Глава 2

Коначно генерисане Абелове групе

2.1 Сума и директна сума

Абелове, или комутативне, групе су оне групе у којима свака два елемента комутирају, тј. за свака два елемента x и y Абелове групе G важи: $xy = yx$. Често се, а то ћемо и ми урадити, у случају да се разматрају Абелове групе, за операцију у групи користи ознака $+$, а за неутрал 0.

Као што се сећамо, диедарска група $\mathbb{D}_n$ може се задати са два генератора r и s између којих важе релације:

$$s^2 = e, \quad r^n = e, \quad sr = r^{n-1}s.$$

Знамо да та група има сложену и занимљиву структуру. Претпоставимо да сада разматрамо Абелову групу задату са два генератора r и s, и релацијама

$$2s = 0, \quad nr = 0, \quad s + r = (n-1)r + s.$$

Видимо да нам последња релација даје $(n-2)r = 0$, а из те релације и друге релације добијамо да је $2r = 0$. Сада разликујемо два случаја.

1. $n = 2k + 1$: Тада, из $2r = 0$ и $(2k+1)r = 0$, добијамо да је $r = 0$. Дакле, довољан је заправо само један генератор s и за њега важи $2s = 0$. Видимо да је дата група изоморфна групи $\mathbb{Z}_2$.

2. $n = 2k$: Видимо да је тада релација $nr = 0$ последица релације $2r = 0$, те заправо имамо групу са два генератора r и s и две релације $2r = 0$ и $2s = 0$. Закључујемо да је група о којој се ради изоморфна групи $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Коментар: Заправо је група коју смо разматрали ништа друго до Абелизација диедарске групе, па смо добили резултат који смо и очекивали (погледати пример 1.75).

Ово би требало да нас подсети на став о одређености линеарног пресликавања из предмета Линеарна алгебра (линеарно пресликавање је у потпуности задато када је задато на базним векторима).

Докажимо најпре да систем слободних генератора заиста генерише одговарајућу групу.

Став 2.4 Ако је F слободна Абелова група са системом слободних генератора $[x_1, \ldots, x_n]$, тада је $F = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Доказ. Применимо дефиницију 2.3 на Абелову групу $A = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и елементе $a_i = x_i \in A$ за $i = \overline{1,n}$. Тада постоји хомоморфизам $f\colon F \to A$, такав да је $f(x_i) = a_i = x_i$ за све $i = \overline{1,n}$. Посматрајмо сада и инклузију $i : A \to F$ задату са $i(x) = x$ за све $x \in A$ (ово пресликавање је ништа друго него рестрикција идентичког пресликавања id_F на скуп A). Тада је $i \circ f : F \to F$ хомоморфизам такав да $(i \circ f)(x_i) = i(f(x_i)) = i(x_i) = x_i$. Како и id_F задовољава исте услове, а по дефиницији 2.3 постоји тачно један овакав хомоморфизам, то је $i \circ f = \mathrm{id}_F$. Пресликавање id_F је „на", па из претходне једнакости закључујемо да је i такође „на", а самим тим $F = A$. □

Докажимо и да међу слободним генераторима не сме бити никаквих релација. Другим речима, важи следећи став.

Став 2.5 Ако је F слободна Абелова група са системом слободних генератора $[x_1, \ldots, x_n]$ и ако је

$$m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = 0,$$

за неке $m_i \in \mathbb{Z}$, онда мора бити $m_1 = \cdots = m_n = 0$.

Доказ. Претпоставимо да бар један од m_i није једнак нули. Нека је то нпр. m_1. Уочимо Абелову групу $\mathbb{Z}$ и елемент $1 \in \mathbb{Z}$. По дефиницији слободне Абелове групе, постоји тачно један хомоморфизам $f\colon F \to \mathbb{Z}$ такав да је $f(x_1) = 1$ и $f(x_i) = 0$ за све $i = \overline{2,n}$. Но, то значи да се елемент $m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n$, који је по претпоставци једнак 0 у F, слика у елемент $m_1 \neq 0$ у $\mathbb{Z}$. Ова контрадикција нам показује да су сви m_i једнаки нули. □

Наведени став појашњава терминологију – група је слободна зато што има генераторе међу којима не постоје везе.

