergencija je osigurana činjenicom da h -ti lider ima pristup h -tom elementu vektora y , te on može da injektira vremenski promjenljivu referencu $y[h]$ u proces estimacije.

Lideri estimiraju h -tu komponentnu izlaznog vektora pomoću sljedećeg dinamičkog konsenzus protokola [24, 81]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}}_k[h] = \frac{1}{|\mathcal{N}_k^*|} \sum_{j \in \mathcal{N}_k^*} \left[\dot{\hat{y}}_j[h] - \alpha(\hat{y}_k[h] - \hat{y}_j[h]) \right], \forall k \neq h \\ \dot{\hat{y}}_h[h] = \dot{y}[h] - \alpha(\hat{y}_h[h] - y[h]) \sum_{j \in \mathcal{N}_h^*} \alpha(\hat{y}_h[h] - \hat{y}_j[h]) \end{cases}, \quad (3.32)$$

za svako $h = 1, \dots, N_L$, gdje je $\alpha > 0$ parametar koji je potrebno zadati u cilju podešavanja brzine konvergencije algoritma. Skup $\mathcal{N}_k^* \subseteq \mathcal{N}_k$ je skup svih lidera koji su susjedni k -tom lideru, dok je $|\mathcal{N}_k^*| = \sum_{j \in \mathcal{N}_k^*} w_{kj}$.

Lema 3.1. *Algoritam za estimaciju izlaznog signala (3.32) osigurava da greška u estimaciji izlaznog signala v , definisana izrazom (3.30), asimptotski konvergira ka nuli.*

Dokaz. Dokaz konvergencije je zasnovan na [81]², gdje je definisana decentralizovana šema za estimaciju u multiagentnim sistemima koja garantuje konvergenciju ka vremenski-promjenljivom referentnom signalu koji je mjerljiv samo od strane jednog agenta. Konkretno, algoritam za estimaciju definisan jednačinom (3.32) korespondira algoritmu predloženom u [81], pri čemu je podrazumijevano da h -ti lider mjeri vremenski promjenljivu vrijednost $y[h]$, uključujući i njen izvod po vremenu $\dot{y}[h]$.

Shodno (3.20), izraz

$$\dot{y}[h] = (B[:, h])^T \dot{x}.$$

predstavlja glatku vremenski-promjenljivu funkciju. Posljedično, pod Pretpostavkom 1, u [81] je dokazana konvergencija algoritma za estimaciju (3.32), $\forall \alpha > 0$, tj.

$$\hat{y}_k[h] \rightarrow y[h], \quad \forall k = 1, \dots, N_L, \quad (3.33)$$

što dalje implicira

$$\hat{y}_k \rightarrow y, \quad \forall k = 1, \dots, N_L. \quad (3.34)$$

Na osnovu (3.30) moguće je zaključiti da greška u estimaciji izlaza, v , asimptotski konvergira ka nuli. ■

Pretpostavimo da svaki lider može da estimira y i označimo tu estimaciju sa \hat{y}_i . U nastavku će biti opisana metodologija za određivanje \hat{x}_i , tj. estimacije stanja mreže pratilaca od strane i -tog lidera, $i = 1, \dots, N_L$. Nakon izvršene estimacije, i -ti lider generiše i -tu komponentu upravljačkog signala u koja se dobija zamjenom x_F sa \hat{x}_i :

$$u[i] = F[i, :] \hat{x}_i + (\Gamma[i, :] - (F\Pi)[i, :]) \xi. \quad (3.35)$$

Dalje, uvedimo vektor $\hat{x}_F = [\hat{x}_1^T, \dots, \hat{x}_{N_L}^T]^T$ koji predstavlja nasložene estimacije stanja pratilaca od strane svih lidera i neka je matrica $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{N_L \times (N_F N_L)}$ definisana

²Teorema 3.3 u referenciranom radu.

na sljedeći način

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F[1, :] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F[2, :] & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F[N_L, :] \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Na osnovu (3.35), upravljački signal u definisan relacijom (3.15) može biti izračunat na decentralizovani način

$$u = \tilde{F}\hat{x}_F + (\Gamma - F\Pi)\xi. \quad (3.37)$$

Korisno je prokomentarisati da svaki lider i , na osnovu sopstvene estimacije \hat{x}_i , može estimirati upravljački signal u , u oznaci $\hat{u}_i \in \mathbb{R}^{N_L}$. Odnosno, zamjenom \hat{x} sa \hat{x}_i dobija se

$$\hat{u}_i = F\hat{x}_i + (\Gamma - F\Pi)\xi. \quad (3.38)$$

Samim tim, svaki lider implementira opserver stanja mreže pratilaca, dat jednačinom (3.27), na decentralizovan način

$$\dot{\hat{x}}_i = A\hat{x}_i + B\hat{u}_i - L(\hat{y}_i - B^T\hat{x}_i). \quad (3.39)$$

Kombinacijom \hat{x}_F i (3.39) dobija se

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_F &= (I_{N_L} \otimes A)\hat{x}_F + (I_{N_L} \otimes BF)\hat{x}_F + (I_{N_L} \otimes (B(\Gamma - F\Pi))) (1_{N_L} \otimes \xi) - \\ &- (I_{N_L} \otimes L)\hat{y} + (I_{N_L} \otimes (LB^T))\hat{x}_F. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Neka je $\tilde{\eta}_i = x_F - \hat{x}_i$ greška u estimaciji stanja mreže pratilaca od strane i -tog lidera. Štaviše, ako označimo $\tilde{\eta} = [\tilde{\eta}_1^T, \dots, \tilde{\eta}_{N_L}^T]^T$, imamo

$$\tilde{\eta} = 1_{N_L} \otimes x_F - \hat{x}_F. \quad (3.41)$$

Matrica selekcije $\mathcal{S}_i \in \mathbb{R}^{(N_F N_L) \times (N_F N_L)}$ se definiše kao blok-dijagonalna matrica, čiji su svi blokovi nula osim i -tog bloka svake vrste, koji je jedinična matrica. Naime

$$\mathcal{S}_i = \begin{bmatrix} 0_{N_F N_L, N_F(i-1)} & 1_{N_L} \otimes I_{N_F} & 0_{N_F N_L, N_F(N_L-i)} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Sada je moguće definisati matricu $\Omega \in \mathbb{R}^{(N_L N_F) \times (N_L N_F)}$ na sljedeći način

$$\Omega = \begin{bmatrix} B\tilde{F}(\mathcal{S}_1 - I_{N_L N_F}) \\ \vdots \\ B\tilde{F}(\mathcal{S}_{N_L} - I_{N_L N_F}) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Konačno, sljedeća primjedba, koja je data bez dokaza, pokazuje da se dinamika spregnutog multiagentnog sistema može zapisati kao LTI sistem sa konstantnim egzogenim ulaznim referentnim signalom i egzogenim signalom koji zavisi od greške estimacije i koji asimptotski konvergira ka nuli.

Primjedba 3.2. Uzimajući u obzir dinamiku multiagentnog sistema (3.20), koja se očigledno može zapisati kao

$$1_{N_L} \otimes \dot{x}_F = (I_{N_L} \otimes A)(1_{N_L} \otimes x_F) + (I_{N_L} \otimes B)(1_{N_L} \otimes u),$$

dinamiku estimacije stanja (3.40), grešku u estimaciji stanja (3.41), i ulaz definisan izrazom (3.37), moguće je zapisati kolektivnu dinamiku multiagentnog sistema kao

$$\begin{bmatrix} 1_{N_L} \otimes \dot{x}_F \\ \dot{\tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} 1_{N_L} \otimes x_F \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} + g(\xi) + f(\tilde{\eta}). \quad (3.44)$$

Velčina $\Phi \in \mathbb{R}^{(2N_L N_F) \times (2N_L N_F)}$ je matrica

$$\Phi = \begin{bmatrix} I_{N_L} \otimes (A + BF) & -I_{N_L} \otimes (BF) + \Omega \\ 0_{N_L N_F} & I_{N_L} (A + LB^T) + \Omega \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$g(\xi)$ je funkcija referentne trajektorije, dok je $f(\tilde{\eta})$ član koji asimptotski konvergira ka nuli, a definisani su kao

$$g(\xi) = \begin{bmatrix} I_{N_L} \otimes [(B(\Gamma - F\Pi)) \xi] \\ 0_{N_L N_F} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$f(\tilde{\eta}) = \begin{bmatrix} 0_{N_L N_F} \\ -(I_{N_L} \otimes L) \tilde{\eta} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Na osnovu Leme 3.1, greška u estimaciji izlaza, $\tilde{\eta}$, asimptotski konvergira ka nuli. Samim tim i funkcija $f(\tilde{\eta})$ takođe konvergira ka nuli. ■

Glava 4

Predlog distribuiranog algoritma za kooperativno upravljanje multiagentnim sistemima

U prethodnoj glavi je detaljno opisano decentralizovano rješenje problema regulacije izlaza u multiagentnim sistemima, koje predstavlja polaznu tačku za sintezu novog algoritma koji je fokus ove glave. Međutim, najprije je potrebno ukazati na konkretne nedostatke postojećeg rješenja kako bi bilo jasno šta je potrebno prevazići. Prvo je potrebno uočiti da je za estimaciju stanja mreže pratilaca neophodno implementirati dinamički konsenzus protokol u mreži lidera. Inkorporacijom dinamičkog konsenzus protokola se unosi kašnjenje, tj. nije moguće idealno estimirati izlazni vektor, zbog čega se javlja greška u praćenju referentnih trajektorija u stacionarnom stanju. Predloženi algoritam je dizajniran tako da se izbjegne potreba za implementacijom dinamičkog konsenzus protokola, što daje mogućnost postizanja nulte greške u stacionarnom stanju. Kao posljedica eliminacije potrebe za dinamičkim konsenzus protokolom, otklonjena je i potreba za komunikacijom među liderima što smanjuje komunikacione troškove. Važno je napomenuti da postoje i druga rješenja koja eliminišu potrebu za dinamičkim konsenzus protokolom [73, 82]. Međutim, pored toga što dovode do povećanja troškova pri komunikaciji, ova rješenja ne otklanjaju grešku u stacionarnom stanju u potpunosti. Konačno, svi pomenuti pristupi imaju zajednički nedostatak – zahtijevaju rješavanje linearnih matričnih nejednačina (eng. linear matrix inequalities, LMIs) kako bi se odredili parametri regulatora koji garantuju stabilnost kolektivnog sistema.

U ovoj glavi su formalno definisane pretpostavke, problemi i predložena su rješenja za kooperativno upravljanje multiagentnim sistemima. Glava je podijeljena na dva dijela. U prvom dijelu je predložen algoritam za slučaj kada su agenti modelovani jednostrukim integratorima. Sinteza algoritma je izvršena u dvije etape: prvoj [83], u kojoj je pretpostavljeno da postoji lokalna povratna sprega po mjerenim stanjima i druga, u kojoj postoji lokalna povratna sprega po estimiranim stanjima. U drugom dijelu izvršena je ekstenzija algoritma za slučaj kada su pratioci modelovani opštom linearnom dinamikom, pri čemu se smatra da su u mogućnosti da mjere sopstveno stanje [84]. Potrebno je napomenuti da je i u ovom slučaju moguće dizajnirati op-server stanja i time izbjeći potrebu za mjerenjem apsolutnih stanja. Međutim, ovaj

slučaj, koji nije prezentovan u ovoj tezi, će biti fokus budućeg istraživanja.

4.1 Kooperativno upravljanje mrežom agenata modelovanih jednostrukim integratorom

U nastavku rada će biti izvršena sinteza distribuiranog algoritma kod kojeg je lokalni upravljački signal svakog pratioca definisan tako da zavisi od estimacije sopstvenog stanja, koja se dobija implementacijom distribuiranog opservera. Na taj način, stabilizacijom individualnih agenata, postiže se i stabilnost kolektivnog sistema, pa nema potrebe za inkorporacijom stanja pratilaca u mreži lidera. Samim tim, eliminiše se i potreba za dizajnom decentralizovanog opservera. Jedina uloga lidera je da injektiraju informacije o referentnim trajektorijama koje je potrebno pratiti. Konačno, izvedeni su uslovi za određivanje parametara regulatora i opservera tako da greška u praćenju referentnih trajektorija konvergira ka nuli.

Prednosti predloženog pristupa nad postojećim su:

1. Nema potrebe za implementacijom dinamičkog konsenzus protokola među liderima. Samim tim, moguće je ostvariti nultu grešku u praćenju referentnih trajektorija.
2. Biće dokazano da važi princip separabilnosti, čime je omogućeno da se dizajn regulatora i opservera izvrše zasebno.
3. Izvedena su jednostavna pravila za određivanje parametara regulatora i opservera, koja garantuju da će se polovi spregnutog sistema nalaziti na specifičanom intervalu.

