Analiza 2

2023/2024.

1. Primitivna funkcija i neodređeni integral. Smena promenljive i parcijalna integracija.

Definicija: Neka je data funkcija f: (a, b) $\to R$. Funkcija F: (a, b) $\to R$ je **primitivna funkcija** funkcije f ako je diferencijabilna i važi $F'(x)$ = f(x) za svako x $\in R$.

Primer: Funkcije F(x) = sinx i G(x) = sinx + 1 su primitivne funkcije funkcije f(x) = cosx.

Stav:

- Ako je funkcija F: (a, b) $\to R$ primitivna funkcija funkcije f: (a, b) $\to R$, onda je i F(x) + C primitivna funkcija funkcije f, za svaku konstantu C.
- Ako su F_1 i F_2 primitivne funkcije funkcije f na nekom intervalu (a, b), onda se one razlikuju za konstantu, to jest F_1(x) - F_2(x) = C, za svako x$\in$ (a, b).

Napomena: Primitivne funkcije se definišu na intervalima. Posmatrajmo F(x): $R \setminus \{0\} \to R$, F(x) = arctg$\frac{1}{x}$. Nećemo reći da je F primitivna funkcija funkcije f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ na (-∞, 0) $\cup$ (0, +∞), već da je funkcija F_1: (-∞, 0) $\to R$, F_1(x) = arctg$\frac{1}{x}$ primitivna funkcija funkcije f na (-∞, 0) i da je funkcija F_2: (0, +∞) $\to R$, F_2(x) = arctg$\frac{1}{x}$ primitivna funkcija funkcije f na (0, +∞).

Definicija: Skup svih primitivnih funkcija funkcije f: (a, b) $\to R$ naziva se **neodređeni integral** funkcije f i označava sa $\int$f(x)dx. Funkcija f(x) naziva se **podintegralna funkcija**, a f(x)dx **podintegralni izraz**. Ako je F(x) primitivna funkcija funkcije f(x) na nekom intervalu, onda se na osnovu prethodnog stava može zapisati $\int$f(x)dx = F(x) + C.

Stav: Neka je F primitivna funkcija funkcije f na nekom intervalu. Tada važi:

- d($\int$f(x)dx) = f(x)dx
- $\int$dF(x) = F(x) + C
- $\int \lambda$f(x)dx = $\lambda \int$f(x)dx, $\lambda \in R \setminus \{0\}$
- $\int$(f(x) + g(x))dx = $\int$f(x)dx + $\int$g(x)dx, gde su f i g definisane na nekom intervalu.

Napomena: Posmatrajmo funkciju f(x) = $\frac{1}{x}$. Na (-∞, 0) jedna njena primitivna funkcija je lnx, a na (0, +∞) funkcija ln(-x). Iako integrale treba posmatrati na dva intervala, kao odvojene slučajeve, nekada se pišu zajedno kao $\int \frac{1}{x}$dx = ln|x| + C. Slično važi za funkciju f(x) = $\frac{1}{cos^2x}$. Pišemo $\int \frac{1}{cos^2x}$dx = tgx + C, ali to važi na svakom intervalu (-$\frac{\pi}{2}$ + kπ, $\frac{\pi}{2}$ + kπ).

Tablica neodređenih integrala

1. $\int$x$^\alpha$dx = $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ + C, $\alpha \neq$ -1
2. $\int \frac{1}{x}$dx = ln|x| + C
3. $\int$e^{x}dx = e^x + C
4. $\int$a^{x}dx = $\frac{a^x}{lna}$ + C, a > 0, a $\neq$ 1
5. $\int$sinxdx = -cosx + C
6. $\int$cosxdx = sinx + C
7. $\int \frac{1}{cos^2x}$dx = tgx + C
8. $\int \frac{1}{sin^2x}$dx = -ctgx + C
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$dx = arcsinx + C
10. $\int \frac{1}{1+x^2}$dx = arctgx + C
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$dx = ln|x + $\sqrt{x^2 \pm 1}$| + C
12. $\int \frac{1}{1-x^2}$dx = $\frac{1}{2}$ln|$\frac{1+x}{1-x}$| + C

Stav: Neka je f: (a, b) $\to R$ i neka je F: (a, b) $\to R$ njena primitivna funkcija, odnosno $\int$f(x)dx = F(x) + C. Neka je ϕ: (α, β) $\to$ (a, b) diferencijabilna funkcija. Tada je $\int$f(ϕ(t))$\phi'(t)$dt = F(ϕ(t)) + C na (α, β).

Napomena: Uveli smo smenu x = ϕ(t) pa je dx = $\phi'(t)$dt. Ako uvedemo smenu ψ(x) = ϕ(t) onda imamo $\psi'(x)$dx = $\phi'(t)$dt.

Stav: Neka su u, v: (a, b) $\to R$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)$v(x). Tada postoji primitivna funkcija funkcije u(x)$v'(x)$ i važi $\int$u(x)$v'(x)$dx = u(x)v(x) - $\int u'(x)$v(x)dx.

2. Integracija racionalnih, iracionalnih i trigonometrijskih funkcija.

Neka su P(x) i Q(x) polinomi nad skupom realnih brojeva. Svaku racionalnu funkciju $\frac{P(x)}{Q(x)}$ možemo na jedinstven način zapisati u obliku $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = T(x) + $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, gde je T(x) polinom i stepen polinoma P_1(x) je manji od stepena polinoma Q(x). Polinom Q(x) možemo rastaviti na linearne polinome oblika x - a i nerastavljive kvadratne polinome oblika x^2 + bx + c, b^2 - 4c < 0. Dakle Q(x) = A(x - $a_1)^{k_1}$...(x - $a_p)^{k_p}$(x^2 + b_1x + $c_1)^{l_1}$...(x^2 + b_qx + $c_q)^{l_q}$, A, a_i, b_i, $c_i \in R$, b_i^2 - 4c_i < 0.

Teorema: Racionalna funkcija $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, st(P_1) < st(Q), može se napisati u obliku:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = (\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}})+\ldots+(\frac{A_{p1}}{x-a_p}+\ldots+\frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}) + (\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\ldots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}})+\ldots+(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\ldots+\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}})$$

Razlomci na desnoj strani zovu se **prosti razlomci**. Koeficijente A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} dobijamo tako što jednakost množimo sa Q(x) i desnu stranu sredimo, a zatim izjednačimo polinome leve i desne strane. Dakle, da bismo uradili integral racionalne funkcije potrebno je da racionalnu funkciju predstavimo kao zbir prostih razlomaka i nekog polinoma. Rešavanje integrala $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$dx sveli smo na rešavanje integrala $\int \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}$dx i $\int \frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+b_ix+c_i)^j}$dx. Prvi integral se rešava smenom t = x - a_i.

Integrali oblika $\int$R(x, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$)dx, gde je R racionalna funkcija rešavaju se smenom $\frac{ax+b}{cx+d}$ = t^n. Odavde izrazimo x, pa dobijamo i dx. Dakle, integral iracionalne funkcije smo sveli na integral racionalne funkcije.

Integrali oblika $\int$R(x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$)dx rešavaju se **Ojlerovim smenama**:

- ako a > 0 onda prva Ojlerova smena: $\sqrt{ax^2+bx+c}$ = $\sqrt{a}$x $\pm$ t
- ako c > 0 onda druga Ojlerova smena: $\sqrt{ax^2+bx+c}$ = xt $\pm$ $\sqrt{c}$
- ako ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), $x_1 \neq x_2$ onda treća Ojlerova smena: $\sqrt{ax^2+bx+c}$ = t(x - x_1)

Integrali oblika $\int$R(sinx, cosx)dx rešavaju se sledećim smenama:

- ako R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx) onda t = cosx
- ako R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx) onda t = sinx
- ako R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx) onda t = tgx, dx = $\frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2$x = $\frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2$x = $\frac{t^2}{1+t^2}$
- inače t = tg$\frac{x}{2}$, dx = $\frac{2dt}{1+t^2}$, cosx = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, sinx = $\frac{2t}{1+t^2}$

3. Pojam Rimanovog integrala. Veza između ograničenosti i integrabilnosti funkcije.

Uočimo segment [a, b] $\subset R$. Konačan skup tačaka P = {x_0, ..., x_n}, takav da je a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, nazivamo **podelom segmenta** [a, b]. Neka je P[a, b] skup svih podela segmenta. Na ovom skupu možemo posmatrati relaciju $P_1 \subset P_2$: podela P_2 je finija od podele P_1. U svakoj podeli P uvešćemo oznake Δx_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, ..., n i pojam **parametra podele** λ(P) = $\max_{1\leq i\leq n}\Delta x_i$. Na svakom segmentu [$x_{i-1}$, x_i] možemo izabrati po tačku $\mathcal{E}_i$. Na ovaj način dobili smo podelu P sa izabranim tačkama
{$\mathcal{E}_1$, ..., $\mathcal{E}_n$}, u oznaci (P, $\mathcal{E}$).

Definicija: Neka je f: [a, b] $\to R$ i (P, $\mathcal{E}$) je neka podela segmenta [a, b] sa izabranim tačkama. Zbir $\sum_{i=1}^n$f($\mathcal{E}_i$)Δx_i naziva se **integralnom sumom** funkcije f za datu podelu (P, $\mathcal{E}$), u oznaci σ(f, P, $\mathcal{E}$). Ako biramo tačke $\mathcal{E}_i$ na krajevima segmenta onda dobijamo **desnu integralnu sumu** R(f, P) = $\sum_{i=1}^n$f(x_i)Δx_i, odnosno **levu integralnu sumu** L(f, P) = $\sum_{i=1}^n$f(x_{i-1})Δx_i.

Definicija: Za funkciju f: [a, b] $\to R$ kažemo da je integrabilna u Rimanovom smislu na segmentu [a, b] ako postoji konačan limes $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma$(f, P, $\mathcal{E}$) = I. U tom slučaju broj I zapisaćemo kao I = $\int_a^b$f(x)dx i reći ćemo da je **Rimanov integral** funkcije f na segmentu [a, b]. Broj a naziva se **donja granica**, a broj b **gornja granica** integrala.

Funkcija f je **podintegralna funkcija**, a x je **integraciona promenljiva**. Skup svih integrabilnih funkcija u Rimanovom smislu na segmentu [a, b] označavamo sa R[a, b].

Primer: Da li je funkcija f(x) = C, f: [a, b] $\rightarrow R$, Riman integrabilna na [a, b]?

- Neka je (P, $\mathcal{E}$) proizvoljna podela segmenta [a, b]. Integralna suma je:
  σ(f, P, $\mathcal{E}$) = $\sum_{i=1}^{n}$f($\mathcal{E}_i$)Δx$_i$ = $\sum_{i=1}^{n}$C(x$_i$ - x$_{i-1}$) = C$\sum_{i=1}^{n}$(x$_i$ - x$_{i-1}$) = C(b - a)
  Za svaku podelu σ(f, P, $\mathcal{E}$) = C(b - a) pa je $\lim_{\lambda(P)\rightarrow 0}\sigma$(f, P, $\mathcal{E}$) = C(b - a), pa je $\int_a^b$Cdx = C(b - a).

Primer: Da li je Dirihleova funkcija, X(x) = $\begin{cases} 1, x \in Q \cap [a, b] \\ 0, x \in I \cap [a, b] \end{cases}$, X: [a, b] $\rightarrow R$, Riman integrabilna na [a, b]?

- Neka je P proizvoljna podela segmenta [a, b]. U svakom segmentu [x$_{i-1}$, x$_i$] možemo izabrati tačku $\mathcal{E}_i \in Q$, kao i tačku $\mathcal{E}_i^{'} \in I$ jer su skupovi Q i I gusti u R. Odavde:
  σ(f, P, $\mathcal{E}$) = $\sum_{i=1}^{n}$f($\mathcal{E}_i$)Δx$_i$ = $\sum_{i=1}^{n}$ 1 $\cdot$ (x$_i$ - x$_{i-1}$) = b - a
  σ(f, P, $\mathcal{E}^{'}$) = $\sum_{i=1}^{n}$f($\mathcal{E}_i^{'}$)Δx$_i$ = $\sum_{i=1}^{n}$ 0 $\cdot$ (x$_i$ - x$_{i-1}$) = 0
  Za svaku podelu, koliko god da je usitnjena, možemo izabrati $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}^{'}$ tako da je σ(f, P, $\mathcal{E}$) = b - a i σ(f, P, $\mathcal{E}^{'}$) = 0, pa $\lim_{\lambda(P)\rightarrow 0}\sigma$(f, P, $\mathcal{E}$) ne postoji, pa Dirihleova funkcija nije Riman integrabilna.

Stav: Ako je funkcija f Riman integrabilna na [a, b], onda je f ograničena.

4. Darbuov integral. Veza između Rimanovog i Darbuovog integrala.

Neka je f: [a. b] $\rightarrow R$ ograničena funkcija i neka je P = {x$_0$, ..., x$_n$} neka podela segmenta [a, b]. **Gornja Darbuova suma** funkcije f za podelu P je S(f, P) = $\sum_{i=1}^{n}\sup_{\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i]}$f($\mathcal{E}_i$)$\Delta$x$_i$, a **donja Darbuova suma** je s(f, P) = $\sum_{i=1}^{n}\inf_{\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i]}$f($\mathcal{E}_i$)$\Delta$x$_i$. Supremumi i infimumi na segmentima postoje jer je funkcija ograničena. Podela P segmenta [a, b] je ravnomerna ako je x$_i$ - x$_{i-1}$ = $\frac{b-a}{n}$, za svako i = 1, ..., n, to jest svi segmenti su iste dužine. U tom slučaju važi x$_i$ = a + i $\cdot$ $\frac{b-a}{n}$ za svako i = 1, ..., n.

Stav: Neka je f ograničena na [a. b] i neka je (P, $\mathcal{E}$) neka njena podela. Tada važi:

m(b - a) $\leq s$(f, P) $\leq \sigma$(f, P, $\mathcal{E}$) $\leq$ S(f, P) $\leq$ M(b - a), gde su m = $\inf_{x\in[a,b]}$f(x) i M = $\sup_{x\in[a,b]}$f(x).

Stav: Neka je f: [a, b] $\rightarrow R$ ograničena. Tada važi:

- P $\subset$ P$^{'}$ $\Rightarrow s$(f, P) $\leq s$(f, P$^{'}$) $\leq$ S(f, P$^{'}$) $\leq$ S(f, P)
- s(f, P) $\leq$ S(f, P$^{'}$) za proizvoljne podele P i P$^{'}$
- Postoje konačni $\sup_P s$(f, P) i $\inf_P$S(f, P).

Definicija: Neka je f: [a, b] $\rightarrow R$ ograničena. **Gornji Darbuov integral** je $\overline{I}$ = $\inf_P$S(f, P), a **donji Darbuov integral** je $\underline{I}$ = $\sup_P s$(f, P). Za svaku podelu P važi s(f, P) $\leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq$ S(f, P).

Teorema: Neka je f: [a, b] $\rightarrow R$ ograničena. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

- f je Riman integrabilna na [a, b]
- $\lim_{\lambda(P)\rightarrow 0}$(S(f, P) - s(f, P)) = 0
- $\underline{I}$ = $\overline{I}$

Primer: Izračunati S(f, P) i s(f, P) za funkciju f: [-1, 1] $\rightarrow R$, f(x) = |x| za ravnomernu podelu P na 2n jednakih segmenata. Izračunati $\int_{-1}^{1}$f(x)dx.

- Važi x$_i$ - x$_{i-1}$ = $\frac{1-(-1)}{2n}$ = $\frac{1}{n}$, pa je x$_i$ = -1 + i $\cdot$ $\frac{1}{n}$.
- Na segmentima [x$_{i-1}$, x$_i$], i $\in$ {1, ..., n} važi M$_i$ = $\sup_{\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i]}$ = f(x$_{i-1}$) i m$_i$ = $\inf_{\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i]}$ = f(x$_i$), jer je f opadajuća na [-1, 0].
- Na segmentima [x$_{i-1}$, x$_i$], i $\in$ {n + 1, ..., 2n} važi M$_i$ = $\sup_{\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i]}$ = f(x$_i$) i m$_i$ = $\inf_{\mathcal{E}_i \in [x_{i-1}, x_i]}$ = f(x$_{i-1}$), jer je f rastuća na [0, 1].
- Odavde S(f, P) = $\sum_{i=1}^{2n}$M$_i$$\Delta$x$_i$ = $\sum_{i=1}^{n}$M$_i\frac{1}{n}$ + $\sum_{i=n+1}^{2n}$M$_i\frac{1}{n}$ = $\sum_{i=1}^{n}$f(x$_{i-1}$)$\frac{1}{n}$ + $\sum_{i=n+1}^{2n}$f(x$_i$)$\frac{1}{n}$. Koristeći f(x$_{i-1}$) = |x$_{i-1}$| i f(x$_i$) = |x$_i$| i sređivanjem izraza dobija se S(f, P) = 1 + $\frac{1}{n}$. Analogno, s(f, P) = 1 - $\frac{1}{n}$.
- Odavde $\sup_P s$(f, P) $\geq$ 1 - $\frac{1}{n}$ i $\inf_P$S(f, P) $\leq$ 1 + $\frac{1}{n}$. Kada n $\rightarrow \infty$ imamo 1 $\leq \sup_P s$(f, P) $\leq \inf_P$S(f, P) $\leq$ 1, pa je $\underline{I}$ = $\overline{I}$ = 1, pa je $\int_{-1}^{1}$f(x)dx = 1.