Испоставља се да су две слободне Абелове групе са истим бројем слободних генератора изоморфне.

Став 2.6 Нека је F слободна Абелова група са системом слободних генератора $[x_1, \ldots, x_n]$ и F' слободна Абелова група са системом слободних генератора $[x'_1, \ldots, x'_n]$. Тада је $F \cong F'$.

Доказ. На основу дефиниције слободне Абелове групе, постоји тачно један хомоморфизам $f\colon F \to F'$ и тачно један хоморфизам $g\colon F' \to F$ за које је $f(x_i) = x_i'$ и $g(x_i') = x_i$ за све $i = \overline{1,n}$. Но, тада је за све $i = \overline{1,n}$, $(g \circ f)(x_i) = x_i$ и $(f \circ g)(x_i') = x_i'$. Како и идентични хомоморфизми id_F, односно $\mathrm{id}_{F'}$ имају иста својства, то, на основу јединствености (по дефиницији 2.3), закључујемо да је

$$g \circ f = \mathrm{id}_F, \quad f \circ g = \mathrm{id}_{F'}.$$

Одавде следи да је $F \cong F'$. □

Став 2.7 Група $\mathbb{Z}^n$ је слободна Абелова група са системом слободних генератора

$$[(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)].$$

Доказ. Треба показати да су испуњени наведени услови из дефиниције. У ту сврху, нека је A произвољна Абелова група и $a_1,\ldots,a_n \in A$. Тада је хомоморфизам $f\colon \mathbb{Z}^n \to A$ задат са:

$$f(m_1,m_2,\ldots,m_n) := m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n. \tag{2.3}$$

Није тешко проверити да је f заиста хомоморфизам. Осим тога

$$f(1,0,\ldots,0) = a_1, \quad f(0,1,\ldots,0) = a_2, \quad \cdots, \quad f(0,0,\ldots,1) = a_n. \tag{2.4}$$

Наравно, јасно је и да је (2.3) једини начин да се зада хомоморфизам, такав да важи (2.4). □

Дакле, свака слободна Абелова група са коначним системом слободних генератора изоморфна је једној од група $\mathbb{Z}^n$ за неко $n \geqslant 1$. Важи и више од тога.

Став 2.8 Ако је $\mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}^s$, онда је $r = s$.

Доказ. Претпоставимо да је $r \leqslant s$. У доказу ћемо користити знање Линеарне алгебре. Наиме, приметимо да се у групи $\mathbb{Z}^s$ налазе и елементи канонске базе векторског простора $\mathbb{R}^s$, тј. вектори

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), \quad e_2 = (0,1,\ldots,0), \quad \ldots, \quad e_s = (0,0,\ldots 1).$$

То значи да су сви наведени базни вектори целобројне линеарне комбинације од r вектора

$$f(1,0,\ldots,0),\ f(0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ f(0,0,\ldots,1),$$

где је f изоморфизам који постоји по претпоставци. То значи да тих r вектора чини генератрису простора $\mathbb{R}^s$ који је димензије s. Међутим, знамо да не може мање од s вектора генерисати векторски простор димензије s. Стога мора бити $r \geqslant s$. Како смо претпоставили да је $r \leqslant s$, добијамо да је $r = s$. □

Да резимирамо. Свака слободна Абелова група са коначно много генератора изоморфна је тачно једној од група $\mathbb{Z}^n$ за неко $n \geqslant 1$. Посебно, две слободне Абелове групе са коначно много генератора су изоморфне ако и само ако имају исти број генератора.

Позабавимо се сада подгрупама слободних Абелових група. У случају групе са једним генератором, тј. бесконачне цикличне групе, одговор нам је добро познат. Свака подгрупа слободне групе са једним слободним генератором x је генерисана елементом nx за неко $n \geqslant 0$. Случај у коме имамо више генератора је знатно сложенији.