4.1.1 Postavka problema

U ovom dijelu će ukratko biti izložene polazne pretpostavke, kao i model multi-agentnog sistema, nakon čega će problem regulacije izlaza biti formalno definisan.

Posmatrajmo mrežu koja se sastoji od N povezanih agenata, čija je topologija opisana neusmjerenim, povezanim, prostim grafom $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, gdje je $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Težinska, simetrična matrica susjedstva je označena sa $\mathcal{A} = [w_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Agenti su indeksirani tako da prvih N_F indeksa označava pratioca, dok preostalih $N_L = N - N_F$ označava lidere. Skupovi pratilaca i lidera su onda definisani kao $\mathbb{F} = \{1, \dots, N_F\}$ i $\mathbb{L} = \{N_F + 1, \dots, N\}$. Matricu Laplasijana je moguće dekomponovati na način (2.26).

Dinamika agenata u mreži je opisana relacijom

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i, & i \in \mathbb{F} \\ x_i = u_i, & i \in \mathbb{L} \end{cases}, \quad (4.1)$$

gdje su $x_i, u_i \in \mathbb{R}$ stanje i upravljački signal i -tog agenta, respektivno. Potrebno je primijetiti da je dinamika svakog pratioca modelovana jednostrukim integratorom, dok se pretpostavlja da se svakim liderom može direktno upravljati [24].

Primjedba 4.1. Bez gubitka opštosti, razmatra se skalarni slučaj. Međutim, svi rezultati mogu biti generalizovani na višedimenzionalni slučaj tako što će se komponente vektora x_i i u_i posmatratiti nezavisno jedne od drugih.

Smatraće se da svaki pratilac može da mjeri relativno stanje u odnosu na susjedne agente. Izlazni signal se formira kao suma ponderisanih relativnih mjerenja:

$$z_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} \underbrace{(x_j - x_i)}_{z_{ij}}, \quad i \in \mathbb{F}. \quad (4.2)$$

Za razliku od pratilaca, lideri mogu da mjere sopstveno stanje

$$z_i = x_i, \quad i \in \mathbb{L}. \quad (4.3)$$

Takođe, korišće se sljedeća notacija:

- $x_F = [x_1, x_2, \dots, x_{N_F}]^T$ za stanje mreže pratilaca,
- $x_L = [x_{N_F+1}, x_{N_F+2}, \dots, x_N]^T$ za stanje mreže lidera,
- $u_L = [u_{N_F+1}, u_{N_F+2}, \dots, u_N]^T$ za upravljački signal lidera.

Referentne trajektorije su jednake $x_S = J\xi$, gdje je ξ stanje egzosistema (potpoglavlje 3.1.1).

Sada, uz usvojene pretpostavke, dolazimo do formalne definicije problema koji pokušavamo riješiti.

Problem 1. Za multiagentni sistem (4.1) potrebno je dizajnirati zakone upravljanja u_i , $i = 1, 2, \dots, N$, tako da važe sljedeće stavke:

1. Kolektivni spregnuti sistem je asimptotski stabilan.
2. Stanja pratilaca x_F asimptotski konvergiraju ka referentnim trajektorijama $x_S(t) = J\xi(t)$, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_F(t) - x_S(t)) = 0. \quad (4.4)$$

Da bi Problem 1 bio rješiv, potrebno je usvojiti sljedeće pretpostavke:

Pretpostavka 1. Graf \mathcal{G} je prost i povezan.

Pretpostavka 2. Matrica S nema sopstvenih vrijednosti sa negativnim realnim dijelom, tj. $\lambda(S) \in \bar{\mathbb{C}}^+$.

Pretpostavka 3. Pristup stanjima egzosistema imaju samo lideri.

4.1.2 Glavni rezultati

Na samom početku, korisno je podsjetiti se Leme 2.15 i primijetiti da je matrica $A = -A_F$, što znači da je A negativno definitna matrica. U nastavku je data dobro poznata Geršgorinova teorema koja je od izuzetnog značaja za dobijanje važnih rezultata u ostatku teze.

Teorema 4.2. (Geršgorinova [85]) *Neka je $M = [m_{ij}]$ realna matrica dimenzija $n \times n$. Tada se sve sopstvene vrijednosti matrice M nalaze u uniji diskova:*

$$\bigcup_i \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - m_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |m_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Upravljanje pomoću lokalne povratne sprege po mjerenim stanjima

Razmotrimo sistem opisan dinamikom (4.1) i uvedimo sljedeći distribuirani upravljački zakon

$$u_i = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_j - x_i)}_{z_i} - k_i x_i, \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.6)$$

gdje $w_{ij} \in \mathbb{R}$ predstavlja (i, j) -ti element matrice susjedstva grafa \mathcal{G} , dok je $k_i \in \mathbb{R}$ pojačanje u povratnoj sprezi i -tog agenta. Da bi se ovaj zakon upravljanja mogao implementirati, neophodno je da važi pretpostavka da svaki agent može da mjeri sopstveno stanje x_i .

Ako se izvrši dekompozicija Laplasijana u skladu sa (2.26), tada se dinamika mreže pratilaca može zapisati u matricnoj formi

$$\dot{x}_F = (A - K)x_F + Bu_L, \quad (4.7)$$

gdje je $K \in \mathbb{R}^{N_F \times N_F}$ dijagonalna matrica pojačanja $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_{N_F})$. Matrica K ima ključnu ulogu u podešavanju željenih performansi spregnutog sistema, što pokazuju naredne dvije teoreme.

Teorema 4.3. *Sistem čija je dinamika data relacijom (4.7) je stabilan, tj. spektral matrice $(A - K)$ leži na negativnoj realnoj osi, ako je sljedeći dovoljan ali ne i potreban uslov zadovoljen:*

$$k_i > 0, \quad i \in \mathbb{F}. \quad (4.8)$$

Dokaz. Na osnovu Geršgorinove teoreme (4.5), sve sopstvene vrijednosti matrice $(A - K)$ leže u uniji diskova:

$$\bigcup_{i=1}^{N_F} \left\{ r \in \mathbb{C} : |r + (k_i + |a_{ii}|)| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}, \quad (4.9)$$

gdje je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N_F \times N_F}$. Matrica $(A - K)$ je simetrična što znači da ima realne sopstvene vrijednosti. One leže na negativnoj realnoj osi \mathbb{R}^- ako je $k_i + |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i \in \mathbb{F}$. Pošto matrica A zadovoljava $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|$ po konstrukciji, dobija se

$$k_i + |a_{ii}| > |a_{ii}|,$$

odakle je lako dobiti (4.8). ■

Teorema 4.4. *Neka je $\alpha = \max_i (k_i + 2|a_{ii}|)$ i $k_{\min} = \min_i k_i$. Tada se sopstvene vrijednosti matrice $(A - K)$ nalaze na intervalu*

$$\lambda_i(A - K) \in [-\alpha, -k_{\min}], \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.10)$$

pod uslovom da je relacija (4.8) zadovoljena.

Dokaz. Primijetiti da je $|a_{ii}| + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq 2|a_{ii}|$ zadovoljeno samom konstrukcijom matrice A . Uvrštavajući ovaj izraz u (4.5), pod uslovom (4.8), lako je pokazati da su donja i gornja granica intervala definisane kao u izrazu (4.10).



Izraz (4.10) predstavlja važan i koristan rezultat. Naime, gornja granica za polove spregnutog sistema se može podesiti odabirom najmanjeg pojačanja u povratnoj sprezi. S druge strane, donja granica zavisi kako od pojačanja u povratnoj sprezi, tako i od težinskih koeficijenata grana. Optimizacija težinskih koeficijenata grana je prilično kompleksan zadatak i neće biti razmatran u ovome radu. Više informacija o ovom se može naći u [86, 87].

U nastavku će biti dati neki komentari o spektru matrice $(A - K)$ u specijalnom slučaju kada su težinski koeficijenti svih grana jednaki.

Primjedba 4.5. Pretpostavimo da su težinski koeficijenti svih grana izabrani tako da važi $w_{ij} = \frac{\gamma}{\max_i |N_i|}$, gdje je $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Štaviše, neka su pojačanja svih agenata jednaka, tj. $k_i = k$, $i \in \mathbb{F}$. Tada se može lako pokazati da je $\alpha = k + 2\gamma$, što dalje znači da spektar matrice $(A - K)$ leži na intervalu $[-(k + 2\gamma), -k]$. Samim tim, odabirom pojačanja k , može se podesiti gornja granica spektra. Donja granica se onda lako podešava pomoću faktora γ .

Zakon upravljanja pratilaca (4.6) garantuje da će dinamika kolektivnog sistema imati željene karakteristike tokom prelaznog procesa. Preostaje da se dizajnira zakon upravljanja lidera, kako bi se osiguralo da će stanje pratilaca x_F pratiti referentne trajektorije $x_S = J\xi$. Ovdje predložimo sljedeći upravljački zakon lidera:

$$u_L = \Gamma\xi, \quad (4.11)$$

gdje je Γ matrica koju je potrebno odrediti, dok je ξ stanje egzosistema.

Zakon upravljanja lidera (4.11) rješava problem praćenja referentnih trajektorija za sistem (4.7) ako i samo ako matrice Γ i J zadovoljavaju sljedeće regulatorske jednačine:

$$(A - K)\Pi + B\Gamma = \Pi S \quad (4.12a)$$

$$\Pi - J = 0 \quad (4.12b)$$

Jednačina (4.12b) predstavlja ograničenje pri izboru matrice J , odnosno pri izboru referentnih trajektorija. Proces određivanja skupa rješenja (Π, Γ) je isti kao u [24]. Potreban uslov za postojanje jedinstvenog rješenja regulatorskih jednačina je da matrice $(A - K)$ i I_{N_F} nemaju zajedničkih sopstvenih vrijednosti sa matricom S , što je uvijek zadovoljeno pod Pretpostavkom 2. Na kraju, važno je naglasiti da skup mogućih trajektorija za koje su jednačine (4.12) rješive nije nužno isti kao skup trajektorija za koje postoje rješenja regulatorskih jednačina (3.25).

Primjedba 4.6. Poređenjem jednačina (4.11) i (3.15), može se uočiti da se (3.15) svodi na (4.11) za $F = 0_{N_L \times N_F}$. Matrica F u (3.15) se koristi za obezbijedivanje stabilnosti spregnutog sistema, odnosno za poboljšanje tranzijenta izlaznog signala, ali ne utiče na rješenje regulatorskih jednačina. U predloženom pristupu, željene osobine konvergencije su već zagantovane matricom K , tako da F može biti dodijeljena proizvoljna vrijednost. Najjednostavniji izraz se dobija pri odabiru nulte matrice. Štaviše, ovo dovodi do pojednostavljene implementacije, pošto lideri ne zahtijevaju poznavanje stanja pratilaca x_F .

Primjedba 4.7. Stabilnost kolektivnog sistema za povezani graf \mathcal{G} je zagantovana odgovarajućim odabirom matrice K , dok par (A, B) ne mora biti kontrolabilan.

Međutim, ako par (A, B) nije kontrolabilan, neka stanja će biti linearno zavisna i mogu konvergirati ka istim trajektorijama. Više informacija o tome kako dizajnirati multiagentnu mrežu tako da ona bude kontrolabilna se može pronaći u [6].

Konačno, definišimo grešku u praćenju referentnih trajektorija na standardni način $e = x_F - x_S$. Pod pretpostavkom da postoji rješenje regulatorskih jednačina, lako se pokazuje da ova greška ima sljedeću dinamiku

$$\dot{e}(t) = (A - K)e(t). \quad (4.13)$$

Drugim riječima, upravljački zakoni (4.6) i (4.11) obezbjeđuju da greška u praćenju referentnih trajektorija konvergira ka nuli, pod uslovom da elementi matrice K zadovoljavaju (4.8), [83].

Upravljanje pomoću lokalne povratne sprege po estimiranim stanjima

Pristup koji je predložen u prethodnom dijelu predstavlja jednostavno, ali efektivno rješenje problema praćenja referentnog signala u multiagentnim sistemima. Međutim, njegova mana je što zahtijeva dostupnost senzora koji mjeri stanje agenta u apsolutnom koordinatnom sistemu. Ovaj zahtjev ne samo da povećava troškove realizacije, već nekada ne može ni biti ispunjen. Zbog toga, u nastavku izlaganja će prethodno predloženi algoritam biti uopšten, tako da ga je moguće primijeniti u slučaju kada pratioci mogu da mjere samo relativna stanja u odnosu na susjedne agente.

