5.2 Коначно генерисане Абелове групе

2.1 У овом и сличним задацима користимо став 1.42 (погледати и коментар).

а) Важи $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_{2\cdot 5} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_{3\cdot 5} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}_{4\cdot 5} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$, па је

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20} &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5.\end{aligned}$$

Из ове форме[36] групе G можемо одредити нормалну форму и то на следећи начин. Приметимо да у овом директном производу постоје две групе чији је ред степен броја 2, једна чији је ред степен броја 3 и три чији је ред степен броја 5. Како редова који су степен броја 5 има највише, закључујемо да је један од њих, и то онај са најмањим степеном, инваријантни делитељ групе G. Дакле, први инваријантни делитељ групе G је 5. Посматрајмо редове преосталих група у овом директном производу. Међу њима су два степени броја 2 и два степени броја 5. Зато је следећи инваријантни делитељ 10 (јер је $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10}$). Коначно, редови преосталих група су 4, 3 и 5, па је трећи инваријантни делитељ 60, јер је $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{60}$.

Дакле, инваријантни делитељи групе G су 5, 10 и 60 и важи

$$G \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{60}.$$

б) Поступамо као у делу под а). Важи

$$\begin{aligned}G = \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42} = \mathbb{Z}_{4\cdot 7} \times \mathbb{Z}_{2\cdot 3\cdot 7} &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7.\end{aligned}$$

Нормалну форму групе G сада можемо одредити на следећи начин:

$$\begin{aligned}G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 &\cong \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \\ &\cong \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{84},\end{aligned}$$

а њени инваријантни делитељи су 14 и 84.

в) Поступамо као у делу под а). Важи

$$\begin{aligned}G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16} &= \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{2\cdot 7} \times \mathbb{Z}_{2\cdot 3} \times \mathbb{Z}_{16} \\ &\cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{16} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_7.\end{aligned}$$

Нормалну форму групе G сада можемо одредити на следећи начин:

$$\begin{aligned}G &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_7 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_7 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{1008},\end{aligned}$$

[36] За овакву форму Абелове групе, тј. директан производ група облика $\mathbb{Z}_{p^k}$, где је p прост број, кажемо да је њена **елементарна форма**.

а њени инваријантни делитељи су 2, 6 и 1008.

Коментар. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја n ($p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ су прости бројеви, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqslant 1$). Тада се применом става 1.42 (једноставном) индукцијом може доказати да је

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

2.2 а) Да би дате групе биле изоморфне потребно је да имају исти број елемената, па важи

$$n \cdot 120 = 10 \cdot 10 \cdot (n+4),$$

односно $n = 20$.

Испитајмо да ли су за $n = 20$ дате групе изоморфне, тј. да ли важи

$$\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{120} \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{24}.$$

Група са леве стране је записана у нормалној форми, па запишимо и групу са десне стране (примењујемо став 1.42 и алгоритам презентован у претходном задатку). Важи

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{24} &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8 \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{120}, \end{aligned}$$

па по теореми 2.12 дате групе нису изоморфне, а самим тим не постоји тражено n.

б) Као у претходном делу закључујемо да је потребно да важи

$$n \cdot 20 \cdot 3n = 10 \cdot n \cdot 60,$$

односно $n = 10$.

Испитајмо да ли су за $n = 10$ дате групе изоморфне, тј. да ли важи

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{60}.$$

Група са десне стране је записана у нормалној форми, па запишимо и групу са леве стране (примењујемо став 1.42 и алгоритам презентован у претходном задатку). Важи

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{30} &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \\ &\cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{60}, \end{aligned}$$

па су дате групе изоморфне, тј. $n = 10$ је (једино) решење задатка.

2.3 а) Нека је G Абелова група реда $81 = 3^4$. Посматрајмо њену нормалну форму. Сваки инваријантни делитељ ове групе је степен броја 3. Нека су зато $3^{k_1}, 3^{k_2}, \ldots, 3^{k_n}$ инваријантни делитељи. Тада важи $3^{k_1} \mid 3^{k_2} \mid \cdots \mid 3^{k_n}$, тј. $1 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_n$. Како је $|G| = 3^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdots 3^{k_n}$, то важи $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 4$. Решења ове једначине (која задовољавају услов $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n$) су $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(2,2)$, $(1,3)$ и (4), тј. G је изоморфна једној од следећих група:

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{27}, \quad \mathbb{Z}_{81}.$$

По теореми 2.12 никоје две од ових група нису изоморфне.