5. Integrabilnost nekih klasa funkcija.

Teorema: Svaka neprekidna funkcija na [a, b] je Riman integrabilna na [a, b], to jest C[a, b] $\subset$ R[a, b].

Pošto za svaku neprekidnu funkciju postoji $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma$(f, P, $\mathcal{E}$) = I = $\int_a^b$f(x)dx onda da bismo izračunali I dovoljno je da nađemo graničnu vrednost za bilo koji niz podela P$_n$ takav da je λ(P$_n$) $\to$ 0, to jest I = $\lim_{n\to\infty}\sigma$(f, P$_n$, $\mathcal{E}_n$). Neka je P$_n$ ravnomerna podela, to jest Δx$_i$ = $\frac{b-a}{n}$. Možemo posmatrati desnu i levu Rimanovu sumu, kao i proizvoljan izbor $\mathcal{E}$. Za neprekidne funkcije onda važi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{E}_i)\frac{b-a}{n}$$

Primer: Izračunati $\int_a^b$xdx.

- Neka je P$_n$ ravnomerna podela, x$_i$ = a + i $\cdot$ $\frac{b-a}{n}$. Tada je σ_R(f, P$_n$, $\mathcal{E}_n$) = $\sum_{i=1}^n$f(x$_i$)$\frac{b-a}{n}$. Korišćenjem f(x$_i$) = x$_i$ i sređivanjem izraza dobijamo σ_R(f, P$_n$, $\mathcal{E}_n$) = ab - a^2 + (b - a)^2 $\frac{n+1}{2n}$. Odavde dobijamo $\int_a^b$xdx = $\lim_{n\to\infty}\sigma_R$(f, P$_n$, $\mathcal{E}_n$) = $\frac{b^2-a^2}{2}$.

Napomena: Ako funkcija nije neprekidna na [a, b], onda ne mora važiti $\int_a^b$f(x)dx = $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n$f(x$_i$)$\frac{b-a}{n}$. Na primer, za Dirihleovu funkciju na segmentu [0, 1] važi $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n X$(x$_i$)$\frac{1}{n}$ = $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n$ 1 $\cdot$ $\frac{1}{n}$ = 1, X(x$_i$) = 1 jer x$_i$ $\in$ Q. Međutim, dokazali smo da $\int_0^1 X$(x)dx ne postoji.

Stav: Monotona funkcija na segmentu je Riman integrabilna.

Definicija: Skup E $\subset$ R ima meru nula ako za svako $\mathcal{E}$ > 0 postoji niz I_n = (a$_n$, b$_n$), a$_n$ $\leq$ b$_n$, tako da je E $\subset$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}$(a$_n$, b$_n$) i $\sum_{n=1}^{\infty}$(b$_n$ - a$_n$) $\leq$ $\mathcal{E}$. Odnosno, skup E ima meru nula ako se može pokriti najviše prebrojivom familijom intervala čija je ukupna dužina manja ili jednaka $\mathcal{E}$.

Primer:

- Jednočlan skup A = {a} je skup mere nula. Za svako $\mathcal{E}$ > 0 postoji interval I = (a - $\frac{\mathcal{E}}{4}$, a + $\frac{\mathcal{E}}{4}$) takav da je A $\subset$ I i dužina intervala je a + $\frac{\mathcal{E}}{4}$ - a - (-$\frac{\mathcal{E}}{4}$) = $\frac{\mathcal{E}}{2}$ < $\mathcal{E}$.
- Konačan skup A = {a$_1$, ..., a$_p$} je skup mere nula. Za svako $\mathcal{E}$ > 0 postoje intervali I_i = (a$_i$ - $\frac{\mathcal{E}}{2p}$, a$_i$ + $\frac{\mathcal{E}}{2p}$) takvi da je A $\subset$ $\bigcup_{i=1}^p I_i$ i dužina intervala je $\sum_{i=1}^p$(a$_i$ + $\frac{\mathcal{E}}{2p}$ - a$_i$ - (-$\frac{\mathcal{E}}{2p}$)) = $\sum_{i=1}^p \frac{\mathcal{E}}{p}$ = p $\cdot$ $\frac{\mathcal{E}}{p}$ = $\mathcal{E}$.
- Prebrojiv skup A = {a$_i$ | i $\in$ N} je skup mere nula. Za svako $\mathcal{E}$ > 0 postoje intervali I_i = (a$_i$ - $\frac{\mathcal{E}}{2^{i+1}}$, a$_i$ + $\frac{\mathcal{E}}{2^{i+1}}$) takvi da je A $\subset$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ i dužina intervala je $\sum_{i=1}^{\infty}$(a$_i$ + $\frac{\mathcal{E}}{2^{i+1}}$ - a$_i$ - (-$\frac{\mathcal{E}}{2^{i+1}}$)) = $\sum_{i=1}^p \frac{2\mathcal{E}}{2^{i+1}}$ = $\mathcal{E}$ $\cdot$ $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ = $\mathcal{E}$ $\cdot$ 1 = $\mathcal{E}$.
- Postoje i skupovi koji su mere nula, a nisu prebrojivi - Kantorov.

Teorema (**Lebegov kriterijum integrabilnosti**): Neka je f ograničena na [a, b] i neka je A skup tačaka prekida. Funkcija f je integrabilna akko je A skup mere nule.

Posledica:

- Ako je funkcija neprekidna na [a, b], osim na skupu mere nula, onda je Riman integrabilna na [a, b].
- Ako su f, g $\in$ R[a, b] i ako se razlikuju samo na skupu mere nula, onda je $\int_a^b$f(x)dx = $\int_a^b$g(x)dx.

Primer:

- Dirihleova funkcija ima prekid u svakoj tački segmenta [a, b], a skup [a, b] nije skup mere nula, pa Dirihleova funkcija nije Riman integrabilna na [a, b].
- Dokazali smo da je funkcija f(x) = 1 Riman integrabilna na [0, 1] i važi $\int_0^1$f(x)dx = 1. Funkcija g(x) = $\begin{cases} 0, x = \frac{1}{2^i}, i \in N \\ 1, inače \end{cases}$ je Riman integrabilna jer joj je skup tačaka prekida {$\frac{1}{2^i}$ | $i \in N$} prebrojiv, pa je mere nula. Funkcije se i razlikuju na tom skupu mere nula pa na osnovu posledice važi $\int_0^1$g(x)dx = $\int_0^1$f(x)dx = 1.

6. Svojstva određenog integrala.

Teorema (**Linearnost integrala**): Neka su f, g $\in$ R[a, b] i α, β $\in$ R. Tada je αf + βg $\in$ R[a, b] i važi:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

Teorema: Neka su f, g $\in R$[a, b]. Tada važi:

- f·g $\in R$[a, b]
- |f| $\in R$[a, b]
- $\frac{1}{f} \in R$[a, b] uz uslov |f(x)| $\geq \alpha$ > 0, za svako x $\in$ [a, b]. Samo uslov |f(x)| > 0, za svako x $\in$ [a, b] nije dovoljan. Na primer, f(x) = $\begin{cases} x, x \in (0,1] \\ 1, x = 0 \end{cases}$ je Riman integrabilna na [0, 1]. Funkcija g(x) = $\frac{1}{f(x)}$ = $\begin{cases} \frac{1}{x}, x \in (0,1] \\ 1, x = 0 \end{cases}$ nije Riman integrabilna jer nije ograničena, iako važi f(x) > 0 za svako x $\in$ [0, 1].
- f $R[\alpha, \beta]$, za svako $[\alpha, \beta] \subset$ [a, b]

Stav: Ako je f $\in R$[a, b] i a < c < b, onda f $\in R$[a, c] i f $\in R$[c, b] i važi $\int_a^b$f(x)dx = $\int_a^c$f(x)dx + $\int_c^b$f(x)dx.

Definicija:

- Ako je f definisana u a, onda je $\int_a^a$f(x)dx = 0.
- Ako je a > b i postoji $\int_b^a$f(x)dx, onda je $\int_a^b$f(x)dx = -$\int_b^a$f(x)dx.

Stav: Neka tačke a, b i c predstavljaju krajeve segmanata i neka su u bilo kakvom poretku. Ako je funkcija f Riman integrabilna na najvećem segmentu, onda je Riman integrabilna i na manjim i važi $\int_a^b$f(x)dx = $\int_a^c$f(x)dx + $\int_c^b$f(x)dx.

7. Monotonost i procene integrala. Prva teorema o srednjoj vrednosti.

Stav: Ako je f $\in R$[a, b], a < b i f(x) $\geq$ 0 za svako x $\in$ [a, b], onda je $\int_a^b$f(x)dx $\geq$ 0.

Posledica: Ako su f, g $\in R$[a, b], a < b i f(x) $\leq$ g(x) za svako x $\in$ [a, b], onda je $\int_a^b$f(x)dx $\leq \int_a^b$g(x)dx.

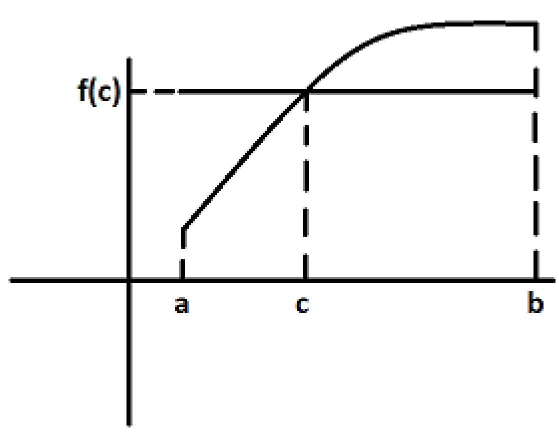
Stav: Neka je f: [a, b] $\rightarrow R$ neprekidna i nenegativna funkcija. Ako postoji c $\in$ [a, b] tako da je f(c) > 0, onda je $\int_a^b$f(x)dx > 0.

Stav: Ako je f $\in R$[a, b], a < b, onda važi **integrabilna nejednakost**:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot (b-a)$$

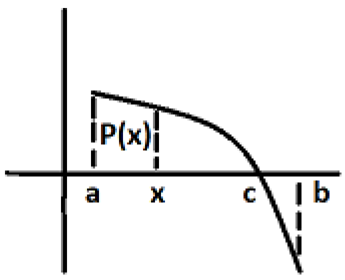
Teorema (**Prva teorema o srednjoj vrednosti**): Neka su f, g $\in R$[a, b], m = $\inf_{x\in[a,b]}$f(x), M = $\sup_{x\in[a,b]}$f(x) i g(x) $\geq$ 0 za svako x $\in$ [a, b]. Tada postoji $\mu \in$ [m, M] tako da je $\int_a^b$f(x)g(x)dx = $\mu \int_a^b$g(x)dx. Ako je dodatno f neprekidna na [a, b], onda postoji c $\in$ [a, b] tako da je $\int_a^b$f(x)g(x)dx = f(c)$\int_a^b$g(x)dx.

Posledica (za g(x) = 1): Neka je f $\in R$[a, b], m = $\inf_{x\in[a,b]}$f(x) i M = $\sup_{x\in[a,b]}$f(x). Tada postoji $\mu \in$ [m, M] tako da je $\int_a^b$f(x)dx = μ(b - a). Ako je dodatno f neprekidna na [a, b], onda postoji c $\in$ [a, b] tako da je $\int_a^b$f(x)dx = f(c)(b - a). Geometrijska reprezentacija: Postoji c $\in$ [a, b] tako da je površina krivolinijskog trapeza stranice b - a jednaka površini pravougaonika.

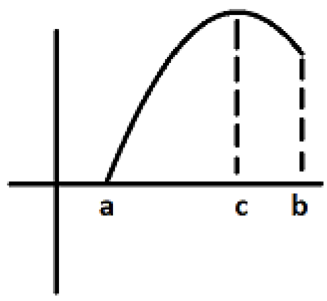


8. Veza između određenog integrala i izvoda.

Posmatrajmo neprekidnu funkciju f: [a, b] $\to R$. **Funkciju površine** definišemo kao P: [a, b] $\to R$, P(x) = $\int_a^x$f(t)dt. P(x) je površina krivolinijskog trapeza stranice x - a. Važi P(a) = $\int_a^a$f(t)dt = 0. Na intervalima gde je f pozitivna, funkcija površine raste, a gde je f negativna, funkcija površine opada.



grafik funkcije f(x) i površina koju predstavlja P(x)



grafik funkcije P(x)

Pojam funkcije površine može se proširiti i na integrabilne funkcije. Neka je f $\in R$[a, b]. Funkcija ϕ: [a, b] $\to R$, ϕ(x) = $\int_a^x$f(t)dt naziva se **integralom sa promenljivom gornjom granicom**.

Stav: Neka je f $\in R$[a, b] i ϕ(x) = $\int_a^x$f(t)dt, x $\in$ [a, b]. Tada važi:

- Funkcija ϕ je neprekidna na [a, b].
- Ako je f neprekidna u $x_0 \in$ [a, b], onda je ϕ diferencijabilna u x_0 i važi $\phi'(x_0)$ = f(x_0). Odnosno, izvod integrala po gornjoj granici je vrednost funkcije u gornjoj granici. Za slučaj kada je x_0 = a (b), posmatramo granične vrednosti kada h $\to 0_+$ (0_-), odakle se dobija desni (levi) izvod, to jest $\phi'_+(x_0)$ = f(a) i $\phi'_-(x_0)$ = f(b).

Posledica: Za neprekidnu funkciju f: [a, b] $\to R$ važi $(\int_x^b$f(t)dt$)'$ = -f(x), za svako x $\in$ [a, b].

Primer: Neka je f(x) = $\begin{cases} 0, x \in [0,1] \\ 1, x \in (1,2] \end{cases}$. Tada je $\phi'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\phi(1+h)-\phi(1)}{h}$ = $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(\int_1^{1+h}$f(t)dt - $\int_1^1$f(t)dt) = $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h}$f(t)dt = $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h}$dt = $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\cdot$ (1 + h - 1) = $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\cdot$ h = 1. Međutim, $\phi'_+(1)$ = 1 $\neq$ 0 = f(1). Ovaj primer pokazuje da je neprekidnost bitna kod prethodnog stava.

Teorema: Ako je f: [a, b] $\to R$ neprekidna funkcija, onda je ϕ(x) = $\int_a^x$f(t)dt, x $\in$ [a, b], njena primitivna funkcija.

Teorema (**Njutn-Lajbnicova teorema**): Neka je f: [a, b] $\to R$ neprekidna i F(x) njena proizvoljna primitivna funkcija. Tada važi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Njutn-Lajbnicova formula važi i kada je b < a.

9. Druga teorema o srednjoj vrednosti.

Neka je **skup svih glatkih funkcija** C^1[a, b] = {f $\in C$[a, b] | f$'$ $\in C$[a, b] i postoje $f'_+(a)$ i $f'_-(b)$}.

Stav: Neka je f neprekidna, a g rastuća, nenegativna i glatka funkcija na [a, b]. Tada postoji $\mathcal{E} \in$ [a, b] tako da je $\int_a^b$f(x)g(x)dx = g(b)$\int_{\mathcal{E}}^b$f(x)dx.

Teorema (**Druga teorema o srednjoj vrednosti**): Neka je f neprekidna, a g monotona i glatka na [a, b]. Tada postoji $\mathcal{E} \in$ [a, b] tako da je $\int_a^b$f(x)g(x)dx = g(a)$\int_a^{\mathcal{E}}$f(x)dx + g(b)$\int_{\mathcal{E}}^b$f(x)dx.

Napomena: Prethodna teorema važi i u slučaju kada je f $\in R$[a, b] i g monotona.

Primer: Neka je f $\in C(R)$ i g_1, $g_2 \in D(R)$. Tada je $\frac{d}{dx}(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}$f(t)dt) = f($g_2$(x))$g_2'(x)$ - f(g_1(x))$g_1'(x)$.

- Neka je F(x) = $\int_0^x$f(t)dt. Tada je (F$\circ g_1$)(x) = F(g_1(x)) = $\int_0^{g_1(x)}$f(t)dt i (F$\circ g_2$)(x) = F(g_2(x)) = $\int_0^{g_2(x)}$f(t)dt. Takođe znamo $F'(x)$ = f(x).
- Odavde $\frac{d}{dx}(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}$f(t)dt) = $\frac{d}{dx}(\int_0^{g_2(x)}$f(t)dt - $\int_0^{g_1(x)}$f(t)dt) = $\frac{d}{dx}$((F$\circ g_2$)(x) - (F$\circ g_1$)(x)) = $\frac{d}{dx}$(F$\circ g_2$)(x) - $\frac{d}{dx}$(F$\circ g_1$)(x) = $F'(g_2(x))g_2'(x)$ - $F'(g_1(x))g_1'(x)$ = f(g_2(x))$g_2'(x)$ - f(g_1(x))$g_1'(x)$.

