5.4 Раширења поља

4.1 Претпоставимо супротно, тј. да постоји изоморфизам

$$f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Тада важи

$$0 = f(0) = f((\sqrt{2})^2 - 2) = f(\sqrt{2})^2 - 2f(1) = f(\sqrt{2})^2 - 2,$$

па мора бити $f(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Међутим, $f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, па да бисмо добили жељену контрадикцију довољно је доказати да поље $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ не садржи бројеве $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Ово се може урадити као у задатку 3.7.

4.2 Поступамо као у примеру 4.4.

а) По овом примеру довољно је пронаћи нерастављив полином $a(X)$ из $\mathbb{Z}_2[X]$ степена 3 – тада ће $\mathbb{Z}_2[X]/\langle a(X)\rangle$ бити поље са укупно $2^3 = 8$ елемената.

Докажимо да је полином $X^3 + X + 1$ нерастављив. Да бисмо то урадили довољно је доказати да полином нема линеарних фактора, тј. нула у $\mathbb{Z}_2$, јер сваки растављив полином степена 3 има линеаран фактор. Јасно је да 0 и 1 нису нуле овог полинома, па заиста можемо узсти $a = X^3 + X + 1$.

Одредимо сада елементе, као и таблице множења и сабирања за $\mathbb{Z}_2[X]/\langle a(X)\rangle$. Означимо $\eta = X + \langle a(X)\rangle$, а $1 + \langle a(X)\rangle$ са 1 и $\langle a(X)\rangle$ са 0. Тада је

$$\mathbb{Z}_2[X]/\langle a(X)\rangle = \{0, 1, \eta, \eta+1, \eta^2, \eta^2+1, \eta^2+\eta, \eta^2+\eta+1\}.$$

Ради скраћеног записа, уводимо $\nu = \eta^2 + \eta$.

Таблица сабирања дата је са (да бисмо је одредили, коефицијенте уз 1, η и η^2 рачунати по модулу 2):

$+$	0	1	η	$\eta+1$	η^2	η^2+1	ν	$\nu+1$
0	0	1	η	$\eta+1$	η^2	η^2+1	ν	$\nu+1$
1	1	0	$\eta+1$	η	η^2+1	η^2	$\nu+1$	ν
η	η	$\eta+1$	0	1	ν	$\nu+1$	η^2	η^2+1
$\eta+1$	$\eta+1$	η	1	0	$\nu+1$	ν	η^2+1	η^2
η^2	η^2	η^2+1	ν	$\nu+1$	0	1	η	$\eta+1$
η^2+1	η^2+1	η^2	$\nu+1$	ν	1	0	$\eta+1$	η
ν	ν	$\nu+1$	η^2	η^2+1	η	$\eta+1$	0	1
$\nu+1$	$\nu+1$	ν	η^2+1	η^2	$\eta+1$	η	1	0

Да бисмо добили таблицу множења, уз претходно наведено, користимо и да је $\eta^3 + \eta + 1 = X^3 + X + 1 + \langle a(X)\rangle = a(X) + \langle a(X)\rangle = 0$, тј. $\eta^3 = \eta + 1$.

$\cdot$	0	1	η	$\eta+1$	η^2	η^2+1	ν	$\nu+1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	η	$\eta+1$	η^2	η^2+1	ν	$\nu+1$
η	0	η	η^2	ν	$\eta+1$	1	$\nu+1$	η^2+1
$\eta+1$	0	$\eta+1$	ν	η^2+1	$\nu+1$	η^2	1	η
η^2	0	η^2	$\eta+1$	$\nu+1$	ν	η	η^2+1	1
η^2+1	0	η^2+1	1	η^2	η	$\nu+1$	$\eta+1$	ν
ν	0	ν	$\nu+1$	1	η^2+1	$\eta+1$	η	η^2
$\nu+1$	0	$\nu+1$	η^2+1	η	1	ν	η^2	$\eta+1$

б) Слично као у делу под а), довољно је пронаћи нерастављив полином $a(X) \in \mathbb{Z}_3[X]$ степена 2. Овакав полином је нпр. $a(X) = X^2 + X + 2$ (он је нерастављив, јер 0, 1 и 2 нису његове нуле).

Ако означимо $X + \langle a(X)\rangle$ са η, а $\langle a(X)\rangle$ са 0, $1 + \langle a(X)\rangle$ са 1 и $2 + \langle a(X)\rangle$ са 2, тада је

$$\mathbb{Z}_3[X]/\langle a(X)\rangle = \{0, 1, 2, \eta, \eta+1, \eta+2, 2\eta, 2\eta+1, 2\eta+2\}.$$

Таблицу сабирања можемо добити као у делу под а) (тако што коефицијенте уз 1 и η рачунамо по модулу 3).

