Математички факултет

Универзитет у Београду

Одабрани задаци из Анализе 2 (И смер)

Златко Лазовић

10. јануар 2018.

верзија 2.1

Садржај

1 Неодређени интеграли

Дефиниција 1.1. Нека је дата функција $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Функција φ је примитивна функција функције f ако је $\varphi'(x) = f(x)$ за свако $x \in (a,b)$.

Теорема 1.1. *Ако је φ примитивна функција функције f на интервалу (a,b), онда је и $\varphi + C$ примитивна функција функције f на интервалу (a,b), за свако $C \in \mathbb{R}$.*

Дефиниција 1.2. Скуп свих примитивних функција функције f означимо са $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ или $\varphi(x) + C$.

Теорема 1.2. *Нека је φ примитивна функција функције f на неком интервалу. Онда је задовољено:*

1) $d\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$;
2) $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$;
3) $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, k \in \mathbb{R}$;
4) $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Таблица неодређених интеграла

1. $$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$
2. $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
3. $$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$
4. $$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$
5. $$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$
6. $$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$
7. $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$$
8. $$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C$$
9. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$
10. $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$$
11. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$
12. $$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Задатак 1.1. Решити интеграл $\int (2x^3+5x+\sqrt{3})\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int (2x^3+5x+\sqrt{3})\,\mathrm{d}x &= 2\int x^3\mathrm{d}x+5\int x+\sqrt{3}\int \mathrm{d}x = 2\cdot\frac{x^4}{4}+5\cdot\frac{x^2}{2}+\sqrt{3}x+C\\ &= \frac{x^4}{2}+\frac{5}{2}x^2+\sqrt{3}x+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.2. Решити интеграл $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = 2\int x^{\frac{7}{8}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C.$$

△

Задатак 1.3. Решити интеграл $\int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}-\frac{x\sqrt{x}}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x}-\ln|x|+2\,\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C\\ &= -\frac{2}{x}-\ln|x|-\frac{4}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.4. Израчунати интеграл $\int \left(2-\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$I = \int (2-\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = \int\left(4-4\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x = 4x-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C.$$

△

Задатак 1.5. Израчунати интеграл $\int \frac{x^4+2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int\frac{x^4+2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\frac{(x^2+1)^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\left(x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C.$$

△

Задатак 1.6. Израчунати интеграл $\int \frac{x^2+x+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int\frac{x^2+x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x|+C.$$

Задатак 1.7. Израчунати интеграл $\int \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1.1 Метода смене

Задатак 1.8. Решити интеграл $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c}1-3x=t\\ -3\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right) = \int \sqrt[3]{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{-3} = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C\\ &= -\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.9. Израчунати интеграл $\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{e^x}{2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + C = \operatorname{sh} x + C.$$

△

Задатак 1.10. Израчунати интеграл $\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{e^x}{2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + C = \operatorname{ch} x + C.$$

△

Задатак 1.11. Израчунати интеграл $\int e^{3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 1.12. Израчунати интеграл $\int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x$.

Задатак 1.13. Израчунати интеграл $\int (3x-5)^7\,\mathrm{d}x$.

Задатак 1.14. Израчунати интеграл $\int x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$.

Задатак 1.15. Израчунати интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x+7}$.

Задатак 1.16. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c}\frac{x}{a}=t\\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}a\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.17. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c}\frac{x}{a} = t\\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm 1}} a\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm 1}}\,\mathrm{d}t = \ln|t + \sqrt{t^2 \pm 1}| + C_1 = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C_1\\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| - \ln|a| + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,\end{aligned}$$

где је $C = -\ln|a| + C_1$. △

Задатак 1.18. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x,\ (a > 0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c}\frac{x}{a} = t\\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right) = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1 - t^2} a\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right| + C\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.19. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x,\ (a > 0)$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c}\frac{x}{a} = t\\ \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right) = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1 + t^2} a\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

△

У претходним задацима доказали смо да за $a > 0$ важи следеће

9'. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

10'. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

11'. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

12'. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

Задатак 1.20. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4 - 3x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}} = \Big(\text{применом формуле 9', где је } a=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}+C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2}+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.21. Решити интеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \Big(\text{применом формуле 10', где је } a=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.22. Решити интеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-5}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-5}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-\frac{5}{3}}} = \Big(\text{применом формуле 11', где је } a=\tfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}+C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.23. Решити интеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{5-2x^2}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{5-2x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\frac{5}{2}-x^2} = \Big(\text{применом формуле 12', где је } a=\tfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-x}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}x}{\sqrt{5}-\sqrt{2}x}\right|+C\end{aligned}$$

△

Задатак 1.24. Решити интеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)} &= \begin{pmatrix}\ln x=t\\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \begin{pmatrix}\ln t=u\\ \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{pmatrix}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|+C = \ln|\ln t|+C = \ln|\ln(\ln x)|+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.25. Израчунати интеграл $\int \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^5 x \, \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^5 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^4 x \sin x \, \mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right) = -\int t^{\frac{2}{3}} (1-t^2)^2 \, \mathrm{d}t \\
&= -\int t^{\frac{2}{3}} (1 - 2t^2 + t^4) \, \mathrm{d}t = -\int \left(t^{\frac{2}{3}} - 2t^{\frac{8}{3}} + t^{\frac{14}{3}} \right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{11} t^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{17} t^{\frac{17}{3}} + C \\
&= -\frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + \frac{6}{11} \cos^{\frac{11}{3}} x - \frac{3}{17} \cos^{\frac{17}{3}} x + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.26. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} \sin x - \cos x = t \\ (\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right) = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}} = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C \\
&= \frac{3}{2} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.27. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4} &= \left(\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right) = (\text{применом \ формуле } 9') \\
&= \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{2}}{4+t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \, \frac{t}{2} + C = \frac{1}{4} \mathrm{arctg} \, \frac{t}{2} + C \\
&= \frac{1}{4} \mathrm{arctg} \, \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.28. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2} &= \left(\begin{array}{c} x^4 = t \\ 4x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right) = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{4}}{t^2-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} \right| + C \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-x^4}{\sqrt{2}+x^4} \right| + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.29. Израчунати интеграл $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}$.

Решење.

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}} = \begin{pmatrix} x^2-2=t \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + C = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C = \sqrt{x^2-2}+C.$$

△

Задатак 1.30. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \begin{pmatrix} x^2+1=t^2 \\ 2x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t \\ x^2=t^2-1 \end{pmatrix} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.31. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (сличан као задатак 1.30). △

Задатак 1.32. Израчунати интеграл $I=\int\sqrt{x^3-4x^2}\mathrm{d}x$.

Решење. На основу $x^3-4x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-4)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ следи

$$\begin{aligned} I &= \int\sqrt{x^3-4x^2}\,\mathrm{d}x = \int |x|\sqrt{x-4}\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{x-4}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x-4=t^2, t\geq 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\ &= 2\int (t^2+4)t^2\mathrm{d}t = 2\int (t^4+4t^2)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{8}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.33. Решити интеграл $\displaystyle\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \mathrm{tg}\,x\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.34. Решити интеграл $\displaystyle\int \mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \sin x = t \\ \cos x \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C \\ &= \ln|\sin x| + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.35. Решити интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x \sin 2x \,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x \sin 2x \,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x \cos x \,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ \sin x \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\ &= 2\int \frac{(1-t^2)(-\mathrm{d}t)}{t} = -\ln|t| + 2\cdot\frac{t^2}{2} + C = -2\ln|\cos x| + \cos^2 x + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.36. Решити интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.37. Решити интеграл $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} 1-3x = t \\ -3\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = \frac{1-t}{3} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{1-t}{3}}{\sqrt[3]{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{-3} = -\frac{1}{9}\int \frac{1-t}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{9}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{9}\int t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.38. Решити интеграл $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int x^2\sqrt[3]{1+x^2}x\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 1+x^2=t \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x^2=t-1 \end{pmatrix} = \int (t-1)\sqrt[3]{t}\frac{\mathrm{d}t}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int (t^{\frac{4}{3}}-t^{\frac{1}{3}})\mathrm{d}t = \frac{3}{14}t^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}t^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.39. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2\ln x+3e}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \frac{\sqrt{2\ln x+3e}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 2\ln x+3e=t \\ \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}(2\ln x+3e)^{\frac{3}{2}}+C.$$

△

Задатак 1.40. Решити интеграл $\displaystyle\int \operatorname{sh}^3 x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^3 x\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int\left(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}e^{3x}-3e^x-3e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-3x}\right)+C.\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{sin^n x}\mathrm{d}\mathbf{x} \text{ и } \int \mathbf{cos^n x}\mathrm{d}\mathbf{x},\quad \mathbf{n}\in\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5}\}.$$

Задатак 1.41. Решити интеграл $\displaystyle\int \sin^2 x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\mathrm{d}x &= \int\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C \\ &= \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.42. Решити интеграл $\displaystyle\int \cos^2 x\mathrm{d}x$.

Решење. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$ (сличан као задатак 1.41). △

Задатак 1.43. Решити интеграл $\displaystyle\int \sin^3 x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x \sin x\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\ &= -\int (1-t^2)\mathrm{d}t = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.44. Решити интеграл $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$.

Решење. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ (сличан као задатак 1.43). △

Задатак 1.45. Решити интеграл $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.46. Решити интеграл $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$.

Решење. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$ (сличан као задатак 1.45). △

Задатак 1.47. Решити интеграл $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x\mathrm{d}x &= \int \sin^4 x \sin x\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\ &= -\int (1-t^2)^2\mathrm{d}t = -\int (1 - 2t^2 + t^4)\mathrm{d}t = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C \\ &= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.48. Решити интеграл $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

Решење. $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$ (сличан као задатак 1.47). △

Задатак 1.49. Решити интеграл $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

Решење. Користећи тригонометријску формулу $1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ имамо

$$\int \operatorname{tg}^2 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C.$$

△

Задатак 1.50. Решити интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} 2-x=t^2,\ t\geq 0 \\ -\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ x = 2-t^2 \end{pmatrix} = -\int \frac{(2-t^2)^2}{t} 2t\mathrm{d}t \\ &= -2\int (4-4t^2+t^4)\mathrm{d}t = -8t + 8\cdot\frac{t^3}{3} - 2\cdot\frac{t^5}{5} + C \\ &= -8\sqrt{2-x} + \frac{8}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.51. Решити интеграл $\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{x^4 x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{pmatrix} 1-x^2=t^2, t\geq 0 \\ -2x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{pmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)^2 t\mathrm{d}t}{t} \\ &= -\int (1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t = -t + 2\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.52. Решити интеграл $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x &= \int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} x^2\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 2-5x^3=t \\ -15x^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x^3 = \frac{1}{5}(2-t) \end{pmatrix} = \int \frac{1}{5}(2-t)t^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{d}t}{-15} \\ &= -\frac{1}{75}\int (2t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{5}{3}})\mathrm{d}t = -\frac{2}{75}\cdot\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{75}\cdot\frac{t^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C \\ &= -\frac{2}{125}\cdot(2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{200}\cdot(2-5x^3)^{\frac{8}{3}} + C.\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.53. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x-2}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x-2} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}} = \\
&= \left(x^2+\tfrac{2}{3}x-\tfrac{2}{3} = (x+\tfrac{1}{3})^2-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{3} = (x+\tfrac{1}{3})^2-\tfrac{7}{9} \right) \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{3})^2-\frac{7}{9}} = \left(\begin{array}{c} x+\frac{1}{3}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right) = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{7}{9}} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{2\frac{\sqrt{7}}{3}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}-t}{\frac{\sqrt{7}}{3}+t}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}-x-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}+x+\frac{1}{3}}\right| + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-3x-1}{\sqrt{7}+3x+1}\right| + C.
\end{aligned}
$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.54. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{3}{2}+x-x^2}} \\
&= \left(\tfrac{3}{2}+x-x^2 = -(x^2-x-\tfrac{3}{2}) = -[(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{2}] = -\left[(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{7}{4}\right] = \tfrac{7}{4}-(x-\tfrac{1}{2})^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{7}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \left(\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{7}{4}-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}
$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx^2+}\mathrm{d}\mathbf{x+e}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.55. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{3x+2}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Потребно је да трансформишемо израз $3x+2$ у $4x-3$, односно линеарну функцију у извод квадратне функције.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{x+\frac{2}{3}}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{4x+\frac{8}{3}}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{4x-3+3+\frac{8}{3}}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\left(\underbrace{\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \frac{17}{3}\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-3x-1}}_{I_2} \right),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{4x-3}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} 2x^2-3x-1=t \\ (4x-3)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+C \\ &= \ln|2x^2-3x-1|+C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-3x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}} \\ &= \left[x^2-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{2} = \left(x-\tfrac{3}{4}\right)^2-\tfrac{9}{16}-\tfrac{1}{2} = \left(x-\tfrac{3}{4}\right)^2-\tfrac{17}{16}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{17}{16}} = \left(\begin{array}{c} x-\frac{3}{4}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{17}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-t}{\frac{\sqrt{17}}{4}+t}\right|+C \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}}\ln\left|\frac{\sqrt{17}-4x+3}{\sqrt{17}+4x-3}\right|+C, \end{aligned}$$

$$\int \frac{3x+2}{2x^2-3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln|2x^2-3x-1| + \frac{\sqrt{17}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{17}-4x+3}{\sqrt{17}+4x-3}\right|+C.$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{ax+b}}{\sqrt{\mathbf{cx^2+dx+e}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.56. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Потребно је да трансформишемо израз $4-2x$ у $-3-8x$.

$$\begin{aligned} &\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{-2+x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{-8}\int \frac{16-8x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x \\ =\ &\frac{1}{4}\int \frac{-8x-3+3+16}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\underbrace{\int \frac{-8x-3}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + 19\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}}_{I_2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-8x-3}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} 1-3x-4x^2=t \\ (-8x-3)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C \\ &= 2\sqrt{1-3x-4x^2}+C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-x^2}} \\ &= \left(\ \tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}x-x^2 = -(x^2+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4}) = -\left((x+\tfrac{3}{8})^2-\tfrac{9}{64}-\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{25}{64}-(x+\tfrac{3}{8})^2\ \right) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{25}{64}-(x+\frac{3}{8})^2}} = \left(\begin{array}{c} x+\frac{3}{8}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{25}{64}-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{5}{8}}+C \\ &= \frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{5}t+C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{5}+C, \end{aligned}$$

$$\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{1-3x-4x^2} + \frac{19}{2}\arcsin\frac{8x+3}{5}\right) + C.$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{cos(ax+b)cos(cx+d)}\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int \mathbf{sin(ax+b)cos(cx+d)}\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\int \mathbf{sin(ax+b)sin(cx+d)}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Интеграле овог типа решавамо помоћу тригонометријских идентичности

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Задатак 1.57. Решити интеграл $\int \cos 3x \cos 4x \mathrm{d}x$.

