Писмени испит из Анализе 2 за И смер **ЈУН 1 2022**

1. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin\left|\frac{x}{2}\right| + \sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2}\mathrm{d}x$.

2. Испитати условну и апсолутну конвергенцију следећих редова:

$$\text{(а)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot \ln n}{(n-1)!}, \qquad \text{(б)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

3. Дат је степени ред $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$.

(а) Одредити његову област конвергенције.

(б) Наћи функцију $f(x)$ чији је ово степени ред.

(в) Израчунати $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

РЕШЕЊА

1.

$$\int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin\left|\frac{x}{2}\right| + \sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2}\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin\left|\frac{x}{2}\right|}{\cos x + 2}\mathrm{d}x}_{\text{парна}} + \underbrace{\int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2}\mathrm{d}x}_{\text{непарна}} =$$

$$= 2\int_0^{10\pi} \frac{\sin\left|\frac{x}{2}\right|}{\cos x + 2}\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int_0^{10\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2}\mathrm{d}x}_{4\pi \text{ периодична}} = 2\int_{-4\pi}^{6\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\underbrace{\int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2}}_{\text{непарна}} + 2\underbrace{\int_{4\pi}^{6\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2}\mathrm{d}x}_{4\pi \text{ периодична}} =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2 x2 + 2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2} + 1}\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \cos\frac{x}{2} \\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x \\ x = 0 \to t = 1 \\ x = 2\pi \to t = -1 \end{bmatrix} =$$

$$= 4\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 + 1} = 4\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(t\sqrt{2})^2 + 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} p = t\sqrt{2} \\ \mathrm{d}p = \sqrt{2}\mathrm{d}t \\ t = -1 \to p = -\sqrt{2} \\ t = 1\pi \to p = \sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}p}{p^2 + 1} = 2\sqrt{2}\mathrm{arctg}p\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{2}$$

2. (а) Означимо $a_n = \dfrac{n \cdot \ln n}{(n-1)!}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\cdot\ln(n+1)}{n!}}{\frac{n\cdot\ln n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\cancel{\ln n} \cdot \ln(1+\frac{1}{n})}{\cancel{\ln n}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог теста (и то апсолутно јер је у питању ред са позитивним члановима).

(б) Означимо $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$. Како a_n опада и тежи нули, то дати ред конвергира условно на основу Лајбницовог критеријума. Са друге стране, он не конвергира апсолутно јер ред $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ дивергира. (Задатак са вежби: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$ конвергира за $p > 1$ или $p = 1$ и $q > 1$, а овде је $p = 0$.)

3. (а) Имамо да је

$$a_{2n-1} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad a_{2n} = 0,$$

где је $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ дати ред. Због тога радијус конвергенције рачунамо формулом

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{(n-1)!}}} = +\infty,$$

па је област конвергенције датог реда $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

(б)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!} &= x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(n-1)!} \\
&= x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n}}{n!} \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n}}{n!} - 1 - x^2 \right) \\
&= x(e^{x^2} - 1 - x^2) \\
&= xe^{x^2} - x - x^3
\end{aligned}$$

(в)

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(xe^{x^2} - x - x^3 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2e-5}{4}.$$

(Други начин: ред је равномерно конвергентан на целом $\mathbb{R}$ па смо га могли интегралити члан по члан.)