Таблицу множења добијамо коришћењем једнакости $\eta^2 + \eta + 2 = 0$, тј. $\eta^2 = 2\eta + 1$.

$\cdot$	0	1	2	η	$\eta+1$	$\eta+2$	2η	$2\eta+1$	$2\eta+2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	η	$\eta+1$	$\eta+2$	2η	$2\eta+1$	$2\eta+2$
2	0	2	1	2η	$2\eta+2$	$2\eta+1$	η	$\eta+2$	$\eta+1$
η	0	η	2η	$2\eta+1$	1	$\eta+1$	$\eta+2$	$2\eta+2$	2
$\eta+1$	0	$\eta+1$	$2\eta+2$	1	$\eta+2$	2η	2	η	$2\eta+1$
$\eta+2$	0	$\eta+2$	$2\eta+1$	$\eta+1$	2η	2	$2\eta+2$	1	η
2η	0	2η	η	$\eta+2$	2	$2\eta+2$	$2\eta+1$	$\eta+1$	1
$2\eta+1$	0	$2\eta+1$	$\eta+2$	$2\eta+2$	η	1	$\eta+1$	2	2η
$2\eta+2$	0	$2\eta+2$	$\eta+1$	2	$2\eta+1$	η	1	2η	$\eta+2$

4.3 Важи $\alpha - i = \sqrt{3}$, па квадрирањем следи $\alpha^2 - 2i\alpha - 1 = 3$. Сада је $\alpha^2 - 4 = 2i\alpha$, па поновним квадрирањем следи $\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 = -4\alpha^2$, тј.

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 16 = 0.$$

Дакле, α је нула полинома $p(X) = X^4 - 4X^2 + 16 \in \mathbb{Q}[X]$, па је α алгебарски елемент над $\mathbb{Q}$.

Докажимо да је p минимални полином за α над $\mathbb{Q}$. Да бисмо ово доказали, довољно је показати да је p нерастављив над $\mathbb{Q}$.

Поступимо као у примеру 4.9. Претпоставимо супротно, тј. да је $p(X) = q(X)r(X)$ за нека два полинома $q, r \in \mathbb{Q}[X]$ степена барем 1. Нека је уз то, без умањења општости, степен полинома q не мањи од степена полинома r. Тада имамо два случаја.

1° **Степен полинома r је 1.** У овом случају $p(X)$ има рационалну нулу. Међутим, кандидати за рационалну нулу полинома $p(X)$ су ±1, ±2, ±4, ±8 и ±16, а важи[39]

$$p(\pm1) = 1 - 4 + 16 = 13, \quad p(\pm2) = 2^4 - 4\cdot 2^2 + 16 = 16, \quad \text{и}$$

$$p(t) = t^2(t^2-4) + 16 \geqslant 4^2(4^2-4) + 16 = 208 \quad \text{за } t \in \{\pm4, \pm8, \pm16\},$$

па овај случај није могућ.

2° **Степен полинома r је 2.** У овом случају је и полином q степена 2, па за неке рационалне бројеве a, b, c, d важи $q(X) = X^2 + aX + b$ и $r(X) = X^2 + cX + d$. Дакле, важи

$$p(X) = X^4 - 4X^2 + 16 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d),$$

па изједначавањем коефицијената полинома на левој и десној страни ове једнакости добијамо следећи систем једначина

$$\begin{aligned} bd &= 16, && [\text{коефицијент уз } 1] \\ ad + cb &= 0, && [\text{коефицијент уз } X] \\ ac + b + d &= -4, && [\text{коефицијент уз } X^2] \\ a + c &= 0. && [\text{коефицијент уз } X^3] \end{aligned}$$

Решимо овај систем једначина. Из последње је $c = -a$, па заменом у другу једнакост добијамо $ad - ab = a(d-b) = 0$. Из ове једнакости је $a = 0$ или $b = d$.

Случај $a = 0$. Тада се дати систем своди на $bd = 16$ и $b + d = -4$. Из Вијетових формула следи да су b и d решења квадратне једначине $x^2 + 4x + 16 = 0$. Међутим, дискриминанта ове квадратне једначине је $D = 4^2 - 4\cdot 16 = -48$, па b и d нису реални бројеви, те овај случај заиста није могућ.