Решење. Коришћењем тригонометријске формуле

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

добијамо

$$\int \cos 3x \cos 4x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\cos 7x + \cos x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

△

1.2 Парцијална интеграција

Нека су u, v диференцијабилне функције. Тада важи

$$\int u dv = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Задатак 1.58. Решити интеграл $I = \int x^2 \arccos x \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \arccos x \mathrm{d}x = \left(\begin{array}{ccc} u = \arccos x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = x^2 \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = \int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(\begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ -2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t \end{array} \right) = \int \frac{(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{-2}}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\mathrm{d}t \\ &= -\sqrt{t} + \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{3}x^3 \arccos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

△

Задатак 1.59. Решити интеграл $I = \displaystyle\int x \arccos x \mathrm{d}x$.

Решење. $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$. △

Задатак 1.60. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{ccc} u = \arcsin x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ dv = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} \left(\begin{array}{c} 1-x^2 = t^2, t \geq 0 \\ -2x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right) \\ &= \int \frac{-t\mathrm{d}t}{(1-t^2)t} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C, \end{aligned}$$

$$I = -\frac{\arcsin x}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

△

Задатак 1.61. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\operatorname{arctg}\sqrt{x} & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ dv=\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=x \end{pmatrix} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)},$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} &= \begin{pmatrix} x=t^2, t\geq 0 \\ \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int\frac{2t^3\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} = 2\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2t-2\operatorname{arctg}t+C = 2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C,\end{aligned}$$

$$I = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$$

△

Задатак 1.62. Израчунати $I=\displaystyle\int x^2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx.$

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \begin{pmatrix} u=\operatorname{arctg}\frac{1}{x} & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\ & & dv=x^2\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad v=\frac{x^3}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{x^3}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\int\frac{x^3}{3}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x^3}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x^3}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}I_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^2+1} = \begin{pmatrix} x^2+1=t \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{(t-1)\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}(t-\ln|t|)+C \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+1-\ln|x^2+1|\right)+C,\end{aligned}$$

$$I=\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{6}(x^2+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C.$$

△

Задатак 1.63. Решити интеграл $I=\displaystyle\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x.$

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=(\arcsin x)^2 & \Rightarrow & \mathrm{d}u=2\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ & & dv=\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad v=x \end{pmatrix} \\ &= x(\arcsin x)^2-2\int x\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x(\arcsin x)^2-\int\arcsin x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{pmatrix} u=\arcsin x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad v=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{pmatrix} 1-x^2=t \\ -2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=-\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \\ &= x(\arcsin x)^2-2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{P_n(x)sin(ax+b)}\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{P_n(x)cos(ax+b)}\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{P_n(x)e^{ax}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Ови интеграли се решавају парцијалном интеграцијом тако што узмемо $u = P_n(x)$.

Задатак 1.64. Решити интеграл $I = \displaystyle\int (x^2+3x-4)\sin 2x \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2+3x-4)\sin 2x \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = x^2+3x-4 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = (2x+3)\mathrm{d}x \\ dv = \sin 2x \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+3x-4)\cos 2x + \frac{1}{2}\int (2x+3)\cos 2x \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = 2x+3 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ dv = \cos 2x & \Rightarrow & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+3x-4)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+3x-4)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.65. Израчунати интеграл $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t\mathrm{d}t \end{pmatrix} = 2\int te^t\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u = t & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ dv = e^t\mathrm{d}t & \Rightarrow & v = e^t \end{pmatrix} = 2te^t - 2\int e^t\mathrm{d}t \\ &= 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.66. Израчунати интеграл $\int \sin\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \sin\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} 1+x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t\mathrm{d}t \end{pmatrix} = 2\int t\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{pmatrix} u = t & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ dv = \sin t\mathrm{d}t & \Rightarrow & v = -\cos t \end{pmatrix} = -2t\cos t + 2\int \cos t\mathrm{d}t \\ &= -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{1+x}\cos\sqrt{1+x} + 2\sin\sqrt{1+x} + C \end{aligned}$$

$-2((5-3x)\sin(\sqrt{x}) + (x-5)\sqrt{x}\cos(\sqrt{x})) + C.$ △

Интеграл типа

$$\int \mathbf{f(x)ln(g(x))}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.67. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \ln(2x^2)\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \ln(2x^2)\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \ln(2x^2) & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{1}{2x^2}\cdot 4x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \Rightarrow & v = x \end{pmatrix} \\ &= x\ln(2x^2) - \int \frac{2x\mathrm{d}x}{x} = x\ln(2x^2) - 2x + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.68. Решити интеграл $\displaystyle\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} u = \ln(1+x^2) & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Важи

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} x^2 = t,\, t \geq 0 \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(t - \ln|1+t|\right) + C = \frac{1}{2}\left(x^2 - \ln(1+x^2)\right) + C, \end{aligned}$$

па је интеграл једнак

$$I = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \ln(1+x^2)\right) + C = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

△

Задатак 1.69. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{sin^n x}\,\mathbf{dx} \quad \textbf{и} \quad \int \mathbf{cos^n x}\,\mathbf{dx}, \mathbf{n} \geq \mathbf{2}$$

Задатак 1.70. Доказати једнакости

$$I_n = \frac{1}{n}\left(-\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}\right) + C,$$

$$J_n = \frac{1}{n}\left(\cos^{n-1}x\sin x + (n-1)J_{n-2}\right) + C,$$

где је $I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x$, $J_n = \int \cos^n x\,\mathrm{d}x$, $n \geq 2$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1}x\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \sin^{n-1}x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = (n-1)\sin^{n-2}\cos x\,\mathrm{d}x \\ dv = \sin x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = -\cos x \end{pmatrix} \\
&= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Добили смо

$$I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

одакле је

$$I_n = \frac{1}{n}\left(-\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}\right) + C.$$

Слично доказујемо и другу једнакост.

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \cos^{n-1}x\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \cos^{n-1}x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -(n-1)\cos^{n-2}x\sin x\,\mathrm{d}x \\ dv = \cos x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v = \sin x \end{pmatrix} \\
&= \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n x\,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n.
\end{aligned}$$

Добили смо

$$J_n = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n,$$

одакле је

$$J_n = \frac{1}{n}\left(\cos^{n-1}x\sin x + (n-1)J_{n-2}\right) + C.$$

△

Задатак 1.71. Решити интеграле $I_1 = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$ и $I_2 = \int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\cos bx & \Rightarrow & \mathrm{d}u=-b\sin bx\mathrm{d}x \\ dv=e^{ax} & \Rightarrow & v=\frac{1}{a}\,e^{ax}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\sin bx & \Rightarrow & \mathrm{d}u=b\cos bx \\ dv=e^{ax} & \Rightarrow & v=\frac{1}{a}\,e^{ax}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int\cos bxe^{ax}\right)\\
&= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\,e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int\cos bxe^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\,e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}I_1.
\end{aligned}$$

Добили смо да је

$$I_1 \;=\; \frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C.$$

На сличан начин се добија

$$I_2=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

△

Задатак 1.72. Решити интеграл $I=\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int e^{2x}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x\\
&= (\text{задатак}1.71)=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}\frac{e^{2x}(2\cos 2x+2\sin 2x)}{8}+C=\frac{1}{8}e^{2x}\left(2-\cos 2x-\sin 2x\right)+C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.73. Решити интеграл $I=\displaystyle\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ dv=\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=e^{\operatorname{arctg}x}\end{pmatrix}\\
&= \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \Rightarrow & \mathrm{d}u=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ dv=\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=e^{\operatorname{arctg}x}\end{pmatrix}\\
&= \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-I.
\end{aligned}$$

Добили смо да важи $I=\dfrac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}-I$, односно

$$I=\frac{1}{2}\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Други начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{e^t \operatorname{tg} t}{\frac{1}{|\cos t|}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{e^t \operatorname{tg} t}{\frac{1}{\cos t}}\,\mathrm{d}t = \int e^t \sin t\mathrm{d}t \\ &= (\text{задатак}1.71) = \frac{e^t(\sin t - \cos t)}{2} + C = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}(\sin(\operatorname{arctg} x) - \cos(\operatorname{arctg} x))}{2} + C. \end{aligned}$$

Из једнакости $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ имамо

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} \quad \text{и} \quad \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}},$$

па је

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \pm\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Искористили смо то да из $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ следи $\cos(\operatorname{arctg} x) > 0$, $\sin(\operatorname{arctg} x) > 0$ за $x > 0$ и $\sin(\operatorname{arctg} x) < 0$ за $x < 0$.

Према томе, $I = \frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg} x}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}) + C = \frac{1}{2}\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + C.$ △

Задатак 1.74. Решити интеграле $I_1 = \displaystyle\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x, I_2 = \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x.$

Решење.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \sin(\ln x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{\cos(\ln x)}{x} \\ dv = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = x \end{array}\right) \\ &= x\sin(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - I_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u = \cos(\ln x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = -\frac{\sin(\ln x)}{x} \\ dv = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = x \end{array}\right) \\ &= x\cos(\ln x) + \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I_1. \end{aligned}$$

Добили смо $I_1 + I_2 = x\sin(\ln x), I_2 - I_1 = x\cos(\ln x)$, одакле је

$$I_1 = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C, \quad I_2 = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + C.$$

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \sqrt{\mathbf{ax^2 + c}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.75. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x,\ (a > 0).$

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u=\sqrt{a^2-x^2} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ dv = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = x \end{array} \right) \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Други начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} x = a\sin t, t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \end{array} \right) = a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t \\ &= a^2\int|\cos t|\cos t\mathrm{d}t = a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a^2 t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C \\ &= \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin\Big(2\arcsin\frac{x}{a}\Big) + C. \end{aligned}$$

Имамо тригонометријску једнакост

$$\sin\Big(2\arcsin\frac{x}{a}\Big) = 2\sin\Big(\arcsin\frac{x}{a}\Big)\cos\Big(\arcsin\frac{x}{a}\Big).$$

Из $\sin(\arcsin\alpha)=\alpha$, следи да је $\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}$, а из $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, следи да је $\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. С обзиром да је $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin\frac{x}{a}\le\frac{\pi}{2}$, важи $\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\ge 0$, одакле је $\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Према томе,

$$\sin\Big(2\arcsin\frac{x}{a}\Big) = 2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

и

$$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

△

Задатак 1.76. Решити интеграл $I = \int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0.$

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned} I &= \int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} u=\sqrt{x^2+a^2} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ dv = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = x \end{array} \right) \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C. \end{aligned}$$

Одавде је

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x=a\mathrm{tg}\,t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. △

Задатак 1.77. Решити интеграл $I=\displaystyle\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,\ (a>0)$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} u=\sqrt{x^2-a^2} & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\ & dv=\mathrm{d}x \ \Rightarrow \ v=x & \end{pmatrix}\\
&= x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x-\int\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\sqrt{x^2-a^2}-I-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.
\end{aligned}$$

Одавде је

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x=a\cosh t$.