Пошто ћемо у доказима који следе често прелазити са једног система генератора на други, корисно је издвојити следећу лему.

Лема 2.9 Ако је $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ систем слободних генератора и $t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$, онда је и

$$[x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n, x_2, \ldots, x_n]$$

систем слободних генератора.

Доказ. Означимо $y_1 = x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n$ и $y_i = x_i$ за $i = \overline{2,n}$. Нека је A Абелова група и $a_i \in A$ за $i = \overline{1,n}$. По дефиницији 2.3 постоји јединствен хомоморфизам $f : F \to A$ такав да је

$$f(x_1) = a_1 - t_2a_2 - \cdots t_na_n$$

и $f(x_i) = a_i$ за $i = \overline{2,n}$. Ове једнакости еквивалентне су са

$$f(y_1) = f(x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) = f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n) = a_1$$

и $f(y_i) = a_i$ за $i = \overline{2,n}$, па закључујемо да постоји јединствен хомоморфизам $f : F \to A$ такав да је $f(y_i) = a_i$ за $i = \overline{1,n}$. □

2.3 Нормална форма

Докажимо најпре један важан резултат.

Теорема 2.10 Нека је F слободна Абелова група са n слободних генератора и R подгрупа од F. Тада постоји систем слободних генератора $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ групе F и ненегативни цели бројеви $d_1, d_2, \ldots, d_n$ за које је

$$R = \langle d_1x_1 \rangle \oplus \langle d_2x_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_nx_n \rangle,$$

при чему $d_i \mid d_{i+1}$ за све $i = \overline{1, n-1}$.

Напомена. Пре доказа ове теореме, потребно је истаћи да је могуће да неки од бројева d_i буду једнаки 0. Но, ту се подразумева да ако је неки d_k једнак 0, то су и сви d_i за $i \geqslant k$ (тј. узимамо да $0 \mid 0$, док $0 \nmid a$ за све $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

Доказ теореме. Доказ изводимо по броју n, тј. по броју слободних генератора групе.

База индукције је $n = 1$. У овом случају је све јасно као што смо већ напоменули.

Претпоставимо да је $n > 1$ и да је тврђење тачно за слободне групе са мање од n генератора. Наравно, уколико $R = \{0\}$, немамо шта да доказујемо, тада су сви d_i једнаки нули, а и систем слободних генератора је ма који. Претпоставимо стога да је R нетривијална подгрупа. Број d_1 задајемо са:

$$d_1 := \min\{m_1 > 0 : \text{ за неки систем слободних генератора}$$

$$[x_1, \ldots, x_n] \text{ и неке } m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}, m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n \in R\}.$$

Да појаснимо мало како смо задали d_1. Посматрамо све могуће системе слободних генератора (обратите пажњу да разматрамо систем, дакле уређену n-торку, а не скуп – као и у Линеарној алгебри база је уређена n-торка вектора, а не само скуп вектора) и све линеарне комбинације елемената тог система, које припадају подгрупи R. Како је подгрупа нетривијална, то за сваки систем постоји бар једна нетривијална линеарна комбинација у тој подгрупи. Осим тога, како је R подгрупа, са сваким својим елементом садржи и његов супротан елемент те стога има линеарних комбинација са позитивним коефицијентима. Такође, пермутовањем чланова система постижемо да је баш први коефицијент позитиван. У сваком случају, d_1 јесте добро дефинисан позитиван цео број.

Покажимо најпре да постоји бар један систем слободних генератора $[y_1, \ldots, y_n]$ такав да $d_1 y_1 \in R$.