б) Нека је G Абелова група реда $144 = 2^4 \cdot 3^2$. Посматрајмо њену нормалну форму. Сваки инваријантни делитељ ове групе је облика $2^{k_i} \cdot 3^{l_i}$. Ако има n инваријантних делитеља, важи $2^{k_1} \cdot 3^{l_1} \mid 2^{k_2} \cdot 3^{l_2} \mid \cdots \mid 2^{k_n} \cdot 3^{l_n}$, па је $0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_n$ и $0 \leqslant l_1 \leqslant \cdots \leqslant l_n$, али не може бити $(k_1, l_1) = (0,0)$. Јасно је $n \leqslant 4$. Ако је $n = 4$, тада мора бити $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, док за l-ове имамо две могућности: $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, $l_4 = 2$, и $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = l_4 = 1$. Ако је $n = 3$, тада мора бити $k_1 = k_2 = 1$ и $k_3 = 2$, док за l-ове опет имамо две могућности: $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = 2$, и $l_1 = 0$, $l_2 = l_3 = 1$. Ако је $n = 2$, тада за k-ове имамо три могућности: $k_1 = k_2 = 2$, затим $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, и $k_1 = 0$, $k_2 = 4$, као и две могућности за l-ове: $l_1 = l_2 = 1$ и $l_1 = 0$, $l_2 = 2$, али није могуће да је у исто време $k_1 = 0$, $k_2 = 4$ и $l_1 = 0$, $l_2 = 2$ (дакле, у овом случају имамо укупно $3 \cdot 2 - 1 = 5$ решења). Коначно, ако је $n = 1$, тада је $k_1 = 4$ и $l_1 = 2$.

Дакле, група G изоморфна је једној од следећих група:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{36}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12},$$

$$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{36}, \quad \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{24}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{72}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{48}, \quad \mathbb{Z}_{144}.$$

По теореми 2.12 никоје две од ових група нису изоморфне.

в) Нека је G Абелова група реда $216 = 2^3 \cdot 3^3$. Посматрајмо њену нормалну форму. Сваки инваријантни делитељ ове групе је облика $2^{k_i} \cdot 3^{l_i}$. Поступајући као у претходном делу, закључујемо да је G изоморфна једној од следећих група:

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{24}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18},$$

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{72}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{54}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{108}, \quad \mathbb{Z}_{216}.$$

По теореми 2.12 никоје две од ових група нису изоморфне.

2.4 Нека је G Абелова група реда p^n. Као у претходном задатку важи

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{k_m}},$$

где су $1 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_m$ природни бројеви такви да важи $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Одредимо број елемената $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ реда p групе G. По задатку 1.60 је $\omega(a) = \mathrm{NZS}(\omega(a_1), \omega(a_2), \ldots, \omega(a_m))$, па је $\omega(a) = p$ ако и само ако важи $\omega(a_i) \in \{1, p\}$, за све $1 \leqslant i \leqslant m$, и $a \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Посматрајмо елемент $a_i \in \mathbb{Z}_{p^{k_i}}$, за неко $1 \leqslant i \leqslant m$. У произвољној групи, сваки елемент реда p генерише подгрупу реда p, и та подгрупа има тачно $p-1$ елемената реда p. Такође, група $\mathbb{Z}_{p^{k_i}}$ је циклична, па по теореми 1.14 садржи јединствену подгрупу реда p. Дакле, елемената a_i има тачно p, за свако $1 \leqslant i \leqslant m$, па у G има тачно p^m елемената који су реда 1 или p. Како је по услову задатка број елемената реда p у G једнак $p-1$, закључујемо да је $m=1$, па је $G \cong \mathbb{Z}_{p^n}$, што је и требало доказати.