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I}=\int\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.78. Решити интеграл $I=\displaystyle\int\sqrt{2x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int\sqrt{2x^2-x+1}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\ x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}=(x-\tfrac{1}{4})^2-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{2}=(x-\tfrac{1}{4})^2+\tfrac{7}{16}\ \right)=\sqrt{2}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\,\mathrm{d}x\\
&= \begin{pmatrix} x-\frac{1}{4}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\sqrt{2}\int\sqrt{t^2+\frac{7}{16}}\,\mathrm{d}t=(\text{задатак 1.76})\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}t\sqrt{t^2+\frac{7}{16}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{7}{16}}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{7}{16}}\right|+C\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}+\frac{7\sqrt{2}}{32}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}\right|+C\\
&= \frac{1}{8}(4x-1)\sqrt{2x^2-x+1}+\frac{7\sqrt{2}}{128}\ln\left|4x-1+\sqrt{16x^2-8x+8}\right|+C
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int (\mathbf{ax} + \mathbf{b})\sqrt{\mathbf{cx^2} + \mathbf{ex} + \mathbf{f}}\,\mathrm{dx}$$

Задатак 1.79. Решити интеграл $\int (3x+1)\sqrt{2x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{x^2}\sqrt{\mathbf{a^2} + \mathbf{x^2}}\,\mathrm{dx}$$

Задатак 1.80. Решити интеграл $I = \int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
I &= \int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\begin{array}{c} u = x \quad \Rightarrow \quad du = \mathrm{d}x \\ dv = x\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v = \int x\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} a^2+x^2 = t^2 \\ 2x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right) = \frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{3}\int (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{3}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|\right].
\end{aligned}$$

Добили смо

$$I = \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}I - \frac{a^2}{6}x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{6}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|,$$

одакле је

$$I = \frac{1}{4}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x = a\,\mathrm{tg}\,t$. △

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int (\mathbf{bx^2} + \mathbf{cx} + \mathbf{d})\sqrt{\mathbf{a^2} + \mathbf{x^2}}\,\mathrm{dx}$$

Задатак 1.81. Решити интеграл $I = \int (2x^2+3x+1)\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Интеграл типа

$$\mathbf{I_n} = \int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{x^2}+\mathbf{a^2})^{\mathbf{n}}}\,\mathrm{dx}, \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{n} \geq \mathbf{2})$$

Задатак 1.82. Решити интеграл $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$I_1=\int\frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\left(\begin{array}{c} u=\frac{1}{x^2+a^2} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u=\frac{-2x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \\ dv=\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v=x \end{array}\right)=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x-2a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x}{x^2+a^2}+\frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-2a^2I_2.
\end{aligned}$$

Добили смо

$$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}=\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-2a^2I_2,$$

одакле је

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]+C.$$

△

Задатак 1.83. Решити интеграл $I_n=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x,\ (n\geq 2).$

Решење.

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x=\left(\begin{array}{c} u=\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u=(1-n)\frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \\ dv=\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v=x \end{array}\right)\\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-2(1-n)\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}\\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-2(1-n)\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-2(1-n)\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(1-n)a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}\\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-2(1-n)I_{n-1}+2(1-n)a^2I_n.
\end{aligned}$$

Одавде је

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right].$$

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I}=\int\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{ax^2+bx+c})^{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Задатак 1.84. Решити интеграл $I=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left(x^2+x+1 = (x+\tfrac12)^2-\tfrac14+1 = (x+\tfrac12)^2+\tfrac34\right)\\
&= \int \frac{1}{\left[(x+\frac12)^2+\frac34\right]^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x+\frac12 = t\\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{pmatrix} = \int \frac{1}{(t^2+\frac34)^2}\,\mathrm{d}x = (\text{задатак } 1.82)\\
&= \frac{1}{\frac32}\left[\frac{t}{t^2+\frac34}+\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt3}\right]+C = \frac23\left[\frac{x+\frac12}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}\right]+C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.85. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{3x-1}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3x-1}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x-\frac13}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac32\int \frac{2x-\frac23}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac32\int \frac{2x+1-\frac53}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac32\underbrace{\int \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_1}-\frac52\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x,}_{I_2}
\end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x^2+x+2 = t\\ (2x+1)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{pmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac1t + C = -\frac{1}{x^2+x+2}+C$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \left(\ x^2+x+2 = \left(x+\tfrac12\right)^2-\tfrac14+2 = \left(x+\tfrac12\right)^2+\tfrac74\ \right)\\
&= \int \frac{1}{(\left(x+\frac12\right)^2+\frac74)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x+\frac12 = t\\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{pmatrix} = \int \frac{1}{(t^2+\frac74)^2}\,\mathrm{d}t = (\text{погледати задатак } 1.83\ )\\
&= \frac{1}{\frac72}\left(\frac{t}{t^2+\frac74}+\int \frac{1}{t^2+\frac74}\,\mathrm{d}t\right) = \frac27\left(\frac{t}{t^2+\frac74}+\frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt7}\right)+C\\
&= \frac27\left(\frac{x+\frac12}{x^2+x+2}+\frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt7}\right)+C
\end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac32 I_1 - \frac52 I_2 = -\frac{3}{2(x^2+x+2)} - \frac{5}{14}\frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{10}{7\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt7}+C.$$

△

1.3 Интеграција рационалних функција

Представимо рационалну функцију $R(x)$ у облику

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где је степен полинома $P_1(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ ($d^\circ P_1(x) < d^\circ Q(x)$).

Затим, рационалну функцију $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ можемо представити на следећи начин

$$\begin{aligned}\frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{P_1(x)}{A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\\ &= \left[\frac{A_{1,1}}{x-a_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2}+...+\frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right]+\left[\frac{A_{2,1}}{x-a_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2}+...+\frac{A_{2,k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}\right]\\ &\quad+...+\left[\frac{A_{p,1}}{x-a_p}+\frac{A_{p,2}}{(x-a_p)^2}+...+\frac{A_{1,k_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right]\\ &\quad+\left[\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+...+\frac{B_{1,l_1}x+C_{1,l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}}\right]\\ &\quad+\left[\frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{x^2+b_2x+c_2}+\frac{B_{2,2}x+C_{2,2}}{(x^2+b_2x+c_2)^2}+...+\frac{B_{2,l_2}x+C_{2,l_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}}\right]\\ &\quad+...+\left[\frac{B_{q,1}x+C_{q,1}}{x^2+b_qx+c_q}+\frac{B_{q,2}x+C_{q,2}}{(x^2+b_qx+c_q)^2}+...+\frac{B_{q,l_q}x+C_{q,l_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\right],\end{aligned}$$

при чему су квадратни триноми $x^2+b_ix+c_i$ нерастављиви. Сабирке на десној страни једнакости зваћемо правим разломцима.

Задатак 1.86. Решити интеграл $I=\displaystyle\int\frac{x}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Представљањем рационалне функције преко правих разломака добијамо

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2},$$

одакле множењем и леве и десне једнакости са $(x-1)^2(x+2)$ имамо

$$x\equiv A(x^2+x-2)+B(x+2)+C(x^2-2x+1),$$

односно за свако x важи

$$x\equiv x^2(A+C)+x(A+B-2C)+(-2A+2B+C).$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене имамо систем

$$\begin{aligned}A+C &= 0\\ A+B-2C &= 1\\ -2A+2B+C &= 0,\end{aligned}$$

чије је решење $A=\frac{2}{9}, B=\frac{1}{3}, C=-\frac{2}{9}$. Сада интеграл можемо израчунати

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}-\frac{\frac{2}{9}}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{2}{9}\ln|x+2|+C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.87. Решити интеграл $I=\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Запишимо интеграл у следећем облику

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}\right)\mathrm{d}x.$$

Рационалну функцију запишимо преко правих разломака

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

одакле множењем са $x(x-2)(x-3)$ добијамо да за свако x важи

$$5x^2-6x+1 \equiv x^2(A+B+C) + x(-5A-3B-2C) + 6A.$$

Одавде имамо систем

$$\begin{aligned} A+B+C &= 5, \\ -5A-3B-2C &= -6, \\ 6A &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{9}{2}, C = \frac{28}{3}$. Према томе,

$$I = \int \left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{-\frac{9}{2}}{x-2} + \frac{\frac{28}{3}}{x-3}\right) = x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C.$$

△

Задатак 1.88. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Множењем израза

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}$$

са $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$ добијамо

$$\begin{aligned} 1 \equiv\ & A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3(x+2) + D(x+1)(x+2)^2 \\ +\ & E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2(x+3)^2. \end{aligned}$$

Замењујући x редом са $-1, -2, -3$, налазимо да је $A = \frac{1}{8}, B = -1, D = -\frac{1}{2}$. Затим, изједначавањем коефицијената уз x^5, x^4, x^3 добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} 0 &= A+C+F, \\ 0 &= 13A+B+12C+E+11F, \\ 0 &= 67A+10B+56C+D+8E+47F. \end{aligned}$$

Из прве једначине је $F = -C - \frac{1}{8}$. Заменом у другу и трећу добијамо

$$C + E = \frac{3}{4}, \quad 9C + 8E = 8,$$

па је $C = 2, E = -\frac{5}{4}$ и $F = -\frac{17}{8}$. Сада можемо израчунати интеграл

$$I = \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+2| + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C.$$

△

Задатак 1.89. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Представљањем подинтегралне функције у облику

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$

добијамо да за свако x важи

$$1 \equiv A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + (Cx+D)(x-2)^2,$$

односно

$$x^3(A+C) + x^2(-4C-6A+D+B) + x(4C-4D+13A-4B) + 4D-10A+5B = 1.$$

Одавде имамо систем

$$\begin{aligned} A+C &= 0\\ -6A+B-4C+D &= 0\\ 13A-4B+4C-4D &= 0\\ -10A+4D+5B &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $A=0, B=1, C=0, D=-1$, па је интеграл једнак

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x^2-4x+5)}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5} = \frac{1}{2-x} - \operatorname{arctg}(2-x) + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.90. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Растављењем следећег полинома

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

имамо

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Из идентитета

$$1 \equiv (Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} 0 &= A+C,\\ 0 &= -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D,\\ 0 &= A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D,\\ 1 &= B+D, \end{aligned}$$

чија су решења $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = D = \frac{1}{2}$. Одатле,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)) + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.91. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^6+1}\, \mathrm{d}x$.

Решење. Растављењем полинома

$$\begin{aligned} x^6+1 &= (x^2+1)(x^4-x^2+1) = (x^2+1)(x^4+2x^2+1-3x^2) = (x^2+1)((x^2+1)^2-3x^2) \\ &= (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1) \end{aligned}$$

имамо

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1},$$

одакле добијамо

$$\begin{aligned} 1 \ \equiv\ & x^5(A+C+E) + x^4(-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D+F) + x^3(2A-\sqrt{3}B+2C+\sqrt{3}D-E) \\ & +x^2(-\sqrt{3}A+2B+\sqrt{3}C+2D-F) + x(A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D+E) + B+D+F. \end{aligned}$$

Систем је

$$\begin{aligned} A+C+E &= 0, \\ -\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D+F &= 0, \\ 2A-\sqrt{3}B+2C+\sqrt{3}D-E &= 0, \\ -\sqrt{3}A+2B+\sqrt{3}C+2D-F &= 0, \\ A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D+E &= 0, \\ B+D+F &= 1 \end{aligned}$$

и има решење $A = \frac{\sqrt{3}}{6}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{\sqrt{3}}{6}, D = \frac{1}{3}, E = 0, F = \frac{1}{3}$. Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\, \mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12} \left(\sqrt{3} \ln \frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}-2x) + 2\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + 4\operatorname{arctg} x \right) + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.92. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\, \mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x-1=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{100}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{97}} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{98}} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{99}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{100}} = -\frac{1}{96t^{96}} - \frac{3}{97t^{97}} - \frac{3}{98t^{98}} - \frac{1}{99t^{99}} + C \\ &= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.93. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3(x^4-3)\mathrm{d}x}{x^4(x^8+3x^4+2)} = \begin{pmatrix} x^4=t \\ 4x^3\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{(t-3)\mathrm{d}t}{t(t^2+3t+2)}$$

Множењем израза

$$\frac{(t-3)\mathrm{d}t}{t(t^2+3t+2)} = \frac{(t-3)\mathrm{d}t}{t(t+2)(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t+1}$$

са $t(t+2)(t+1)$ добијамо

$$t-3 \equiv A(t+2)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t+2).$$

Узимајући редом $t = 0, -1, -2$, добијамо $A = -\frac{3}{2}, B = -\frac{5}{2}, C = 4$. Одавде је

$$I = -\tfrac{3}{8}\ln|t| + \ln|t+1| - \tfrac{5}{8}\ln|t+2| + C = -\tfrac{3}{8}\ln|x^4| + \ln|x^4+1| - \tfrac{5}{8}\ln|x^4+2| + C.$$

△

Задатак 1.94. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^n x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{x^n+1} = \begin{pmatrix} x^n=t \\ nx^{n-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\int \frac{t\mathrm{d}t}{t+1} \\ &= \frac{1}{n}\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}(t-\ln|t+1|) + C = \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) + C. \end{aligned}$$

△

1.4 Интеграција ирационалних функција

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{R}(\mathbf{x}, \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

решавамо сменом $ax+b=t^n, t \geq 0$.