10. Parcijalna integracija. Smena promenljive kod određenog integrala. Osobine integrala parne, neparne i periodične funkcije.

Teorema: Neka funkcije u(x) i v(x) imaju neprekidne izvode na [a, b]. Tada važi jednakost:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Teorema: Neka je f: [A, B] $\to R$ neprekidna, a funkcija ϕ: [α, β] $\to$ [A, B] ima neprekidan izvod i $\phi(\alpha)$ = a, $\phi(\beta)$ = b. Tada važi $\int_a^b$f(x)dx = $\int_\alpha^\beta$f(ϕ(t))$\phi'(t)$dt. Jednakost važi i u slučaju da je f $\in R$[a, b] i ϕ strogo monotona.

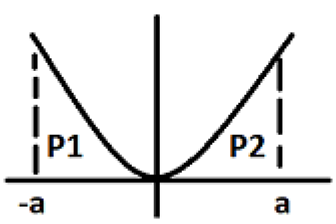
Primer: Ako je f $\in R$[-a, a] parna, onda je $\int_{-a}^a$f(x)dx = 2$\int_0^a$f(x)dx.

- I = $\int_{-a}^a$f(x)dx = $\int_{-a}^0$f(x)dx + $\int_0^a$f(x)dx = $\begin{pmatrix} x=-t \\ dx=-dt \end{pmatrix}$ = $\int_a^0$f(-t)(-dt) + $\int_0^a$f(x)dx = $\int_0^a$f(x)dx + $\int_0^a$f(x)dx = 2$\int_0^a$f(x)dx

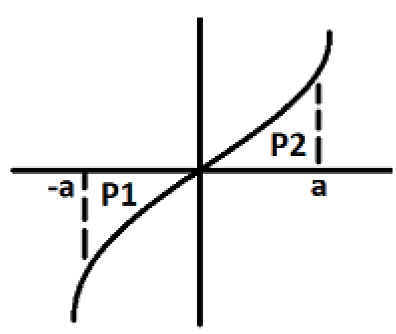
Primer: Ako je f $\in R$[-a, a] neparna, onda je $\int_{-a}^a$f(x)dx = 0.

- I = $\int_{-a}^a$f(x)dx = $\int_{-a}^0$f(x)dx + $\int_0^a$f(x)dx = $\begin{pmatrix} x=-t \\ dx=-dt \end{pmatrix}$ = $\int_a^0$f(-t)(-dt) + $\int_0^a$f(x)dx = -$\int_0^a$f(x)dx + $\int_0^a$f(x)dx = 0

Geometrijske interpretacije:



P1 = P2 jer je f parna

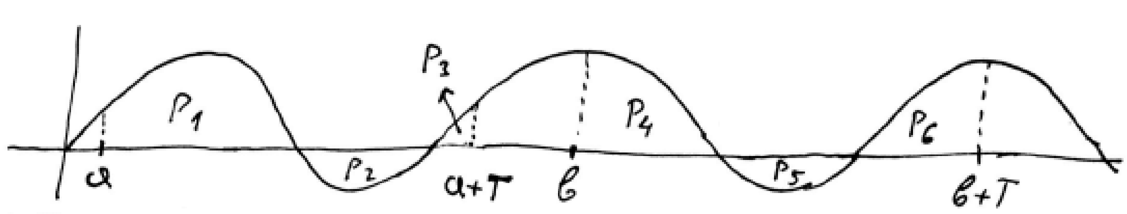


P1 = -P2 jer je f neparna

Primer: Neka je f $\in C(-\infty, +\infty)$ periodična sa periodom T. Tada važi:

1. $\int_a^{a+T}$f(x)dx = $\int_0^T$f(x)dx = $\int_b^{b+T}$f(x)dx, za svako a, b $\in R$:
   $\int_a^{a+T}$f(x)dx = $\int_a^T$f(x)dx + $\int_T^{a+T}$f(x)dx = $\begin{pmatrix} x-T=t \\ dx=dt \end{pmatrix}$ = $\int_a^T$f(x)dx + $\int_0^a$f(t + T)dt = $\int_a^T$f(x)dx + $\int_0^a$f(t)dt = $\int_0^T$f(x)dx.
   Jednakost važi za svako a $\in R$, pa je $\int_a^{a+T}$f(x)dx = $\int_b^{b+T}$f(x)dx, za svako a, b $\in R$.

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA:



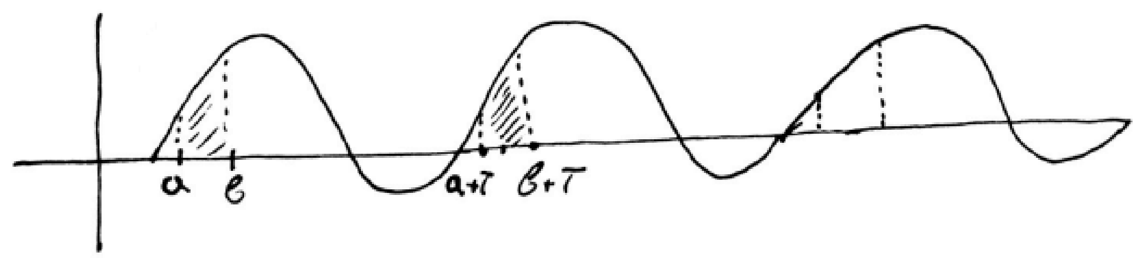
$\int_a^{a+T} f(x)dx = P_1 - P_2 + P_3$, $\int_b^{b+T} f(x)dx = P_4 - P_5 + P_6$, $\int_0^T f(x)dx = P_1 - P_2 + P_3$

$P_2 = P_5$, $P_1 + P_3 = P_4 + P_6$

2. $\int_a^{a+kT} f(x)dx = k\int_a^{a+T} f(x)dx$, za svako $a \in R$, $k \in Z$:
$\int_a^{a+kT} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx + ... + \int_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx + ... + \int_a^{a+T} f(x)dx = k\int_a^{a+T} f(x)dx$

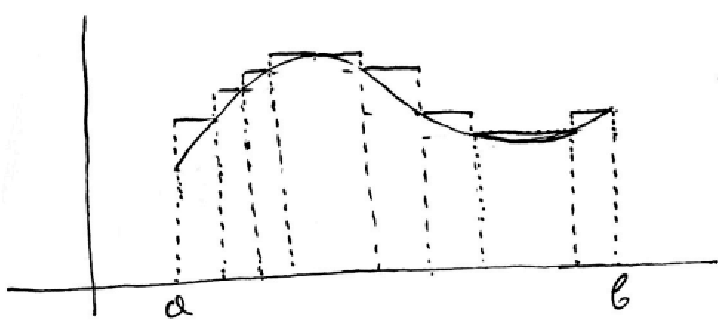
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx$, za svako $a, b \in R$, $k \in Z$:
$\int_a^b f(x)dx = \begin{pmatrix} t = x + kT \\ dx = dt \end{pmatrix} = \int_{a+kT}^{b+kT} f(t - kT)dt = \int_{a+kT}^{b+kT} f(t)dt = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA



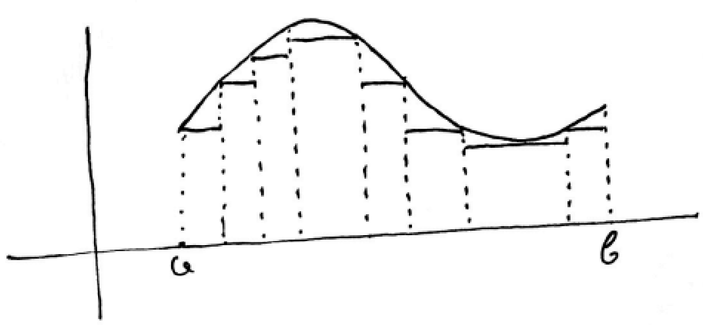
11. Površina ravnog lika i dužina krive.

Neka je $f \in C[a, b]$ nenegativna funkcija. Tada je f Riman integrabilna i $I = \int_a^b f(x)dx = \inf_P S(f, P) = \sup_P s(f, P)$.



$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

JE ZBIR POVRŠINA OPISANIH PRAVOUGAONIKA



$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

JE ZBIR POVRŠINA UPISANIH PRAVOUGAONIKA

Zbog integrabilnosti funkcije f imamo da je površina oblasti ograničene grafikom funkcije, x-osom i pravama x = a i x = b jednaka:

$$P = \inf_P S(f, P) = \sup_P s(f, P) = \int_a^b f(x)dx$$

Napomena: Ako f nije pozitivna, onda je $\int_a^b f(x)dx = -P$.

Posledica: Neka su $f, g \in C[a, b]$ takve da je $g(x) \leq f(x)$ za svako $x \in [a, b]$. Površina dela ravni ograničenog graficima funkcija f i g i pravama x = a i x = b jednaka je:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Napomena: Ako je $f \in C[a, b]$ data u parametarskom obliku x = x(t), y = y(t), $t \in [\alpha, \beta]$, onda se može dokazati da je $P = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

Neka je f: $[a, b] \to R$ neprekidno diferencijabilna. Intuitivno je očekivati da je dužina krive L granična vrednost dužina izlomljenih linija. Neka je $P = \{x_0, ..., x_n\}$ podela segmenta. Dužina jedne duži je $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$, a izlomljene linije je $\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}}(x_i - x_{i-1})$. Funkcija je neprekidna na $[x_{i-1}, x_i]$ i diferencijabilna na (x_{i-1}, x_i) pa na osnovu Lagranžove teoreme postoje $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tako da je $f'(c_i) = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$, pa je dužina izlomljene linije $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}(x_i-x_{i-1})$. Posmatrajmo A = $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}(x_i-x_{i-1})$, gde je $\mathcal{E}$ proizvoljan izbor tačaka. Funkcija $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ je neprekidna, pa je i Riman integrabilna, pa nezavisno od izbora tačaka $\mathcal{E}_i$ važi A = $\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. Dakle, dužina krive je:

$$L = \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

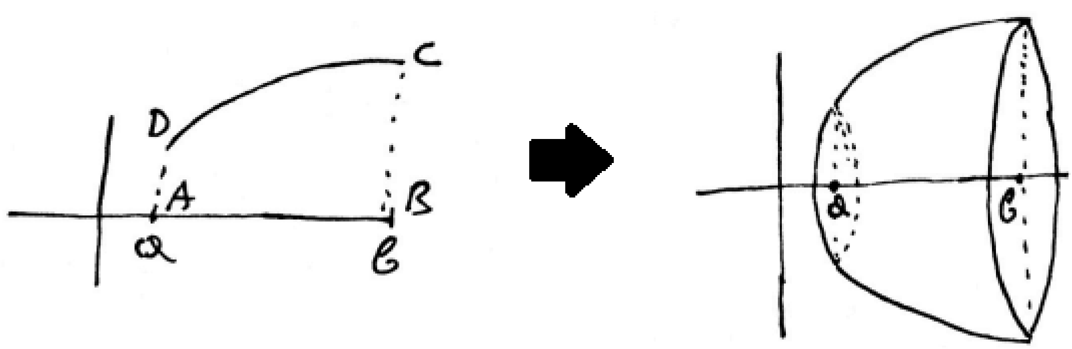
Napomena: Neka je funkcija f: [a, b] $\to R$ data u parametarskom obliku x = x(t), y = y(t), t $\in [\alpha, \beta]$, x, y $\in C^1[\alpha, \beta]$. S obzirom da je $\frac{df}{dx}$ = $\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ = $\frac{y'(t)}{x'(t)}$, dužina grafika funkcije f je L = $\int_\alpha^\beta\sqrt{1+(\frac{y'(t)}{x'(t)})^2}x'(t)dt$ = $\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$.

Primer: Izračunati površinu polukruga poluprečnika r i dužinu polukružnice poluprečnika r.

- Iz $x^2 + y^2 = r^2$ sledi y = $\sqrt{r^2-x^2}$, pa je y' = $-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$
- P = $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}$ = $\begin{pmatrix} x = rsint \\ dx = rcostdt \\ -r\to -\frac{\pi}{2}, r\to\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$ = ... = $r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$ = $\left(cos^2t = \frac{1+cos2t}{2}\right)$ = ... = $\frac{r^2}{2}\pi$
- L = $\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx$ = $\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$ = r $\cdot$ arcsin$\frac{x}{r}\Big|_{-r}^{r}$ = rπ

12. Zapremina obrtnog tela i površina omotača obrtnog tela.

Neka je f $\in C$[a, b] pozitivna funkcija. Ako krivolinijski trapez ABCD rotira oko x-ose dobija se telo:



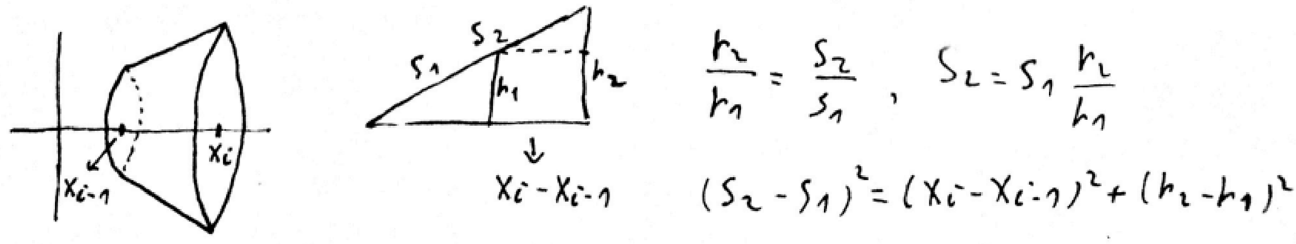
Neka je P = $\{x_0, ..., x_n\}$ podela segmenta i neka su $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$ i $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$. Tada su $m_i^2\pi(x_i - x_{i-1})$ zapremine upisanih valjaka, a $M_i^2\pi(x_i - x_{i-1})$ zapremine opisanih valjaka. Zbir svih upisanih valjaka je $\sum_{i=1}^{n}m_i^2\pi(x_i - x_{i-1})$, a zbir svih opisanih valjaka je $\sum_{i=1}^{n}M_i^2\pi(x_i - x_{i-1})$. Ovi zbirovi su donja i gornja Darbuova suma za funkciju $f^2(x)\pi$ i podelu P, a njihova granična vrednost je $\int_a^b f^2(x)\pi dx$, jer je f^2 neprekidna pa je $f^2(x)\pi$ Riman integrabilna. Očekivano, zapremina obrtnog tela jednaka je upravo toj graničnoj vrednosti:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Napomena: Ako je x = x(y) neprekidna na [c, d] i rotira oko y-ose, onda je V = $\pi\int_c^d x^2(y)dy$.

Napomena: Ako je funkcija data u parametarskom obliku x = x(t), y = y(t), t $\in [\alpha, \beta]$, onda je zapremina obrtnog tela nastalog rotacijom oko x-ose V = $\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt$.

Neka je f neprekidno diferencijabilna i pozitivna na [a, b]. Sada želimo površinu omotača obrtnog tela nastalog rotacijom krivolinijskog trapeza ABCD. Neka je P = $\{x_0, ..., x_n\}$ podela segmenta. Posmatrajmo trapez sa temenima $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$. Rotacijom ovog trapeza oko x-ose dobija se zarubljena kupa čija je površina omotača P = $r_2\pi S_2 - r_1\pi S_1$, $r_1 = f(x_{i-1})$, $r_2 = f(x_i)$.



Zamenom $S_2 = S_1\frac{r_2}{r_1}$ u donju jednačinu i sređivanjem izraza dobijamo $S_1 = \frac{r_1}{r_2-r_1}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(r_2-r_1)^2}$. Zamenom u početni izraz za površinu dobijamo P = $\pi(r_1 + r_2)\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(r_2-r_1)^2}$. Odavde je površina omotača svih zarubljenih kupa $\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{\Delta x_i^2+(f(x_{i-1})-f(x_i))^2}$. Očekivana definicija površine omotača obrtnog tela bi bila granična vrednost zbira ovih omotača kada λ(P) $\to$ 0. Ako izvučemo 2π to je

S = $\lim_{\lambda(P)\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\sqrt{1+(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i})^2}\Delta x_i$. Funkcija f je neprekidna na [x_{i-1}, x_i] pa na osnovu Bolcano-Košijeve teoreme postoji $c_i \in$ [f(x_{i-1}), f(x_i)] tako da je f(c_i) = $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$. Funkcija f je neprekidna na [x_{i-1}, x_i] i diferencijabilna na (x_{i-1}, x_i) pa na osnovu Lagranžove teoreme postoji $\mathcal{E}_i \in$ (x_{i-1}, x_i) tako da je $f'(\mathcal{E}_i)$ = $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$ = $\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}$. Odavde sledi S = $2\pi \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}$f($c_i$)$\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}\Delta x_i$.