2.5 Као у задатку 2.3 може се доказати да је свака Абелова група реда 100 изоморфна једној од следећих група:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{50}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}, \quad \mathbb{Z}_{100}.$$

У наставку користимо задатак 1.60. Закључујемо да је у првој групи елемент $(0,1)$ реда 10 (јер важи $\omega(0,1) = \mathrm{NZS}(1,10) = 10$), у другој $(0,5)$ (јер је $\omega(0,5) = \mathrm{NZS}(1,10) = 10$), у трећој $(0,2)$ (јер је $\omega(0,2) = \mathrm{NZS}(1,10) = 10$), а у четвртој 10. Овим је доказано да свака Абелова група реда 100 садржи елемент реда 10.

Урадимо и други део задатка. Приметимо да је у првој од наведених група сваки елемент реда највише 10. Заиста, за $(a,b) \in \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$, важи $\omega(a), \omega(b) \mid 10$, па $\mathrm{NZS}(\omega(a), \omega(b)) \mid \mathrm{NZS}(10,10) = 10$. За преостале групе ово не важи. Заиста, у другој групи је $(0,1)$ реда 50, у трећој је $(0,1)$ реда 20, а у четвртој 1 реда 100.

Дакле, једина Абелова група реда 100 у којој нема елемената реда већег од 10 је $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$.

2.6 Пре него што изложимо решење датог задатка, приметимо да за све $0 \leqslant i \leqslant k$ у групи $\mathbb{Z}_{p^k}$ постоји елемент реда p^i. Заиста, $\mathbb{Z}_{p^k}$ је циклична група, па по теореми 1.14 садржи подгрупу реда p^i, која је такође циклична, а њен генератор је реда p^i (по ставу 1.10).

Вратимо се сада на дати задатак. Важи $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, па слично као у претходним задацима добијамо да за неке $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n$ и $0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_n$, такве да је $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 3$ и $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = 2$ важи (приметимо да 5 мора бити у највећем инваријантном делитељу)

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_{2^{k_1} \cdot 3^{l_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{k_2} \cdot 3^{l_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{k_n} \cdot 3^{l_n} \cdot 5} \\ &\cong \mathbb{Z}_{2^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{3^{l_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{k_2}} \times \mathbb{Z}_{3^{l_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{k_n}} \times \mathbb{Z}_{3^{l_n}} \times \mathbb{Z}_5 \end{aligned}$$

(овде смо искористили и став 1.42). Ако је $k_n \geqslant 2$, тада група $\mathbb{Z}_{2^{k_n}}$ садржи елемент a реда 4, па како група $\mathbb{Z}_{3^{l_n}}$ садржи елемент b реда 3 закључујемо да је $(0,0,\ldots,a,b,0)$ елемент реда 12, што је контрадикција. Дакле, $k_n = 1$, па је $n = 3$ и важи $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. На сличан начин (коришћењем услова да G не садржи елемент реда 18) може се доказати да је $l_1 = 0$ и $l_2 = l_3 = 1$, па је

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{30},$$

тј. 2, 6 и 30 су инваријантни делитељи групе G.

Одредимо број елемената реда 6 групе G. Да бисмо то урадили користимо да је $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Дакле, довољно је одредити број уређених шесторки $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1)$ таквих да је $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_2$, $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_3$, $c_1 \in \mathbb{Z}_5$ и да важи $\omega(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1) = 6$. Како је $\omega(c_1) \in \{1, 5\}$, то је $\omega(c_1) = 1$, тј. $c_1 = 0$. Такође, $\omega(a_1), \omega(a_2), \omega(a_3) \in \{1, 2\}$ и $\omega(b_1), \omega(b_2) \in \{1, 3\}$, па $\omega(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, 0) \neq 6$ једино ако је $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ или $b_1 = b_2 = 0$. Дакле, прве три координате у траженој шесторки можемо одабрати на укупно $2^3 - 1 = 7$ начина, следеће две на $3^2 - 1 = 8$ начина, а за последњу важи $c_1 = 0$, тако да елемената реда 6 у групи G има $7 \cdot 8 = 56$.