Задатак 1.95. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} 2+x=t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{3t^3(t^3-2)}{t^3-2+t}\,\mathrm{d}x = \\
= 3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3-2+t}\,\mathrm{d}x = 3\int \left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3-2+t}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Представљањем рационалне функције помоћу правих разломака добијамо

$$
\frac{t^2-2t}{t^3-2+t} = \frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2},
$$

одакле множењем једнакости са $(t-1)(t^2+t+2)$ и изједначавањем коефицијената имамо систем

$$
\begin{aligned}
1 &= A+B, \\
-2 &= A-B+C, \\
0 &= 2A-C,
\end{aligned}
$$

чије је решење $A=-\frac{1}{4}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{1}{2}$.

Према томе,

$$
\begin{aligned}
I &= 3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3-2+t}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{3}{4}t^4 - \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \tfrac{15}{4}\int\frac{t-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\tfrac{3}{4}\ln|t-1| + \tfrac{15}{8}\ln|t^2+t+2| - \tfrac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\tfrac{2t+1}{\sqrt{7}} + C \\
&= \tfrac{3}{4}(2+x)^{\frac{4}{3}} - \tfrac{3}{2}(2+x)^{\frac{2}{3}} - \tfrac{3}{4}\ln|\sqrt[3]{2+x}-1| + \tfrac{15}{8}\ln|(2+x)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{2+x}+2| \\
&\quad -\tfrac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\tfrac{2\sqrt[3]{2+x}+1}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}
$$

△

Интеграл типа

$$
\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt[\mathbf{n}]{\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}
$$

решавамо сменом $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, t \geq 0$.

Задатак 1.96. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}, \quad (a>0)$.

Решење. Подинтегрална функција је дефинисана за $x \in (0, a)$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^4 \cdot \frac{a-x}{x}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} \overset{x>0}{\overbrace{=}} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{a-x}{x} = t^4, t \geq 0 \\ x = \frac{a}{1+t^4} \\ \mathrm{d}x = -\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= -\int \frac{4at^3}{\frac{a}{1+t^4}t(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{4at^3}{at(1+t^4)}\,\mathrm{d}t = -4\int \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= (\text{интеграл рационалне функције}) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \sqrt{2}\mathrm{arctg}\,(1 - \sqrt{2}t) - \sqrt{2}\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t + 1) + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a-x}{x}} - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1}{\sqrt{\frac{a-x}{x}} + \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1} + \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(1 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}\right) \\
&\quad -\sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1\right) + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{2}\sqrt[4]{x(a-x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{2}\sqrt[4]{x(a-x)} + \sqrt{x}} + \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(1 - \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}\right) \\
&\quad -\sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1\right) + C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{P_n(x)}}{\sqrt{\mathbf{ax^2 + bx + c}}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

се може решити методом Остроградског за ирационалне функције тако што интеграл представимо у следећем облику

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Задатак 1.97. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Нека постоје константе A, B, C, λ тако да је

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Диференцирањем добијамо

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2} + (Ax^2+Bx+C)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

а одавде множењем са $\sqrt{1+2x-x^2}$ имамо

$$x^3 = (2Ax+B)(1+2x-x^2) + (Ax^2+Bx+C)(1-x) + \lambda,$$

односно

$$x^3 = x^3(-3A) + x^2(5A-2B) + x(2A+3B-C) + (B+C+\lambda).$$

Из система

$$\begin{aligned} -3A &= 1, \\ 5A-2B &= 0, \\ 2A+3B-C &= 0, \\ B+C+\lambda &= 0, \end{aligned}$$

добијамо константе $A=-\frac{1}{3}, B=-\frac{5}{6}, C=-\frac{19}{3}, \lambda=4$. Дакле, интеграл је једнак

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \left(-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{5}{6}x-\tfrac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= \left(-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{5}{6}x-\tfrac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R}(\mathbf{x},\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

решавају се следећим Ојлеровим сменама:

1) Ако је $a>0$, онда ћемо узети прву Ојлерову смену $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$;

2) Ако је $c>0$, онда ћемо узети другу Ојлерову смену $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$;

3) Ако је $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, онда ћемо узети трећу Ојлерову смену $\sqrt{ax^2+bx+c}=a(x-x_1)t$.

Задатак 1.98. Решити интеграл $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int\tfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} &= \left(\begin{array}{c} a=1>0, c=1>0 \\ \sqrt{x^2+x+1}=\pm x+t \quad \text{прва Ојлерова смена} \\ \sqrt{x^2+x+1}=tx\pm 1 \quad \text{друга Ојлерова смена} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{изабраћемо прву Ојлерову смену } x+\sqrt{x^2+x+1}=-x+t \\ x^2+x+1=x^2-2xt+t^2 \\ x(1+2t)=t^2-1 \\ x=\frac{t^2-1}{1+2t} \\ \mathrm{d}x=\frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right) \\ &= \int\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Разлагање подинтегралне функције тражимо у облику

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{(1+2t)^2}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{t}.$$

За одређивање непознатих A, B и C добијамо систем

$$\begin{aligned} 2 &= 2B+4C\\ 2 &= A+B+4C\\ 2 &= C, \end{aligned}$$

чија су решења $A=-3, B=-3, C=2$. Одавде је

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t &= -3\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^2} - 3\int\frac{\mathrm{d}t}{1+2t} + 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3} + C\\ &= \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})^4}{|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}|^3} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.99. Решити интеграл $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} &= \left(\begin{array}{c} c=1>0, \text{ друга Ојлерова смена}\\ \sqrt{1-2x-x^2}=xt-1\\ x=\frac{2t-2}{1+t^2}, \mathrm{d}x=\frac{2(1+t^2)-(2t-2)2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right)\\ &= \int\frac{\frac{-t^2+2t+1}{(1+t^2)^2}}{\frac{t-1}{1+t^2}t}\,\mathrm{d}t = \int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Разлагањем подинтегралне функције функције на просте разломке, имамо

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(1+t^2)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{1+t^2},$$

одакле следи

$$-t^2+2t+1 \equiv A(t^3-t^2+t-1)+B(t^3+t)+(Ct+D)(t^2-t)$$

и систем који се добија изједначавањем коефицијената уз исте степене

$$\begin{aligned} 0 &= A+B+C,\\ -1 &= -A-C+D,\\ 2 &= A+B-D,\\ 1 &= -A. \end{aligned}$$

Решење система је $A=-1, B=1, C=0$ и $D=2$. Следи

$$\begin{aligned} I &= -\int\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}+2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + 2\operatorname{arctg} t + C\\ &= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.100. Решити интеграл $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} x^2+3x+2=(x+1)(x+2),\ \text{трећа Ојлерова смена} \\ \sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1) \\ x=\frac{2-t^2}{t^2-1},\ \mathrm{d}x=-\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} \end{pmatrix} \\ &= -\int \frac{\frac{2-t^2}{t^2-1}-t(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1)}{\frac{2-t^2}{t^2-1}+t(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1)}\cdot\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Разлагањем подинтегралне функције функције на просте разломке добијамо

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{(t+1)^3}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1}+\frac{E}{t-2},$$

одакле, изједначавањем коефицијената уз исте степене и решавањем система, имамо $A=\frac{1}{3}, B=\frac{5}{18}, C=-\frac{17}{108}, D=\frac{3}{4}$ и $E=-\frac{16}{27}$. Следи

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|+C \\ &= -\frac{1}{6(\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}+1)^2}-\frac{5}{18(\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}+1)}-\frac{17}{108}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}+1\right| \\ &\quad +\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}-1\right|-\frac{16}{27}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}-2\right|+C.\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{x^m(a+bx^n)^p}\mathrm{d}\mathbf{x}$$

где је $m,n,p\in\mathbb{Q}$, своди се на интеграл рационалне функције у следећа три случаја:

1) Ако је $p\in\mathbb{Z}$, онда се уводи смена $x=t^{NZS\{imen(m),imen(n)\}}$, где су $imen(m), imen(n)$ имениоци бројева m и n.
2) Ако је $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, онда се уводи смена $a+bx^n=t^{imen(p)}$.
3) Ако је $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, онда се уводи смена $ax^{-n}+b=t^{imen(p)}$.

Задатак 1.101. Решити интеграл $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,\mathrm{d}x &= \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{-\frac{2}{3}})^{-2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} m=\frac{1}{2}, n=-\frac{2}{3}, p=-2, a=1, b=1 \\ p\in\mathbb{Z} \\ x=t^{NZS\{2,3\}}=t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t \end{pmatrix}\\
&= 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} = 6\int \left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \left(\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2} = \frac{4}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right)\\
&= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21\mathrm{arctg}\, t + C\\
&= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.102. Решити интеграл $\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^4(x^{-1}+1)}\,\mathrm{d}x = \int x^2\sqrt{x^{-1}+1}\,\mathrm{d}x\\
=\ & \begin{pmatrix} m=2, n=-1, p=\frac{1}{2}, a=1, b=1 \\ \frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z} \\ 1+\frac{1}{x}=t^2, t\geq 0 \\ x=\frac{1}{t^2-1}, \mathrm{d}x=\frac{-2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} \end{pmatrix} = -2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^4}\,\mathrm{d}t\\
=\ & \left(\frac{t^2}{(t^2-1)^4} = \frac{-\frac{1}{32}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{32}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{(t+1)^4} + \frac{\frac{1}{32}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{32}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{(t-1)^4}\right)\\
=\ & \frac{1}{16}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^4} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^4}\right) + C\\
=\ & \frac{1}{16}\left(\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(t+1)^3} - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(t-1)^3}\right) + C\\
=\ & \tfrac{1}{16}\Big(\ln\left|\sqrt{1+\tfrac{1}{x}}+1\right| - \tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}} + \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}\right)^3} - \ln\left|\sqrt{1+\tfrac{1}{x}}-1\right|\\
& -\tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-1}} + \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-1}\right)^3}\Big) + C
\end{aligned}$$

△

Задатак 1.103. Израчунати интеграл $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3-x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} m=\frac{1}{3}, n=2, p=\frac{1}{3}, a=3, b=-1 \\ \frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z} \\ 3x^{-2}-1=t^3, \\ x=\left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-9t^2}{(t^3+1)^2}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \int \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{6}}\left(3-\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-9t^2}{(t^3+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{3t^3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-9t^2}{(t^3+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{9}{2}\int\frac{t^3}{(t^3+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{9}{2}\int\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{3-t}{t^2-t+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{t-1}{(t^2-t+1)}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4}\left(-\frac{6t}{t^3+1}-\ln(t^2-t+1)+2\ln(t+1)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C \\
&= -\frac{1}{4}\Bigg(-\frac{6(3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}}{3x^{-2}}-\ln\left((3x^{-2})^{\frac{2}{3}}-(3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}+1\right) \\
&\qquad +2\ln\left((3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}+1\right)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2(3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}-1}{\sqrt{3}}\Bigg)+C.
\end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2\sqrt{ax^2+bx}}} \quad \textbf{и} \quad \int\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}}}$$

се ради сменом $x=\frac{1}{t}$

Задатак 1.104. Решити интеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax^2+bx}}$.

Решење. Први начин.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax^2+bx}}=\begin{pmatrix} x=\frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{a+bt^2}}=-\frac{1}{b}\sqrt{a+bt^2}+C=-\frac{ax^2+b}{bx}+C.$$

Други начин. Интеграл се може урадити сменом $x=\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$.

△

Задатак 1.105. Решити интеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}}$.