На основу дефиниције d_1, постоји неки систем слободних генератора $[x_1, \ldots, x_n]$ и цели бројеви $m_2, \ldots, m_n$ тако да

$$d_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n \in R.$$

Докажимо да тада $d_1 \mid m_i$ за све $i = \overline{2, n}$. Претпоставимо да то није тачно и нека нпр. d_1 не дели m_2. То значи да постоје цели бројеви q и r за које важи:

$$m_2 = d_1 q + r, \quad 0 < r < d_1.$$

Тада је

$$\begin{aligned} d_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n &= d_1 x_1 + (d_1 q + r) x_2 + \cdots + m_n x_n \\ &= d_1 (x_1 + q x_2) + r x_2 + \cdots + m_n x_n \\ &= r x_2 + d_1 (x_1 + q x_2) + \cdots + m_n x_n. \end{aligned}$$

На основу леме 2.9, систем $[x_2, x_1 + q x_2, \ldots, x_n]$ је такође систем слободних генератора (зашто?), а први коефицијент у приказу једног елемента из R у том систему је мањи од d_1, који је по претпоставци најмањи такав. Закључујемо да $d_1 \mid m_i$ за све $i = \overline{2, n}$. То значи да је

$m_i = d_1t_i$ за све $i = \overline{2,n}$ и неке $t_i \in \mathbb{Z}$. Дакле,

$$d_1(x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \in R.$$

Тражени систем је $[x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n, x_2, \ldots, x_n]$ (по леми 2.9 ово је заиста систем слободних генератора за F).

Дакле, показали смо да за бар један систем слободних генератора $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ елемент d_1y_1 припада R. Нека је $R_1 = \langle y_2, \ldots, y_n\rangle \cap R$, где је са $\langle y_2, \ldots, y_n\rangle$ наравно означена подгрупа од F коју генеришу $y_2, \ldots, y_n$. Тврдимо да је тада

$$R = \langle d_1y_1\rangle \oplus R_1.$$

Најпре је

$$\langle d_1y_1\rangle \cap R_1 \subseteq \langle y_1\rangle \cap \langle y_2, \ldots, y_n\rangle = \{0\},$$

пошто су $y_1, y_2, \ldots, y_n$ слободни генератори и међу њима нема нетривијалних веза (по ставу 2.5). Стога је сума $\langle d_1y_1\rangle + R_1$ заиста директна. Да бисмо показали да је та сума једнака R, узмимо ма који елемент $x \in R$. По ставу 2.4 знамо да је за неке $m_i \in \mathbb{Z}$:

$$x = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n.$$

Уколико m_1 није дељив са d_1, постоје q_1 и r_1 такви да је $m_1 = d_1q_1 + r_1$, при чему је $0 < r_1 < d_1$. Но, тада

$$r_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n = x - q_1d_1y_1 \in R,$$

а како је $0 < r_1 < m_1$, то противречи избору d_1. Дакле, заиста $d_1 \mid m_1$, те је $m_1 = q_1d_1$. Добијамо да је

$$x = q_1(d_1y_1) + (m_2y_2 + \cdots + m_ny_n) \in \langle d_1y_1\rangle + R_1.$$

Како је R_1 подгрупа слободне Абелове групе са мање од n генератора, по индуктивној хипотези следи да за неки систем слободних генератора $[z_2, \ldots, z_n]$ те слободне групе и неке $d_i \geqslant 0$ такве да $d_i \mid d_{i+1}$ за $i = \overline{2, n-1}$ важи

$$R_1 = \langle d_2z_2\rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_nz_n\rangle.$$

Дакле, заиста је

$$R = \langle d_1y_1\rangle \oplus \langle d_2z_2\rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_nz_n\rangle$$

за неки систем слободних генератора $[y_1, z_2, \ldots, z_n]$ слободне групе F. Остаје само да се покаже да је $d_1 \mid d_2$. Но, поступамо као и раније. Уколико d_1 не дели d_2, запишемо d_2 у облику $d_2 = qd_1 + r$, при чему је $0 < r < d_1$. Како је

$$d_1y_1 + d_2z_2 + \cdots + d_nz_n \in R,$$

то добијамо

$$rz_2 + d_1(y_1 + qz_2) + \cdots + d_n z_n \in R,$$

а како је $0 < r < d_1$ и $[z_2, y_1 + qz_2, \dots, z_n]$ један систем слободних генератора (по леми 2.9), то смо добили контрадикцију с обзиром на избор броја d_1. Дакле, заиста $d_1 \mid d_2$ и доказ је завршен. □

Искористићемо претходно добијену теорему о подгрупама слободне Абелове групе за доказ чињенице да је свака коначно генерисана Абелова група изоморфна директном производу цикличних група.