2.7 Како је свака коначно генерисана подгрупа G групе $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Абелова, то по теореми 2.11 важи

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k} \times \mathbb{Z}^s, \qquad (*)$$

при чему $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_k$ и $n_1 > 1$ (могуће је да је $k = 0$, тј. да је $G \cong \mathbb{Z}^s$). Приметимо да је сваки елемент $(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots, 0)$, где је $a_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$, за $1 \leqslant i \leqslant k$, коначног реда, па због изоморфизма $(*)$ закључујемо да се у G налази $|\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}| = n_1 \cdots n_k$ елемената коначног реда.

Посматрајмо произвољан елемент $x \in G \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ коначног реда. Тада важи $x^t = 1$, па како су једина решења ове једначине 1 и -1, закључујемо да G има највише два елемента коначног реда. У случају да G има тачно један елемент коначног реда, тада је $G \cong \mathbb{Z}^s$, за неко $s > 0$ (јер G није тривијална подгрупа), а у случају да G има тачно два елемента коначног реда слично важи $G \cong \mathbb{Z}_2$ или $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$, за неко $s > 0$.

2.8 У свим деловима трансформишимо матрицу A (која одговара датим релацијама) операцијама описаним пре теореме 2.13 тако да добијемо матрицу A^0.

а) Формирајмо матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Посматрајмо највећи заједнички делилац елемената матрице A. Он је 1. Зато желимо да број 1 (или -1) „доведемо” на позицију $(1,1)$. Заменом прве и треће врсте добијамо матрицу:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & -3 & 11 \\ 9 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

а затим заменом прве и треће колоне матрицу:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 & 11 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Применом операција $V_2 := V_2 - 3V_1$ и $V_3 := V_2 + 5V_1$ добијамо матрицу:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 16 & 24 & 24 \end{bmatrix}.$$

Даље, применом операција $K_2 := K_2 + 2K_1$, $K_3 := K_3 + 3K_1$ и $K_4 := K_4 + 4K_1$ добијамо матрицу:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 16 & 24 & 24 \end{bmatrix},$$

која множењем прве колоне са -1 постаје:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 16 & 24 & 24 \end{bmatrix}.$$

На овај начин смо „решили" прву врсту и прву колону. Наставимо поступак на остатку матрице. Операцијом $V_3 := V_3 + 16V_2$ добијамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -24 & 8 \end{bmatrix},$$

а затим операцијама $K_3 := K_3 - 3K_2$ и $K_4 := K_4 - K_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 8 \end{bmatrix}.$$

Множењем друге врсте са -1 и затим заменом места треће и четврте колоне добијамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 24 \end{bmatrix}.$$

Коначно, применом операције $K_4 := K_4 + 3K_3$ и множењем треће колоне са -1 добијамо матрицу:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из овог облика матрице одмах можемо прочитати нормалну форму групе. Нови генератори y_1, y_2, y_3 и y_4 задовољавају релације: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $8y_3 = 0$, док за y_4 нема релација. Одавде следи да је нормална форма групе: $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}$.

б) Означимо:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице је 1. Зато поступамо на следећи начин. Заменимо места првој и трећој колони:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

а затим применимо операцију $V_2 := V_2 + 3V_1$. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ако на ову матрицу применимо операције $K_2 := K_2 - K_1$, $K_3 := K_3 + 7K_1$ и $K_4 := K_4 + 2K_1$ добијамо:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Помножимо сада прву колону са -1, а затим заменимо места другој и трећој врсти. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице добијене избацивањем прве врсте и колоне је 2. „Доведимо” зато број ± 2 на позицију $(2,2)$. Заменом друге и четврте колоне добијамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 30 & 0 \end{bmatrix},$$

а затим применом операције $V_3 := V_3 + 3V_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & 12 \end{bmatrix}.$$

Применимо сада операције $K_3 := K_3 + K_2$ и $K_4 := K_4 + 2K_2$, а затим помножимо другу колону са -1. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 12 \end{bmatrix}.$$

Коначно, применом операције $K_3 := K_3 - 3K_4$, а затим заменом треће и четврте колоне:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нови генератори y_1, y_2, y_3 и y_4 задовољавају релације: $y_1 = 0$, $2y_2 = 0$, $12y_3 = 0$, док за y_4 нема релација. Одавде следи да је нормална форма групе: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}$.