Glavna ideja je da svaki pratilac estimira sopstveno stanje tako što će implementirati lokalni opserver. Lokalni opserver i -tog agenta je opisan diferencijalnom jednačinom

$$\dot{\hat{x}}_i = u_i - l_i(z_i - \hat{z}_i), \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.14)$$

gdje su \hat{x}_i , $l_i \in \mathbb{R}$ estimirano stanje i pojačanje opservera, respektivno, dok je \hat{z}_i :

$$\hat{z}_i = \sum_{j \in \mathbb{F}} w_{ij}(\hat{x}_j - \hat{x}_i) + \sum_{j \in \mathbb{L}} w_{ij}(x_j - \hat{x}_i). \quad (4.15)$$

Potrebno je uočiti da je \hat{z}_i dobijeno zamjenom stvarnih stanja pratilaca sa odgovarajućim estimacijama u jednačini mjerenja (4.2). S druge strane, pošto je pretpostavljeno da lideri imaju pristup apsolutnim mjerenjima, ona su zadržana u (4.15).

Primjedba 4.8. U predloženom algoritmu, svaki pratilac mora da pošalje svoje estimirano stanje susjednim agentima, što znači da je potrebno uspostaviti komunikaciju između pratilaca. Štaviše, neophodno je da lideri šalju svoja apsolutna stanja susjednim pratiocima. Međutim, potrebno je naglasiti da ovo nije potrebno u scenariju kada agenti mogu da mjere sopstvena apsolutna stanja, jer se relativna stanja mogu izmjeriti pomoću specijalnog tipa senzora.

Uzimajući u obzir relaciju (4.14), zakon upravljanja za pratiocice možemo definisati na sljedeći način:

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_j - x_i) - k_i \hat{x}_i, \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.16)$$

koji ima istu forme kao (4.6). Jedina razlika je u tome što se u lokalnoj povratnoj sprezi umjesto stvarnog stanja agenta – koje je nedostupno, koristi estimirano stanje.

Definišimo grešku u estimaciji i -tog opservera kao $\eta_i = x_i - \hat{x}_i$. Vektor greške u estimaciji svih agenata se tada može zapisati kao $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{N_F}]^T$. Takođe, definišimo matricu pojačanja opservera kao $L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_{N_F})$. Tada je moguće zapisati dinamiku pratilaca i opservera u matricnoj formi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - K & K \\ 0 & LA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_F \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_L. \quad (4.17)$$

Pošto je neophodno da greška u estimaciji asimptotski konvergira ka nuli, tj. $\eta(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$, jasno je iz (4.17) da matrica LA mora biti Hurwitz-stabilna.

Teorema 4.9. *Matrica LA je Hurwitz-stabilna, tj. ima sve sopstvene vrijednosti sa negativnim realnim dijelom ako i samo ako je zadovoljen sljedeći uslov*

$$l_i > 0, \quad i \in \mathbb{F}. \quad (4.18)$$

Dokaz. Teorema se može dokazati primjenom Geršgorinove teoreme. Međutim, radi dobijanja nekih korisnih rezultata, za dokaz ćemo koristiti rezultate iz [88].¹ Kao što je već pokazano, matrica A je negativno definitna (stabilna). Dalje, ako je ispunjen uslov $l_i > 0$, matrica pojačanja opservera L će biti pozitivno definitna, pa dobijamo

$$\begin{cases} \lambda_{N_F}(A)\lambda_{N_F}(L) \leq \lambda_1(LA) \leq \lambda_1(A)\lambda_{N_F}(L) \\ \lambda_{N_F}(A)\lambda_1(L) \leq \lambda_{N_F}(LA) \leq \lambda_1(A)\lambda_1(L) \end{cases}, \quad (4.19)$$

gdje je $\lambda_1(\cdot) \geq \dots \geq \lambda_{N_F}(\cdot)$. Ovaj rezultat se dobija direktnom smjenom matrice L i A u [88] i uočavanjem da je $AL = A^T L^T = (LA)^T$, što dalje znači da matrice AL i LA imaju iste sopstvene vrijednosti. Samim tim, sve sopstvene vrijednosti su negativne, što znači da će greška u estimaciji η asimptotski konvergirati ka nuli. ■

Pri dizajnu opservera poželjno je da se specificira gornja granica spektra matrice LA kako bi se osigurala željena brzina konvergencije. Ovaj problem se svodi na određivanje odgovarajućih vrijednosti elemenata na glavnoj dijagonali matrice L . Neka je l_{\min} najmanji element na glavnoj dijagonali matrice L koja zadovoljava (4.18), tj. $l_{\min} = \min_i l_i$. Tada, smjenom u (4.19) dolazimo do sljedeće posljedice.

Posljedica 4.10. *Sopstvene vrijednosti matrice LA su manje ili jednake od specificirane vrijednosti $\chi < 0$, ako je l_{\min} odabrano tako da je*

$$l_{\min} = \frac{\chi}{\lambda_1(A)}. \quad (4.20)$$

Primjedba 4.11. Donja granica spektra matrice LA ne može biti podešena na proizvoljnu vrijednost, kao što se vidi iz (4.19). U specijalnom slučaju kada je $l_i = l > 0$, $i \in \mathbb{F}$, sopstvene vrijednosti matrice LA će biti jednake sopstvenim vrijednostima matrice A skaliranim faktorom l .

Važno je naglasiti da je upravljački signal lidera isti kao u slučaju kada su dostupna apsolutna stanja:

$$u_L = \Gamma \xi, \quad (4.21)$$

gdje je Γ rješenje (4.12) koje korespondira željenim referentnim trajektorijama, definisanim matricom Π .

¹Posljedica 11.

Pod pretpostavkom da je par (Π, Γ) rješenje regulatorske jednačine, lako se može pokazati da se relacija (4.17) može zapisati u zavisnosti od greške u praćenju

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - K & K \\ 0 & LA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Matrica stanja u (4.22) ima trougaonu strukturu, pa samim tim se može primijeniti princip separabilnosti. Sopstvene vrijednosti spregnutog sistema su unija sopstvenih vrijednosti matrica $(A - K)$ i LA . Drugim riječima, zakoni upravljanja (4.6) i (4.21) rješavaju Problem 1 pod uslovom da dijagonalni elementi matrica pojačanja K i L zadovoljavaju (4.8) i (4.18), respektivno.

4.2 Kooperativno upravljanje mrežom agenata modelovanih opštom linearnom dinamikom

U prethodnom poglavlju je predložen algoritam za rješavanje Problema 1, koji je definisan za slučaj kada se dinamika pratilaca može modelovati jednostrukim integratorom. Nedostatak tog algoritma je upravo što se polaznom pretpostavkom da se radi o agentima modelovanim jednostrukim integratorima, ograničava primjena na usku klasu sistema u praksi. Zbog toga, u ovom dijelu će to rješenje biti prošireno na slučaj kada su pratioci opisani istim, opštim linearnim, vremenski-invarijantnim modelom u prostoru stanja [84]. Štaviše, biće izvedeni uslovi koji garantuju konvergenciju greške u praćenju referentnih trajektorija ka nuli.

Smatraćemo da se multiagentni sistem sastoji od N_L lidera i N_F pratilaca, pri čemu važe sve oznake i pojmovi koji su uvedeni u prethodnom poglavlju. Glavna razlika je u dinamici pratilaca, koja je ovom slučaju data jednačinama

$$\begin{cases} \dot{x}_i = Ax_i + Bu_i \\ y_i = Cx_i \end{cases}, \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.23)$$

gdje je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ i $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Stanje, upravljački i izlazni signal i -tog pratioca su označeni sa $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}$ i $y_i \in \mathbb{R}$, respektivno. Stanje i izlaz i -tog lidera su, respektivno:

$$\begin{cases} x_i = u_i \\ y_i = x_i \end{cases}, \quad i \in \mathbb{L}, \quad (4.24)$$

pri čemu je $x_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in \mathbb{R}$ i $y_i \in \mathbb{R}$ za $i \in \mathbb{L}$.

Takođe, smatraćemo da svi agenti mogu da mjere sopstveno stanje, pri čemu pratioci mogu dodatno mjeriti i relativno stanje u odnosu na susjedne agente, na osnovu kojih se formira kumulativno mjerenje kao ponderisana suma relativnih mjerenja

$$z_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(y_j - y_i), \quad i \in \mathbb{F}. \quad (4.25)$$

Radi konciznosti, biće uvedene sljedeće oznake:

- $x_F = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_{N_F}^T]^T$ za stanje mreže pratilaca,
- $u_L = [u_{N_F+1}, u_{N_F+2}, \dots, u_N]^T$ za upravljački signal lidera,

– $y_F = [y_1, y_2, \dots, y_{N_F}]^T$ za izlazni signal mreže pratilaca.

Važno je napomenuti da se dekompozicija matrice Laplasijana, prethodno definisana jednačinom (2.26), sada vrši na sljedeći način:

$$\mathcal{L} = - \begin{bmatrix} L_F & L_{FL} \\ L_{FL}^T & L_L \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

gdje je $L_F \in \mathbb{R}^{N_F \times N_F}$, $L_{FL} \in \mathbb{R}^{N_F \times N_L}$ i $L_L \in \mathbb{R}^{N_L \times N_L}$. Modifikacija u oznakama je usvojena kako bi matrice koje opisuju model u prostoru stanja pratilaca A , B i C bile u skladu sa standardnom literaturom.

4.2.1 Postavka i rješenje problema

Problem kooperativnog praćenja referentnih trajektorija u mrežama agenata modelovanih opštom linearnom dinamikom se formalno može definisati na sljedeći način:

Problem 2. Za multiagentni sistem opisan dinamikom (4.23), (4.24), potrebno je dizajnirati upravljački zakon u_i tako da

1. Kolektivni spregnuti sistem bude asimptotski stabilan, tj. matrica stanja spregnutog sistema bude Hurwitz-stabilna.
2. Izlazi pratilaca y_F asimptotski konvergiraju ka referentnim trajektorijama x_S , tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_F(t) - x_S(t)) = 0. \quad (4.27)$$

Pri rješavanju Problema 2, važiće iste pretpostavke kao za Problem 1.

Definišimo upravljački zakon pratilaca na sljedeći način:

$$u_i = z_i - Kx_i, \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.28)$$

gdje je $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ pojačanje u povratnoj sprezi, pri čemu je ono isto za svakog pratioca. Smjenom (4.23) i (4.25) u (4.28) dobija se

$$u_i = C \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} (x_j - x_i) - Kx_i, \quad (4.29)$$

pa će dinamika i -tog pratioca biti jednaka

$$\dot{x}_i = (A - BK)x_i + BC \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} (x_j - x_i), \quad i \in \mathbb{F}. \quad (4.30)$$

Iz dekompozicije matrice Laplasijana slijedi da dinamika mreže pratilaca može biti zapisana u matricnoj formi

$$\dot{x}_F = A_c x_F + B_c u_L, \quad (4.31)$$

gdje je

$$\begin{cases} A_c = I_{N_F} \otimes (A - BK) + L_F \otimes (BC) \\ B_c = L_{FL} \otimes (BC) \end{cases}, \quad (4.32)$$

pri čemu \otimes označava Kronekerov proizvod, dok je I_{N_F} jedinična matrica dimenzija $N_F \times N_F$. Za dobijanje ovog rezultata iskorišćen je poznati identitet

$$(M_1 \otimes M_2)(M_3 \otimes M_4) = (M_1 M_3) \otimes (M_2 M_4),$$

gdje su dimenzije matrica M_1 , M_2 , M_3 i M_4 takve da matricni proizvodi $M_1 M_3$ i $M_2 M_4$ postoje.

Da bi se obezbijedila stabilnost sistema, matrica stanja A_c mora biti Hurwitz-stabilna, tj. $\lambda(A_c) \in \mathbb{C}^-$. Samim tim, pojačanje u povratnoj sprezi K mora biti odabrano tako da ovaj uslov bude zadovoljen.

Teorema 4.12. [15] *Neka su $\lambda_i(L_F)$, $i \in \mathbb{F}$, sopstvene vrijednosti matrice L_F , dobijene dekompozicijom matrice Laplasijana (4.26). Tada, osobine stabilnosti matrice A_c su ekvivalentne osobinama stabilnosti sljedećih N_F matrica*

$$(A - \lambda_i(L_F)BC) - BK, \quad i \in \mathbb{F}, \quad (4.33)$$

u smislu da imaju iste sopstvene vrijednosti.