Zapišimo sumu kao S = $2\pi \lim_{\lambda(P)\to 0}(\sum_{i=1}^{n}$f($\mathcal{E}_i$)$\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}\Delta x_i$ + $\sum_{i=1}^{n}$(f(c_i) - f($\mathcal{E}_i$))$\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}\Delta x_i$). S obzirom da je f glatka, funkcija f(x)$\sqrt{1+(f'(x))^2}$ je neprekidna na [a, b], a odatle i Riman integrabilna i važi:
$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}$f($\mathcal{E}_i$)$\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}\Delta x_i$ = $\int_a^b$f(x)$\sqrt{1+(f'(x))^2}$dx. Dokazaćemo da je drugi sabirak jednak nuli. Neka je $\mathcal{E}$ > 0. Funkcija $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ je neprekidna na [a, b], pa je na osnovu Vajerštrasove teoreme ograničena, to jest $\sqrt{1+(f'(x))^2} \leq$ M, za svako x $\in$ [a, b]. Funkcija f je neprekidna, pa je na osnovu Kantorove teoreme ravnomerno neprekidna na [a, b] i za $\frac{\mathcal{E}}{(b-a)M}$ postoji δ > 0 tako da za svako c_i, $\mathcal{E}_i \in$ [a, b] važi |c_i - $\mathcal{E}_i$| < $\delta \Rightarrow$ |f(c_i) - f($\mathcal{E}_i$)| < $\frac{\mathcal{E}}{(b-a)M}$.
Za svaku podelu P, ako je λ(P) < δ, onda je:
|$\sum_{i=1}^{n}$(f(c_i) - f($\mathcal{E}_i$))$\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}\Delta x_i$| $\leq \sum_{i=1}^{n}$|f(c_i) - f($\mathcal{E}_i$)|$\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}\Delta x_i$ < $\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathcal{E}}{(b-a)M}M\Delta x_i$ = $\frac{\mathcal{E}}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$ = $\mathcal{E}$.
Odavde $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}$(f($c_i$) - f($\mathcal{E}_i$))$\sqrt{1+(f'(\mathcal{E}_i))^2}\Delta x_I$ = 0, pa je:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Napomena: Ako je funkcija f data u parametarskom obliku x = x(t), y = y(t), t $\in$ [α, β], onda je površina omotača obrtnog tela S = $2\pi \int_\alpha^\beta$y(t)$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$dt

Primer: Izračunati zapreminu i površinu lopte poluprečnika r.

- Lopta se dobija rotacijom polukruga x^2 + y^2 = r^2 oko x-ose, to jest y = $\sqrt{r^2-x^2}$, pa je y' = -$\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$
- V = $\pi\int_{-r}^{r}$(r^2 - x^2)dx = π(r^2 · x$\Big|_{-r}^{r}$ - $\frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r}$) = ... = $\frac{4}{3}r^3\pi$
- P = $2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$ = $2r\pi$ · x$\Big|_{-r}^{r}$ = $4r^2\pi$

13. Nesvojstveni integral. Osobine. Primeri.

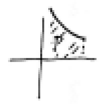
Do sada smo ispitivali da li postoji Rimanov integral funkcija koje su definisne na segmentu i ograničene. Proširićemo pojam integrala tako što ćemo posmatrati i funkcije koje nisu ograničene i funkcije koje su definisane na [a, b), (a, b) ili (a, b], gde su a, b $\in R\cup\{\pm\infty\}$.

Definicija: Neka je funkcija f definisana na [a, b), b $\in R$ i neka je f $\in R$[a, β] za svako $\beta \in$ (a, b). Granična vrednost $\lim_{\beta\to b_-}\int_a^\beta$f(x)dx naziva se **nesvojstveni integral** funkcije f na intervalu [a, b) i označava sa $\int_a^b$f(x)dx. Za tačku x = b kažemo da je **singularitet**. Ako postoji konačan takav limes kažemo da integral konvergira, a ako ne postoji onda integral divergira. U slučaju da je f $\in R$[a, b], Rimanov integral poklapa se sa definicijom nesvojstvenog integrala, to jest Rimanov integral je jednak nesvojstvenom za svaku Riman integrabilnu funkciju. Slično se definiše i nesvojstveni integral sa singularitetom u x = a: $\int_a^b$f(x)dx = $\lim_{\alpha\to a_+}\int_\alpha^b$f(x)dx za f $\in R[\alpha$, b] za svako $\alpha \in$ (a, b).

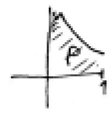
Primer: Ispitati konvergenciju $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ u zavisnosti od realnog parametra p.

- Ako je p $\leq$ 0, funkcija $\frac{1}{x^p}$ je neprekidna na [0, 1], pa je i Riman integrabilna, pa integral konvergira. U ovom slučaju nemamo singularitet. Ako je p > 0, funkcija $\frac{1}{x^p}$ nije definisana u x = 0, a neprekidna je na (0, 1]. Singularitet je x = 0. Potrebno je ispitati da li postoji $\lim_{\alpha\to 0_+}\int_\alpha^1\frac{1}{x^p}dx$. Važi:
$\int_\alpha^1\frac{1}{x^p}dx$ = $\begin{cases} lnx\Big|_\alpha^1 = -ln\alpha, p=1 \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_\alpha^1 = \frac{1}{1-p}(1-\alpha^{1-p}), p\in(0,1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$. Za p = 1, $\lim_{\alpha\to 0_+}-ln\alpha$ = +∞ pa nesvojstveni integral $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ divergira. Za p $\neq$ 1, $\lim_{\alpha\to 0_+}\int_\alpha^1\frac{1}{x^p}dx$ = $\lim_{\alpha\to 0_+}\frac{1}{1-p}(1-\alpha^{1-p})$ = $\begin{cases}\frac{1}{1-p}, p\in(0,1)\\ +\infty, p>1\end{cases}$, pa integral konvergira akko p $\in$ (0, 1). Dakle, $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ konvergira akko p < 1.
- Geometrijska interpretacija: S obzirom da je $\frac{1}{x^p}$ neprekidna na (0, 1], ona je i Riman integrabilna na svakom segmentu [α, 1] $\subset$ (0, 1]. Rimanov integral $\int_\alpha^1\frac{1}{x^p}dx$ možemo posmatrati kao površinu krivolinijskog trapeza. Konvergencija integrala je onda ekvivalentna egzistenciji granične vrednosti površine kada $\alpha \to 0_+$.

U SLUČAJU $p \in (0,1)$ POVRŠINA ISPOD GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE KONAČNA $P = \frac{1}{1-p}$

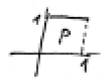


U SLUČAJU $p \geq 1$ POVRŠINA ISPOD GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE „BESKONAČNA".

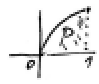


$P = +\infty$

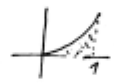
U SLUČAJU $p = 0$,



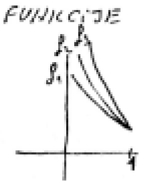
U SLUČAJU $p < 0$, $P = \frac{1}{1-p}$



ILI



DAKLE, AKO POSMATRAMO FUNKCIJE $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$, SVE TRI FUNKCIJE IMAJU SLIČNE GRAFIKE $(f_1 \leq f_2 \leq f_3)$



ISPOD GRAFIKA f_1 JE KONAČNA POVRŠINA, A ISPOD f_2 I f_3 JE BESKONAČNA

Definicija: Neka je f: [a, +∞) $\to R$ i f $\in R$[a, β] za svako $\beta \in$ (a, +∞). Granična vrednost $\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(x)dx$ naziva se **nesvojstveni integral** funkcije f na [a, +∞) i označava sa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Kažemo da je +∞ **singularitet.** Ako postoji konačan takav limes kažemo da integral konvergira, a ako ne postoji onda integral divergira. Slično se definiše i nesvojstveni integral funkcije f na (-∞, a], gde je -∞ singularitet.

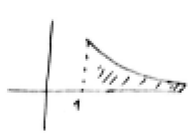
Primer: Ispitati konvergenciju $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

- Funkcija $\frac{1}{1+x^2}$ je definisana na [0, +∞) i Riman integrabilna na [0, β] za svako $\beta \in$ (0, +∞). Odavde $\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta\frac{dx}{1+x^2}$ = $\lim_{\beta\to+\infty}\arctan x\Big|_0^\beta$ = $\lim_{\beta\to+\infty}\arctan\beta$ = $\frac{\pi}{2}$, pa integral konvergira.

Primer: Ispitati konvergenciju $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ u zavisnosti od realnog parametra p.

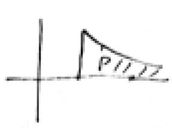
- Funkcija $\frac{1}{x^p}$ je neprekidna na [1, +∞) pa je Riman integrabilna na svakom segmentu [1, β], $\beta \in$ (1, +∞). Potrebno je ispitati da li postoji $\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^\beta\frac{1}{x^p}dx$. Važi $\int_1^\beta\frac{1}{x^p}dx$ = $\begin{cases} lnx\Big|_1^\beta = ln\beta, p = 1 \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^\beta = \frac{1}{1-p}(\beta^{1-p}-1), p \neq 1 \end{cases}$. Za p = 1, $\lim_{\beta\to+\infty} ln\beta$ = +∞, pa nesvojstveni integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ divergira. Za p $\neq$ 1, $\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{1-p}(\beta^{1-p}-1)$ = $\begin{cases}\frac{1}{p-1}, p > 1 \\ +\infty, p < 1\end{cases}$, pa integral konvervira akko p > 1. Dakle, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ konvergira akko p > 1.
- Geometrijska interpretacija: S obzirom da je $\frac{1}{x^p}$ neprekidna i pozitivna na [1, +∞), ona je i Riman integrabilna na svakom segmentu [1, β] $\subset$ [1, +∞). Rimanov integral $\int_1^\beta\frac{1}{x^p}dx$ možemo posmatrati kao površinu krivolinijskog trapeza. Konvergencija integrala je onda ekvivalentna egzistenciji granične vrednosti površine kada $\beta \to$ +∞.

U SLUČAJU $p > 1$ „POVRŠINA" ISPOD GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE KONAČNA



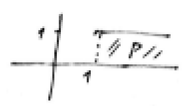
$P = \frac{1}{p-1}$

U SLUČAJU $p \in (0,1]$ „POVRŠINA" ISPOD GRAFIKA A IZNAD X-OSE JE „BESKONAČNA".



$P = +\infty$

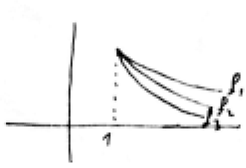
U SLUČAJU $p = 0$, $P = +\infty$



(IMAMO BESKONAČNU TRAKU)

U SLUČAJU $p < 0$, $P = +\infty$

DAKLE, AKO POSMATRAMO FUNKCIJE $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ I $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$, SVE TRI FUNKCIJE IMAJU SLIČNE GRAFIKE $(f_3 \leq f_2 \leq f_1)$



ISPOD GRAFIKA f_3 JE KONAČNA POVRŠINA, A ISPOD f_2 I f_1 JE BESKONAČNA.

Stav: Neka je funkcija f definisana na [a, +∞) i neka je Riman integrabilna na svakom segmentu [a, β], $\beta \in$ (a, ∞).

- Ako je $\lim_{x\to+\infty}$f(x) = $\pm\infty$, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergira.
- Ako je $\lim_{x\to+\infty}$f(x) = A $\neq$ 0, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergira.

Stav: Neka su f, g $\in$ R[a, β] za svako $\beta \in$ (a, +∞) i neka je b $\in \overline{R}$ singularitet integrala $\int_a^b f(x)dx$ i $\int_a^b g(x)dx$.

- Ako integrali $\int_a^b f(x)dx$ i $\int_a^b g(x)dx$ konvergiraju, onda je $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ = $\alpha \int_a^b f(x)dx$ + $\beta \int_a^b g(x)dx$, za svako α, $\beta \in R$.
- Neka je a < c < b. Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira akko $\int_c^b f(x)dx$ konvergira i važi $\int_a^b f(x)dx$ = $\int_a^c f(x)dx$ + $\int_c^b f(x)dx$
- Ako su f i g glatke i postoji konačan $\lim_{x\to b}$f(x)g(x), onda $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ konvergira akko $\int_a^b g(x)f'(x)dx$ konvergira i važi $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ = $f(x)g(x)\Big|_a^b$ - $\int_a^b g(x)f'(x)dx$

Napomena: Osobine stava važe i kada je donja granica singularitet.

Definicija:

- Neka je funkcija f definisana na (a, b), a < b, a može biti -∞ i b može biti +∞. Neka je f $\in$ R[α, β], za svako [α, β] $\subset$ (a, b). Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira ako konvergiraju integrali $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$ za neko c $\in$ (a, b).
- Neka je a < a_1 < ... < a_n < b i neka integral $\int_a^b f(x)dx$ ima singularitete u tačakama a, a_1, ..., a_n, b. Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira ako konvergiraju integrali $\int_a^{c_1} f(x)dx$, $\int_{c_1}^{a_1} f(x)dx$, $\int_{a_1}^{c_2} f(x)dx$, ..., $\int_{a_n}^{c_{n+1}} f(x)dx$ i $\int_{c_{n+1}}^b f(x)dx$, za neki izbor tačaka c_1, ..., c_{n+1}, gde važi a < c_1 < a_1 < c_2 < ... < a_n < c_{n+1} < b.

Primer: Ispitati konvergenciju $\int_{-\infty}^{+\infty}$e$^{-|x|}dx$.

- Singulariteti su -∞ i +∞, pa će početni integral konvergirati ako konvergiraju $\int_{-\infty}^0$e$^{-|x|}dx$ i $\int_0^{+\infty}$e$^{-|x|}dx$. Važi $\lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta$e$^{-|x|}dx$ = $\lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta$e$^{-x}dx$ = $\lim_{\beta\to+\infty}$(-e^{-x})$\Big|_0^\beta$ = $\lim_{\beta\to+\infty}$(-e$^{-\beta}$ + 1) = 1. Slično $\lim_{\beta\to-\infty} \int_\beta^0e^{-|x|}dx$ = 1, pa oba integrala konvergiraju, pa početni integral konvergira.

Primer: Ispitati konvergenciju $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ u zavisnosti od parametra p.

- Ako je p > 0, singulariteti su x = 0 i x = +∞, a ako je p $\leq$ 0, singularitet je +∞. Početni integral će konvergirati ako integrali I_1 = $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ i I_2 = $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ konvergiraju. Dokazali smo da I_1 konvergira akko p < 1, a I_2 konververa akko p > 1, pa početni integral divergira za svako p $\in$ R.

14. Kriterijumi konvergencije nesvojstvenog integrala.

Konvergenciju smo do sada ispitivali pomoću računanja granične vrednosti, a sada ćemo navesti neke kriterijume za konvergenciju. Podsetimo se Košijevog principa egzistencije limesa: Neka je ϕ: A $\to$ R i a je tačka nagomilavanja skupa A, tada postoji $\lim_{x\to a} \phi(x)$ akko ($\forall\mathcal{E}$ > 0) ($\exists$U(a)) ($\forall$x$'$, x$''$ $\in$ A) (x$'$, x$''$ $\in \mathring{U}$(a) $\Rightarrow$ |f(x$'$) - f(x$''$)| < $\mathcal{E}$).

- Ako a konačna vrednost, postoji $\lim_{x\to a^-} \phi(x)$ akko ($\forall\mathcal{E}$ > 0) ($\exists$$a_0$) ($\forall$x$'$, x$''$ $\in$ A) (x$'$, x$''$ $\in$ (a_0, a) $\Rightarrow$ |f(x$'$) - f(x$''$)| < $\mathcal{E}$).
- Ako je a = +∞, postoji $\lim_{x\to+\infty} \phi(x)$ akko ($\forall\mathcal{E}$ > 0) ($\exists$$a_0$) ($\forall$x$'$, x$''$ $\in$ A) (x$'$ > a_0, x$''$ > a_0 $\Rightarrow$ |f(x$'$) - f(x$''$)| < $\mathcal{E}$).

Teorema: Neka je f $\in$ R[a, β] za svako [a, β] $\subset$ [a, b) i neka je b $\in \overline{R}$ singularitet. Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira akko ($\forall\mathcal{E}$ > 0) ($\exists\beta_0$ $\in$ (a, b)) ($\forall\beta_1$, β_2 $\in$ (β_0, b)) (|$\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx$| < $\mathcal{E}$).

Stav: Neka je |f(x)| $\leq$ g(x) za svako x $\in$ [a, b). Ako $\int_a^b g(x)dx$ konvergira, onda i $\int_a^b f(x)dx$ konvergira. Geometrijska interpretacija: površina oblasti ispod |f| je manja od površine oblasti ispod g.