Решење. Први начин.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}}=\begin{pmatrix} x=\frac{1}{t} \\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{(a+bt^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{a+bt^2}}+C=\frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}+C.$$

Други начин. Интеграл се може урадити сменом $x=\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$. △

Задатак 1.106. Решити интеграл $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

1.5 Интеграција тригонометријских функција

Интеграли облика $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

1) Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\cos x = t$.
2) Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\sin x = t$.
3) Ако је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\operatorname{tg} x = t$, при чему је $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.
4) Универзална смена је $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ и узима се када не важи ниједна од претходних једнакости. Код ове смене важи $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Задатак 1.107. Решити интеграл $\int \frac{\sin x \cos x}{1-\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Решење. С обзиром да је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ увешћемо смену $\cos x = t$ и добијамо

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos x}{1-\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{t}{1-(1-t^2)t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{t}{1-t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u = t^2 \\ \mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t \end{pmatrix}\\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos^2 x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.108. Решити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

Решење. С обзиром да је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ узећемо смену $\operatorname{tg} x = t$ и добијамо

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} &= \begin{pmatrix} \operatorname{tg} x = t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{(1+t^2)^2}}\\ &= \int \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{t^4+1} = \int \frac{(1+\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{t^2}} = \int \frac{(1+\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t}{(t-\frac{1}{t})^2+2} = \begin{pmatrix} t-\frac{1}{t} = u \\ \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{pmatrix}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x-\frac{1}{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

△

Задатак 1.109. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

Решење. С обзиром да је

$$\begin{aligned} R(-\sin x, \cos x) &\neq -R(\sin x, \cos x), \\ R(\sin x, -\cos x) &\neq -R(\sin x, \cos x), \\ R(-\sin x, -\cos x) &\neq R(\sin x, \cos x), \end{aligned}$$

узећемо смену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5} &= \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \\ &= \int \frac{2\mathrm{d}t}{4t - 1 + t^2 + 5(1+t^2)} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{6t^2 + 4t + 4} = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2 + 2t + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.110. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 2x}{(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 2x}{((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 2x}{(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x}\mathrm{d}x = (2x = u) = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 u}{(1 - \frac{1}{2}\sin^2 u)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 u}\mathrm{d}u \\ &= \left(\operatorname{tg} u = t, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \sin^2 u = \frac{t^2}{1+t^2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}\frac{t^2}{1+t^2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 - \frac{1}{8}\frac{(t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \int \frac{t^2}{t^4 + 8t^2 + 8}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2} - 2}{4\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}} + C \\ &= \frac{\sqrt{2} - 2}{4\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2 - \sqrt{2}}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}} + C. \end{aligned}$$

△

Задатак 1.111. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

Задатак 1.112. Решити интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} &= \begin{pmatrix}\cos x=t\\ -\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{2-t^2}}=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{2-t^2}}\\ &= \begin{pmatrix}2-t^2=u^2, u\geq 0\\ -2t\mathrm{d}t=2u\mathrm{d}u\end{pmatrix}=\int\frac{u\mathrm{d}u}{(2-u^2)u}=\int\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

△

1.6 Интеграција трансцендентних функција

Интеграл типа

$$\int\mathbf{R}(\mathbf{e}^{\mathbf{a_1x}},\mathbf{e}^{\mathbf{a_2x}},...,\mathbf{e}^{\mathbf{a_nx}})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

се ради сменом $e^x=t$.

Задатак 1.113. Решити интеграл $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} &= \begin{pmatrix}e^x=t\\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{pmatrix}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}+\sqrt[6]{t})}=\begin{pmatrix}t=u^6\\ \mathrm{d}t=6u^5\mathrm{d}u\end{pmatrix}\\ &= \int\frac{6u^5\mathrm{d}u}{u^6(1+u^3+u^2+u)}=6\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u^2+1)(u+1)}.\end{aligned}$$

Представљањем последње подинтегралне функције помоћу правих разломака

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u^2+1)(u+1)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}+\frac{Cu+D}{u^2+1}$$

и множењем са $u(u^2+1)(u+1)$ имамо

$$1\equiv A+B+(A+D)x+(A+B+C+D)x^2+(A+C)x^3,$$

одакле је $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2},D=-\frac{1}{2}$. Према томе,

$$\begin{aligned}I &= 6\left(\frac{\frac{1}{2}}{u}-\frac{\frac{1}{2}}{u+1}+\frac{-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}}{u^2+1}\right)\\ &= -3\mathrm{arctg}\,u+6\ln|u|-3\ln|1+u|-\frac{3}{2}\ln(1+u^2)+C\\ &= -3\sqrt[6]{t}+\ln|t|-3\ln|1+\sqrt[6]{t}|-\frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[3]{t})+C\\ &= -3\mathrm{arctg}\,e^{\frac{x}{6}}+x-3\ln|1+e^{\frac{x}{6}}|-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})+C.\end{aligned}$$

△

1.7 Разни задаци

Задатак 1.114. Решити интеграл $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+1}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} x-\frac{1}{x}=t \\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 1.115. Израчунати интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\begin{array}{c} x-\frac{1}{x}=t \\ \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 1.116. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Решење.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \arcsin x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{d}t \end{array}\right) = \int \frac{t(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}t + \int \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t &= \left(\begin{array}{c} u=t \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \\ dv=\frac{1}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \ \Rightarrow\ v=-\operatorname{ctg} t \end{array}\right) = -t\operatorname{ctg} t + \int \operatorname{ctg} t\mathrm{d}t \\
&= -t\operatorname{ctg} t + \ln|\sin t| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int t\mathrm{d}t + \int \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - t\operatorname{ctg} t + \ln|\sin t| + C \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x)\operatorname{ctg}(\arcsin x) + \ln|x| + C \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x)\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)}\operatorname{ctg}(\arcsin x) + \ln|x| + C \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln|x| + C.
\end{aligned}$$

У последњој једнакости смо искористили $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, па је $\cos(\arcsin x)$ ненегативан и важи $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. $\triangle$

Задатак 1.117. Решити интеграл $I = \displaystyle\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int (a\operatorname{tg}^2 t + b)t\mathrm{d}t = \int at\operatorname{tg}^2 t\mathrm{d}t + \frac{bt^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \int t\operatorname{tg}^2 t\mathrm{d}t &= \begin{pmatrix} u = t \ \Rightarrow \ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ dv = \operatorname{tg}^2 t\mathrm{d}t \ \Rightarrow \ v = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \operatorname{tg} t - t \end{pmatrix} \\ &= t(\operatorname{tg} t - t) - \int (\operatorname{tg} t - t)\mathrm{d}t = t\operatorname{tg} t - t^2 + \ln|\cos t| + \frac{t^2}{2} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= at\operatorname{tg} t - at^2 + a\ln|\cos t| + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^2}{2} + C \\ &= ax\operatorname{arctg} x + a\ln|\cos(\operatorname{arctg} x)| + \frac{(b-a)(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C \\ &= ax\operatorname{arctg} x - \frac{a}{2}\ln|1+x^2| + \frac{(b-a)(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.118. Решити интеграл $I = \int (2x^2+3x+1)\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int (2x^2+3x+1)\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x = 2\operatorname{tg} t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \end{pmatrix} \\ &= \int (4\operatorname{tg}^2 t + 6\operatorname{tg} t + 1)\frac{4\mathrm{d}t}{\cos^3 t} = 16\int \frac{\operatorname{tg}^2 t\mathrm{d}t}{\cos^3 t} + 24\int \frac{\operatorname{tg} t\mathrm{d}t}{\cos^3 t} + 4\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t} \\ &= 8\underbrace{\int \frac{\sin^2 t\mathrm{d}t}{\cos^5 t}}_{I_1} + 12\underbrace{\int \frac{\sin t\mathrm{d}t}{\cos^4 t}}_{I_2} + 2\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}}_{I_3}. \end{aligned}$$

У интеграле I_1 и I_3 увести смену $\sin x = t$, а у интеграл I_2 смену $t = \cos x$. △

ЗАДАТАК 1.119. Решити интеграл $I = \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x \mathrm{d}x$.

Решење.

$$I = \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x \mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}x - 4\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Парцијалном интеграцијом у другом интегралу добијамо

$$\int \frac{e^x}{x} = \begin{pmatrix} u = \frac{1}{x} \ \Rightarrow \ \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ dv = e^x\mathrm{d}x \ \Rightarrow \ v = e^x \end{pmatrix} = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

и заменом у првој једнакости имамо

$$I = e^x - 4\left(\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + 4\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = e^x - \frac{4e^x}{x} + C = e^x\left(1 - \frac{4}{x}\right) + C.$$

△

Задатак 1.120. Израчунати интеграл $\int (1+2x^2)e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int (1+2x^2)e^{x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \underbrace{\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int 2x^2e^{x^2}\,\mathrm{d}x}_{I_2}.$$

$$I_2 = \int 2x^2e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} - I_1.$$

Према томе,

$$\int (1+2x^2)e^{x^2}\,\mathrm{d}x = xe^{x^2} + C.$$

△

2 Одређени и несвојствени интеграли

Теорема 2.1. *Нека је функција* $f\colon [A,B]\to\mathbb{R}$ *непрекидна, а функција* $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to[A,B]$ *има непрекидан извод и при томе је* $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, $[a,b]\subset[A,B]$. *Тада важи једнакост*

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Задатак 2.1. Израчунати $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac1e}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x &= \int\limits_{\frac1e}^{1}|\ln x|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac1e}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{e}\ln x\mathrm{d}x\\ &= \left(\begin{array}{c} u=\ln x \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u=\frac1x\mathrm{d}x\\ dv=\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ v=x\end{array}\right)=-x\ln x\Big|_{\frac1e}^{1}+\int\limits_{\frac1e}^{1}\mathrm{d}x+x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\mathrm{d}x\\ &= -\frac1e+\left(1-\frac1e\right)+e-(e-1)=2-\frac2e.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.2. Израчунати $\int\limits_0^{\sqrt3}x\mathrm{arctg}\,x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\sqrt3}x\mathrm{arctg}\,x\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} u=\mathrm{arctg}\,x\ \Rightarrow\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ dv=x\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right)=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^{\sqrt3}-\frac12\int_0^{\sqrt3}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= \frac32\cdot\frac\pi3-\frac12\int_0^{\sqrt3}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac\pi2-\frac12(x-\mathrm{arctg}\,x)\Big|_0^{\sqrt3}\\ &= \frac\pi2-\frac12\left(\sqrt3-\frac\pi3\right)=\frac\pi2-\frac{\sqrt3}{2}+\frac\pi6=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{2}.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.3. Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

Решење. Важи

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\frac1n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac kn\right)\frac1n$$

при чему је функција $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ова сума је управо интегрална сума за функцију $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ при подели $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$, где је $x_k = \frac{k}{n}$ и за избор $\varepsilon_k = \frac{k}{n}, k = 1, 2, ..., n$, па је

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

△

Задатак 2.4. Израчунати интеграл $I_n = \int\limits_1^{n+1}\ln[x]\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I_n &= \int\limits_1^{n+1}\ln[x]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\ln[x]\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\ln[x]\mathrm{d}x+...+\int\limits_n^{n+1}\ln[x]\mathrm{d}x\\ &= \ln 1\int\limits_1^2\mathrm{d}x+\ln 2\int\limits_2^3\mathrm{d}x+...+\ln n\int\limits_n^{n+1}\mathrm{d}x=\ln 1+\ln 2+...+\ln n=\ln n!. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.5. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\operatorname{tg}2x\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\operatorname{tg}2x\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c}2x=t\\ 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\ln|\cos t||_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)=\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{4}. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.6. Израчунати интеграл $\int\limits_0^e\frac{e^x+1}{e^x+x}\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int\limits_0^e\frac{e^x+1}{e^x+x}\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c}e^x+x=t\\ (e^x+1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right)=\int\limits_1^{e^e+e}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t||_1^{e^e+e}=\ln(e^e+1).$$

△

Задатак 2.7. Израчунати $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+4x+3}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+4x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{2}}}\\
&= \begin{pmatrix} x+1=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^2\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{2+\sqrt{\frac{9}{2}}}{1+\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(2\sqrt{6}-4+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.8. Израчунати интеграл $\int\limits_1^4 \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^4 \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} u=\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1} & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{1+\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}\\ & & du=\frac{1}{2x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}\\ dv=\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=x \end{pmatrix}\\
&= x\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}|_1^4-\frac{1}{4}\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = 4\operatorname{arctg}1-\frac{1}{4}\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}\\
&= 4\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \begin{pmatrix} \sqrt{x}-1=t^2\\ \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=2t\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \pi-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{4t(t^2+1)\mathrm{d}t}{t}\\
&= \pi-\int_0^1(t^2+1) = \pi-\frac{1}{3}t^3|_0^1-t|_0^1 = \pi-\frac{1}{3}-1 = \pi-\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.9. Израчунати интеграл $\int\limits_0^3 \ln(x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^3 \ln(x^2+2)\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} u=\ln(x^2+2) & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\\ dv=\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=x \end{pmatrix} = x\ln(x^2+2)|_0^3-2\int\limits_0^3\frac{x^2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\\
&= 3\ln(11)-2\int\limits_0^3\left(1-\frac{2}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln(11)-2\left(3-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^3\right)\\
&= 3\ln(11)-2\left(3-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3\ln(11)-6+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.10. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 x^3\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} u=\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\ dv=x^3\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v=\frac{x^4}{4}\end{pmatrix} = \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_0^1+\frac{1}{4}\int\limits_0^1\frac{x^4\mathrm{d}x}{x^2+1}\\
&= \frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}-0+\frac{1}{4}\int\limits_0^1\frac{x^4\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-x|_0^1+\operatorname{arctg}x|_0^1\right)=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\pi}{16}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.11. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{2x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{2x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} x^2=t,\, t\geq 0\\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\int\limits_1^4\frac{\mathrm{d}t}{4t(t+1)}=\frac{1}{4}\int\limits_1^4\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}\\
&= \frac{1}{4}\left(\int\limits_1^4\frac{\mathrm{d}t}{t}-\int\limits_1^4\frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right)=\frac{1}{4}(\ln 4-(\ln 5-\ln 2))=\frac{1}{4}\ln\frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.12. Израчунати $I=\displaystyle\int\limits_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2-2}$.