Теорема 2.11 Нека је A коначно генерисана Абелова група. Тада постоје позитивни цели бројеви $d_1, \dots, d_k$ и природан број s такви да $d_i \mid d_{i+1}$ за све $i = \overline{1, k-1}$ и да је

$$A \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_k} \times \mathbb{Z}^s. \tag{2.5}$$

Доказ. Како је A коначно генерисана, то постоји коначно много елемената $a_1, \dots, a_n \in A$ тако да је $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Нека је F слободна група са системом слободних генератора $[x_1, \dots, x_n]$. На основу дефиниције слободне групе и чињенице да су a_i генератори групе A, добијамо да постоји епиморфизам $f \colon F \to A$ задат са $f(x_i) = a_i$ за $i = \overline{1, n}$ (подсетимо се да је епиморфизам заправо хомоморфизам који је „на”). На основу прве теореме о изоморфизму група следи да је $F/R \cong A$, где је $R = \mathrm{Ker}(f)$. На основу теореме о подгрупама слободне групе, следи да постоји систем слободних генератора $[y_1, y_2, \dots, y_n]$ групе F и ненегативни цели бројеви d_i такви да је $R = \langle d_1 y_1 \rangle \oplus \langle d_2 y_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_n y_n \rangle$. Како је $F = \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle y_n \rangle$ (по ставовима 2.4 и 2.5) то добијамо

$$\begin{aligned} A \cong F/R &\cong (\langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle y_n \rangle)/(\langle d_1 y_1 \rangle \oplus \langle d_2 y_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_n y_n \rangle) \\ &\cong (\langle y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle \times \cdots \times \langle y_n \rangle)/(\langle d_1 y_1 \rangle \times \langle d_2 y_2 \rangle \times \cdots \times \langle d_n y_n \rangle) \\ &\cong \langle y_1 \rangle/\langle d_1 y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle/\langle d_2 y_2 \rangle \times \cdots \times \langle y_n \rangle/\langle d_n y_n \rangle. \end{aligned}$$

Како је $\langle y_i \rangle \cong \mathbb{Z}$ за све $i = \overline{1, n}$, то по резултату из примера 1.84 добијамо да је

$$\langle y_i \rangle/\langle d_i y_i \rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & d_i = 0 \\ \{0\}, & d_i = 1 \\ \mathbb{Z}_{d_i}, & d_i \geqslant 2. \end{cases}$$

Тражени резултат следи. □

Напомена. У случају да је $d_i = 1$, група $\mathbb{Z}_{d_i}$ је заправо тривијална група и те групе и не пишемо у факторизацији тако да је природно захтевати да је $d_i \geqslant 2$ у формули (2.5) за све i.

Претходна теорема установљава да се свака коначно генерисана Абелова група може представити у облику производа цикличних. У којој мери је тај приказ јединствен? На то питање нам одговор даје следећа теорема.

Теорема 2.12 Претпоставимо да је

$$\mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_k} \times \mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}_{e_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{e_l} \times \mathbb{Z}^s,$$

при чему је $d_i \geqslant 2$, $e_j \geqslant 2$ за све i, j; $d_i \mid d_{i+1}$, као и $e_j \mid e_{j+1}$ за све i, j. Тада је $k = l$, $d_i = e_i$ за све i и $r = s$.

Доказ ове теореме нећемо давати. Напоменимо само да се бројеви d_i називају и ИНВАРИЈАНТНИ ДЕЛИТЕЉИ, а приказ у облику производа НОРМАЛНА ФОРМА.