Случај $b = d$. Тада се дати систем своди на $b^2 = 16$ и $-a^2 + 2b = -4$. Из прве једначине је $b = 4$ или $b = -4$, па заменом у другу добијамо $a^2 = 12$ или $a^2 = -4$. Ове једначине немају рационалних решења, па ни овај случај није могућ.

На овај начин доказали смо да је $p(X)$ минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$, па важи $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 4$. По доказу теореме 4.3 скуп $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ је база простора $\mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$ и важи

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\}.$$

Како је $\frac{1}{\alpha^2 - 2} \in \mathbb{Q}[\alpha]$, то за неке $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ важи

$$\frac{1}{\alpha^2 - 2} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3. \tag{$*$}$$

[39] Како је полином p моничан можемо узети да су и полиноми q и r монични (погледати пример 4.9).

За елемент α важи $\alpha^4 = 4\alpha^2 - 16$, па и $\alpha^5 = 4\alpha^3 - 16\alpha$ (ово добијамо множењем претходне једнакости са α). Сада, множењем једнакости (*) са $\alpha^2 - 2$, те сређивањем добијамо

$$1 = -2a_0 - 16a_2 - (2a_1 + 16a_3)\alpha + (a_0 + 2a_2)\alpha^2 + (a_1 + 2a_3)\alpha^3.$$

Како је $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ база простора $\mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, то је претходна једнакост еквивалентна са

$$\begin{aligned} -2a_0 - 16a_2 &= 1 \\ -2a_1 - 16a_3 &= 0 \\ a_0 + 2a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из друге и четврте једнакости је $a_1 = a_3 = 0$, а из прве и треће $a_0 = 1/6$ и $a_2 = -1/12$, па важи

$$\frac{1}{\alpha^2 - 2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \cdot \alpha^2.$$

4.4 Имамо $\alpha + \sqrt{3} = \sqrt{5}$, па после квадрирања и сређивања добијамо $2 - \alpha^2 = 2\sqrt{3}\alpha$. Сада, поновним квадрирањем (и сређивањем) добијамо

$$\alpha^4 - 16\alpha^2 + 4 = 0.$$

Дакле, α је нула полинома $p(X) = X^4 - 16X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$, па је α алгебарски елемент над $\mathbb{Q}$.

Као у претходном задатку и примеру 4.9 можемо доказати да је p нераставља над $\mathbb{Q}$, а тиме и да је p минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$. Дакле, важи $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 4$.

По доказу теореме 4.3 скуп $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ је база простора $\mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$ и важи

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 \, : \, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\}.$$

Како је $\frac{1}{\alpha^2 - 2} \in \mathbb{Q}[\alpha]$, за неке $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ важи

$$\frac{1}{\alpha^2 - 2} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3. \tag{$*$}$$

За елемент α важи $\alpha^4 = 16\alpha^2 - 4$, па је (множењем са α) и $\alpha^5 = 16\alpha^3 - 4\alpha$. Сада, множењем једнакости (*) са $\alpha^2 - 2$, те сређивањем добијамо

$$1 = -2a_0 - 4a_2 - (2a_1 + 4a_3)\alpha + (a_0 + 14a_2)\alpha^2 + (a_1 + 14a_3)\alpha^3.$$

Како је $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ база простора $\mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, то важи

$$\begin{aligned} -2a_0 - 4a_2 &= 1 \\ -2a_1 - 4a_3 &= 0 \\ a_0 + 14a_2 &= 0 \\ a_1 + 14a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из друге и четврте једнакости следи $a_1 = a_3 = 0$, а из прве и треће $a_0 = 1/24$ и $a_2 = -7/12$, па важи

$$\frac{1}{\alpha^2-2} = \frac{1}{24} - \frac{7}{12}\cdot\alpha^2.$$

4.5 Имамо $\alpha^2 = 2+\sqrt{3}$, тј. $\alpha^2 - 2 = \sqrt{3}$, па после квадрирања добијамо $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$. Дакле, α је нула полинома $p(X) = X^4 - 4X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, па је α алгебарски елемент над $\mathbb{Q}$.

Као у претходним задатку и примеру 4.9 можемо доказати да је p нерастављив над $\mathbb{Q}$, а тиме и да је p минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$. Дакле, важи $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] = 4$.