Решење.

$$\int\limits_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2-2}=\int\limits_2^3\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+2x+2)},$$

Множењем једнакости

$$\frac{1}{x^3+x^2-2}=\frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

са $(x+1)(x^2+2x+2)$ добијамо систем

$$A+B=0,\; 2A-B+C=0,\; 2A-C=1$$

чије је решење $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = -\frac{3}{5}$. Према томе, интеграл је једнак

$$\int\limits_2^3 \left(\frac{\frac{1}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}}{x^2+2x+2} \right) = \frac{1}{5}\int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{5}\int\limits_2^3 \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}I_1 - \frac{1}{5}I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln(x-1)|_2^3 = \ln 2,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_2^3 \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{2x+6}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{4}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)|_2^3 + 2\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{17}{10} + 2\mathrm{arctg}(x+1)|_2^3 \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{17}{10} + 2\mathrm{arctg}\,4 - 2\mathrm{arctg}\,3. \end{aligned}$$

Добили смо

$$I = \frac{1}{5}I_1 - \frac{1}{5}I_2 = \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{1}{10}\ln\frac{17}{10} - \frac{2}{5}\mathrm{arctg}\,4 + \frac{2}{5}\mathrm{arctg}\,3.$$

△

Задатак 2.13. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} e^x - 1 = t^2,\ t \geq 0 \\ e^x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int\limits_0^2 \frac{(t^2+1)t}{t^2+4} \cdot \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int\limits_0^2 \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2+4} \\ &= 2\left(\int\limits_0^2 \mathrm{d}t - 4\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4} \right) = 2\left(2 - 4 \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2}\Big|_0^2 \right) \\ &= 2(2 - \mathrm{arctg}\,1) = 2\left(2 - 2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.14. Израчунати интеграл $\int\limits_{-1}^{2} |xe^x|\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$I = \int\limits_{-1}^{2} |xe^x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} |xe^x|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} |xe^x|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x + \int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x.$$

$$I_1=\int xe^x\,\mathrm{d}x.\begin{pmatrix} u=x & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ dv=e^x\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=e^x\end{pmatrix}=xe^x-\int e^x\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C.$$

$$\begin{aligned} I &= -\int\limits_{-1}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x+\int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x=-(xe^x-e^x)|_{-1}^{0}+(xe^x-e^x)|_0^2\\ &= -(0-1+e^{-1}+e^{-1})+(2e^2-e^2+1)=1-\frac{2}{e}+e^2+1=e^2-\frac{2}{e}+2.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.15. Доказати да за непарну функцију f важи $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

Задатак 2.16. Доказати да за парну функцију f важи $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Задатак 2.17. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2}=t\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix}=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t\sin t}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=0.$$

Подинтегрална функција $f(t)=\frac{\cos^3 t\sin t}{1+\sin^2 t}$ је непарна на симетричном интервалу $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, па је интеграл једнак 0. △

Задатак 2.18. Израчунати $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{13+\operatorname{arctg}x+e^x\cos^2 x}{\cos x}\,dx$.

Решење. Важи

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{13+\operatorname{arctg}x+e^x\cos^2 x}{\cos x}\,dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{13}{\cos x}+\frac{\operatorname{arctg}x}{\cos x}+e^x\cos x\right)dx\\ &= 13\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{arctg}x}{\cos x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^x\cos x\,dx=I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

при чему је

$$\begin{aligned} I_1 &= 13\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=13\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\begin{pmatrix}\sin x=t\\ \cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{pmatrix}=13\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{13}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\ &= \frac{13}{2}\left(\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\ln\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\frac{13}{2}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)=13\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},\end{aligned}$$

$$I_2 \;=\; \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Урадимо неодређени интеграл

$$\begin{aligned} I_3 &= \int e^x \cos x \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \cos x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \\ dv = e^x & \Rightarrow & v = e^x \end{pmatrix} \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \sin x & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \cos x \\ dv = e^x & \Rightarrow & v = e^x \end{pmatrix} \\ &= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int \cos x e^x \right) \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x e^x = e^x \cos x + e^x \sin x - I_3. \end{aligned}$$

Добили смо да је

$$I_3 = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C,$$

одакле је

$$I_3 \;=\; \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Према томе,

$$I = 13 \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}.$$

△

Задатак 2.19. Израчунати интеграл $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x + x^5 + 3}{1+|x|}\,\mathrm{d}x.$

Решење. Функција $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + x^5}{1+|x|}$ је непарна на симетричном интервалу $(-\pi, \pi)$, па је интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x + x^5}{1+|x|}\,\mathrm{d}x$ једнак 0. Према томе,

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x + x^5 + 3}{1+|x|}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{1+|x|}\,\mathrm{d}x.$$

Функција $f(x) = \frac{3}{1+|x|}$ је парна на $(-\pi, \pi)$, па је

$$I = 2 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{3}{1+|x|}\,\mathrm{d}x = 6 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 6 \ln(1+x)|_0^{\pi} = 6 \ln(1+\pi).$$

△

Задатак 2.20. Израчунати интеграл $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Решење. Функција $f(x)=\frac{x}{3|\sin x|+2\cos^2 x}$ је непарна на симетричном интервалу $(-\pi,\pi)$, а функција $g(x)=\frac{\cos x}{3|\sin x|+2\cos^2 x}$ је парна на $(-\pi,\pi)$, па је интеграл једнак

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\cos x}{3|\sin x|+2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{3|\sin x|+2\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3|\sin x|+2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= 0+6\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3\sin x+2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c}\sin x=t\\ \cos \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right) = 6\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3t+2(1-t^2)} \\
&= 6\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{-2t^2+3t+2} = -6\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-3t-2} = -6\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)(t-2)} \\
&= -6\int\limits_0^1 \left(\frac{-\frac{2}{5}}{2t+1}+\frac{\frac{1}{5}}{t-2}\right)\mathrm{d}t = \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln(2t+1)|_0^1 - \frac{6}{5}\ln|t-2||_0^1 = \frac{6}{5}\ln 3+\frac{6}{5}\ln 2 \\
&= \frac{6}{5}\ln 6.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.21. Нека је f непрекидна и периодична функција на $(-\infty,+\infty)$ са периодом T. Тада важи:

а) $\int\limits_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_b^{b+T} f(x)\mathrm{d}x$, за свако $a,b\in\mathbb{R}$;

б) $\int\limits_a^{a+kT} f(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$, за свако $a\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$;

в) $\int\limits_a^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(x)\mathrm{d}x$ за свако $a,b\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$.

Решење. а) Важи

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ако у другом интегралу уведемо смену $x-T=t$ добијамо

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^{a} f(t+T)\mathrm{d}t = \int\limits_a^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ово важи за свако $a\in\mathbb{R}$, па одатле важи и једнакост $\int\limits_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_b^{b+T} f(x)\mathrm{d}x$.

б)

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{a+kT} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{a+T}^{a+2T} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{a+2T}^{a+3T} f(x)\mathrm{d}x + ... + \int\limits_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x + ... + \int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

в)

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} t = x + kT \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(t-kT)\mathrm{d}t = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{a+kT}^{b+kT} f(x)\mathrm{d}x.$$

△

Задатак 2.22. Израчунати интеграл $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

Решење. Не можемо увести смену $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ јер $\pi \in (0, 2\pi)$.

Први начин је да раздвојимо на два интеграла $\int\limits_0^\pi + \int\limits_\pi^{2\pi}$ и у сваком уведемо смену $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

Задатак ћемо урадити на други начин. Функција $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ је непрекидна на $[0, 2\pi]$, па је и Риман интеграбилна на $[0, 2\pi]$. Функција $f(x)$ је периодична (период је $T = 2\pi$) и парна, па важи

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)} &= \text{(погледати задатак 2.21 а))} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \\ &= \text{(функција је парна)} = 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \\ &= 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})(3+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = 4\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{(t^2+3)(2t^2+4)} \\ &= 2\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{2}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} \\ &= 2\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 0 = \pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

△

Задатак 2.23. Израчунати $\int\limits_{0}^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{200\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x &= 200\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = 200\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 200\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\ &= 200\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 200\sqrt{2}(-\cos x)|_0^{\pi} = 400\sqrt{2}.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.24. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$.

Решење. Овај интеграл није Риманов, већ несвојствен.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} &= \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = (\ln|x+1|-\ln|x+2|)\Big|_0^{+\infty}\\ &= \lim_{x\to+\infty}(\ln|x+1|-\ln|x+2|)-(0-\ln 2)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right)+\ln 2=\ln 2\end{aligned}$$

△

Задатак 2.25. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

Решење. Не можемо увести смену $t=\operatorname{tg}x$ јер је $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\in(0,2\pi)$.

Први начин је да раздвојимо на три интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ и у сваком уведемо смену $t=\operatorname{tg}x$.

Задатак ћемо урадити на други начин. Функција $f(x)=\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ је непрекидна на $[0,2\pi]$, па је и Риман интеграбилна на $[0,2\pi]$. Функција $f(x)$ задовољава следећу једнакост $f(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\sin^4(x+\frac{\pi}{2})+\cos^4(x+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}=f(x)$, одакле закључујемо да је периодична са периодом $\frac{\pi}{2}$ и важи

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x} &= (\text{погледати задатак 2.21 б})) = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\\
&= (f(x) \text{ је парна}) = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4\int\limits_{-1}^{1} \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2}}\\
&= 4\int\limits_{-1}^{1} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_{-1}^{0} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t + 4\int\limits_{0}^{1} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\Big|_{0}^{1}\\
&= \lim_{t\to 0_-} \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} - 0 + 0 - \lim_{t\to 0_+} \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\\
&= \frac{4\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.26. Ако је f непрекидна функција на $[0,1]$, онда је

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x;$

б) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$

Решење. а)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} t = \frac{\pi}{2} - x \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array}\right) = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\tfrac{\pi}{2} - t))\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t.$$

б)

$$\begin{aligned}
I = \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} t = \pi - x \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array}\right) = -\int\limits_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t))\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)\mathrm{d}t\\
&= \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - \int\limits_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - I,
\end{aligned}$$

одакле је $2I = \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t$, односно

$$I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

△

Задатак 2.27. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} t=\pi-x\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\end{pmatrix} = -\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Одавде је

$$2I=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix} \cos t=u\\ -\sin t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{pmatrix}=\pi\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\pi\mathrm{arctg}\,u\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Добили смо да је $I=\frac{\pi^2}{4}$. △

Задатак 2.28. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\mathrm{d}x}{2+3\sin x}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{2+3\sin x} &= \begin{pmatrix} t=\pi-x\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\mathrm{d}t}{2+3\sin(\pi-t)} = \int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\mathrm{d}t}{2+3\sin t} \\ &= \pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+3\sin t}-\int\limits_0^{\pi}\frac{t\mathrm{d}t}{2+3\sin t}. \end{aligned}$$

Одавде је

$$\begin{aligned} 2I &= \pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+3\sin t}=\begin{pmatrix} \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}=u\\ \mathrm{d}t=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ \sin t=\frac{2u}{1+u^2}\end{pmatrix}=\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}}{2+3\frac{2u}{1+u^2}}=\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{2\mathrm{d}u}{2+2u^2+6u} \\ &= \pi\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+3u+1}=\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\begin{pmatrix} u+\frac{3}{2}=z\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}z\end{pmatrix}=\pi\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}\frac{du}{z^2-\frac{5}{4}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{+\infty}=-\frac{\pi}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right|. \end{aligned}$$

Добили смо да је $I=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right|$. △

Задатак 2.29. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x\,\mathrm{d}x}{\sin^m x+\cos^m x}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x \mathrm{d}x}{\sin^m x+\cos^m x} = \begin{pmatrix} t=\frac{\pi}{2}-x \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \end{pmatrix} = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^m(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}t}{\sin^m(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^m(\frac{\pi}{2}-t)} \\ &= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^m t\mathrm{d}t}{\cos^m t+\sin^m t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m t\mathrm{d}t}{\cos^m t+\sin^m t}, \end{aligned}$$

одакле је

$$2I = I+I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x\mathrm{d}x}{\sin^m x+\cos^m x} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m t\mathrm{d}t}{\cos^m t+\sin^m t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x+\cos^m x}{\sin^m x+\cos^m x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Према томе, $I=\frac{\pi}{4}$. △

Задатак 2.30. Нека је f непрекидно диференцијабилна функција на $[0,1]$ и $f(1)-f(0)=1$. Доказати да је $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geq 1$.

Решење. Функција f је непрекидно диференцијабилна функција, па је $(f'(x))^2$ непрекидна на $[0,1]$, а одатле следи да је интеграл Риманов.

Потребно је доказати да важи $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - 1 \geq 0$.