Dokaz. Definišimo transformacionu matricu M takvu da je $J = M^{-1}L_F M$ gornja trougaona matrica, sa sopstvenim vrijednostima $\lambda_i(L_F)$, $i \in \mathbb{F}$ na glavnoj dijagonali. Ako se ova transformacija primijeni na matricu stanja A_c , transformisani sistem će imati blok-trougaonu formu sa dijagonalnim blokovima oblika

$$(A - BK) - \lambda_i(L_F)BC, \quad i \in \mathbb{F},$$

odakle se direktno dobija (4.33) [89].²

■

Sada će biti uvedena dodatna, standardna pretpostavka koja je neophodna da bi problem postavljanja polova bio rješiv.

Pretpostavka 4. Parovi $(A - \lambda_i(L_F)BC, B)$, $i \in \mathbb{F}$ su stabilizabilni.

Samim tim, uvijek je moguće odrediti vektor K na takav način da matrica A_c bude stabilna.

Zakon upravljanja (4.28) garantuje da će dinamika kolektivnog sistema imati željene tranzijentne karakteristike. Preostaje da se dizajnira upravljački signal lidera u_L , tako da izlaz pratilaca y_F prati zadate referentne trajektorije $x_S = J\xi$.

Već je pokazano da se zakonom upravljanja

$$u_L = Fx_F + (\Gamma - F\Pi)\xi,$$

može obezbijediti da greška u praćenju asimptotski konvergira ka nuli, pri čemu matrica F služi za stabilizaciju, dok su matrice Π i Γ rješenje regulatorskih (Frensisovih) jednačina

$$\begin{cases} A_c\Pi + B_c\Gamma = \Pi S, \\ C_c\Pi - J = 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Međutim, s obzirom na to da se stabilnost sistema može osigurati adekvatnim odabirom matrice K , može se usvojiti $F = 0$, pa upravljački zakon poprima sljedeći oblik:

$$u_L = \Gamma\xi. \quad (4.35)$$

²Lema 2.1.

Kako matrica Γ zadovoljava regulatorske jednačine (4.34), jasno je da će primjenom zakona upravljanja (4.35) stanja pratilaca konvergirati ka $\Pi\xi$ [84].

Ako devijaciju stanja pratilaca x_F od njihove vrijednosti u stacionarnom stanju $\Pi\xi$ definišemo kao $\eta = x_F - \Pi\xi$, jednostavno je pokazati da će dinamika devijacije imati oblik

$$\dot{\eta} = A_c\eta. \quad (4.36)$$

Konvergencija prethodnog izraza ka nuli se može osigurati ukoliko se K odabere tako da svih N_F jednačina iz Teoreme 4.12 bude zadovoljeno.

Konačno, neka je e greška u praćenju, tj. $e = y_F - x_S$. Tada se lako pokazuje da važi

$$e = C_c\eta. \quad (4.37)$$

Očigledno, greška u praćenju e asimptotski konvergira ka nuli, pošto $\eta \rightarrow 0$. Drugim riječima, zakoni upravljanja (4.28) i (4.35) rješavaju Problem 2.

Glava 5

Rezultati simulacija

U ovoj glavi su prezentovani rezultati simulacija. Razmotrene su različite topologije multiagentnih sistema. Glava je podijeljena na dva dijela, pri čemu se prvi dio odnosi na problem regulacije izlaza multiagentnog sistema u slučaju kada su pratioci modelovani jednostrukim integratorima, dok su u drugom dijelu agenti modelovani opštom linearnom dinamikom.

5.1 Kooperativno upravljanje mrežom jednostrukih integratora

Kao mjera performanse usvojena je srednja kvadratna greška u praćenju referentnih trajektorija (eng. mean square tracking error, MSTE), koja se računa tako što greške u praćenju referentnih trajektorija svih pratilaca kvadiraju i usrednje:

$$\text{MSTE} = \frac{1}{N_F} e^T e. \quad (5.1)$$

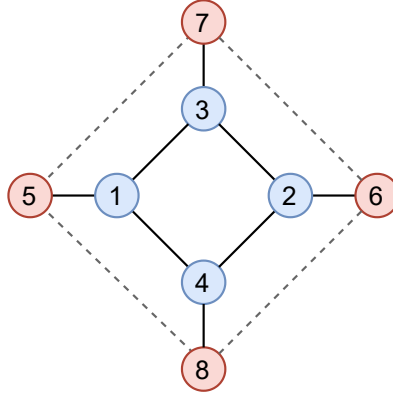
Sa druge strane, kao mjera kvaliteta estimacije stanja usvojena je srednja kvadratna greška opservera (eng. mean square observer error, MSOE), definisana na sljedeći način

$$\text{MSOE} = \frac{1}{N_F} \eta^T \eta. \quad (5.2)$$

Kod decentralizovanog algoritma (eng. decentralized control algorithm, DCA) [24], MSOE je usrednjena za sve lidere.

U simulacijama, usvojena je perioda odabiranja $T_s = 0.01s$. Korišćen je backward-difference metod diskretizacije. Lideri i pratioci su prikazani crvenim i plavim čvorovima, respektivno.

Potpoglavlje se sastoji od tri primjera. U prvom primjeru su upoređene performanse predloženog i DCA algoritma. U drugom primjeru je takođe izvršeno poređenje pometnuta dva algoritma, ali u slučaju kada dođe do promjene mrežne topologije. Konačno, u trećem primjeru su prikazane performanse predloženog algoritma za slučaj trodimenzionalnog prostora stanja.


 Slika 5.1: Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata.

Primjer 1

U ovom primjeru su upoređene performanse predloženog i DCA algoritma. Topologija mreže, koja je ista za komunikacionu i senzorsku infrastrukturu, prikazana je na slici 5.1. Komunikacija između lidera je prikazana isprekidanim linijama, jer je ona neophodna kod DCA algoritma, dok kod predloženog algoritma nije potrebna. Da bi se osiguralo fer poređenje, odabran je jednak broj lidera i pratilaca, zato što je u tom slučaju moguće odabrati iste referentne trajektorije za oba algoritma. Sopstvene vrijednosti egzosistema su 0 , $\pm j\sqrt{2\pi/T}$ i $\pm j\sqrt{4\pi/T}$, gdje je $T = 10s$.

Svi težinski koeficijenti grana su jednaki $w_{ij} = \frac{1}{\max_i |\mathcal{N}_i|}$. Tada, uzimajući u obzir mrežnu topologiju sa slike 5.1, dinamika pratilaca se može opisati sljedećim matricama:

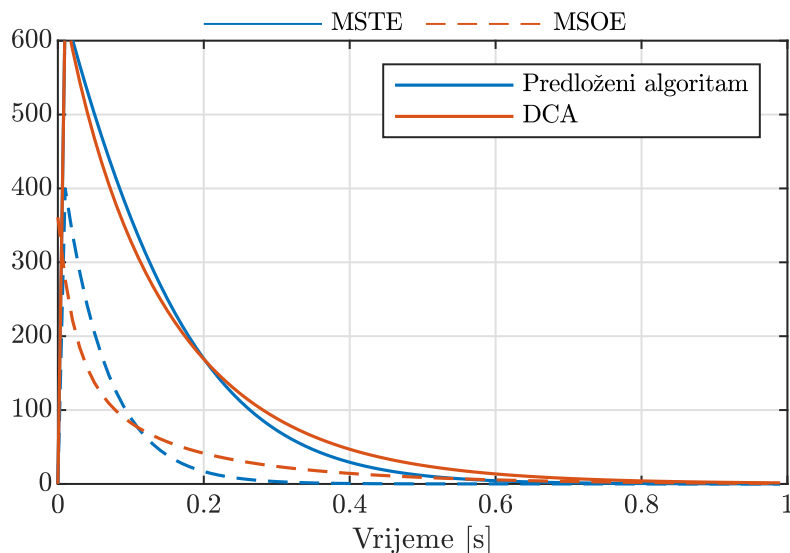
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.33 & 0.33 \\ 0 & -1 & 0.33 & 0.33 \\ 0.33 & 0.33 & -1 & 0 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.33 \end{bmatrix}.$$

Matrica pojačanja K je odabrana u skladu sa Teoremom 4.3: $K = \text{diag}(4, 5, 5, 6)$, čime je osigurano da će sopstvene vrijednosti ležati na intervalu $[-8, -2]$. S druge strane, koeficijenti matrice pojačanja opservera L su odabrani u skladu sa Posljedicom 4.10: $L = \text{diag}(24, 24, 24, 24)$, kako bi se osiguralo da je -8 gornja granica sopstvenih vrijednosti.

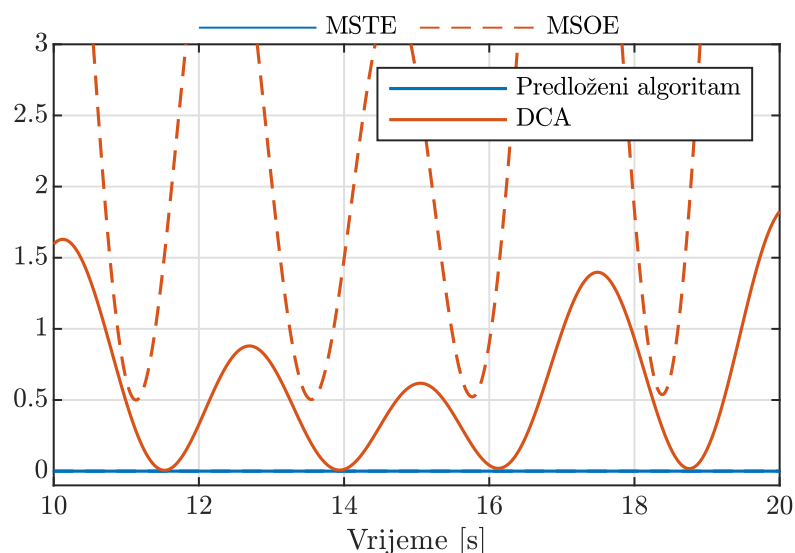
Izabran je sljedeći par matrica koji predstavlja rješenje regulatorskih jednačina (4.12):

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.26 & -0.82 & 0.07 & -0.80 & -1.22 \\ 0.07 & -0.82 & 0.07 & -2.19 & -0.81 \\ 0.11 & -0.82 & 0.07 & -0.72 & 0.22 \\ 0.11 & -0.82 & 0.07 & -1.12 & -1.17 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 3.67 & -10.86 & -0.61 & -5.58 & -20.33 \\ 1.11 & -13.34 & -0.39 & -34.61 & -21.87 \\ 1.67 & -13.34 & -0.39 & -10.74 & 3.37 \\ 2.00 & -15.81 & -0.17 & -16.22 & -26.77 \end{bmatrix}.$$



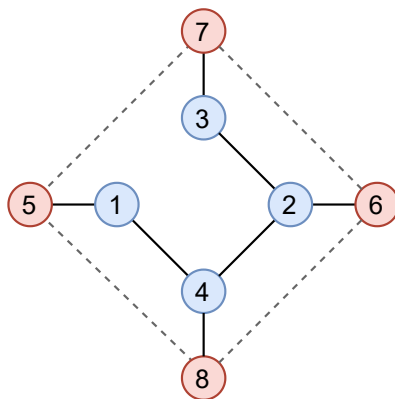
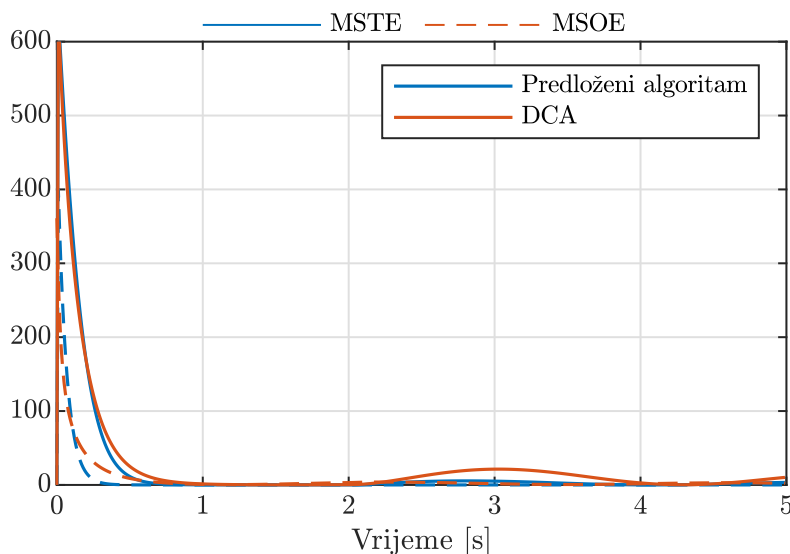
Slika 5.2: MSTE (puna linija) i MSOE (isprekidana linija) za $N = 8$ agenata.