2.4 Генератори и релације; матрични метод

Вратимо се на сам почетак ове лекције. Видели смо како смо без већих проблема, на основу скупа генератора и релација које међу њима важе, успели да идентификујемо о којој се Абеловој групи ради, односно успели смо да је прикажемо у облику директног производа цикличних група. Опишимо укратко поступак у општем случају.

Нека је Абелова група A задата генераторима $x_1, \ldots, x_n$ и следећим релацијама

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Преформулишимо најпре наш проблем на проблем у вези матрица над прстеном целих бројева. Горенаведене релације очигледно се могу и овако записати:

$$AX = \mathbf{0},$$

где је A матрица $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{mn}(\mathbb{Z})$, $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ и $\mathbf{0} = [0, \ldots, 0]^T$. (Додуше, овде користимо слово A да означимо и матрицу и Абелову групу, али тешко да може да буде неке конфузије!)

У Линеарној алгебри користили смо елементарне врста (колона) трансформације. Имали смо трансформације два типа. Први тип је трансформација која се састоји од множења неке врсте (колоне) дате матрице неким инвертибилним скаларом (ознака $V_r := \alpha V_r$ ($K_r := \alpha K_r$) означава да r-ту врсту (колону) множимо скаларом α). Други тип је трансформација која некој врсти (колони) додаје другу врсту (колону) помножену неким скаларом (ознака: $V_r := V_r + \alpha V_s$ за врсте, односно $K_r := K_r + \alpha K_s$ за колоне, где је обавезно $r \neq s$). У случају када радимо, као што је сада, са целобројним матрицама, онда је у првом типу допуштено множење само са 1 и -1 (пошто су то једини цели бројеви који имају инверз у односу на множење), док је у другом случају исто као и код векторских простора (имајући наравно у виду да су бројеви којима множимо цели бројеви). Уз ове елементарне трансформације, може се додати и трансформација која пермутује две врсте (колоне), а која се може извести композицијом претходно наведених.

Ове операције се могу извести и множењем дате матрице одговарајућим елементарним матрицама (подсетите се овога) и то множењем слева ако „баратамо" са врстама, односно здесна, ако радимо са колонама. Све елементарне матрице су инвертибилне у прстену $M_s(\mathbb{Z})$ (матрица $A \in M_s(\mathbb{Z})$ је инвертибилна у $M_s(\mathbb{Z})$ уколико постоји матрица $B \in M_s(\mathbb{Z})$ за коју је $A \cdot B = I_s$, где је са I_s означена јединична матрица реда s; квадратна матрица из $M_s(\mathbb{Z})$ је инвертибилна акко јој је детерминанта једнака 1 или -1). Наводимо сада, без доказа, теорему која утврђује да постоје тражене трансформације (њен доказ није тежи од доказа да је свака коначно генерисана Абелова група изоморфна директном производу цикличних, а резултат који даје је заправо то).

Теорема 2.13 Нека је $A \in M_{mn}(\mathbb{Z})$. Тада постоје инвертибилне матрице $P \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ и $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ тако да је $PAQ = A^0$, при чему је

$$A^0 = \left[\begin{array}{cccc|c} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \cdots & d_k & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

и $d_i \mid d_{i+1}$ за $i = \overline{1, k-1}$. □

Како је множење инвертибилним матрицама еквивалентно вишеструкој примени елементарних трансформација, то закључујемо да њиховом применом можемо добити матрицу траженог облика, односно релације међу почетним генераторима свести на једноставне релације међу (највероватније) неким другим генераторима.

Множење елементарним матрицама слева одговара елементарним трансформацијама на врстама, док множење здесна одговара трансформацијама на колонама. Трансформације врста мењају релације међу генераторима, али не и саме генераторе, док трансформације на колонама мењају генераторе.