Како је $\frac{1}{\alpha^2-2} \in \mathbb{Q}[\alpha]$, за неке $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ важи

$$\frac{1}{\alpha^2-2} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3. \tag{$*$}$$

За елемент α важи $\alpha^4 = 4\alpha^2 - 1$, па је (множењем са α) и $\alpha^5 = 4\alpha^3 - \alpha$. Сада, множењем једнакости ($*$) са $\alpha^2 - 2$, те сређивањем добијамо

$$1 = -2a_0 - a_2 - (2a_1 + a_3)\alpha + (a_0 + 2a_2)\alpha^2 + (a_1 + 2a_3)\alpha^3.$$

Како је $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ база простора $\mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, то важи

$$\begin{aligned} -2a_0 - a_2 &= 1 \\ -2a_1 - a_3 &= 0 \\ a_0 + 2a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из друге и четврте једнакости следи $a_1 = a_3 = 0$, а из прве и треће $a_0 = -2/3$ и $a_2 = 1/3$, па важи

$$\frac{1}{\alpha^2-2} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\alpha^2.$$

4.6 Доказаћемо да $\alpha = i + \sqrt{5}$ задовољава услове задатка, тј. да важи $\mathbb{Q}(i+\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(i,\sqrt{5})$. Као и обично, доказ ћемо извести доказом две инклузије.

($\subseteq$:) Важи $i, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i,\sqrt{5})$, па како је $\mathbb{Q}(i,\sqrt{5})$ поље, то је

$$i + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i,\sqrt{5}).$$

Како је $\mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$ најмање поље које садржи $i+\sqrt{5}$ и $\mathbb{Q}$, то је

$$\mathbb{Q}(i+\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(i,\sqrt{5}).$$

($\supseteq$:) По дефиницији је $i+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$, па како је $\mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$ поље, то је $\dfrac{1}{i+\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$. Одавде је

$$\frac{1}{i+\sqrt{5}} \cdot \frac{i-\sqrt{5}}{i-\sqrt{5}} = \frac{-i+\sqrt{5}}{6} \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5}).$$

Како је $6 \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$ и $\mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$ поље, одавде закључујемо да је

$$-i+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5}).$$

Сада, из $i+\sqrt{5}, -i+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$ следи да су $i+\sqrt{5}+(-i+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$ као и $i+\sqrt{5}-(-i+\sqrt{5}) = 2i$ елементи поља $\mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$, па како је $1/2 \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5})$, то је

$$i, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(i+\sqrt{5}).$$

Поље $\mathbb{Q}(i,\sqrt{5})$ је најмање поље које садржи i и $\sqrt{5}$, па је

$$\mathbb{Q}(i,\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(i+\sqrt{5}).$$

4.7 Доказаћемо да $\alpha = \sqrt{5}+\sqrt{7}$ задовољава услове задатка, тј. да важи $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7})$.

($\subseteq$:) Важи $\sqrt{5}, \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7})$, па како је $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7})$ поље, то је

$$\sqrt{5}+\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7}).$$

Како је $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ најмање поље које садржи $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, то је

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7}).$$

($\supseteq$:) По дефиницији је $\sqrt{5}+\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$, па како је $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ поље, то је $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$. Одавде је

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

Како је $2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$, а $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ је поље, одавде закључујемо да је $\sqrt{7}-\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$. Сада, из $\sqrt{5}+\sqrt{7}, \sqrt{7}-\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ следи да су $\sqrt{5}+\sqrt{7}+(-\sqrt{5}+\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{7}-(-\sqrt{5}+\sqrt{7}) = 2\sqrt{5}$ елементи поља $\mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$, па како је $1/2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$, то је

$$\sqrt{5}, \sqrt{7} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

Поље $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7})$ је најмање поље које садржи $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$, па је

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

4.8 Нека је $p(X) = X^4 + 2X^2 - 15$. Нуле полинома p су решења следеће биквадратне једначине:

$$t^4 + 2t^2 - 15 = 0.$$

Уколико уведемо смену $u = t^2$ ова једначина се своди на квадратну једначину $u^2 + 2u - 15 = 0$, чија су решења $u_1 = -5$ и $u_2 = 3$. Дакле, нуле полинома p су $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}$, па је $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{5}, -i\sqrt{5})$. Приметимо да из $\sqrt{3} \in K$ следи $-\sqrt{3} \in K$ (јер је K поље), као и да из $i\sqrt{5} \in K$ следи $-i\sqrt{5} \in K$, па је $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i\sqrt{5})$.

Као у задацима 4.6 и 4.7 може се доказати да је

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i\sqrt{5}),$$

па је довољно узети $\alpha = \sqrt{3} + i\sqrt{5}$.