Slika 5.3: MSTE (puna linija) i MSOE (isprekidana linija) u stacionarnom stanju za $N = 8$ agenata.

Kod DCA algoritma usvojene su iste referentne trajektorije (određene matricom Π), dok je matrica Γ_{DCA} jednaka $\Gamma_{DCA} = B^{-1}(K\Pi + B\Gamma)$ (ovo direktno slijedi iz (4.12a)). Parametri algoritma su odabrani tako da su sopstvene vrijednosti spregnutog sistema približno jednake onima u predloženom algoritmu.

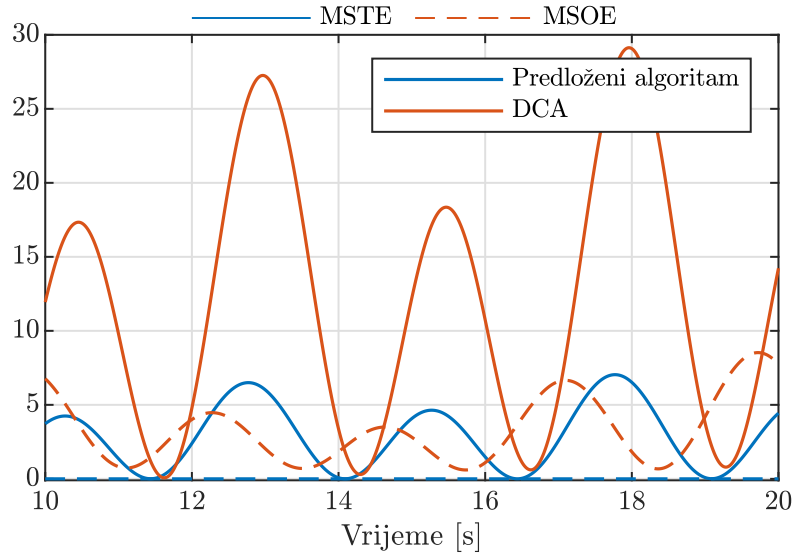
MSTE i MSOE algoritama su prikazani na slikama 5.2 i 5.3. Evidentno je da oba algoritma stabilizuju sistem i da spregnuti sistemi imaju sličnu dinamiku. Međutim, sa slike 5.3 se jasno uočava da MSTE i MSOE predloženog rješenja asimptotski konvergiraju ka nuli, dok kod DCA postoje greške u praćenju i estimaciji. Ovo je posljedica dinamičkog konsenzus protokola koji je implementiran od strane lidera kako bi se estimirao izlazni vektor pratilaca. Važno je naglasiti da ove greške, koje su proporcionalne periodi odabiranja, postaju veće za referentne trajektorije koje se brže mijenjaju u vremenu.


 Slika 5.4: Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata za $t \geq 2s$.

 Slika 5.5: Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata za $t > 2s$.

Primjer 2

U ovom primjeru biće analizirano kako promjena topologije mreže, tj. diskonekcija određenog agenta utiče na performanse predloženog i DCA algoritama. Razmatra se ista topologija iz prethodnog primjera, prikazana na slici 5.1, kao i isto rješenje regulatorskih jednačina (isti par (Π, Γ)). Ostale veličine su takođe iste. U drugoj sekundi ($t = 2s$) dolazi do prekidanja veze između prvog i trećeg agenta, kao što je prikazano na slici 5.4.

Rezultati simulacija prikazani su na slikama 5.5 i 5.6. Kao što se vidi sa slike 5.5, na intervalu $t \in [0, 2)$ MSTE i MSOE predloženog algoritma asimptotski konvergiraju ka nuli, što je zapravo i demonstrirano u prethodnom primjeru. U trenutku $t = 2s$ dolazi do prekidanja veze između prvog i trećeg agenta, pa samim tim MSTE više neće biti jednaka nuli. Razlog za to leži u činjenici da su regulatorne jednačine riješene za inicijalnu topologiju. Odnosno, usvojeni par (Π, Γ) više ne predstavlja rješenje regulatorskih jednačina za novu topologiju mreže. Međutim, važno je uočiti da oba algoritma ostaju stabilna, iako dolazi do promjene topologije mreže. Sa slike 5.6 se može uočiti da se kod predloženog algoritma estimacija stanja i dalje vrši bez greške, dok kod DCA algoritma greška u estimaciji stanja ima sličnu vrijednost kao

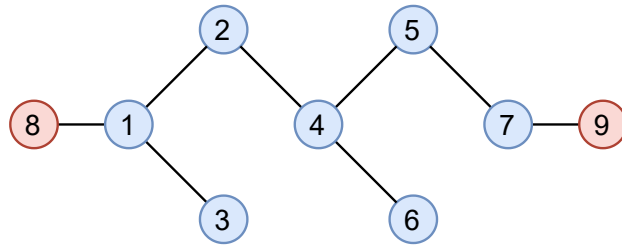


Slika 5.6: Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 8$ agenata za $t > 2s$.

u prethodnom primjeru. Sa druge strane, greška u praćenju referentnih trajektorija je do pet puta veća kod DCA algoritma u odnosu na predloženo rješenje.

Primjer 3

U ovom primjeru je demonstrirana implementacija koordinisanog, kompleksnog kretanja u trodimenzionalnom prostoru. Pretpostavlja se da se kretanje u svakoj dimenziji modeluje jednostrukim integratorom, pri čemu su stanja integratora nezavisna jedna od drugih. Umreženi sistem se sastoji od sedam pratilaca i dva lidera koji međusobno interaguju u skladu sa topologijom prikazanoj na slici 5.7. Sopstvene vrijednosti egzosistema su 0 i $\pm j\sqrt{2\pi/T}$, dok je $T = 10s$.



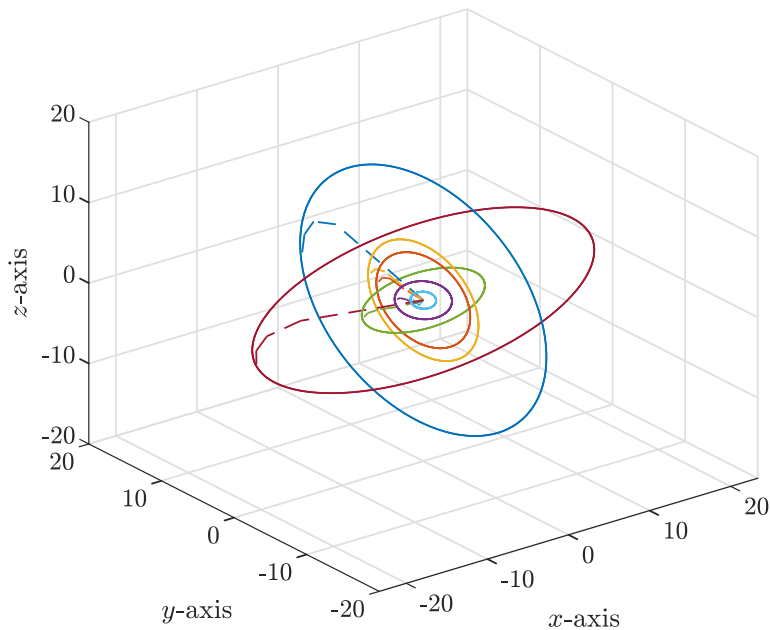
Slika 5.7: Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 9$ agenata.

Dinamika pratilaca multiagentnog sistema je opisana sljedećim matricama:

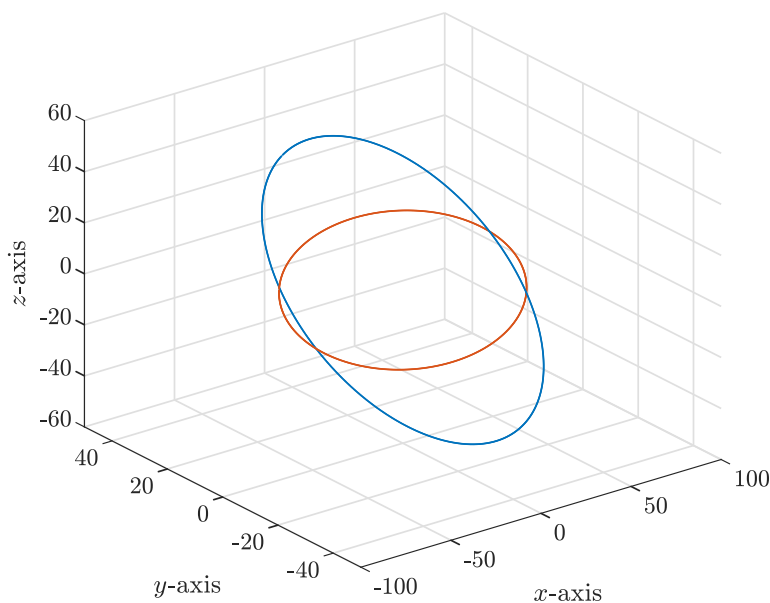
$$A = \gamma \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je $\gamma = \frac{5}{3}$. Sopstvene vrijednosti matrice A leže na intervalu $[-10, 0)$, što je u skladu sa Primjedbom 4.5. Da bi osigurali da sopstvene vrijednosti matrice $(A -$

K) leže na intervalu $[-12, -2)$, svi dijagonalni elementi matrice K su postavljeni na vrijednost 2. Konačno, pojačanje opservera je jednako $L = \text{diag}(24, 24, 24, 24)$, čime se osigurava da sopstvene vrijednosti opservera budu ograničene odozgo sa -8 (Posljedica 4.10).



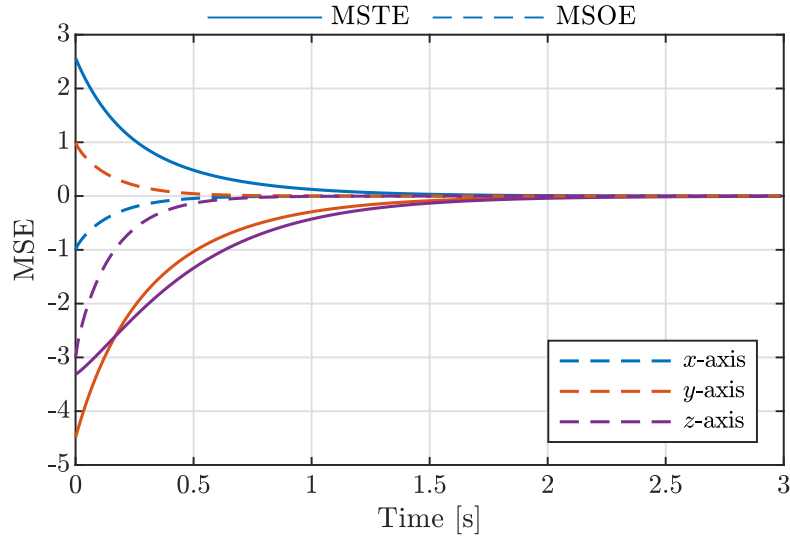
Slika 5.8: Trajektorije pratilaca u trodimenzionalnom prostoru stanja (isprekidane linije – tranzijent, pune linije – stacionarno stanje).



Slika 5.9: Upravljački signali lidera u trodimenzionalnom prostoru stanja.

Različito rješenje regulatorskih jednačina (par (Π, Γ)) je usvojeno za svaku dimenziju, pri čemu, radi preglednosti, ta pojedinačna rješenja nisu prezentovana. Slika 5.8 prikazuje trajektorije agenata u trodimenzionalnom prostoru stanja, dok

slika 5.9 prikazuje upravljački signal lidera. Kao što je očekivano, nakon prelaznog procesa, trajektorije agenata se poklapaju sa referentnim trajektorijama. MSTE i MSOE za svaku dimenziju su prikazane na slici 5.10. Kao što se može vidjeti, obje asimptotski konvergiraju ka nuli.



Slika 5.10: MSTE (puna linija) i MSOE (isprekidana linija) u stacionarnom stanju za $N = 9$ agenata.

5.2 Kooperativno upravljanje mrežom sistema višeg reda

U ovom potpoglavlju su prezentovana dva primjera regulacije izlaza multiagentnog sistema u kojem su pratioci modelovani opštom linearnom dinamikom, čime je demonstrirano da se predloženi algoritam može uspješno generalizovati na sisteme višeg reda.