Имамо

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - 1 &= \int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x - 1 \\ &= \int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x + 2(f(1)-f(0)) - 1 \\ &= \int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x + 1 = \int\limits_0^1 (f'(x)-1)^2\,\mathrm{d}x \geq 0. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.31. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \begin{pmatrix} \arcsin x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\mathrm{d}t \\ &= \begin{pmatrix} u=t & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \\ dv=\sin^2 t\mathrm{d}t & \Rightarrow & v=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{4}t\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{8}\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{16}(4+\pi^2) \end{aligned}$$

△

Задатак 2.32. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+7x+7}$.

Решење. Из једнакости

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+7)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+7}$$

добијамо систем

$$A+B=0, B+C=0, 7A+C=1,$$

чије је решење $A=\frac{1}{8}, B=-\frac{1}{8}, C=\frac{1}{8}$. Одатле је

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+7x+7} &= \frac{1}{8}\ln(x+1)\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{x^2+7}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{8}\int_0^1\frac{x-1}{x^2+7}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{16}\int_0^1\frac{2x}{x^2+7}\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+7}\\ &= \frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{16}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}\Big|_0^1\\ &= \frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{16}\ln\frac{8}{7}+\frac{1}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.33. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_1^2 x\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Решење. $2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+-\operatorname{arctg}2$. △

Задатак 2.34. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $(0,1]$. Из граничне вредности

$$\lim_{x\to 0_+}\ln x\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=0$$

следи да $x=0$ није сингуларитет и интеграл је Риманов.

Применићемо Њутн Лајбницову формулу. Неодређени интеграл је

$$\begin{aligned}&\int\ln x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\\ dv=\ln x\mathrm{d}x & \Rightarrow & v=x\ln x-x\end{pmatrix}\\ &= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x(\ln x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} u=\ln x-1 & \Rightarrow & \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ dv=\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} & \Rightarrow & v=\sqrt{1+x^2}\end{pmatrix}\\ &= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-(\ln x-1)\sqrt{1+x^2}+\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-(\ln x-1)\sqrt{1+x^2}+\int\frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

У последњем интегралу уведемо смену $1+x^2=t^2, t\geq 0$ и добијамо

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\,\mathrm{d}t = t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\ &= \sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C.\end{aligned}$$

Затим, примитивна функција је

$$F(x)=(x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\ln x+2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C.$$

Сада можемо применити Њутн Лајбницову формулу

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \ln x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x\\ =\;& (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\ln x+2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|\Bigg|_0^1\\ =\;& (x\ln x-x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}-1\right|\\ &-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\Big|_0^1\\ =\;& F(1)-\lim_{x\to 0_+}F(x)=2\sqrt{2}-2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-2+\ln 2.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.35. Израчунати $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

Решење. Урадићемо прво неодређен интеграл. Из једнакости

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

добијамо

$$1\equiv A(x^2+3x+2)+B(x^2+2x)+C(x^2+x),$$

одакле имамо систем

$$A+B+C=0, 3A+2B+C=0, 2A=1,$$

чије је решење $A=\frac{1}{2}, B=-1, C=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)} &= \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+C\\ &= \ln\frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+2|}}{|x+1|}+C.\end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x+2)} &= \ln\frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+2|}}{|x+1|}\Bigg|_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+2|}}{|x+1|}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=0-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \ln\frac{2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.36. Израчунати интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+e^x)}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[-1,1]$, па је интеграл Риманов.

$$I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+e^x)} = \left(\begin{array}{c} t=-x\\ \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x\end{array}\right) = -\int\limits_{1}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^{-t})}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^t\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)}.$$

Одавде имамо

$$\begin{aligned}I+I &= \int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^t\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1+e^t)\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+e^t)}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ &= \operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Према томе, $I=\frac{\pi}{4}$. △

Задатак 2.37. Израчунати интеграл $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg}x)\,\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned}I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg}x)\,\mathrm{d}x=\left(\begin{array}{c}\frac{\pi}{4}-x=t\\ \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x\end{array}\right)=-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2\cos t}{\cos t+\sin t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,\mathrm{d}t-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg}t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln 2}{4}-I.\end{aligned}$$

Одавде $I=\frac{\pi\ln 2}{8}$. △

Задатак 2.38. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[0,1]$, а одатле и интеграбилна на $[0,1]$. Важи

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} x=\operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}\end{array}\right) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int\limits_0^1 \ln(1+\operatorname{tg} t)\mathrm{d}t \\ &= (\text{погледати задатак 2.37}) = \frac{\pi \ln 2}{8}.\end{aligned}$$

△

Задатак 2.39. Израчунати интеграл $\int\limits_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x}\,\mathrm{d}x, a>0$.

Решење. Сменом $t=\frac{1}{x}$ добијамо

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^{\frac{1}{a}} \frac{|\ln\frac{1}{t}|}{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{a}}^a |\ln t|\cdot\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t} - \int\limits_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t}\,\mathrm{d}t - I,\end{aligned}$$

а одатле

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t}\,\mathrm{d}t = \left(\begin{array}{c} u=\ln t \\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{array}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ln a}^{\ln a} |u|\mathrm{d}u.$$

Ако је $a>1$, онда је $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\ln a}^0 u\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ln a}(-u)\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\Big|_{-\ln a}^0 - \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln a} = \frac{\ln^2 a}{2}$.

Ако је $a=1$, онда је $I=0$.

Ако је $0<a<1$, онда је $I=-\int\limits_a^{\frac{1}{a}}\frac{|\ln x|}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln^2 a}{2}$. △

Задатак 2.40. Нека су дати интеграли $I_n=\int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, где је $n\in\mathbb{N}$.

а) Израчунати I_0.

б) Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

в) Наћи a,b тако да важи $I_n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

Решење. а)

$$\begin{aligned} I_0 &= \int\limits_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x=t^2,\ t\geq 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{pmatrix} = 2\int\limits_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u=t \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ dv = e^t\mathrm{d}t \Rightarrow v = e^t \end{pmatrix} \\ &= 2te^t\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 e^t\mathrm{d}t = 2e - 2e^t\Big|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

За свако $x\in(0,1)$ важи $0\leq\sqrt{x}\leq 1$, одакле је

$$\int\limits_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_0^1 x^n e\mathrm{d}x = e\int\limits_0^1 x^n\mathrm{d}x = e\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{e}{n+1},$$

а са друге стране имамо ограничење

$$\int\limits_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^1 x^n\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Дакле, важи

$$\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{e}{n+1},$$

одакле помоћу Теореме о два полицајца следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

в)

$$\begin{aligned} I_n &= \int\limits_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} x=t^2,\ t\geq 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{pmatrix} = 2\int\limits_0^1 t^{2n+1}e^t\mathrm{d}t \\ &= 2\left(t^{2n+1}e^t\Big|_0^1 - (2n+1)\int\limits_0^1 t^{2n}e^t\mathrm{d}t\right) = 2e - 2(2n+1)\int\limits_0^1 t^{2n}e^t\mathrm{d}t \\ &= \begin{pmatrix} u=t^{2n}\Rightarrow \mathrm{d}u = 2nt^{2n-1}\,\mathrm{d}t \\ dv = e^t\mathrm{d}t \Rightarrow v = e^t \end{pmatrix} = 2e - 2(2n+1)\left(t^{2n}e^t\Big|_0^1 - 2n\int\limits_0^1 t^{2n-1}e^t\mathrm{d}t\right) \\ &= 2e - 2(2n+1)(e - nI_{n-1}) = -4ne + 2n(2n+1)I_{n-1}. \end{aligned}$$

Добили смо $I_{n-1} = \dfrac{4ne+I_n}{2n(2n+1)}$, односно $I_n = \dfrac{(4n+4)e+I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)}$.

Из $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ имамо $I_n = o(1)$, па је

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(4n+4)e+I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{(4n+4)e}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{e}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{2n}} + o(\tfrac{1}{n^2}) = \frac{e}{n}\cdot\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{-1} + o(\tfrac{1}{n^2}) = \frac{e}{n}\cdot\left(1-\frac{3}{2n}+o(\tfrac{1}{n})\right) + o(\tfrac{1}{n^2}) \\ &= \frac{e}{n} - \frac{3e}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

У претходној једнакости искористили смо чињеницу да ако је $I_{n+1} = o(1)$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} I_{n+1} \cdot \frac{n^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

па важи

$$\frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = o(\tfrac{1}{n^2}).$$

Добили смо $a = e$ и $b = -\dfrac{3e}{2}$. △

Задатак 2.41. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$.

Теорема 2.2. *Нека је f Риман интеграбилна на $[a,b]$ и $\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$.*

1) *Функција φ је непрекидна на $[a,b]$;*
2) *Ако је функција f непрекидна у некој тачки $x_0 \in [a,b]$, онда је φ диференцијабилна у тој тачки и важи*

$$\varphi'(x_0) = f(x_0).$$

Задатак 2.42. Наћи извод $\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 \,\mathrm{d}t\right)$.

Решење.

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 \,\mathrm{d}t\right) = \cos(\pi \cos^2 x)\cdot(-\sin x) - \cos(\pi \sin^2 x)\cdot \cos x.$$

△

Задатак 2.43. Наћи граничну вредност $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

Решење. Из граничне вредности $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{t^2} = +\infty$ следи да је $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty$. Такође важи $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty$. Можемо искористити Лопиталово правило

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t} &= (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}} \\ &= (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0\end{aligned}$$

△

Задатак 2.44. Одредити x за које функција $F(x) = \int\limits_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln \frac{t-1}{9} \,\mathrm{d}t$ достиже минимум на $(1, +\infty)$.

Решење. За $x > 1$ функција $\frac{1}{t}\ln\frac{t-1}{9}$ је непрекидна на $[x, x^2]$, па на основу Теореме 2.2 следи да је функција F диференцијабилна на $[x, x^2]$ за свако $x > 1$, односно диференцијабилна на $(1, +\infty)$ и важи

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_x^{x^2} \frac{1}{t}\ln\frac{t-1}{9}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x^2}\ln\frac{x^2-1}{9}\cdot 2x - \frac{1}{x}\ln\frac{x-1}{9} \\ &= \frac{1}{x}\left(\ln\frac{(x^2-1)^2}{81} - \ln\frac{x-1}{9}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\frac{(x^2-1)^2}{81}}{\frac{x-1}{9}}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{(x-1)(x+1)^2}{9}\right). \end{aligned}$$

Имамо $\frac{(x-1)(x+1)^2}{9} > 1$ акко $p(x) = x^3 + x^2 - x - 10 > 0$. Нула полинома је $x = 2$, па се може раставити $p(x) = (x-2)(x^2+3x+5)$, одакле је $p(x) > 0$ за $x \in (2, +\infty)$, а $p(x) < 0$ за $x \in (1, 2)$. Према томе, функција $F(x)$ је опадајућа на $(1, 2)$ и растућа на $(2, +\infty)$ и $x = 2$ је тачка глобалног минимума. △

Дефиниција 2.1. Нека је функција f дефинисана у интервалу $[a, b)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[a, \beta] \subset [a, b)$. Ако постоји лимес

$$\lim_{\beta \to b_-} \int\limits_a^{\beta} f(x)\mathrm{d}x,$$

он се назива несвојственим интегралом функције f на интервалу $[a, b)$ и означава са

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Тачка b се назива сингуларитетом. Ако постоји коначна гранична вредност, онда кажемо да интеграл $\int\limits_a^b$ конвергира, а ако не постоји, онда кажемо да интеграл дивергира.

Задатак 2.45. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, у зависности од реалног параметра α.

Решење. Испитајмо за које вредности параметра α постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\beta \to 0_+} \int\limits_\beta^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Ако је $\alpha \neq 1$ важи

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to 0_+} \int\limits_\beta^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\beta \to 0_+} \int\limits_\beta^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to 0_+} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\beta^1 = \lim_{\beta \to 0_+}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

За $\alpha = 1$ имамо

$$\lim_{\beta\to 0_+}\int\limits_{\beta}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{\beta\to 0_+}\ln|x|\Big|_{\beta}^{1} = \lim_{\beta\to 0_+}(-\ln\beta) = +\infty.$$

Према томе, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ конвергира ако и само ако $\alpha < 1$. △

Задатак 2.46. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$, $a < b$, у зависности од реалног параметра α.

Решење. Интеграл конвергира акко $\alpha < 1$. △

Задатак 2.47. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$, $a < b$ у зависности од реалног параметра α.

Решење. Интеграл конвергира акко $\alpha < 1$. △

Дефиниција 2.2. Нека је функција f дефинисана у интервалу $[a, +\infty)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$. Ако постоји лимес

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x,$$

он се назива несвојственим интегралом функције f на интервалу $[a, +\infty)$ и означава са

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Задатак 2.48. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, у зависности од реалног параметра α.

Решење. Испитајмо за које вредности параметра α постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^\beta \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Ако је $\alpha \neq 1$ важи

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^\beta \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^\beta x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1\\ +\infty, & \alpha < 1.\end{cases}\end{aligned}$$

За $\alpha = 1$ имамо

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^\beta \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\beta\to+\infty}\ln|x|\big|_1^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}\ln\beta = +\infty.$$

Према томе, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ конвергира ако и само ако $\alpha > 1$. △

Задатак 2.49. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Из следећег

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_0^\beta \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\beta\to+\infty}\operatorname{arctg}x\big|_0^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}\operatorname{arctg}\beta = \frac{\pi}{2}$$

следи да интеграл конвергира. △

Задатак 2.50. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x$.