4.9 Нека је $p(X) = X^4 - 12X^2 + 9$. Нуле полинома p су решења следеће биквадратне једначине:

$$t^4 - 12t^2 + 9 = 0.$$

Слично као у претходном задатку налазимо да су решења ове једначине $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}, -\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}, \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}, -\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$, па је

$$K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}, -\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}, \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}, -\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}\right).$$

Из $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}} \in K$ следи $-\sqrt{6 + 3\sqrt{3}} \in K$, а из $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \in K$ следи $-\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \in K$, па је $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}, \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}\right)$. Такође,

$$\frac{1}{\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}}{\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}}{3},$$

па из $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}} \in K$ следи $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \in K$, те је $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}\right)$. Дакле, довољно је узети $\alpha = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$.

4.10 Нека је $p(X) = X^4 + 12X^2 - 4$. Нуле полинома p су решења следеће биквадратне једначине:

$$t^4 + 12t^2 - 4 = 0.$$

Слично као у претходном задатку налазимо да су решења ове једначине $\sqrt{-6 + 2\sqrt{10}}, -\sqrt{-6 + 2\sqrt{10}}, i\sqrt{6 + 2\sqrt{10}}, -i\sqrt{6 + 2\sqrt{10}}$, па је

$$K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-6 + 2\sqrt{10}}, -\sqrt{-6 + 2\sqrt{10}}, i\sqrt{6 + 2\sqrt{10}}, -i\sqrt{6 + 2\sqrt{10}}\right).$$

Како је K поље, из $\sqrt{-6+2\sqrt{10}} \in K$ следи $-\sqrt{-6+2\sqrt{10}} \in K$, а из $i\sqrt{6+2\sqrt{10}} \in K$ следи $-i\sqrt{6+2\sqrt{10}} \in K$, па је

$$K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-6+2\sqrt{10}}, i\sqrt{6+2\sqrt{10}}\right).$$

Означимо $u = \sqrt{-6+2\sqrt{10}}$ и $v = i\sqrt{6+2\sqrt{10}}$.

За разлику од задатака 4.6 и 4.7 у овом задатку ћемо доказати да важи

$$K = \mathbb{Q}(u,v) = \mathbb{Q}(u+2v)$$

(погледати и коментар). Означимо $\alpha = u + 2v$.

($\subseteq$:) Важи $u, v \in \mathbb{Q}(u,v)$, па како је $\mathbb{Q}(u,v)$ поље, то је $\alpha \in \mathbb{Q}(u,v)$. Како је $\mathbb{Q}(\alpha)$ најмање поље које садржи α, то је

$$\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(u,v).$$

($\supseteq$:) По дефиницији је $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha)$, па је

$$\alpha^2 = u^2 + 4v^2 + 4uv = -6\sqrt{10} - 30 + 8i \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

Следи $-6\sqrt{10} + 8i \in \mathbb{Q}(\alpha)$, а самим тим и $-3\sqrt{10} + 4i \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Одавде је и $(-3\sqrt{10}+4i)^2 = 74 - 24i\sqrt{10}$ у $\mathbb{Q}(\alpha)$, тј. $i\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Сада, како је $-3\sqrt{10}+4i, i\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, то је и $i\sqrt{10}(-3\sqrt{10}+4i) = -30i - 4\sqrt{10}$ у $\mathbb{Q}(\alpha)$. Дакле, $15(-3\sqrt{10}+4i) + 2(-30i - 4\sqrt{10}) = -53\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, тј. $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Коначно, како је $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha)$ и $\mathbb{Q}(\alpha)$ поље, то је

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{u+2v} \cdot \frac{u-2v}{u-2v} = \frac{u-2v}{u^2-4v^2} \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

По претходном је $u^2 - 4v^2 = 10\sqrt{10} + 18 \in \mathbb{Q}(\alpha)$, па је $u - 2v \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Одавде, слично као у задацима 4.6 и 4.7, закључујемо да су $u, v \in \mathbb{Q}(\alpha)$, те да је $\mathbb{Q}(u,v) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$.

Коментар. Може се доказати да

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{-6+2\sqrt{10}}, i\sqrt{6+2\sqrt{10}}\right) \neq \mathbb{Q}\left(\sqrt{-6+2\sqrt{10}} + i\sqrt{6+2\sqrt{10}}\right).$$

Ипак, у општем случају важи: ако су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тада постоји $c \in \mathbb{Q}$ такво да важи

$$\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\alpha + c\beta).$$