Нека су генератори $x_1, \ldots, x_n$ и релације међу генераторима задате матрицом A, тј. релације су задате са

$$AX = \mathbf{0}.$$

Уколико је $PAQ = A^0$, онда множењем горње релације матрицом P слева добијамо

$$PAX = \mathbf{0}.$$

Сада, уметањем производа $Q \cdot Q^{-1}$ добијамо

$$(PAQ)(Q^{-1}X) = \mathbf{0}.$$

Стога, ако са $Y = Q^{-1}X$ означимо нови систем генератора, добијамо

$$A^0 Y = \mathbf{0}.$$

Покажимо како ово у пракси можемо извести, тј. како да погодно региструјемо и нове релације и нове генераторе. Формирајмо матрицу

$$R = \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline & x_1 \\ I_n & \vdots \\ & x_n \end{array}\right].$$

Циљ је на позицији матрице A добити матрицу A^0 трансформацијом врста и колона. Наравно у току рада изводићемо и трансформације врста и колона у произвољном поретку, али да бисмо појаснили шта се дешава, можемо претпоставити да смо прво извели све потребне трансформације на врстама, а потом на колонама. Трансформације на врстама (и то наравно само на првих m врста „велике" матрице, пошто желимо матрицу A да доведемо на тражен облик) доводе до еквивалентне матрице

$$R_1 = \left[\begin{array}{c|c} PA & \mathbf{0} \\ \hline & x_1 \\ I_n & \vdots \\ & x_n \end{array}\right].$$

Сада вршимо трансформацију на колонама да бисмо добили матрицу A^0, али тиме мењамо и колоне у јединичној матрици. Тако добијамо нову матрицу

$$R_2 = \left[\begin{array}{c|c} PAQ & \mathbf{0} \\ \hline & x_1 \\ Q & \vdots \\ & x_n \end{array}\right].$$

Сада желимо да поново добијемо јединичну матрицу уместо матрице Q, тј. да идентификујемо нове генераторе и то изводимо трансформацијом на врстама, али само на „доњим" врстама. Тако напокон добијамо матрицу

$$R = \left[\begin{array}{c|c} A^0 & \mathbf{0} \\ \hline & y_1 \\ I_n & \vdots \\ & y_n \end{array}\right],$$

где је $A^0 = PAQ$, а $Y = Q^{-1}X$ (подматрицу I_n добијамо од Q множењем слева матрицом Q^{-1}).

Урадимо пар примера.

Пример 2.14 Нека је Абелова група A задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$
$$4x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0.$$

Одредити нормалну форму ове групе.

Решење. Полазимо од матрице

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -8 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right].$$

Трансформацијом $V_2 := V_2 - 2V_1$, добијамо матрицу

$$R_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right].$$

Трансформацијама $K_2 := K_2 + 2K_1$ и $K_3 := K_3 - K_1$, добијамо

$$R_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right].$$

Трансформација $K_3 := K_3 + K_2$ доводи до матрице

$$R_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right].$$

С обзиром да $2 \mid 12$, добили смо тражену матрицу A^0. Преостаје да идентификујемо генераторе. Трансформације $V_3 := V_3 - V_5$ и $V_4 := V_4 - V_5$ дају матрицу

$$R_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right].$$

Најзад, трансформација $V_3 := V_3 - 2V_4$ доводи до матрице

$$R_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

Дакле, нови генератори су $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - x_3$ и $y_3 = x_3$, а релације међу њима су $2y_1 = 0$, $12y_2 = 0$ (и $0y_3 = 0$). Закључујемо да је нормална форма дате групе: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}$. ♣

Пример 2.15 Група је задата генераторима x_1, x_2, x_3, x_4 и релацијама

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Одредити њену нормалну форму.

Решење. Полазимо од матрице (обратите пажњу да ли неки генератор учествује у датој релацији!).

$$R = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right]$$

Увек је корисно одредити највећи заједнички делилац свих компонената матрице A. Тај број ће заправо бити тражени d_1. Њега треба поставити на позицију $(1,1)$ и онда га искористити да се „почисте" елементи прве врсте и прве колоне. После тога се прелази на подматрицу која има једну врсту и једну колону мање и поступак се наставља.