Definicija: Nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ apsolutno konvergira ako konvergira $\int_a^b |f(x)|dx$.

Posledica: Ako $\int_a^b f(x)dx$ apsolutno konvergira, onda $\int_a^b f(x)dx$ konvergira.

Primer: Ispitati konvergenciju integrala $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$.

- Važi |$\frac{\cos x}{x^2}$| $\leq$ $\frac{1}{x^2}$ za svako x $\geq$ 1. Integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ konvergira jer p > 2, pa na osnovu stava integral $\int_1^{+\infty} |\frac{\cos x}{x^2}|dx$ konvergira, pa na osnovu posledice integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ konvergira.

Stav: Neka su $\int_a^b f(x)dx$ i $\int_a^b g(x)dx$ nesvojstveni integrali sa singularitetom u b $\in R \cup$ {+∞} i neka 0 $\leq$ f(x) $\leq$ g(x) za svako x $\in$ [a, b). Ako $\int_a^b g(x)dx$ konvergira, onda i $\int_a^b f(x)dx$ konvergira. Ako $\int_a^b f(x)dx$ divergira, onda i $\int_a^b g(x)dx$ divergira.

Stav: Neka su I_1 = $\int_a^b f(x)dx$ i I_2 = $\int_a^b g(x)dx$ nesvojstveni singulariteti sa singularitetom u b $\in R \cup$ {+∞}, f(x) $\geq$ 0, g(x) > 0 za svako x $\in$ [a, b) i $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ = C, 0 $\leq$ C $\leq$ +∞.

- Ako je C < +∞, onda iz konvergencije I_2 sledi konvergencija I_1.
- Ako je C > 0, onda iz divergencije I_2 sledi divergencija I_1.
- Specijalno, ako je C $\in$ (0, +∞), onda I_1 konvergira akko I_2 konvergira.

Posledica: Neka su I_1 = $\int_a^b f(x)dx$ i I_2 = $\int_a^b g(x)dx$ nesvojstveni integrali sa singularitetom u b $\in R \cup$ {+∞}, f(x) $\geq$ 0, g(x) $\geq$ 0 za svako x $\in$ [a, b). Ako f ~ g kada x $\to$ b, onda su I_1 i I_2 ekvikonvergentni.

Primer: Ispitati konvergenciju integrala $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

- Funkcija je Riman integrabilna na [0, 1], a za svako x $\in$ [1, +∞) važi 0 $\leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Iz konvergencije $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ sledi konvergencija $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$, pa integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ konvergira.

Primer: Nesvojstveni integral koji konvergira, a ne konvergira apsolutno: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

- Za svako $\beta \in$ ($\frac{\pi}{2}$, +∞) važi $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{\sin x}{x}dx$ = $\begin{pmatrix} u = \frac{1}{x}, \ dv = \sin x dx \\ du = -\frac{dx}{x^2}, \ v = -\cos x \end{pmatrix}$ = -$\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\beta}$ - $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$. Dokazali smo da drugi integral konvergira i važi $\lim_{\beta \to +\infty} -\frac{\cos \beta}{\beta}$ = 0, pa $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ konvergira.
- Dokazaćemo da integral ne konvergira apsolutno. Važi $|\sin x| \geq \sin^2 x$ pa $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ = $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ - $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$. Prvi integral divergira jer 1 $\not>$ 1, a za drugi važi $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$ = $\begin{pmatrix} u = \frac{1}{x}, \ dv = \cos 2x dx \\ du = -\frac{dx}{x^2}, \ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix}$ = $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\beta}$ + $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{\sin 2x}{x^2}dx$. Integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{\sin 2x}{x^2}dx$ konvergira jer apsolutno konvergira, što se dokazuje slično kao za $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$, pa odatle sledi da $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$ konvergira, pa $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx$ divergira.

Primer: Nesvojstveni integral koji konvergira sa singularitetom u +∞, a ne važi $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ = 0: Frenelovi integrali I = $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ i J = $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

- Za x$'_n$ = $\sqrt{2n\pi} \to$ +∞ važi $\lim_{n \to +\infty} \sin x'_n$ = 0, a za x$''_n$ = $\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to$ +∞ važi $\lim_{n \to +\infty} \sin x''_n$ = 1, pa $\lim_{x \to +\infty} \sin x^2$ ne postoji. Slično važi i za $\lim_{x \to +\infty} \cos x^2$.
- Za svako $\beta \in$ (0, +∞) važi $\int_1^{\beta} \sin x^2 dx$ = $\begin{pmatrix} t = x^2 \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}$ = $\frac{1}{2}\int_1^{\beta^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$. Dokazaćemo da dobijeni integral konvergira. Neka je $\mathcal{E}$ > 0 proizvoljno. Za svako x, y $\in$ (0, +∞) $|\int_x^y \sin t dt|$ = $|\cos y$ - $\cos x| \leq$ 2. Iz $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}$ = 0, sledi da za $\frac{\mathcal{E}}{4}$ > 0 postoji $\beta_0 \in$ (1, +∞) tako da $\frac{1}{\sqrt{t}}$ < $\frac{\mathcal{E}}{4}$ za svako t > β_0. Prema drugoj teoremi o srednjoj vrednosti za β_0 < β' < β'' < b postoji n $\in$ [β', β''], f(x) = $\sin x$, g(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$, tako da važi $\int_{\beta'}^{\beta''} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ = $\frac{1}{\sqrt{\beta'}}\int_{\beta'}^{n} \sin x dx$ + $\frac{1}{\sqrt{\beta''}}\int_{n}^{\beta''} \sin x dx$. Odavde $|\int_{\beta'}^{\beta''} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx|$ < $\frac{\mathcal{E}}{4}$$\cdot$ 2 + $\frac{\mathcal{E}}{4}$$\cdot$ 2 = $\mathcal{E}$ pa integral konvergira.

Primer: Ispitati konvergenciju integrala u zavisnosti od realnih parametara α i β:

- $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$: Za α > 1 imamo $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}}{\frac{1}{x^\lambda}}$ = $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^{\alpha - \lambda}}$ = 0, $\lambda \in$ (1, α). Iz konvergencije integrala $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ i teoreme sledi da početni integral konvergira. Za α < 1 imamo $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}}{\frac{1}{x^\lambda}}$ = $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\lambda - \alpha}}{(\ln x)^\beta}$ = +∞, $\lambda \in$ (α, 1). Iz divergencije integrala $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ i teoreme sledi da početni integral divergira. Za α = 1 imamo $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ = $\begin{pmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{pmatrix}$ = $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$, pa početni integral konvergira ako β > 1. Konačno, početni integral konvergira akko α > 1 ili α = 1 i β > 1.
- $\int_1^e \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$: Za $\beta \leq$ 0 funkcija je neprekidna na [1, e] i integral konvergira. Za $\beta \geq$ 0 $\int_1^e \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ = $\begin{pmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{pmatrix}$ = $\int_0^1 \frac{e^t dt}{e^{\alpha t} t^\beta}$ = $\int_0^1 \frac{e^{(1-\alpha)t}dt}{t^\beta}$. Kada t $\to$ 0 važi $\frac{e^{(1-\alpha)t}dt}{t^\beta}$ ~ $\frac{1}{t^\beta}$ pa iz teoreme sledi da integral konvervira akko β < 1. Konačno, početni integral konvergira akko β < 1.
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$: Integral konvergira ako konvergiraju prethodna dva integrala, odnosno akko α > 1 i β < 1.

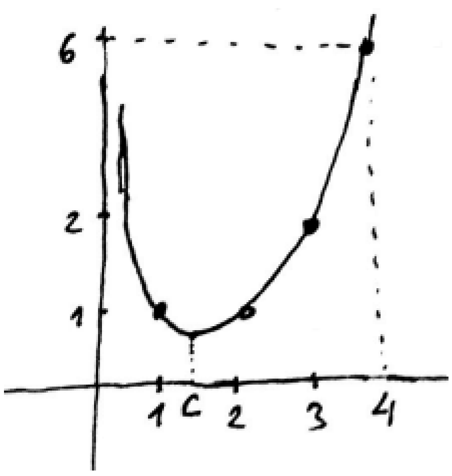
15. Gama i beta funkcije.

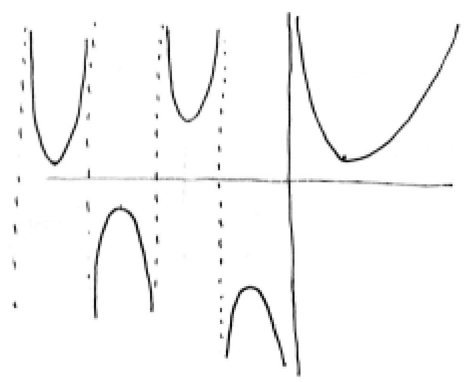
Posmatrajmo nesvojstveni integral $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ za realni parametar α. U slučaju da integral konvergira vrednost integrala zavisi od α, pa ćemo ga označiti sa $\Gamma(\alpha)$ i reći ćemo da je to **gama funkcija**.

Stav:

- Integral $\Gamma(\alpha)$ konvergira za $\alpha > 0$. Dakle, Γ: $(0, +\infty) \to R$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ za svako $\alpha > 1$
- $\Gamma(n) = (n - 1)!$ za svako $n \in N$

Na osnovu ovog stava gama funkciju možemo posmatrati kao produženje faktorijela sa skupa prirodnih brojeva na skup pozitivnih realnih brojeva. Može se dokazati da je $\Gamma(\alpha)$ beskonačno diferencijabilna na $(0, +\infty)$ i važi $\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x dx$, $n \in N$. Za $n = 2$ podintegralna funkcija je nenegativna, pa je $\Gamma(\alpha)$ konveksna na domenu. Funkcija $\Gamma(\alpha)$ je diferencijabilna na $(1, 2)$, neprekidna na $[1, 2]$ i važi $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, pa na osnovu Rolove teoreme postoji $c \in (1, 2)$ tako da je $\Gamma'(c) = 0$. Zbog konveksnosti funkcije $\Gamma(\alpha)$ tačka c je jedina nula funkcije $\Gamma'(\alpha)$. Važi $\lim_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha) = +\infty$, jer $\lim_{n\to+\infty}\Gamma(n) = +\infty$ i $\Gamma(\alpha) > \Gamma(n)$ za $\alpha > n$. Važi $\lim_{\alpha\to0^+}\Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha\to0^+}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = +\infty$. Grafik gama funkcije (dole levo) je:





S obzirom da je $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ za svako $\alpha > 1$, dovoljno je znati vrednosti gama funkcije na $(0, 1]$. Ako posmatramo jednakost $\Gamma(\alpha - 1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$, onda možemo dodefinisati funkciju i za negativne vrednosti. Dobijamo produženje $\overline{\Gamma}$: $R \setminus \{-n : n \in N\} \to R$, čiji je grafik gore desno.

Stav: Važe sledeće formule:

- **Ojler-Gausova formula**: $\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}$
- **Formula dopunjavanja**: $\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- **Stirlingova formula**: $\Gamma(\alpha) = \sqrt{2\pi}\cdot\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\alpha+\frac{\Theta(\alpha)}{12\alpha}}$, $\Theta(\alpha) \in (0, 1)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Posmatrajmo nesvojstveni integral $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ za realne parametre α i β. U slučaju da integral konvergira vrednost integrala zavisi od α i β, pa ćemo ga označiti sa $B(\alpha, \beta)$ i reći ćemo da je to **beta funkcija**.

Stav:

- Integral $B(\alpha, \beta)$ konvergira ako je $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$ za svako $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- $B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha - 1, \beta)$ za svako $\alpha > 1$, $\beta > 0$
- $B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt$
- $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ za $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- $B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ za $m, n \in N$
- $B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ za $\alpha \in (0, 1)$

16. Pojam beskonačnog reda. Konvergencija reda i osobine. Košijev kriterijum konvergencije. Lajbnicov kriterijum.

Neka je a_1, a_2, ... niz realnih brojeva. Posmatrajmo niz $(S_m)_{m=1}^{\infty}$:

$$S_1 = a_1, \; S_2 = a_1 + a_2, \; \ldots, \; S_m = a_1 + \ldots + a_m, \; \ldots$$

Definicija: Izraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zovemo **beskonačni red** sa opštim članom a_n, a niz $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ zovemo **niz parcijalnih suma** tog reda.

Definicija: Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako njegov niz parcijalnih suma konvergira. Ako je $\lim_{m\to\infty} S_m = S$, pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Ako niz parcijalnih suma ne konvergira (ne postoji ili divergira) kažemo da red divergira.

Primer (**Geometrijski red**): Neka je $a_1 \in R$ i $a_n = q \cdot a_{n-1}$, $q \in R$ geometrijski niz. Njegova parcijalna suma je $S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{m-1} = \begin{cases} m a_1, \; q = 1 \\ \frac{1-q^m}{1-q}, \; q \neq 1 \end{cases}$. Odavde $\lim_{m\to\infty} S_m = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, \; |q| < 1 \\ \infty, \; q \geq 1 \\ ne\ postoji, \; q \leq -1 \end{cases}$, pa red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira akko $|q| < 1$ i važi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$.

Primer: Neka je $a_n = (-1)^n$. Parcijalne sume su $S_1 = -1$, $S_2 = -1 + 1 = 0$, $S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$, $S_4 = 0$, ..., odnosno $S_m = \begin{cases} -1, \; m\ neparan \\ 0, \; m\ paran \end{cases}$. Niz parcijalni suma (S_m) ne konvergira, pa red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergira.

Napomena: Ako je niz (a_n) nenegativan, onda je niz parcijalnih suma rastući i konvergencija reda je ekvivalentna tome da li je suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ konačna ili beskonačna.

Definicija: Neka je dat red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Red $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ nazvaćemo **ostatkom reda** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ posle m-tog člana i označićemo ga sa r_m.

Stav: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira akko r_m konvergira za bilo koje m. U slučaju konvergencije važi $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$.

Teorema (**Košijev kriterijum za konvergenciju reda**): Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira akko

$$(\forall \mathcal{E} > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0 \; i \; p \in N) \; |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \mathcal{E}$$

Stav:

- Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konvergira, $c \in R$, pri čemu je $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergira, pri čemu je $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Posledica: Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi.

- Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, onda $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergira.
- Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiraju, onda ne možemo ništa reći uopšteno o konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Na primer, $a_n = n$, $b_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergira. Na primer, $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ konvergira.
- Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiraju i $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $n \in N$, onda i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergira.

Stav (**Neophodan uslov za konvergenciju reda**): Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Posledica: Ako niz (a_n) ne konvergira ka nuli, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Napomena: Neophodan uslov $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nije dovoljan.

Primer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

- Niz parcijalnih suma je $S_m = \ln(1 + \frac{1}{1}) + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ldots + \ln(1 + \frac{1}{m}) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{m+1}{m} = \ln(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{m+1}{m}) = \ln(m+1)$. Odavde $\lim_{m\to\infty} S_m = +\infty$ pa red divergira, iako $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$.

Definicija: **Redovi sa proizvoljnim članovima** su redovi kod kojih opšti član može biti promenljivog znaka.

Definicija: Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da **apsolutno konvergira** ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Stav: Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, onda on i konvergira.

Definicija: Red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$, $c_n \geq 0$ nazivamo **znakopromenljivi/alternativni/alternirajući red**.

Stav (**Lajbnicov kriterijum**): Ako niz c_n monotono teži nuli, onda red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ konvergira.

Definicija: Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da **uslovno konvergira**, ako konvergira, a ne konvergira apsolutno. Odnosno, ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira.

Primer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

- Opšti član je oblika $(-1)^n c_n$, $c_n = \frac{1}{n}$. Niz c_n monotono teži nuli pa na osnovu Lajbnicovog kriterijuma red konvergira. Red ne konvergira apsolutno jer $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, pa red uslovno konvergira.

17. Pozitivni redovi. Kriterijumi konvergencije pozitivnih redova.

Definicija: Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **red sa pozitivnim članovima** ako postoji $n_0 \in N$ tako da je $a_n \geq 0$ za svako $n \geq n_0$. Kod ovakvih redova parcijalne sume su neopadajuće, posle n_0-tog člana.

Stav: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa pozitivnim članovima konvergira akko je njegov niz parcijalnih suma ograničen.

Primer (**Harmonijski red**): Neka je dat red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Njegov niz parcijalnih suma je $S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$ i dokazaćemo da on divergira. Važi:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$
$$\ldots$$

Odnosno, $S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}) + ... + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + ... + \frac{1}{2^k}) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$. Odavde $\lim_{k\to\infty} S_{2^k} = +\infty$. Našli smo jedan podniz koji teži $+\infty$, a S_m je rastući niz, pa je $\lim_{m\to\infty} S_m = +\infty$, pa harmonijski red divergira.

Teorema: Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka je $a_n \leq b_n$ za svako $n \geq n_0$.

- Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Teorema: Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa pozitivnim članovima, neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, $0 \leq C \leq +\infty$ i $b_n > 0$ za svako $n \geq n_0$.