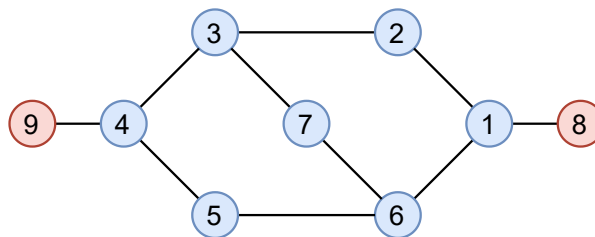
Model u prostoru stanja pratilaca je dat matricama

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1].$$

Početno stanje egzosistema je $\xi(0) = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, gdje je matrica S odabrana tako da su polovi egzosistema 1 i $1 \pm j0.0063$, pri čemu je $T = 10s$.

Primjer 1

Interakciona topologija je modelovana grafom, koji je prikazan na slici 5.11, gdje su pratioci i lideri označeni plavom i crvenom bojom, respektivno. Matrica pojačanja K je odabrana tako da su sopstvene vrijednosti matrice $(A - \lambda_{\max}(L_F)BC - BK)$ jednake -1 i -2 , čime je garantovana stabilnost kolektivnog sistema. Sa $\lambda_{\max}(L_F)$ je označena najveća sopstvena vrijednost pozitivno definitne matrice L_F .

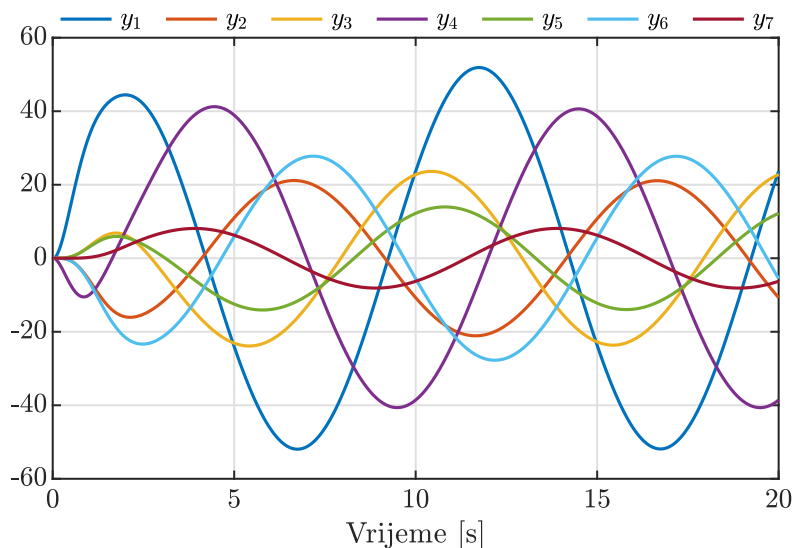

 Slika 5.11: Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 9$ agenata

Izabrano je sljedeće rješenje regulatorskih jednačina:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.00 & -110.56 & -22.64 \\ 63.66 & -43.96 & -66.60 \\ 63.66 & -110.56 & -22.64 \\ 0.00 & -66.60 & 43.96 \end{bmatrix},$$

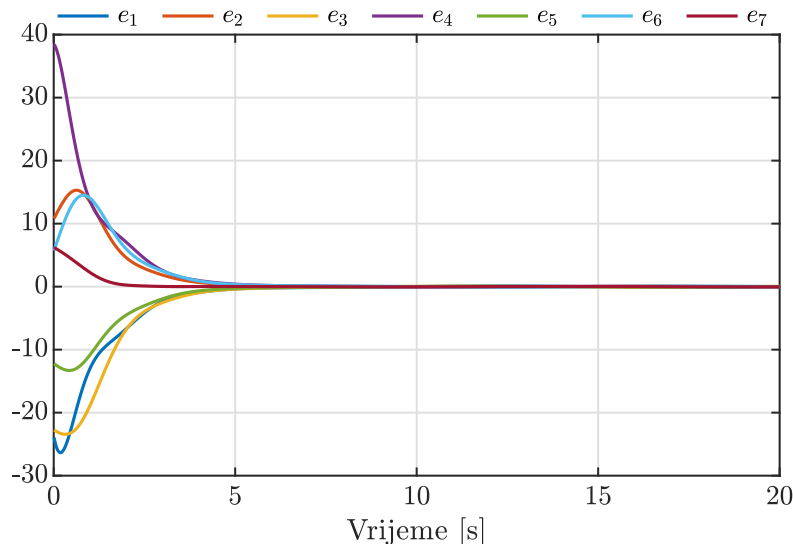
$$J = \begin{bmatrix} -42.25 & 45.92 & 23.95 \\ 14.38 & -18.04 & -10.82 \\ -6.62 & 6.21 & 22.74 \\ 6.40 & 13.05 & -38.44 \\ -8.74 & 6.64 & 12.24 \\ 23.30 & -27.06 & -5.73 \\ -4.91 & 5.19 & -6.21 \end{bmatrix}.$$

Radi preglednosti rada, matrica Π nije prezentovana, ali ona se može lako dobiti uvrštavanjem matrica Γ i J u relaciju (4.34).



Slika 5.12: Izlazni signal pratilaca.

Rezultati simulacija su prikazani na slikama 5.12 i 5.13. Na slici 5.12 su prikazani izlazni signali agenata u multiagentnom sistemu. Trajektorije stanja svakog agenta nisu prikazane radi preglednosti grafika. Greška u praćenju referentnih trajektorija je prikazana na slici 5.13, odakle se može uočiti da greška u praćenju konvergira ka

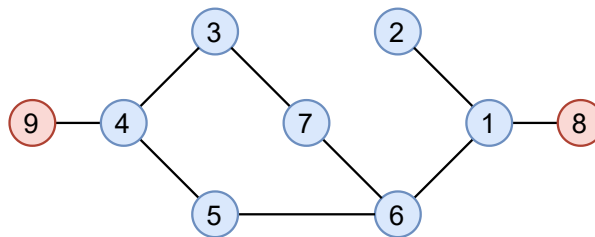


Slika 5.13: Greške u praćenju referentnih trajektorija.

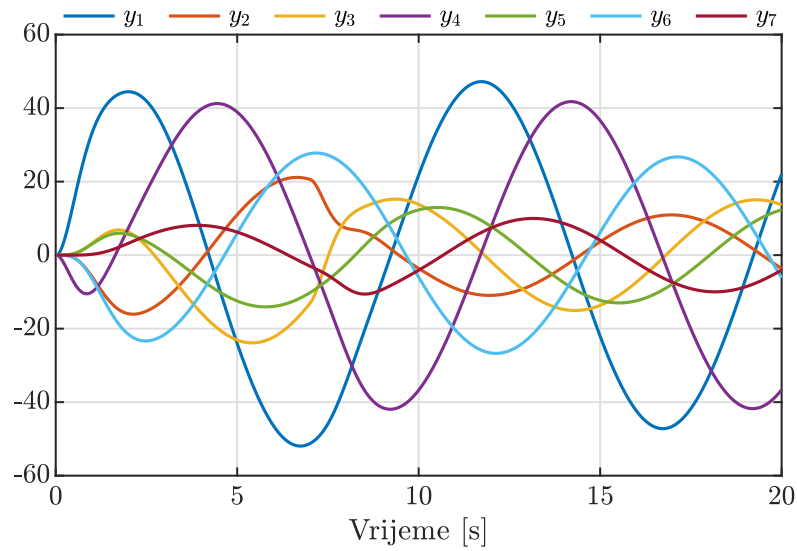
nuli. Treba napomenuti da je brzinu konvergencije moguće podesiti odgovarajućim odabirom matrice K .

Primjer 2

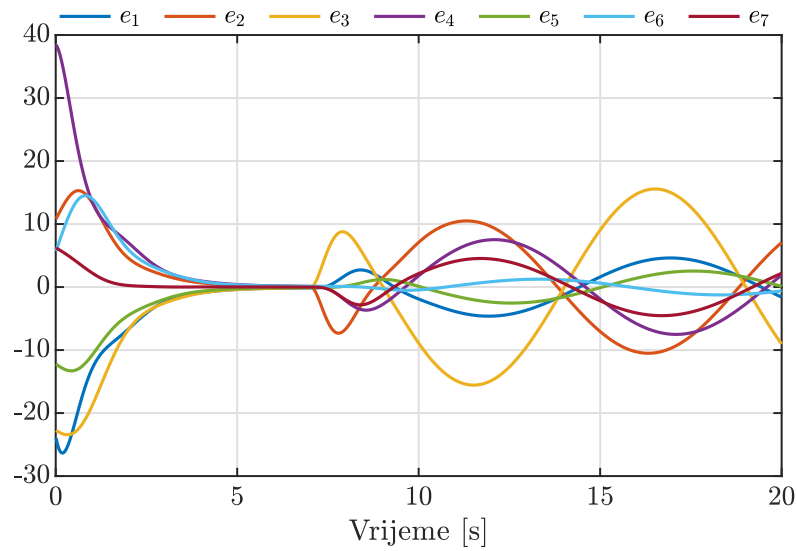
Na kraju, analiziran je uticaj promjene topologije na performanse predloženog algoritma. Naime, smatra se da je topologija mreže zadana kao na slici 5.11. Usvojeno je isto rješenje regulatorskih jednačina (isti par (J, Γ)) kao u prethodnom primjeru. Ostale veličine su takođe iste. U trenutku $t = 7s$ dolazi do diskonekcije veze između drugog i trećeg agenta, kao što je prikazano na slici 5.14.


 Slika 5.14: Mrežna topologija koja se sastoji od $N = 9$ agenata za $t \geq 7s$.

Izlazni signali agenata u multiagentnom sistemu su prikazani na slici 5.15, dok je greška u praćenju prikazana na slici 5.16. Može se uočiti da na intervalu $t \in [0, 7)$ greške u praćenju referentnih trajektorija standardno konvergiraju ka nuli. Nakon sedme sekunde, kada dolazi do promjene topologije mreže, greška u praćenju više neće biti jednaka nuli, a razlog je isti kao u slučaju kada su agenti modelovani jednostrukim integratorima. I ovdje je važno uočiti da pri promjeni topologije mreže, sistem ostaje stabilan.



Slika 5.15: Izlazni signal pratilaca.



Slika 5.16: Greška u praćenju referentnih trajektorija.

Zaključak

U radu je razmatran problem praćenja referentnih trajektorija u multiagentnim sistemima, primjenom „leader-follower” metodologije. Pokazano je da se, u slučaju kada su agenti modelovani jednostrukim integratorom, problem praćenja može riješiti pomoću distribuiranog upravljačkog zakona koji pored relativnih mjerenja koristi i informacije o sopstvenim stanjima agenata. Ukoliko agenti nisu u mogućnosti da mjere sopstveno stanje, tada posredstvom lokalnog opservera i komunikacije sa susjednim agentima mogu da izvrše njegovu estimaciju. Izvedeni su jednostavni analitički izrazi za određivanje parametara kontrolera i opservera, kojima se garantuje da će polovi kolektivnog umreženog sistema ležati lijevo u odnosu na specificiranu vertikalnu asimptotu. Ovo predstavlja značajnu prednost u odnosu na dostupne algoritme, kod kojih se parametri kontrolera određuju rješavanjem linearnih matricnih nejednačina. Pored mreže jednostrukih integratora, u radu je razmotrena i mreža sistema višeg reda. Naime, predložen je upravljački zakon koji rješava problem praćenja referentnih trajektorija i izvedeni su potrebni uslovi za stabilnost.

Efektivnost predloženih algoritama, kao i rezultati teorijske analize, potvrđeni su kroz brojne numeričke eksperimente. Najprije je razmotren problem upravljanja mrežom jednostrukih integratora. Rezultati simulacija pokazuju da predloženi algoritam obezbjeđuje idealno praćenje referentnih trajektorija, kao i idealnu estimaciju stanja pratilaca. Sa druge strane, decentralizovano rješenje, s kojim je vršena komparacija, ispoljava kako grešku u estimaciji stanja, tako i grešku u praćenju referentnih trajektorija, što je zapravo posljedica korišćenja dinamičkog konsenzus protokola. Iako oba algoritma ostaju stabilna u scenariju kada dođe do diskonekcije nekog agenta, pokazano je da se prilikom implementacije predloženog rješenja javlja manje odstupanje od referentnih trajektorija. Na kraju, simulacijama je demonstrirano da se predloženi algoritam može generalizovati i na slučaj kada su agenti modelovani opštom linearnom dinamikom.