У нашем случају лако је уверити се да је тај највећи заједнички делилац једнак 1. Трансформацијом $V_1 := V_1 - 2V_2$, добијамо матрицу

$$R_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $V_2 := V_2 - 2V_1$ и $V_3 := V_3 - 7V_1$ дају матрицу

$$R_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 14 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & -30 & 18 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $K_2 := K_2 + 5K_1$, $K_3 := K_3 - 4K_1$ и $K_4 = K_4 + 3K_1$ дају матрицу

$$R_3 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & -30 & 18 & 0 \\ \hline 1 & 5 & -4 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Сада се можемо концентрисати на матрицу

$$\begin{bmatrix} 14 & -10 & 6 \\ 42 & -30 & 18 \end{bmatrix}.$$

Јасно је да је овде највећи заједнички делилац 2. После трансформације $K_2 := K_2 - 2K_4$ добијамо матрицу

$$R_4 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -30 & 18 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -4 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Применимо трансформацију $V_3 := V_3 - 3V_2$. Добијамо

$$R_5 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -4 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $K_3 := K_3 + 5K_2$ и $K_4 := K_4 - 3K_2$ завршавају први део (одређивање матрице A^0):

$$R_6 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -9 & 6 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -2 & -10 & 7 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $V_4 := V_4 + V_5$ и $V_7 := V_7 + 2V_5$ дају

$$R_7 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 3 & x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

После трансформација $V_4 := V_4 - 3V_7$ и $V_5 := V_5 + 3V_7$, добијамо

$$R_8 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7x_2 + 3x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

Завршавамо применом трансформација $V_4 := V_4 + 4V_6$ и $V_5 := V_5 - 5V_6$:

$$R_9 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7x_2 - 5x_3 + 3x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

Дакле, нови генератори су

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ y_2 &= 7x_2 - 5x_3 + 3x_4 \\ y_3 &= x_3 \\ y_4 &= 2x_2 + x_4, \end{aligned}$$

док су релације међу тим генераторима: $y_1 = 0$, $2y_2 = 0$ (и $0y_3 = 0$ и $0y_4 = 0$). Видимо да је један генератор сувишан, тј. почетни систем није био минималан систем генератора. Нормална форма дате групе је $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ♣

Задаци

2.1 Одредити инваријанте делитеље Абелове групе G, ако је G:

а) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}$; б) $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}$; в) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}$.

2.2 Одредити све природне бројеве n такве да важи:

а) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{120} \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{n+4}$; б) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{3n} \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{60}$.

2.3 Класификовати све Абелове групе реда: а) 81; б) 144; в) 216.

2.4 Нека је p прост број и нека Абелова група реда p^n има $p-1$ елемената реда p. Доказати да је та група циклична.

2.5 Доказати да свака Абелова група реда 100 има елемент реда 10. Одредити инваријантне делитеље у случају да у таквој групи нема елемената реда већег од 10.

2.6 Нека је G коначна Абелова група реда 360, која не садржи елементе реда 12, као ни елементе реда 18. Одредити инваријантне делитеље за G. Одредити број елемената реда 6 у групи G.

2.7 Доказати да је свака коначно генерисана нетривијална подгрупа групе $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ изоморфна или групи $\mathbb{Z}_2$, или групи $\mathbb{Z}^s$ или групи $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$, за неко $s \geqslant 1$.

2.8 Одредити нормалну форму за Абелову групу задату генераторима x_1, x_2, x_3 и x_4 и релацијама:

а)
$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0; \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 9x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2.9 Одредити нормалну форму за Абелову групу задату генераторима x_1, x_2 и x_3 и релацијама:

а)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0; \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 12x_3 &= 0 \\ -20x_1 + 14x_2 + 30x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 + 18x_3 &= 0. \end{aligned}$$

г)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$