- Ako je $C < +\infty$, onda iz konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sledi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ako je $C > 0$, onda iz divergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sledi divergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Specijalno, ako je $C \in (0, +\infty)$, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira akko $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

Posledica: Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi sa pozitivnim članovima. Ako $a_n \sim b_n$, onda su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ekvikonvergentni.

Primer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n}$, $q > 1$. Važi $a_n = \frac{1}{1+q^n} \sim \frac{1}{q^n} = b_n$. Geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$ konvergira, pa na osnovu posledice i početni red konvergira.

Teorema (**Dalamberov kriterijum**): Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima.

- Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ za svako $n \geq n_0$, onda red konvergira.
- Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ za svako $n \geq n_0$, onda red divergira.
- Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, onda za $l > 1$ red divergira, a za $l \in [0, 1)$ red konvergira.

Napomena: Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, onda na osnovu Dalamberovog kriterijuma ne možemo ništa reći o konvergenciji reda.

Teorema (**Košijev kriterijum**): Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima.

- Ako je $\sqrt[n]{a_n} \leq$ q < 1 za svako n $\geq$ n_0, onda red konvergira.
- Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq$ 1 za svako n $\geq$ n_0, onda red divergira.
- Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ = l, onda za l > 1 red divergira, a za $l \in$ (0, 1) red konvergira.

Napomena: Ako je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ = 1, onda na osnovu Košijevog kriterijuma ne možemo ništa reći o konvergenciji reda.

Teorema (**Gausov kriterijum**): Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima i neka važi $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ = λ + $\frac{\mu}{n}$ + $\frac{Q_n}{n^{1+\mathcal{E}}}$, gde λ, $\mu \in R$, $\mathcal{E}$ > 0 i Q_n je ograničen niz. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira akko λ < 1 ili λ = 1 i μ < -1.

Primer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^p$ u zavisnosti od realnog parametra p.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ = $\frac{(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!})^p}{(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^p}$ = $(\frac{2n+1}{2n+2})^p$ = $\frac{(1+\frac{1}{2n})^p}{(1+\frac{1}{n})^p}$ = (1 + $\frac{1}{2n}$)^p(1 + $\frac{1}{n}$)$^{-p}$ = (1 + $\frac{p}{2n}$ + O($\frac{1}{n^2}$))(1 - $\frac{p}{n}$ + O($\frac{1}{n^2}$)) = 1 + $\frac{1}{n}$($\frac{p}{2}$ - p) + O($\frac{1}{n^2}$) = 1 - $\frac{p}{2}$ $\cdot$ $\frac{1}{n}$ + O($\frac{1}{n^2}$). Na osnovu Gausovog kriterijuma za λ = 1, μ = -$\frac{p}{2}$ red konvergira akko μ = -$\frac{p}{2}$ < -1, odnosno p > 2.

Teorema (**Integralni kriterijum**): Neka je funkcija f: [1, +∞) $\rightarrow$ R neprekidna, nenegativna i opadajuća. Red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira akko $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergira.

Primer: Ispitati konvergenciju reda:

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta \in R$. Neka je f: [2, +∞), f(x) = $\frac{1}{x(\ln x)^\beta}$. Za β > 0 funkcija je neprekidna, nenegativna i opadajuća, pa na osnovu integralnog kriterijuma red konvergira akko $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ konvergira. Važi $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ = $\begin{pmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{pmatrix}$ = $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$, pa integral konvergira akko β > 1. Za $\beta \leq$ 0 imamo $\frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ $\geq$ $\frac{1}{x}$ za x $\geq$ 2. Iz divergencije $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ sledi divergencija integrala $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. Konačno, red konvergira akko β > 1.
- $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^\gamma}$, $\gamma \in R$. Neka je f: [3, +∞), f(x) = $\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^\gamma}$. Za γ > 0 funkcija je neprekidna, nenegativna i opadajuća, pa na osnovu integralnog kriterijuma red konvergira akko $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^\gamma}$ konvergira. Važi $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^\gamma}$ = $\begin{pmatrix} \ln\ln x = t \\ \frac{dx}{x\ln x} = dt \end{pmatrix}$ = $\int_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$, pa integral konvergira akko γ > 1. Za $\gamma \leq$ 0 imamo $\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^\gamma}$ $\geq$ $\frac{1}{x\ln x}$ za x $\geq$ 3. Iz divergencije $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}$ sledi divergencija integrala $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^\gamma}$. Konačno, red konvergira akko γ > 1.

Na osnovu primera važi da $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta(\ln\ln n)^\gamma}$ konvergira akko (α, β, γ) leksikografski > (1, 1, 1), odnosno akko (α > 1) ili (α = 1 i β > 1) ili (α = 1, β = 1 i γ > 1).

18. Funkcionalni nizovi. Obična i ravnomerna konvergencija funkcionalnog niza.

Definicija: **Funkcionalni nizovi** su nizovi kod kojih su članovi funkcije.

Primer:

- Konstantan funkcionalan niz: a_n(x) = a(x), a: $A \rightarrow R$. To je niz a(x), a(x), a(x), ..., a(x).
- a_n: $R \rightarrow R$, a_n(x) = 2x + n. To je niz a_1(x) = 2x + 1, a_2(x) = 2x + 2, a_3(x) = 2x + 3, ..., a_n(x) = 2x + n.
- a_n: [0, +∞) $\rightarrow$ R, a_n(x) = x^n. To je niz a_1(x) = x, a_2(x) = x^2, a_3(x) = x^3, ..., a_n(x) = x^n.

Za svako $x_0 \in A$ možemo posmatrati numerički (brojni) niz $a_1(x_0)$, $a_2(x_0)$, $a_3(x_0)$, ..., odnosno $(a_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$.

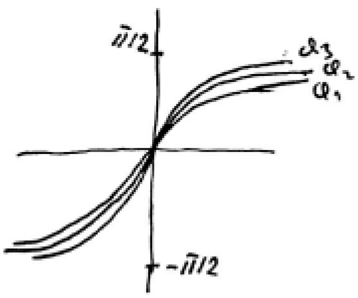
Definicija: Kažemo da funkcionalni niz a_n: $A \rightarrow R$, a_n(x) konvergira u tački $x_0 \in A$ ako niz $a_n(x_0)$ konvergira. Sada kod funkcionalnog niza a_n: $A \rightarrow R$, a_n(x) možemo izdvojiti skup $B \subset A$ na kojem funkcionalni niz konvergira u svakoj tački skupa B.

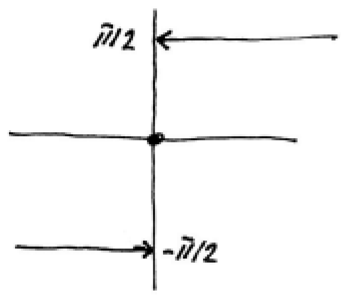
Primer: Neka je a_n: [0, +∞) $\rightarrow$ R, a_n(x) = x^n funkcionalni niz. Za $x_0 \in$ [0, 1) važi $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0)$ = $\lim_{n\to\infty} x_0^n$ = 0. Za x_0 = 1 važi $\lim_{n\to\infty} a_n(1)$ = $\lim_{n\to\infty} 1^n$ = 1. Za x_0 > 1 važi $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0)$ = $\lim_{n\to\infty} x_0^n$ = +∞. Funkcionalni niz konvergira u svakoj tački skupa B = [0, 1] $\subset$ [0, +∞). U ovom slučaju možemo definisati funkciju a: $B \rightarrow R$, a(x) = $\begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

Definicija: Funkcionalni niz a_n: $A \to R$, $a_n(x)$ **konvergira tačka po tačka** (**obično**) ka funkciji a: $B \to R$ na B, akko za svako $x_0 \in B$ važi $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0) = a(x_0)$. Pišemo $a_n \to a$ na B. Dakle, $a_n \to a$ na B akko
$(\forall\, x_0 \in B)$ $(\forall \mathcal{E} > 0)$ $(\exists\, n_0 \in N)$ $(\forall\, n \in N)$ $(n > n_0 \Rightarrow |a_n(x) - a(x)| < \mathcal{E})$.

Primer:

- Funkcionalni niz a_n: $[0, +\infty) \to R$, $a_n(x) = x^n$ konvergira tačka po tačka ka funkciji $a(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ na $[0, 1]$.
- Za funkcionalni niz a_n: $R \to R$, $a_n(x) = 2x + n$ važi da za svako $x_0 \in R$ $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}(2x_0 + n) = +\infty$, pa funkcionalni niz ne konvergira tačka po tačka ni ka jednoj funkciji ni na jednom skupu.
- Funkcionalni niz a_n: $R \to R$, $a_n(x) = \arctan nx$ konvergira tačka po tačka ka funkciji $a(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0 \end{cases}$ na R.





a(x)

Definicija: Funkcionalni niz a_n: $A \to R$, $a_n(x)$ **ravnomerno konvergira** ka funkciji a: $A \to R$ na A akko
$(\forall \mathcal{E} > 0)$ $(\exists\, n_0 \in N)$ $(\forall\, n \in N)$ $(\forall\, x \in A)$ $(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n(x) - a(x)| < \mathcal{E})$. Pišemo $a_n \rightrightarrows a$ na A. Odnosno, za svaki $\mathcal{E}$-pojas grafika funkcije a postoji član n_0 funkcionalnog niza tako da za sve članove posle njega važi da se grafici nalaze unutar $\mathcal{E}$-pojasa.

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Važi $a_n \to a$ akko $a_n - a \to 0$ akko $(\forall \mathcal{E} > 0)(\exists\, n_0 \in N)(\forall\, n \in N)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \mathcal{E})$. Sa $|a_n - a|$ možemo označiti razdaljinu između a_n i a, $d(a_n, a)$. Označimo tu razdaljinu sa $d(a, b) = |a - b|$. Važi:

- $d \geq 0$
- $d(a, b) = 0$ akko $a = b$
- simetričnost: $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) = |a - b| = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$

Neka su f, g: $A \to R$ funkcije. Razdaljinu između funkcija za neko x možemo definisati kao $d(f, g) = \sup_{x\in A}|f(x) - g(x)|$. Može se pokazati da su zadovoljene prethodne 4 osobine za d. Odavde važi $a_n \rightrightarrows a$ na A akko $a_n - a \rightrightarrows 0$ na A akko
$(\forall \mathcal{E} > 0)$ $(\exists\, n_0 \in N)$ $(\forall\, n \in N)$ $(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \mathcal{E})$ akko
$(\forall \mathcal{E} > 0)$ $(\exists\, n_0 \in N)$ $(\forall\, n \in N)$ $(n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in A}|a_n(x) - a(x)| < \mathcal{E})$ akko $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|a_n(x) - a(x)| = 0$.

Primer: Funkcionalni niz a_n: $(1, +\infty) \to R$, $a_n(x) = \arctan nx$ ravnomerno konvergira ka funkciji a: $(1, +\infty)$, $a(x) = \frac{\pi}{2}$ na $(1, +\infty)$.

- Neka je $\mathcal{E} \in (0, \frac{\pi}{2})$. Za $x = 1$ imamo $a_n(1) = \arctan n > \frac{\pi}{2} - \mathcal{E}$. Postoji $n_0 \in N$ ($n_0 = [\tan(\frac{\pi}{2} - \mathcal{E})] + 1$) tako da za svako $n \geq n_0$ $\arctan n > \frac{\pi}{2} - \mathcal{E}$, a odavde za svako $x \in [1, +\infty)$ $a_n(x) = \arctan nx > \frac{\pi}{2} - \mathcal{E}$ i $|\arctan nx - \frac{\pi}{2}| < \mathcal{E}$. Može se dokazati $a_n \rightrightarrows a$ na $(l, +\infty)$ za svako $l > 0$, gde su a_n i a definisane na $(l, +\infty)$.

Stav: Ako funkcionalni niz ravnomerno konvergira ka nekoj funkciji na nekom skupu, onda on i konvergira tačka po tačka ka toj funkciji na istom skupu. Obratno ne mora da važi, što pokazuje sledeći primer.

Primer: Neka je dat niz a_n: $[0, 1] \to R$, $a_n(x) = x^n$. Dokazali smo da niz obično konvergira ka funkciji $a(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ na $[0, 1]$. Na osnovu stava, a(x) je jedini kandidat za graničnu funkciju ravnomerne konvergencije. Posmatrajmo neki $\mathcal{E}$-pojas funkcije a. Ne postoji član n_0 tako da sve funkcije $a_n(x) = x^n$, $n \geq n_0$ imaju grafik unutar pojasa jer su a_n neprekidne. Na primer, za $\mathcal{E} = \frac{1}{3}$ važi da za svako $n_0 \in N$, ako posmatramo neprekidnu funkciju $a_{n_0}(x) = x^{n_0}$ postoji $x_0 \in [0, 1]$ tako da je $a_{n_0}(x_0) = \frac{1}{2}$, a $\frac{1}{2}$ ne pripada $\frac{1}{3}$-pojasu. Dakle važi:
$(\exists \mathcal{E} > 0)$ $(\forall\, n_0 \in N)$ $(\exists\, n \in N)$ $(\exists\, x_0 \in [0, 1])$ $(|a_n(x) - a(x)| \geq \mathcal{E})$. Može se dokazati da dati niz ravnomerno konvergira ka funkciji a(x) na $[0, l]$, $l < 1$.

Stav: Funkcionalni niz a_n: $A \to R$, $a_n(x)$ ravnomerno konvergira ka funkciji a: $A \to R$ na skupu A ako važi:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|a_n(x) - a(x)| = 0$$

Primer: Dokazali smo da funkcionalni niz a_n: $[0, 1] \to R$, $a_n(x) = x^n$ ne konvergira ravnomerno ka funkciji $a(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ na [0, 1]. Važi $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |a_n(x) - a(x)| = \lim_{n\to\infty} \max\left(\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0|,\ |1^n - 1|\right) = \lim_{n\to\infty} \max\left(\sup_{x\in[0,1)} x^n,\ 0\right) = \lim_{n\to\infty} \max(1,\ 0) = 1 \neq 0$. Niz ravnomerno konvergira ka funkciji a(x) na $[0, l]$, $l < 1$ jer važi $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,l]} |a_n(x) - a(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,l]} |x^n - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,l]} x^n = \lim_{n\to\infty} l^n = 0$.

Stav: Neka su f_n, g_n: $A \to R$ funkcionalni nizovi.

- Ako $f_n \rightrightarrows f$ i $g_n \rightrightarrows g$ na A, onda $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na A.
- Ako $f_n \rightrightarrows f$ na A i $\alpha \in R$, onda $\alpha f_n \rightrightarrows \alpha f$ na A.

Podsetimo se Košijevog kriterijuma konvergencije niza:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \; akko \; (\forall \mathcal{E} > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n, p \in N)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \mathcal{E})$$

Stav (**Košijev kriterijum ravnomerne konvergencije**): Funkcionalni niz a_n: $A \to R$ ravnomerno konvergira ka funkciji a: $A \to R$ na skupu A akko:

$$(\forall \mathcal{E} > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n, p \in N)(\forall x \in A)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p}(x) - a_n(x)| < \mathcal{E})$$

19. Funkcionalni redovi. Obična i ravnomerna konvergencija funkcionalnog reda. Vajerštrasov kriterijum.

Neka je $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... niz funkcija koje su definisane na A. Posmatrajmo sledeći niz funkcija $S_m(x)$:

$$S_1(x) = a_1(x),\ S_2(x) = a_1(x) + a_2(x),\ \ldots,\ S_m(x) = a_1(x) + \ldots + a_m(x),\ \ldots$$

Definicija: Funkcionalni niz $S_m(x)$ zovemo **niz parcijalnih suma** funkcionalnog niza $a_n(x)$, a izraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ zovemo **beskonačni funkcionalni red** sa opštim članom $a_n(x)$.

Definicija: Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **konvergira tačka po tačka** (**obično**) na skupu A ako njegov niz parcijalnih suma konvergira tačka po tačka na skupu A. Dakle, konvergencija tačka po tačka na skupu A je konvergencija reda u svakoj tački skupa A.

Stav: Ako funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konvergira tačka po tačka na skupu A, onda funkcionalni niz $a_n(x)$ konvergira tačka po tačka ka nuli na skupu A.

Primer: Ispitati običnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

- Za $x \geq 1$ i $x \leq -1$ niz x^n ne teži nuli, pa red ne konvergira tačka po tačka ni na jednom skupu koji ima neprazan presek sa $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Za $x \in (-1, 1)$ niz parcijalnih suma je $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} x^n = x + x^2 + \ldots + x^m = \frac{x - x^m}{1-x}$ koji konvergira ka $S(x) = \frac{x}{1-x}$. Dakle, funkcionalni red konvergira tačka po tačka ka funkciji $S(x) = \frac{x}{1-x}$ na (-1, 1).

Definicija: Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **ravnomerno konvergira** na A ako niz parcijalnih suma $S_m(x)$ ravnomerno konvergira na A.