2.9 Поступамо као у претходном задатку.

a) Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -4 \\ 8 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице A је 2. Заменимо зато прву и другу колону, а затим у новодобијеној матрици прву и трећу врсту. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Применом операција $V_2 := V_2 - 3V_1$ и $V_3 := V_3 - 3V_1$ добијамо:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 20 & -10 \\ 0 & 18 & -16 \end{bmatrix},$$

а затим операција $K_2 := K_2 + 2K_1$ и $K_3 := K_3 - 2K_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -10 \\ 0 & 18 & -16 \end{bmatrix}.$$

Посматрајмо сада подматрицу добијену избацивањем прве врсте и колоне претходне матрице. Највећи заједнички делилац њених елемената је 2. Применимо зато операцију $K_2 := K_2 + K_3$. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & 2 & -16 \end{bmatrix},$$

а затим заменом места друге и треће врсте:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -16 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}.$$

Применом операције $V_3 := V_3 - 5V_2$, а затим $K_3 := K_3 + 8K_2$ добијамо:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}.$$

Нови генератори y_1, y_2 и y_3 задовољавају релације: $2y_1 = 0$, $2y_2 = 0$ и $70y_3 = 0$, па је нормална форма групе: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{70}$.

б) Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице је 2, па зато примењујемо операцију $K_1 := K_1 - K_2$. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

а затим мењамо места првој и другој врсти:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & 8 & 4 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Применом операција $V_2 := V_2 + 2V_1$ и $V_3 := V_3 + 4V_1$ добијамо:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 20 & -4 \\ 0 & 28 & -8 \end{bmatrix},$$

а затим операција $K_2 := K_2 - 3K_1$ и $K_3 := K_3 + 2K_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -4 \\ 0 & 28 & -8 \end{bmatrix}.$$

Заменимо места другој и трећој колони:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 20 \\ 0 & -8 & 28 \end{bmatrix},$$

а затим применимо операцију $V_3 := V_3 - 2V_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Применом операције $K_3 := K_3 + 5K_2$, а затим множењем друге и треће колоне са -1 добијамо:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Нови генератори y_1, y_2 и y_3 задовољавају релације: $2y_1 = 0$, $4y_2 = 0$ и $12y_3 = 0$, па је нормална форма групе: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.

в) Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -12 \\ -20 & 14 & 30 \\ -12 & 6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице је 2, па зато примењујемо операцију $K_1 := K_1 + 2K_2$. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -12 \\ 8 & 14 & 30 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix},$$

а затим примењујемо операцију $V_2 := V_2 - 4V_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -12 \\ 0 & 30 & 78 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Применом операција $K_2 := K_2 + 2K_1$ и $K_3 := K_3 + 6K_1$ добијамо:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 78 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице добијене избацивањем прве врсте и колоне претходне матрице је 6. Заменимо зато места другој и трећој колони:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 30 & 78 \end{bmatrix},$$

а затим применимо операцију $V_3 := V_3 - 5V_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Коначно, применимо операцију $K_3 := K_3 - 3K_2$, а затим помножимо последњу колону са -1. Добијамо:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Нови генератори y_1, y_2 и y_3 задовољавају релације: $2y_1 = 0$, $6y_2 = 0$ и $12y_3 = 0$, па је нормална форма групе: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$.

г) Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице је 1, па зато примењујемо операцију $K_1 := K_1 - K_3$. Добијамо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

а затим примењујемо операције $K_2 := K_2 - 3K_1$ и $K_3 := K_3 - 2K_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Највећи заједнички делилац елемената матрице добијене избацивањем прве врсте и колоне претходне матрице је 1. Применимо зато операцију $K_2 := K_2 - K_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

а затим операцију $V_3 := V_3 - V_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Коначно, применом операције $K_3 := K_3 - 2K_2$ добијамо:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нови генератори y_1, y_2 и y_3 задовољавају релације: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, па је тражена група тривијална, тј. једнака $\{0\}$.