Predloženi algoritmi pripadaju klasi tzv. „time-triggered” distribuiranih algoritama, kod kojih se razmjena informacija u mreži odvija kontinualno (u svakom trenutku), što dovodi do dobrih performansi, ali i visokih komunikacionih troškova. Iz tog razloga, fokus budućih istraživanja biće na razvoju tzv. „event-triggered” distribuiranih algoritama kod kojih se razmjena informacija u mreži odvija samo kada dođe do specificiranog događaja (npr. kada razlika između estimacije relativnog stanja i mjerenja prekorači određeni prag). Na ovaj način će se postići značajno smanjenje komunikacionih troškova. Predloženi algoritmi se zasnivaju na pretpostavci da se komunikaciona topologija modeluje fiksnim neusmjernim grafom, pa jedan od mogućih pravaca predstavlja analiza i eventualno prilagođavanje algoritama na vremenski-promjenljive usmjerene grafove. Na kraju, s obzirom na to da

se predložena rješenja mogu primijeniti u multirobotskim sistemima, budući rad biće posvećen njihovoj modifikaciji na takav način da se izbjegne nastajanje kolizija između agenata.

Bibliografija

- [1] K. K. Oh, M. C. Park, and H. S. Ahn, “A survey of multi-agent formation control,” *Automatica*, vol. 53, pp. 424–440, mar 2015.
- [2] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, and Y. Zhong, “Time-Varying Formation Tracking for Second-Order Multi-Agent Systems Subjected to Switching Topologies With Application to Quadrotor Formation Flying,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, pp. 5014–5024, jun 2017.
- [3] W. Ren and E. Atkins, “Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 17, pp. 1002–1033, jul 2007.
- [4] D. H. Nguyen and J. Khazaei, “Multiagent Time-Delayed Fast Consensus Design for Distributed Battery Energy Storage Systems,” *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 9, pp. 1397–1406, jul 2018.
- [5] M. Egerstedt, S. Martini, M. Cao, K. Camlibel, and A. Bicchi, “Interacting with networks: How does structure relate to controllability in single-leader, consensus networks?,” 2012.
- [6] A. Rahmani, M. Ji, M. Mesbahi, and M. Egerstedt, “Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective,” in *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 48, pp. 162–186, feb 2009.
- [7] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, pp. 215–233, jan 2007.
- [8] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 1520–1533, sep 2004.
- [9] L. Xiao, S. Boyd, and S. J. Kim, “Distributed average consensus with least-mean-square deviation,” *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 67, pp. 33–46, jan 2007.
- [10] R. Olfati-Saber and J. S. Shamma, “Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion,” in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC ’05*, vol. 2005, pp. 6698–6703, 2005.
- [11] Z. Li, Z. Duan, and G. Chen, “Dynamic consensus of linear multi-agent systems,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, pp. 19–28, jan 2011.

- [12] S. Su, Z. Lin, and A. Garcia, “Distributed synchronization control of multi-agent systems with unknown nonlinearities,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 46, pp. 325–338, jan 2016.
- [13] W. Zhao, H. Chu, M. Zhang, T. Sun, and L. Guo, “Flocking Control of Fixed-Wing UAVs with Cooperative Obstacle Avoidance Capability,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 17798–17808, 2019.
- [14] R. Wang, X. Dong, Q. Li, and Z. Ren, “Distributed Adaptive Formation Control for Linear Swarm Systems with Time-Varying Formation and Switching Topologies,” *IEEE Access*, vol. 4, pp. 8995–9004, 2016.
- [15] J. A. Fax and R. M. Murray, “Information flow and cooperative control of vehicle formations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 1465–1476, sep 2004.
- [16] J. Xiang, W. Wei, and Y. Li, “Synchronized output regulation of linear networked systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1336–1341, 2009.
- [17] X. Wang, Y. Hong, J. Huang, and Z. P. Jiang, “A distributed control approach to a robust output regulation problem for multi-agent linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, pp. 2891–2895, dec 2010.
- [18] J. Xiang, Y. Li, and D. J. Hill, “Cooperative output regulation of multi-agent systems coupled by dynamic edges,” in *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, vol. 19, pp. 1813–1818, jan 2014.
- [19] Y. Su and J. Huang, “Cooperative output regulation of linear multi-agent systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, pp. 1062–1066, apr 2012.
- [20] Y. Su and J. Huang, “Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by output feedback,” *Systems and Control Letters*, vol. 61, pp. 1248–1253, dec 2012.
- [21] M. Cocetti, L. Sabattini, C. Secchi, and C. Fantuzzi, “Decentralized control strategy for the implementation of cooperative dynamic behaviors in networked systems,” in *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 5902–5907, 2013.
- [22] A. Saberi, A. Stoorvogel, and P. Sannuti, “Classical exact output regulation,” pp. 13–68, Springer, London, 2000.
- [23] J. Huang, *Nonlinear Output Regulation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, jan 2004.
- [24] L. Sabattini, C. Secchi, M. Cocetti, A. Levratti, and C. Fantuzzi, “Implementation of Coordinated Complex Dynamic Behaviors in Multirobot Systems,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, pp. 1018–1032, aug 2015.
- [25] P. L. Krapivsky, S. Redner, and F. Leyvraz, “Connectivity of growing random networks,” *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 4629–4632, nov 2000.

- [26] M. E. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, “Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications,” *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, vol. 64, p. 17, jul 2001.
- [27] L. A. Amaral, A. Scala, M. Barthélemy, and H. E. Stanley, “Classes of small-world networks,” in *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 97, pp. 11149–11152, oct 2000.
- [28] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *Nature*, vol. 393, pp. 440–442, jun 1998.
- [29] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph theoretic methods in multiagent networks*. Princeton University Press, jul 2010.
- [30] A. Banks, J. Vincent, and C. Anyakoha, “A review of particle swarm optimization. Part I: Background and development,” dec 2007.
- [31] C. W. Reynolds, “Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model,” in *Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH 1987*, (New York, New York, USA), pp. 25–34, aug 1987.
- [32] T. Vicsek, A. Czirak, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles,” *Physical Review Letters*, vol. 75, pp. 1226–1229, aug 1995.
- [33] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, “Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 988–1001, jun 2003.
- [34] R. Olfati-Saber, “Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, pp. 401–420, mar 2006.
- [35] R. O. Saber and R. M. Murray, “Flocking with Obstacle Avoidance: Cooperation with Limited Communication in Mobile Networks,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, pp. 2022–2028, 2003.
- [36] W. Ren and N. Sorensen, “Distributed coordination architecture for multi-robot formation control,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 56, pp. 324–333, apr 2008.
- [37] W. Ren, “Consensus based formation control strategies for multi-vehicle systems,” in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 2006, pp. 4237–4242, 2006.
- [38] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Graph rigidity and distributed formation stabilization of multi-vehicle systems,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, pp. 2965–2971, 2002.
- [39] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions,” in *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, vol. 15, pp. 495–500, jan 2002.

- [40] S. S. Dhillon and K. Chakrabarty, “Sensor placement for effective coverage and surveillance in distributed sensor networks,” in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference, WCNC*, vol. 3, pp. 1609–1614, 2003.
- [41] S. Martínez and F. Bullo, “Optimal sensor placement and motion coordination for target tracking,” *Automatica*, vol. 42, pp. 661–668, apr 2006.
- [42] R. Olfati-Saber, “Distributed Kalman filtering for sensor networks,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5492–5498, 2007.
- [43] R. Olfati-Saber, “Kalman-Consensus filter: Optimality, stability, and performance,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 7036–7042, 2009.
- [44] R. Olfati-Saber, “Distributed Kalman filter with embedded consensus filters,” in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC ’05*, vol. 2005, pp. 8179–8184, 2005.
- [45] A. L. Barabási and Z. N. Oltvai, “Network biology: Understanding the cell’s functional organization,” feb 2004.
- [46] A. L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, pp. 509–512, oct 1999.
- [47] M. Mesbahi, “On state-dependent dynamic graphs and their controllability properties,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 387–392, mar 2005.
- [48] A. Farrugia and I. Sciriha, “Controllability of undirected graphs,” *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 454, pp. 138–157, aug 2014.
- [49] S. Björkenstam, M. Ji, M. Egerstedt, and C. Martin, “Leader-Based Multi-Agent Coordination Through Hybrid Optimal Control,” tech. rep., 2006.
- [50] M. Ji, A. Muhammad, and M. Egerstedt, “Leader-based multi-agent coordination: Controllability and optimal control,” in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 2006, pp. 1358–1363, 2006.
- [51] H. Ji, H. T. Zhang, Z. Ye, H. Zhang, B. Xu, and G. Chen, “Stochastic Consensus Control of Second-Order Nonlinear Multiagent Systems with External Disturbances,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 5, pp. 1585–1596, dec 2018.
- [52] J. Hu, P. Bhowmick, and A. Lanzon, “Distributed Adaptive Time-Varying Group Formation Tracking for Multiagent Systems with Multiple Leaders on Directed Graphs,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 7, pp. 140–150, mar 2020.
- [53] C. G. Cassandras and W. Li, “Sensor networks and cooperative control,” in *European Journal of Control*, vol. 11, pp. 436–463, jan 2005.
- [54] M. S. Stankovic, S. S. Stankovic, and K. H. Johansson, “Asynchronous Distributed Blind Calibration of Sensor Networks under Noisy Measurements,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 5, pp. 571–582, mar 2018.

- [55] R. De Azevedo, M. H. Cintuglu, T. Ma, and O. A. Mohammed, “Multiagent-Based Optimal Microgrid Control Using Fully Distributed Diffusion Strategy,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 8, pp. 1997–2008, jul 2017.
- [56] C. Huang, S. Weng, D. Yue, S. Deng, J. Xie, and H. Ge, “Distributed cooperative control of energy storage units in microgrid based on multi-agent consensus method,” *Electric Power Systems Research*, vol. 147, pp. 213–223, jun 2017.
- [57] G. Daugherty, S. Reveliotis, and G. Mohler, “Optimized Multiagent Routing for a Class of Guidepath-Based Transport Systems,” *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 16, pp. 363–381, jan 2019.
- [58] A. Garro, M. Mühlhäuser, A. Tundis, M. Baldoni, C. Baroglio, F. Bergenti, and P. Torroni, “Intelligent agents: Multi-agent systems,” in *Encyclopedia of Bioinformatics and Computational Biology: ABC of Bioinformatics*, vol. 1-3, pp. 315–320, Elsevier, jan 2018.
- [59] M. Parada Contzen, “Consensus in networks with arbitrary time invariant linear agents,” *European Journal of Control*, vol. 38, pp. 52–62, nov 2017.
- [60] J. Sun, Z. Geng, Y. Lv, Z. Li, and Z. Ding, “Distributed Adaptive Consensus Disturbance Rejection for Multi-Agent Systems on Directed Graphs,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 5, pp. 629–639, mar 2018.
- [61] J. Wu, V. Ugrinovskii, and F. Allgöwer, “Cooperative Estimation and Robust Synchronization of Heterogeneous Multiagent Systems with Coupled Measurements,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 5, pp. 1597–1607, dec 2018.
- [62] Q. Jia, Z. Han, and W. K. Tang, “Synchronization of Multi-Agent Systems with Time-Varying Control and Delayed Communications,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 66, pp. 4429–4438, nov 2019.
- [63] P. Lin, W. Ren, H. Wang, and U. M. Al-Saggaf, “Multiagent Rendezvous with Shortest Distance to Convex Regions with Empty Intersection: Algorithms and Experiments,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 49, pp. 1026–1034, mar 2019.
- [64] T. Liu and Z. P. Jiang, “Distributed formation control of nonholonomic mobile robots without global position measurements,” *Automatica*, vol. 49, pp. 592–600, feb 2013.
- [65] Z. Lin, L. Wang, Z. Han, and M. Fu, “Distributed formation control of multi-agent systems using complex laplacian,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 7, pp. 1765–1777, 2014.
- [66] K. Aryankia and R. R. Selmic, “Neuro-Adaptive Formation Control and Target Tracking for Nonlinear Multi-Agent Systems with Time-Delay,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, pp. 791–796, jul 2021.
- [67] R. Yang, L. Liu, and G. Feng, “Cooperative Output Tracking of Unknown Heterogeneous Linear Systems by Distributed Event-Triggered Adaptive Control,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, pp. 1–13, feb 2020.