Stav: Ako funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ravnomerno konvergira na skupu A, onda funkcionalni niz $a_n(x)$ ravnomerno konvergira ka nula funkciji na skupu A.

Primer: Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ne konvergira ravnomerno na [0, 1) jer smo dokazali da opšti član $a_n(x) = x^n$ konvergira ka $1 \neq 0$ na [0, 1). Ovo je primer reda koji obično konvergira na nekom skupu, a ne konvergira ravnomerno na istom tom skupu.

Stav: Ako funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ravnomerno konvergira na skupu A, onda on i konvergira tačka po tačka na istom tom skupu.

Teorema (**Košijev kriterijum ravnomerne konvergencije funkcionalnog reda**): Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ravnomerno konvergira na A akko

$$(\forall \mathcal{E} > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n, p \in N)(\forall x \in A)(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| < \mathcal{E})$$

Teorema (**Vajerštrasov kriterijum**): Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ funkcionalni red. Ako postoji niz C_n takav da je $|a_n(x)| \leq C_n$ za svako $x \in A$ i za svako $n \geq n_0$ brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)$ konvergira, onda funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ravnomerno konvergira na A.

20. Neprekidnost granične funkcije funkcionalnog niza i funkcionalnog reda. (Teorema o zameni mesta dva limesa. Teorema o zameni mesta limesa i sume.)

Neka je $a_n(x)$ funkcionalni niz sa neprekidnim funkcijama $a_n(x)$. Ako funkcionalni niz ravnomerno konvergira ka funkciji a(x), postavlja se pitanje da li je i granična funkcija a(x) neprekidna.

Teorema: Neka funkcionalni niz $a_n(x)$ ravnomerno konvergira ka a(x) na A. Neka postoje granične vrednosti $\lim_{x\to x_0} a_n(x)$ za svako $n \in N$, gde je x_0 tačka nagomilavanja skupa A. Tada postoji $\lim_{x\to x_0} a(x)$ i važi:

$$\lim_{x\to x_0} a(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x)$$

Posledica: Ako niz funkcija $a_n(x)$ neprekidnih u $x_0 \in A$, gde je x_0 tačka nagomilavanja skupa A, ravnomerno konvergira ka funkciji a(x) na A, onda je i granična funkcija a(x) neprekidna u x_0.

Primer: Dokazali smo da $a_n(x) = x^n$ ne konvergira ravnomerno na [0, 1], što možemo uraditi i primenom prethodne posledice. Niz $a_n(x)$ obično konvergira ka funkciji $a(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Niz funkcija $a_n(x)$ su neprekidne na [0, 1], dok a(x) ima prekid u x = 1, pa prema posledici $a_n(x)$ ne konvergira ravnomerno na [0, 1].

Posledica: Neka red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ravnomerno konvergira na A i neka u nekoj tački $x_0 \in A$ koja je tačka nagomilavanja skupa A postoji $\lim_{x\to x_0} a_n(x)$, za svako $n \in N$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x)$ konvergira i važi:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x)$$

Kažemo da limes i suma mogu zameniti mesta. U prethodnoj posledici naveli smo dovoljne uslove da limes i suma mogu zameniti mesta, ali oni nisu neophodni, što pokazuje sledeći primer.

Primer: Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} 2x(n^2e^{-n^2x^2} - (n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2})$ funkcionalni red. Niz parcijalnih suma je $S_m(x) = 2xm^2e^{-m^2x^2}$ i važi $\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \lim_{m\to\infty} 2x\frac{m^2}{e^{m^2x^2}} = 0$ za svako $x \in R$. Dakle, $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \lim_{x\to x_0} 0 = 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_0(n^2e^{-n^2x_0^2} - (n-1)^2e^{-(n-1)^2x_0^2}) = 0$, odnosno $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n(x)$. Međutim, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ne konvergira ravnomerno na R, jer $\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in R} |S_m(x) - S(x)| = \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in R} |2xm^2e^{-m^2x^2}| = \lim_{m\to\infty} m\sqrt{2e} = +\infty$. Iskoristili smo S(x) = 0, a supremum smo našli preko $S'_m(x)$.

21. Integrabilnost granične funkcije funkcionalnog niza i funkcionalnog reda. (Teorema o zameni mesta limesa i integrala. Teorema o zameni mesta sume i integrala.)

Teorema: Neka je $f_n\colon [a, b] \to R$ niz Riman integrabilnih funkcija. Ako $f_n \rightrightarrows f$ na [a, b], onda je i $f \in R[a, b]$ i važi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Naveli smo dovoljan uslov da limes i integral zamene mesta.

Primer: Neka je dat funkcionalni niz $a_n(x) = 2xn^2e^{-n^2x^2}$ na [0, 1]. Važi $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2x\frac{n^2}{e^{n^2x^2}} = 0$ za svako $x \in [0, 1]$ i $\int_0^1 a_n(x)dx = \int_0^1 2xn^2e^{-n^2x^2}dx = \begin{pmatrix} t = -n^2x^2 \\ dt = -2n^2xdx \end{pmatrix} = \int_0^{-n^2} e^t(-dt) = e^t\Big|_{-n^2}^{0} = 1 - e^{-n^2}$. Odavde $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}(1 - e^{-n^2}) = 1$ i $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$, pa na osnovu teoreme $a_n(x)$ ne konvergira ravnomerno na [0, 1].

Posledica: Neka je $f_n \in R[a, b]$ za svako $n \in N$. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ravnomerno konvergira na [a, b] tada je i suma Riman integrabilna i važi:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Naveli smo dovoljne uslove da integral i suma zamene mesta, odnosno da možemo integraliti član po član, ali oni nisu neophodni, to jest nekada se može integraliti član po član iako funkcionalni red ne konvergira ravnomerno.

Primer: Neka je $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ funkcionalni red. Red ne konvergira obično u x = 1, pa ne konvergira ravnomerno na [0, 1]. Funkcije $f_n(x) = (-1)^n x^n$ su Riman integrabilne na [0, 1] i važi $\int_0^1 (-1)^n x^n dx = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Suma je funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x}$ definisana na [0, 1], koja je Riman integrabilna na [0, 1] i važi $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Imamo $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. Poslednja jednakost važi jer smo na Analizi 1 dokazali $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ za $x \in (-1, 1)$. Ovde smo formulu iskoristili za x = 1, a dokazaćemo da ona važi i za x = 1 kod stepenih redova. Dakle, $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

22. Diferencijabilnost granične funkcije funkcionalnog niza i funkcionalnog reda. (Teorema o zameni mesta izvoda i limesa. Teorema o zameni mesta izvoda i sume.)

Teorema: Neka je $f_n: [a, b] \to R$ niz diferencijabilnih funkcija. Ako niz $f_n(x)$ konvergira obično za neko $x_0 \in [a, b]$ i niz $f_n'(x)$ ravnomerno konvergira na [a, b], onda i $f_n \rightrightarrows f$ na [a, b], gde je f diferencijabilna i važi:

$$f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Posledica: Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcionalni red gde su f_n diferencijabilne na [a, b]. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira bar u jednoj tački $x_0 \in [a, b]$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ ravnomerno konvergira na [a, b], onda red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ravnomerno konvergira na [a, b], njegova suma je diferencijabilna na [a, b] i važi:

$$(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),\ za\ svako\ x \in [a, b]$$

Naveli smo dovoljne uslove da izvod i suma mogu zameniti mesta, odnosno da se može diferencirati član po član.

23. Pojam stepenog reda. Radijus konvergencije stepenog reda. Koši-Adamarova formula.

Stepeni redovi su funkcionalni redovi kod kojih je $a_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, gde je (a_n) niz realnih brojeva i $x_0 \in R$. Dakle, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je stepeni red. **Oblast konvergencije** stepenog reda je D = {$x \in R$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergira}. Neka je R = sup{$|x - x_0|$: $x \in D$} **radijus konvergencije** stepenog reda, $0 \le R \le +\infty$.

Stav: Stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ **apsolutno konvergira** za svako $x \in R$ za koje je $|x - x_0| < R$, a divergira za svako $x \in R$ za koje je $|x - x_0| > R$.

Specijalni slučajevi su R = 0, kada stepeni red apsolutno konvergira u x_0, a divergira za svako $x \neq x_0$ i R = +∞ kada stepeni red apsolutno konvergira u svakoj tački. U slučaju kada je $R \in (0, +\infty)$ stepeni red apsolutno konvergira na $(x_0 - R, x_0 + R)$, a divergira na $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$. Ne možemo ništa reći o konvergenciji u tačkama $x_0 - R$ i $x_0 + R$.

Teorema (**Koši-Adamarova formula**): Radijus konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

pri čemu je R = 0 ako je limes iz imenioca +∞, odnosno +∞ ako je limes 0.

Posledica: Radijus konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|,$$

ako limesi postoje.

Primer: Naći oblast konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty}(2 + (-1)^n)^n x^n$.

- Imamo $a_n = (2 + (-1)^n)^n$ i $x_0 = 0$. Niz $2 + (-1)^n$ ima tačke nagomilavanja 1 i 3, pa je $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\, 2 + (-1)^n = 3$, pa je $R = \frac{1}{3}$. Stepeni red apsolutno konvergira na $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, a divergira na $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$. Za $x = \pm\frac{1}{3}$ imamo da opšti član ne teži nuli jer važi $a_{2n}x^{2n} = (2 + (-1)^{2n})^{2n} \cdot (\pm\frac{1}{3})^{2n} = 3^{2n} \cdot \frac{1}{3^{2n}} = 1 \nrightarrow 0$.

Neka je funkcija f beskonačno diferencijabilna u okolini tačke x_0. **Tejlorov red** funkcije f u okolini tačke x_0 je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Ako je x_0 = 0, onda je to **Maklorenov red**. Funkcija f ne mora biti jednaka Tejlorovom redu. Moguće je i da Tejlorov red divergira u nekim tačkama u kojima je funkcija definisana. Za funkciju koja je jednaka Tejlorovom redu u okolini tačke x_0 kažemo da je **analitička** u toj okolini.

Primer: Funkcija f(x) = $\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ je beskonačno diferencijabilna i važi $f^{(n)}(0)$ = 0 za svako n $\in N$, odakle je Tejlorov red u okolini tačke x_0 = 0 identički jednak nuli i razlikuje se od funkcije f.

24. Ravnomerna konvergencija stepenog reda. Abelova teorema. Razvoj nekih elementarnih funkcija u stepeni red.

Stav: Neka stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ima radijus konvergencije R > 0. Tada stepeni red ravnomerno konvergira na [-r, r] za svako r $\in$ (0, R).

Napomena: Stepeni red ravnomerno konvergira na [-r, r], r < R, pri čemu ne mora ravnomerno da konvergira na (-R, R). Na primer, stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ne konvergira ravnomerno na (-1, 1).

Posledica: Funkcija f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je neprekidna na (-R, R), za R > 0.

Posledica: Ako su funkcije f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i g(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ jednake u okolini tačke x_0 = 0, onda je a_n = b_n za svako n $\geq$ 0.

Teorema (**Abelova teorema**): Ako stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa R > 0 konvergira u x = R, onda on ravnomerno konvergira na [α, R] za svako $\alpha \in$ (-R, R) i njegova suma je neprekidna sleva u x = R, to jest:

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Lema: Ako je realna funkcija f beskonačno diferencijabilna na segmentu [x_0 - h, x_0 + h] i postoji konstanta M, takva da za svako n $\in N$ i svako x $\in$ [x_0 - h, x_0 + h] važi $|f^{(n)}(x)| \leq$ M, tada je $\lim_{n \to \infty} R_n(x)$ = 0 za svako x $\in$ [x_0 - h, x_0 + h]. Odnosno, ostatak Tejlorovog razvoja je nula, to jest $\lim_{n \to \infty} T_n(x, x_0)$ = f(x).

Sledeće funkcije razvićemo u stepeni red u okolini tačke x_0 = 0, odnosno jednake su Maklorenovom redu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

1. f(x) = e^x je beskonačno diferencijabilna, $f^{(n)}(x)$ = e^x, $f^{(n)}(0)$ = 1, Maklorenov red je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
   Za x $\in$ [0 - h, 0 + h] = [-h, h] važi $|f^{(n)}(x)|$ = $e^x \leq e^h$ = M za svako n $\in N$. Na osnovu leme $\lim_{n \to \infty} R_n(x)$ = 0 za svako x $\in$ [-h, h], odnosno f(x) = e^x = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ za svako x $\in R$, jer ako fiksiramo x možemo naći h takvo da je x $\in$ [-h, h]. Radijus konvergencije je R = $\lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ = $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}$ = $\lim_{n \to \infty}(n+1)$ = +∞. Stepeni red apsolutno konvergira na (-∞, +∞) i ravnomerno konvergira na [α, β] za svako -∞ < α < β < +∞.
2. f(x) = $\sin x$, $|f^{(n)}(x)| \leq$ 1 za svako x $\in R$ i n $\in N$, Maklorenov red je $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Na osnovu leme f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ za svako x $\in R$. Radijus je R = $\lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ = $\lim_{n \to \infty} |\frac{(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}}{(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+3)!}}|$ = $\lim_{n \to \infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$ = $\lim_{n \to \infty}(2n+3)(2n+2)$ = +∞. Stepeni red apsolutno konvergira na (-∞, +∞) i ravnomerno konvergira na [α, β] za svako -∞ < α < β < +∞.
3. f(x) = $\cos x$, $|f^{(n)}(x)| \leq$ 1 za svako x $\in R$ i n $\in N$, Maklorenov red je $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Na osnovu leme f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ za svako x $\in R$. Slično kao i za $\sin x$, radijus je R = +∞. Stepeni red apsolutno konvergira na (-∞, +∞) i ravnomerno konvergira na [α, β] za svako -∞ < α < β < +∞.
4. f(x) = $\ln(1+x)$, Maklorenov red je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Može se pokazati da je f(x) = $\ln(1+x)$ = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ za x $\in$ (-1, 1). Stepeni red apsolutno konvergira na (-1, 1) i ravnomerno konvergira na [α, β] za svako -1 < α < β < 1. Stepeni red konvergira u x = 1 na osnovu Lajbnicovog kriterijuma. Na osnovu Abelove teoreme red ravnomerno konvergira na [0, 1], odnosno na [α, 1] za svako $\alpha \in$ (-1, 0) i njegova suma je neprekidna sleva u x = 1: $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ = $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1^n}{n}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ i $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ = $\lim_{x \to 1^-} \ln(1+x)$ = $\ln 2$. Odavde $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ = $\ln 2$ i $\ln(1+x)$ = $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ za x $\in$ (-1, 1].
5. f(x) = $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in R \setminus N_0$, Maklorenov red je $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\binom{\alpha}{0}$ = 1, $\binom{\alpha}{n}$ = $\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$ za n $\in N$. Radijus konvergencije je R = $\lim_{n \to \infty} |\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}}|$ = $\lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ = $\lim_{n \to \infty} |\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}}|$ = $\lim_{n \to \infty} |\frac{n+1}{\alpha-n}|$ = 1. Može se pokazati da je f(x) = $(1+x)^\alpha$ = $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ za x $\in$ (-1, 1). Stepeni red apsolutno konvergira na (-1, 1) i ravnomerno konvergira na [α, β] za svako -1 < α < β < 1. Ispitajmo konvergenciju u x = 1 i x = -1.

Važi $|\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ = $\frac{n+1}{n-\alpha}$ = (1 + $\frac{1}{n}$)(1 - $\frac{\alpha}{n}$)$^{-1}$ = (1 + $\frac{1}{n}$)(1 + $\frac{\alpha}{n}$ + O($\frac{1}{n^2}$)) = 1 + $\frac{\alpha+1}{n}$ + O($\frac{1}{n^2}$). Na osnovu Gausovog kriterijuma za α > 0 red $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ apsolutno konvergira. Za $\alpha \in$ (-1, 0) važi $|a_n|$ > $|a_{n+1}|$ i $\binom{\alpha}{n}$ = $(-1)^n\frac{(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)...(1-\alpha)\alpha}{n!}$ = C_n. Zatim $\lim_{n\to\infty} e^{\ln C_n}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{\ln(1-\frac{\alpha+1}{n})+\ln(1-\frac{\alpha+1}{n-1})+...+\ln(1-\frac{\alpha+1}{2})}$ = $e^{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{\alpha+1}{k})}$ = 0 jer $\sum_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{\alpha+1}{k})$ divergira. Dokazali smo $\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}$ = 0 i $|\binom{\alpha}{n}|$ > $|\binom{\alpha}{n+1}|$ pa prema Lajbnicu red $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ konvergira. Red $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$ je pozitivan i važi $\frac{dn}{dn+1}$ = 1 + $\frac{1+\alpha}{n}$ + O($\frac{1}{n^2}$), dn = $(-1)^n\binom{\alpha}{n}$, pa na osnovu Gausovog kriterijuma (1 + α < 1) red divergira. Za α = -1, $\binom{-1}{n}$ = $(-1)^n$ i redovi $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$ divergiraju. Za α < -1, iz $|a_n|$ < $|a_{n+1}|$ sledi da $\binom{\alpha}{n} \nrightarrow$ 0, pa redovi $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$ divergiraju. Dokazali smo da red $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ u x = 1 apsolutno konvergira za α > 0, uslovno konvergira za $\alpha \in$ (-1, 0) i divergira za $\alpha \leq$ -1, a u x = -1 apsolutno konvergira za α > 0 i divergira za α < 0. Koristeći Abelovu teoremu dobijamo da za α > 0 $(1+x)^\alpha$ = $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ za svako x $\in$ [-1, 1], za $\alpha \in$ (-1, 0) $(1+x)^\alpha$ = $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ za svako x $\in$ (-1, 1] i za $\alpha \leq$ 1 $(1+x)^\alpha$ = $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ za svako x $\in$ (-1, 1).

Primer: Razviti funkciju f(x) = $\arcsin x$ u stepeni red.

- Domen funkcije je [-1, 1]. Znamo da je $f'(x)$ = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ = $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ za svako x $\in$ [-1, 1]. Znamo da je (1 + t)$^\alpha$ = $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}t^n$, za t $\in$ (-1, 1), a ako je x $\in$ (-1, 1), onda je i t = -x^2 $\in$ (-1, 1) i važi $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$ = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}$. Za n = 0 $\binom{-\frac{1}{2}}{0}$ = 1, a za n $\geq$ 1 $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ = $\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$ = $\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(-\frac{2n-1}{2})}{n!}$ = $\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$. Odavde $f'(x)$ = $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = 1 + $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}$ = 1 + $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}$ za x $\in$ (-1, 1). $f'(x)$ je neprekidna na (-1, 1) pa možemo primeniti Njutn-Lajbnicovu formulu: $\int_0^x f'(t)dt$ = f(x) - f(0), odnosno f(x) = f(0) + $\int_0^x f'(t)dt$ za svako x $\in$ (-1, 1), pri čemu važi f(0) = $\arcsin 0$ = 0. Odavde je f(x) = $\int_0^x(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^{2n})dt$ = x + $\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^{2n}dt$. Radijus konvergencije stepenog reda je R = $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ = $\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}}{\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}}|$ = $\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n+1}$ = 1, pa stepeni red apsolutno konvergira na (-1, 1) i ravnomerno konvergira na [0, x]. Odavde sledi da se stepeni red može integraliti član po član i važi $\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^{2n}dt$ = $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^{2n}dt$ = $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x$ = $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, odakle je f(x) = $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$ za svako x $\in$ (-1 ,1). Za x = 1 imamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}$. Važi $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ = $\frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}}{\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}}$ = $\frac{2(n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)}$ = $\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}$ = $(1+\frac{5}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{n^2})(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4}\frac{1}{n^2})^{-1}$ = $(1+\frac{5}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2}))$ = $1+\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}+O(\frac{1}{n^2})$. Važi λ = 1, μ = $\frac{3}{2}$ > 1 pa prema Gausovom kriterijumu red konvergira za x = 1. Za x = -1 red konvergira, jer apsolutno konvergira. Na osnovu Abelove teoreme stepeni red ravnomerno konvergira na [-1, 1] i razvoj važi za svako x $\in$ [-1, 1], odnosno $\arcsin x$ = $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$.

25. Pred-Hilbertov prostor. Koši-Švarcova nejednakost i nejednakost Minkovskog. Pitagorina teorema. Ortonormiran sistem. Furijeovi koeficijenti i Furijeov red.

Neka je X realni vektorski prostor. X zadovoljava sledeće aksiome:

1. **asocijativnost**: u + (v + w) = (u + v) + w, $\forall$ u, v, w $\in$ X
2. **komutativnost**: u + v = v + u, $\forall$ u, v $\in$ X
3. **neutralni element**: ($\exists$ o $\in$ X) u + o = u, $\forall$ u $\in$ X
4. **inverz**: ($\forall$ u $\in$ X)($\exists$ u^{-1} $\in$ X) u + u^{-1} = o, u^{-1} označavamo sa -u
5. **usklađenost sa množenjem skalara**: a(bu) = (ab)u, $\forall$ a, b $\in R$, $\forall$ u $\in$ X
6. **neutral za množenje skalarom**: 1 $\cdot$ u = u, $\forall$ u $\in$ X, 1 $\in R$
7. **distributivnost množenja skalara u odnosu na sabiranje vektora**: a(u + v) = au + av, $\forall$ a $\in R$, $\forall$ u, v $\in$ X
8. **distributivnost množenja skalara u odnosu na sabiranje skalara**: (a + b)u = au + bu, $\forall$ a, b $\in R$, $\forall$ u $\in$ X

Definicija: Funkcija <$\cdot$, $\cdot$>: X $\times$ X $\to R$ naziva se **skalarni proizvod** na X ako za svako x, y, z $\in$ X i svako $\lambda \in R$ važi:

1. <x, y> = <y, x>
2. <λx, y> = λ<x, y>
3. <x + y, z> = <x, z> + <y, z>
4. <x, x> $\geq$ 0
5. <x, x> = 0 akko x = 0

Za svako $\lambda \in R$ i za svako x, y $\in$ X važi 0 $\leq$ <λx + y, λx + y> = λ^2<x, x> + 2λ<x, y> + <y, y>. Diskriminanta nije pozitivna (2<x, y>)^2 - 4<x, x><y, y> $\leq$ 0, odnosno važi **Koši-Švarcova nejednakost**: <x, y>^{2} $\leq$ <x, x><y, y> za svako x, y $\in$ X. Za svako x, y $\in$ X važi 0 $\leq$ <x + y, x + y> = <x, x> + 2<x, y> + <y, y> $\leq$ <x, x> + 2|<x, y>| + <y, y> $\leq$ <x, x> + 2$\sqrt{< x, x >< y, y >}$ + <y, y> = ($\sqrt{< x, x >}$ + $\sqrt{< y, y >}$)^2, odnosno važi **nejednakost Minkovskog**: $\sqrt{< x+y, x+y >} \leq \sqrt{< x, x >} + \sqrt{< y, y >}$.

U svakom prostoru X sa skalarnim proizvodom <·, ·> možemo uvesti funkciju ||·||: X $\to$ [0, +∞) pomoću ||x|| = $\sqrt{<x, x>}$. Ovu funkciju nazivamo **normom** i ona zadovoljava sledeće osobine:

- ||x|| = 0 akko x = 0
- ||λx|| = |λ| · ||x||, $\forall \lambda \in R$, $\forall$ x $\in$ X
- ||x + y|| $\leq$ ||x|| + ||y||

Prve dve osobine su posledice osobina skalarnog proizvoda, a treća osobina je posledica nejednakosti Minkovskog.

Definicija: **Pred-Hilbertov prostor** (realan) je realni vektorski prostor sa skalarnim proizvodom.

Primer:

- X = R^n = {(x$_1$, ..., x$_n$): x$_1$, ..., x$_n$ $\in R$} = $R \times \ldots \times R$ i <x, y> = $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ za x = (x$_1$, ..., x$_n$), y = (y$_1$, ..., y$_n$) $\in$ X. Može se dokazati da važe osobine 1) - 5) i da je (R^n, <·, ·>) pred-Hilbertov prostor. U njemu važi Koši-Švarcova nejednakost: $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2$, odnosno $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$. Važi nejednakost Minkovskog: $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$. Norma u R^n je ||(x$_1$, ..., x$_n$)|| = $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
- X = l^2 = {(x$_n$)$_{n=1}^\infty$: $\sum_{i=1}^\infty x_i^2$ < +∞} i <x, y> = $\sum_{i=1}^\infty x_i y_i$ za x = (x$_n$)$_{n=1}^\infty$, y = (y$_n$)$_{n=1}^\infty$ $\in l^2$. Može se dokazati da važe osobine 1) - 5) i da je (l^2, <·, ·>) pred-Hilbertov prostor. U njemu važi Koši-Švarcova nejednakost: $|\sum_{i=1}^\infty x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^\infty x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^\infty y_i^2}$. Važi nejednakost Minkovskog: $\sqrt{\sum_{i=1}^\infty (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^\infty x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^\infty y_i^2}$. Norma u l^2 je ||(x$_n$)$_{n=1}^\infty$|| = $\sqrt{\sum_{i=1}^\infty x_i^2}$.

Definicija: Za vektore x, y $\in$ X u pred-Hilbertovom prostoru kažemo da su **ortogonalni** ako je <x, y> = 0.

Stav: Ako su vektori x$_1$, ..., x$_n$ $\in$ X u pred-Hilbertovom prostoru međusobno ortogonalni onda važi **Pitagorina teorema**:

$$||\sum_{i=1}^n x_i|| = \sum_{i=1}^n ||x_i||^2$$

Definicija: Za sistem vektora $\{l_i \mid i \in J\}$ u pred-Hilbertovom sistemu X kažemo da je **ortonormiran** (**ONS**) ako je <l_i, l_j> = $\begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$.

Primer:

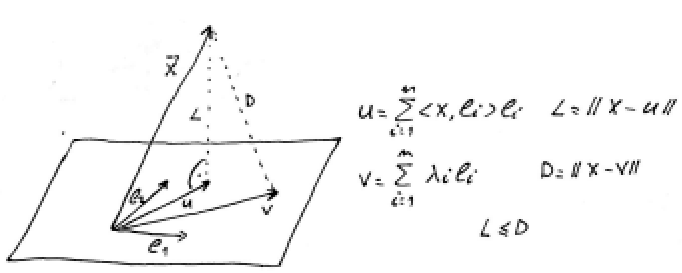
- U pred-Hilbertovom prostoru (R^n, <·, ·>) imamo ONS l_1 = (1, 0, ..., 0), l_2 = (0, 1, ..., 0), ..., l_n = (0, 0, ..., 1).
- U pred-Hilbertovom prostoru (l^2, <·, ·>) imamo ONS {l_i | $i \in N$}, l_1 = (1, 0, 0, ...), l_2 = (0, 1, 0, ...), ..., l_n = (0, 0, 0, ..., 1, 0, ...), ...

Definicija: Neka je X beskonačnodimenzioni pred-Hilbertov prostor i {l_1, ..., l_n, ...} je ortonormiran niz vektora u njemu. Za brojeve α_n = <x, l_n>, n $\in N$ kažemo da su **Furijeovi koeficijenti** vektora x u odnosu na niz. Za red $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n l_n$ = $\sum_{n=1}^\infty < x, l_n > l_n$ kažemo da je **Furijeov red** vektora x u odnosu na niz.

26. Aproksimacija vektora u pred-Hilbertovom prostoru. Beselova nejednakost. Konvergencija u pred-Hilbertovom prostoru i neprekidnost skalarnog proizvoda. Potpuno ortonormirani sistemi.

Stav: Neka je {l_1, l_2, ...} ortonormirani niz vektora u pred-Hilbertovom prostoru X i x $\in$ X. Od svih linearnih kombinacija $\sum_{i=1}^n \lambda_i l_i$, za unapred dat n $\in N$, vektor x najbolje aproksimira n-ta parcijalna suma Furijeovog reda $\sum_{i=1}^n < x, l_i > l_i$, to jest:

$$||x - \sum_{i=1}^n < x, l_i > l_i|| \leq ||x - \sum_{i=1}^n \lambda_i l_i||, \ \forall n \in N, \ \forall \lambda_i \in R$$



Stav (**Beselova nejednakost**): Neka je $\{l_1, l_2, ...\}$ ortonormirani niz vektora u pred-Hilbertovom prostoru X i x $\in$ X. Tada važi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} < x, l_i >^2 \ \leq \ ||x||^2$$

Posledica: Red $\sum_{i=1}^{\infty} < x, l_i >^2$ konvergira i niz Furijeovih koeficijenata <x, l_i> teži nuli.

Definicija: Neka je X pred-Hilbertov prostor. Kažemo da niz vektora $x_n \in$ X konvergira ka vektoru x $\in$ X ako važi $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||$ = 0 i pišemo $\lim_{n\to\infty} x_n$ = x.

Primer:

- Ako je X = R konvergencija vektora je poznata konvergencija realnih brojeva.
- Ako je X = R^k sa skalarnim proizvodom <(a_1, ..., a_k), (b_1, ..., b_k)> = a_1b_1 + ... + a_nb_n i normom $||(a_1, ..., a_k)||$ = $\sqrt{a_1^2 + ... + a_k^2}$, onda niz vektora x_n = (x_1^n, ..., x_k^n) konvergira ka vektoru x = (x_1, ..., x_k) akko $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||$ = $\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_1^n - x_1)^2 + ... + (x_k^n - x_k)^2}$ = 0, odnosno $\lim_{n\to\infty} x_i^n$ = x_i za svako $i \in$ {1, ..., k}.

Stav: Ako niz vektora (x_n) u pred-Hilbertovom prostoru X konvergira ka x $\in$ X, onda je taj niz ograničen, to jest postoji M > 0 tako da je $||x_n|| \leq$ M za svako n $\in N$.

Stav: Neka je X pred-Hilbertov prostor i neka nizovi (x_n) i (y_n) konvergiraju redom ka x $\in$ X i y $\in$ X. Tada važi **neprekidnost skalarnog proizvoda**:

$$\lim_{n\to\infty} < x_n, y_n > \ = \ < x, y >$$

Definicija: Neka je X pred-Hilbertov prostor. Ortonormiran sistem vektora $\{l_n\}$ u X je **potpun**, to jest predstavlja ortonormiranu bazu u X, ako za svako x $\in$ X važi x = $\sum_{n=1}^{\infty} < x, l_n > l_n$, odnosno S_m = $\sum_{n=1}^{m} < x, l_n > l_n$ konvergira u normi ka x, to jest $\lim_{m\to\infty} || \sum_{n=1}^{m} < x, l_n > l_n - x||$ = 0.

Stav (**Parsevalova jednakost**): Ako je $\{l_n\}$ potpun ONS vektora u pred-Hilbertovom prostoru, onda za svako x $\in$ X važi:

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} < x, l_i >^2$$

27. Pred-Hilbertov prostor C_0[-l, l], l > 0.

Neka je prostor X = C_0[a, b] definisan na sledeći način: X = C_0[a, b] = {f: [a, b] $\to R$: f je deo po deo neprekidna, to jest ima konačno mnogo prekida a $\leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq$ b, postoje levi i desni limesi u x_i i f(x_i) = $\frac{1}{2}$(f(x_{i-}) + f(x_{i+}))}. Prostor X je realan vektorski prostor sa sabiranjem (f + g)(x) = f(x) + g(x) i množenjem funkcije skalarom (λf)(x) = λf(x). Definišimo preslikavanje <$\cdot$, $\cdot$>: C_0[a, b] $\times$ C_0[a, b] $\to R$ sa <f, g> = $\int_a^b f(x)g(x)dx$, f, g $\in C_0$[a, b]. Ovo preslikavanje je skalarni proizvod. Definisali smo pred-Hilbertov prostor C_0[a, b] sa skalarnim proizvodom <f, g> = $\int_a^b f(x)g(x)dx$ i normom ||f|| = $\sqrt{< f, f >}$ = $\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$. Važe Koši-Švarcova nejednakost $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$ i nejednakost Minkovskog: $\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ + $\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$. Niz (f_n) konvergira u normi (u srednjem) ka f $\in C_0$[a, b] ako $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||$ = 0, to jest $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2dx$ = 0.

Stav: U pred-Hilbertovom prostoru C_0[-l, l], l > 0, sistem vektora:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

je ortonormiran.

Može se pokazati:

- $\int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi x}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ = $\begin{cases} 1, \ m = n \in N \\ 0, \ m \neq n, \ m, n \in N \end{cases}$
- $\int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{m\pi x}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ = 0 za m, n $\in N$
- $\int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{m\pi x}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ = $\begin{cases} 1, \ m = n \in N \\ 0, \ m \neq n, \ m, n \in N \end{cases}$
- $\int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ = 0, n $\in N$
- $\int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ = 0, n $\in N$

- $\int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} dx$ = 1

Furijeovi koeficijenti funkcije f $\in C_0$[-l, l] u odnosu na sistem iz stava su:

$$\alpha_0 = \ < f, l_0 > \ = \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} dx = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} f(x) dx, \ \alpha_0 l_0 = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} f(x) dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) dx$$

$$\alpha_n = \ < f, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l} > \ = \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \ \alpha_n \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\beta_n = \ < f, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} > \ = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \ \beta_n \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Zamenimo koeficijente α_0, α_n i β_n sa **trigonometrijskim Furijeovim koeficijentima**:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx, \ a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Trigonometrijski Furijeov red funkcije f je:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Primer: U slučaju l = π, odnosno C_0[-π, π] imamo ONS:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ \ldots, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ \ldots$$

U tom slučaju trigonometrijski Furijeovi koeficijenti su:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

a trigonometrijski Furijeov red je:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$