- [68] H. Cai, F. L. Lewis, G. Hu, and J. Huang, “The adaptive distributed observer approach to the cooperative output regulation of linear multi-agent systems,” *Automatica*, vol. 75, pp. 299–305, jan 2017.
- [69] S. Baldi, I. A. Azzollini, and P. A. Ioannou, “A distributed indirect adaptive approach to cooperative tracking in networks of uncertain single-input single-output systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020.
- [70] M. Ji, A. Muhammad, and M. Egerstedt, “Leader-based multi-agent coordination: Controllability and optimal control,” in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 2006, pp. 1358–1363, 2006.
- [71] M. Egerstedt, S. Martini, M. Cao, K. Camlibel, and A. Bicchi, “Interacting with networks: How does structure relate to controllability in single-leader, consensus networks?,” 2012.
- [72] L. Sabattini, C. Secchi, and C. Fantuzzi, “Multi-robot systems implementing complex behaviors under time-varying topologies,” *European Journal of Control*, vol. 38, pp. 73–87, nov 2017.
- [73] F. Boem, L. Sabattini, and C. Secchi, “Decentralized state estimation for the control of network systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, pp. 860–882, jan 2019.
- [74] A. Parisio, E. Rikos, and L. Glielmo, “A model predictive control approach to microgrid operation optimization,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 5, pp. 1813–1827, 2014.
- [75] A. Saberi, A. Stoorvogel, and P. Sannuti, “Classical exact output regulation,” pp. 13–68, 2000.
- [76] A. G. Wu, G. R. Duan, and B. Zhou, “Solution to generalized Sylvester matrix equations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, pp. 811–815, apr 2008.
- [77] R. Soukieh, I. Shames, and B. Fidan, “Obstacle avoidance of non-holonomic unicycle robots based on fluid mechanical modeling,” in *2009 European Control Conference, ECC 2009*, pp. 3269–3274, mar 2014.
- [78] D. Lee, A. Franchi, H. I. Son, C. Ha, H. H. Bulthoff, and P. R. Giordano, “Semiautonomous haptic teleoperation control architecture of multiple unmanned aerial vehicles,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 18, no. 4, pp. 1334–1345, 2013.
- [79] L. Sabattini, C. Secchi, and C. Fantuzzi, “Controllability and observability preservation for networked systems with time varying topologies,” in *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, vol. 19, pp. 1837–1842, jan 2014.
- [80] D. G. Luenberger, “An Introduction to Observers,” 1971.
- [81] W. Ren, “Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state,” *Systems and Control Letters*, vol. 56, pp. 474–483, jul 2007.

- [82] L. Martinovic, Z. Zecevic, and B. Krstajic, “Distributed Control Strategy for Multi-Agent Systems Using Consensus Among Followers,” in *2020 24th International Conference on Information Technology, IT 2020*, feb 2020.
- [83] L. Martinovic, Z. Zecevic, and B. Krstajic, “Cooperative output regulation of multi-agent systems with single-integrator dynamics,” in *2020 28th Telecommunications Forum, TELFOR 2020 - Proceedings*, nov 2020.
- [84] L. Martinovic, Z. Zecevic, and B. Krstajic, “Cooperative Tracking Control of Multi-Agent Systems with General Linear Dynamics,” in *2021 25th International Conference on Information Technology, IT 2021*, pp. 1–4, apr 2021.
- [85] R. A. Horn and C. R. Johnson, “Matrix Analysis,” 2012.
- [86] S. Y. Shafi, M. Arcak, and L. El Ghaoui, “Graph weight allocation to meet laplacian spectral constraints,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 7, pp. 1872–1877, 2012.
- [87] J. Hermann and U. Konigorski, “Eigenvalue assignment for the laplacian matrix of directed graphs,” in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 2019-July, pp. 4036–4042, jul 2019.
- [88] F. Zhang and Q. Zhang, “Eigenvalue inequalities for matrix product,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, pp. 1506–1509, sep 2006.
- [89] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das, “Algebraic Graph Theory and Cooperative Control Consensus,” in *Communications and Control Engineering*, no. 9781447155737, pp. 23–71, Springer International Publishing, 2014.

Prilog

1. Matlab funkcija za rješavanje regulatorkih jednačina

```
function [Pi,Ge] = regeqs(A,B,G,n,N)

Nf=length(A);
Nl=N-Nf;
Gn=[];
for i=0:Nf-1
    Gn=[Gn;G^i];
end

I=eye(Nf);
for p=1:Nf+1
    R{1,p}=I;
end

for p=1:Nf+1
    p1=p-1;
    for q=1:Nf+1
        q1=q-1;
        if p1==0
            hi{q,p}=-1/(q1+1)*trace(A*R{q,p});
            R{q+1,p}=A*R{q,p}+hi{q,p}*I;
        elseif p1==q1+1
            hi{q,p}=1/(q1+1)*trace(R{q,p-1});
            R{q+1,p}=-R{q,p-1}+hi{q,p}*I;
        else
            hi{q,p}=-1/(q1+1)*trace(A*R{q,p}-R{q,p-1});
            R{q+1,p}=A*R{q,p}-R{q,p-1}+hi{q,p}*I;
        end
    end
end

Sigma=[];Q=[];
Z=round(rand(Nl,2*n+1)); % ovdje bilo Nf, greska
Xi=zeros(size(G));
for p=1:Nf
    Sigma=[Sigma R{Nf,p}*B];
    Q=[Q;Z*G^(p-1)];
end
for p=1:Nf+1
    Xi=Xi+hi{Nf,p}*G^(p-1);
end
Pi=Sigma*Q;
Ge=Z*Xi;
end
```

2. Matlab kod za kreiranje referentnih trajektorija

```

clc
load grafovi/graf3.mat
N=8;
G=0;
n=2; %broj harmonika
T=50; %perioda
for p=1:n
G=blkdiag(G,[0 p*2*pi/T; -p*2*pi/T 0]);
end
%regulatorske jednacine
[PI,GAMA]=regeqs(-A,-B,G,n,N);
save refsig/exo6.mat PI GAMA G n

```

3. Matlab kod za upravljenje mrežom jednostrukih integratora

```

setlat
close all
clear all
clc
boje=lines(10);
load ../grafovi/graf3.mat
load ../refsig/exo3.mat
%%
C=B';
Lk=kron(LI,eye(I));
Lknase=kron(LD,eye(D));
%%
Nf=D; Nl=I;
Admax=max(abs(diag(A)));
A=-A/3;B=-B/3;
%%
Ktelf=diag([4 5 5 6]);
Kkl=diag(4*[6 6 6 6]);
%%
% F=place(A,-B,-0.2*[3:6]);
F=place(A,-B,eig(A-Ktelf)/2.2);
% Kl=place(A',C',-1*[3:6])';
Kl=place(A',C',eig(Kkl*A)/2)';
%% perioda odabiranja
dt=0.01;
tend=150;
br=2;
beta=1e2;
%%
xc(:,br)=20*ones(D,1); %pocetno stanje
xd(:,br)=1*ones(D,1); %pocetno stanje
xftelf(:,br)=1*ones(Nf,1);
xftelf1(:,br)=1*ones(Nf,1);
xftelf1_e(:,br)=20*ones(Nf,1);
clear temp pom
for i=1:I
    xe_dec{i,br}=20*ones(D,1); %i-redni broj lidera
end
xe_c(:,br)=zeros(D,1); %za centr
yh(:,br)=zeros(I^2,1);
clear p
p(:,br)=zeros(I^2,1); %za kons

```

```

GAMAtelf=pinv(B)*(Ktelf*PI+B*GAMA);
J=PI;
Gd=(G*dt+eye(size(G)));
% Gd=expm(G*dt);
zeta(:,br)=zeros(2*n+1,1);
zeta(1:2:end,br)=32;
%%
for t=0:dt:tend
    xs(:,br)=PI*zeta(:,br);
    yc(:,br)=C*xc(:,br); %mjerenje
    yd(:,br)=C*xd(:,br); %mjerenje
    %% constrained consensus
    alfa=0.0001;
    y_iz=[yd(:,br)-yd(:,br-1)]/dt;
    for i=1:I
        for k=1:I
            sh1((i-1)*I+k)=0; sh2((i-1)*I+k)=0;
            for j=1:I
                if (LI(k,j)==-1)
                    sh1((i-1)*I+k)=sh1((i-1)*I+k)+alfa*[yh((i-1)*I+k,br)-yh((i-1)*I+j,br)];
                    sh2((i-1)*I+k)=sh2((i-1)*I+k)+1/2*[ (yh((i-1)*I+j,br)-yh((i-1)*I+j,br-1))/dt+alfa*[yh((i-1)*I+k,br)-yh((i-1)*I+j,br)]];
                end
            end
            if k==i
                yh((i-1)*I+k,br+1)=yh((i-1)*I+k,br)+dt*[y_iz(k)-alfa*(yh((i-1)*I+k,br)-yd(k,br))-sh1((i-1)*I+k)];
            else
                yh((i-1)*I+k,br+1)=yh((i-1)*I+k,br)+dt*sh2((i-1)*I+k);
            end
        end
    end
    %%DECENTRTALIZOVANO
    for i=1:I
        u_node{i}=F*xe_dec{i,br}+(GAMA-F*PI)*zeta(:,br);
        xe_dec{i,br+1}=xe_dec{i,br}+dt*(A*xe_dec{i,br}+B*u_node{i}+Kl*(yh((0:I-1)*I+i,br)-C*xe_dec{i,br}));
        ud(i,br)=[u_node{i}(i)];
        e_dec{i,br}=xe_dec{i,br}-xd(:,br);
    end
    uc(:,br)=F*xe_c(:,br)+(GAMA-F*PI)*zeta(:,br);
    xe_c(:,br+1)=xe_c(:,br)+dt*(A*xe_c(:,br)+B*uc(:,br)+Kl*(yc(:,br)-C*xe_c(:,br))); %centralizovano
    utelf=GAMAtelf*zeta(:,br);
    xltelf(:,br)=utelf;
    zeta(:,br+1)=Gd*zeta(:,br);
    xftelf(:,br+1)=xftelf(:,br)+dt*((A-Ktelf)*xftelf(:,br)+B*utelf);
    xftelfl_e(:,br+1)=xftelfl_e(:,br)+dt*Kkl*A*xftelfl_e(:,br);
    xftelfl(:,br+1)=xftelfl(:,br)+dt*((A-Ktelf)*xftelfl(:,br)+B*utelf)+dt*1*Ktelf*xftelfl_e(:,br);
    xc(:,br+1)=xc(:,br)+dt*(A*xc(:,br)+B*uc(:,br));
    xd(:,br+1)=xd(:,br)+dt*(A*xd(:,br)+B*ud(:,br));
    %% greska
    ec(:,br)=xc(:,br)-xs(:,br); % greska u pracenju setpointa
    ed(:,br)=xd(:,br)-xs(:,br); % greska u pracenju setpointa
    etelf(:,br)=xftelf(:,br)-xs(:,br);

```

```

    etelf1(:,br)=xftelf1(:,br)-xs(:,br);
    etelf1_e(:,br)=xftelf1_e(:,br);
    br=br+1;
end
t=0:dt:tend;
MSOE{2}=zeros(size(sum([e_dec{1, :}])))
for i=1:I
MSOE{2}=MSOE{2}+sum([e_dec{i, :}].^2)/I;
end
MSOE{2}= MSOE{2}/I;
MSTE{1}=mean(etelf1.^2);
MSTE{2}=mean(ed.^2);
MSOE{1}=mean(etelf1_e.^2);
pom3=mean(ed.^2);
pom4=mean(ec.^2);

```

4. Matlab kod za upravljenje mrežom sistema višeg reda

```

close all
clear all
setlat
% load ../refsig/exo3.mat
load ../grafovi/graf3.mat
G=0;
n=2; %broj harmonika
T=10; %perioda
for p=1:n
G=blkdiag(G,[0 p*2*pi/T; -p*2*pi/T 0]);
end
%regulatorske jednacine
clc
boje=lines(10);
% load ../grafovi/graf3.mat
% load ../refsig/exo3.mat
%%
Nf=D; Nl=I;
AL=-A/3;BL=-B/3;
Ai=[1 1;0 1];
Bi=[1;1];Ci=[1 1];
Ki=acker(Ai,Bi,[-5 -2]);
m=length(Ai);
A=kron(Ai-Ki,eye(Nf))+kron(Bi*Ci,AL);
B=kron(Bi*Ci,BL);
C=kron(Ci,eye(Nf))
%%
K=diag([4 5 5 6]);
[PI,GAMA]=regeqs(A,B,G,n,N*m);
%% perioda odabiranja
dt=0.01;
tend=150;
br=2;
%%
x(:,br)=1*ones(Nf*m,1);
%%
J=PI;
Gd=(G*dt+eye(size(G)));
% Gd=expm(G*dt);
zeta(:,br)=zeros(2*n+1,1);

```

```
zeta(1:2:end,br)=1e-4;
%%
for t=0:dt:tend
    xs(:,br)=J*zeta(:,br);
    u=GAMA*zeta(:,br);
    zeta(:,br+1)=Gd*zeta(:,br);
    x(:,br+1)=x(:,br)+dt*(A*x(:,br)+B*u);
    e(:,br)=C*x(:,br)-C*xs(:,br);
    br=br+1;
end
%%
t=0:dt:tend;
%%
MSTE{1}=mean(e.^2);
```