Решење. Из следећег

$$\lim_{\beta\to-\infty}\int\limits_\beta^0 e^x\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\beta\to-\infty}e^x\big|_\beta^0 = \lim_{\beta\to-\infty}(1-e^\beta) = 1$$

следи да интеграл конвергира. △

Дефиниција 2.3. Нека је $a < c < b$. Тада интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ конвергира ако и само ако конвергирају интеграли $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$ и $\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ и при томе важи

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Задатак 2.51. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, у зависности од реалног параметра α.

Решење. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ конвергира ако и само ако конвергирају интеграли

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Интеграл I_1 конвергира акко $\alpha < 1$ (задатак 2.45), а интеграл I_2 конвергира акко $\alpha > 1$ (задатак 2.48).

Према томе, не постоји α за које оба интеграла конвергирају, па интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ дивергира за свако α. △

Задатак 2.52. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ конвергира ако и само ако конвергирају интеграли

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Интеграли I_1 и I_2 конвергирају јер важи

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to -1_+} \int\limits_{\beta}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to -1_+} \arcsin x\Big|_{\beta}^{0} = \lim_{\beta\to -1_+} -\arcsin\beta = \frac{\pi}{2},$$

$$I_2 = \int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to 1_-} \int\limits_{0}^{\beta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to 1_-} \arcsin x\Big|_{0}^{\beta} = \lim_{\beta\to 1_-} \arcsin\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Одавде, $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ конвергира и има вредност π. △

Теорема 2.3. *Нека су $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ несвојствени интеграли са сингуларитетом у тачки b. Тада важи:*

1° *Ако интеграли конвергирају, онда важи једнакост*

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b \beta g(x)\mathrm{d}x.$$

2° *Ако су f и g глатке функције и постоји коначан $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)$, онда $\int\limits_a^b (f(x)g'(x))\mathrm{d}x$ конвергира акко конвергира $\int\limits_a^b (f'(x)g(x))\mathrm{d}x$. У том случају важи једнакост*

$$\int\limits_a^b (f(x)g'(x))\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b (f'(x)g(x))\mathrm{d}x.$$

Теорема 2.4. *Несвојствени интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *са сингуларитетом у* $x = b$ *конвергира акко за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* β_0, $a < \beta_0 < b$, *тако да за сваки пар* $\beta', \beta'', \beta_0 < \beta' < \beta'' < b$, *важи*

$$\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Дефиниција 2.4. Несвојствени интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ апсолутно конвергира ако конвергира интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Теорема 2.5. *Ако* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *апсолутно конвергира, онда он и конвергира.*

Теорема 2.6. *Нека су* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *несвојствени интеграли са сингуларитетом у тачки* b, *при чему је* $f(x) \leq g(x)$ *на* $x \in [a, b)$.

1° *Ако* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *конвергира, онда конвергира и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2° *Ако* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *дивергира, онда дивергира и интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3° *Ако постоји* $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = C, 0 < C < +\infty$, *онда су интеграли* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *еквиконвергентни, односно један конвергира акко други конвергира.*

Задатак 2.53. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Из неједнакости $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ и из конвергенције интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (задатак 2.48 када је $\alpha = 2$) следи да $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ апсолутно конвергира (Теорема 2.6). На основу Теореме 2.5 интеграл и обично конвергира. △

Теорема 2.7. *Нека су* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *несвојствени интеграли са сингуларитетом у тачки* b, *при чему је* $g(x) > 0$ *и* $f(x) \geq 0$ *за* $x \in [a, b)$. *Ако постоји* $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = C, 0 \leq C \leq +\infty$, *тада важи:*

1° *Ако је* $C = 0$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *конвергира, онда конвергира и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2° *Ако је* $C = +\infty$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *дивергира, онда дивергира и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3° *Ако је* $0 < C < +\infty$, *онда су интеграли* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *еквиконвергентни, односно један конвергира акко други конвергира. Специјалан случај је када је* $C = 1$, *односно* $f(x) \sim g(x)$ *када* $x \to b$.

Задатак 2.54. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Из неједнакости $e^{-x^2} \le e^{-x}$ за $x \ge 1$ и из конвергенције интеграла $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (има вредност 1) следи да $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ конвергира (Теорема 2.6). Интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ конвергира јер је то Риманов интеграл (подинтегрална функција је непрекидна на $[0,1]$.) Дакле, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ конвергира. △

Задатак 2.55. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Решење. Из неједнакости $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{x^2}$ за $x \ge 1$ и из конвергенције интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (задатак 2.48) следи да $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ конвергира (Теорема 2.6). △

Задатак 2.56. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ у зависности од реалног параметра n.

Решење. За $n \le 0$ сингуларитет је $+\infty$ и важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = +\infty$, одакле интеграл дивергира.

За $n > 0$ имамо два сингуларитета, $+\infty$ и 0. Да би почетни интеграл конвергирао потребно је да конвергирају интеграли $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ и $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_1. Функција $\frac{\ln(1+x)}{x^n}$ се у околини $x = 0$ понаша као

$$\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim \frac{x}{x^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}},$$

па интеграл I_1 конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{n-1}}\,\mathrm{d}x$, а он конвергира када је $n-1 < 1$, односно $n < 2$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_2. Када $x \to +\infty$ важи

$$\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim \frac{\ln x}{x^n} \sim \frac{1}{x^n(\ln x)^{-1}}.$$

Интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x^n(\ln x)^{-1}}$ конвергира акко $n > 1$, па и интеграл I_2 конвергира када $n > 1$.

Одавде следи да I конвергира акко $1 < n < 2$. △

Задатак 2.57. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b}\,\mathrm{d}x$ у зависности од реалних параметара a и b.

Решење. Да би почетни интеграл конвергирао потребно је да конвергирају интеграли

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b}\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b}\,\mathrm{d}x.$$

Испитајмо конвергенцију интеграла I_1. Функција $\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b}$ се у околини $x = 0$ понаша као

$$\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b} \sim \frac{ax}{x^b} \sim \frac{a}{x^{b-1}},$$

па интеграл I_1 конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int\limits_0^1 \frac{a}{x^{b-1}}\,\mathrm{d}x$, а он конвергира када је $b - 1 < 1$, односно $b < 2$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_2. Када $x \to +\infty$ важи

$$\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b} \sim \operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^b}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^b}$ конвергира акко $b > 1$, па и интеграл I_2 конвергира када $b > 1$.

Одавде следи да I конвергира акко $1 < b < 2$. △

Задатак 2.58. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^1 \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}\,\mathrm{d}x$ у зависности од реалног параметра n.

Решење. Да би почетни интеграл конвергирао потребно је да конвергирају интеграли

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}} \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}$$

Испитајмо конвергенцију интеграла I_1. Када $x \to 0$ важи

$$\frac{x^n}{\sqrt{1-x^n}} \sim x^n,$$

па интеграл I_1 конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{-n}}\,\mathrm{d}x$, а он конвергира када је $-n < 1$, односно $n > -1$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_2. Уведимо смену тако да 0 буде сингуларитет

$$I_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}} = \left(\begin{array}{c} 1 - x = t \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array} \right) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t)^n\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(1-t)^n}}.$$

Када $t \to 0$ важи $\frac{(1-t)^n}{\sqrt{1-(1-t)^n}} \sim \frac{1}{t^n}$, па интеграл I_2 конвергира када је $n < 1$. Почетни интеграл конвергира акко $-1 < n < 1$. △

Задатак 2.59. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$.

Решење. С обзиром да је $x^4-x^2+1=(x^2-1)^2+x^2>0$, интрреграл има само сингуларитет $+\infty$. Када $x\to+\infty$ подинтегрална функција се понаша као

$$\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\sim\frac{1}{x^2},$$

а из конвергенције интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ следи да и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$ конвергира. △

Задатак 2.60. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Решење. Несвојствени интеграл има сингуларитет у $+\infty$. Када $x\to+\infty$ имамо

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\sim\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}},$$

па из конвергенције интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}}}$ следи и конвергенција интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. △

Задатак 2.61. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$.

Решење. Несвојствени интеграл има сингуларитет у 0 и у $+\infty$.

Када $x\to 0$ имамо

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

па из конвергенције интеграла $\int\limits_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{2}}}$ следи и конвергенција интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Када $x\to+\infty$ имамо

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}\sim\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

па из конвергенције интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ следи и конвергенција интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Према томе, интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$ конвергира. △

Задатак 2.62. Испитати конвергенцију интеграла $I=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)(x-1)}}$ у зависности од реалног параметра a.

Решење. Ако $a \in (0,1)$, онда интеграл има сингуларитет у $x = 1$ и када $x \to 1$ важи $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)(x-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} = C \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, одакле на основу Теореме 2.7 и задатка 2.46 следи да I конвергира.

Ако је $a = 1$, онда имамо интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)(x-1)}} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)}(x-1)}$, при чему је $\frac{1}{\sqrt{(x+1)}(x-1)} \sim \frac{1}{2(x-1)}$ када $x \to 1$, па на основу Теореме 2.7 и задатка 2.46 следи да I дивергира.

Ако је $a > 1$, онда за $x \in (1,a)$ важи $(x^2-a^2)(x-1) < 0$, па подинтегрална функција није дефинисана на $(1,a)$. △

Задатак 2.63. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

Теорема 2.8. *а) Интеграл* $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ *конвергира акко* $\alpha > 1$ *или* $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

б) Интеграл $\int\limits_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ *конвергира акко* $\beta < 1$.

в) Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ *конвергира акко* $\alpha > 1, \beta < 1$.

Задатак 2.64. а) Испитати конвергенцију интеграла (гама функција)

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

у зависности од реалног параметара x.

б) Доказати $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ за $x > 1$.

в) Доказати $\Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$.

Решење. а)

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u = e^t \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u} \end{pmatrix} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 (\ln u)^{1-x}},$$

одакле на основу задатка 2.8 (део под в)) следи да интеграл конвергира акко $1 - x < 1$, односно $x > 0$.

б)

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u = t^{x-1} \ \Rightarrow \ \mathrm{d}u = (x-1)t^{x-2}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t \ \Rightarrow \ v = -e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= -e^{-t}t^{x-1}|_0^{+\infty} + (x-1) \int\limits_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t}\mathrm{d}t = (x-1)\Gamma(x-1). \end{aligned}$$

Искористили смо $\lim\limits_{t\to 0} e^{-t}t^{x-1} = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t} = 0$.

в) Важи $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}|_0^{+\infty} = 1$ и

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = ... = (n-1)(n-2)\cdot ... \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. △

Задатак 2.65. Испитати конвергенцију интеграла (бета функција)

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

у зависности од реалних параметара x и y.

Решење. Када $t \to 0_+$ важи $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, а када $t \to 1_-$ имамо $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$, одакле следи да интеграл конвергира акко $1-x<1$ и $1-y<1$, односно $x>0, y>0$. △

Наведимо без доказа особине бета и гама функције које ћемо користити.

а) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ за свако $x \in (0,1)$.

б) $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ за свако $x, y > 0$.

Задатак 2.66. Испитати конвергенцију интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$.

Решење. Потребно је испитати да ли постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta) = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta \sin x\mathrm{d}x.$$

Посматрајмо низове $\beta_n = 2n\pi$ и $\beta_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Важи

$$\lim_{n\to} I(\beta_n) = \lim_{n\to 0} \int_0^{2n\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to} I(\beta_n') = \lim_{n\to 0} \int_0^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 1,$$

одакле можемо закључити да не постоји $\lim\limits_{\beta\to+\infty} I(\beta)$ и интеграл дивергира. △

Задатак 2.67. Нека су дати интеграли $I_n = \int\limits_0^n \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}$.

а) Доказати да интеграли I_n $(n \in \mathbb{N})$ конвергирају.

б) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

в) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{\sqrt{n}}$.

Задатак 2.68. Нека су дати несвојствени интеграли

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{ctg}x}\,\mathrm{d}x \text{ и } J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x.$$

а) Испитати конвергенцију интеграла I и J.

б) Доказати да је $I=J=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Задатак 2.69. Нека су дати несвојствени интеграли

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \text{ и } J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

а) Испитати конвергенцију интеграла I и J.

б) Доказати да је $I=J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Задатак 2.70. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Решење. Интеграл је несвојствени, али сменом можемо добити Риманов. Наиме,

$$\int\limits_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} t=\arcsin x\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.$$

△

Задатак 2.71. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \arcsin x=t\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}.$$

△

Задатак 2.72. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \operatorname{arctg}x=t\\ \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}.$$

△

Задатак 2.73. Ако конвергирају, израчунати следеће интеграле:

а) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;

б) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x$;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

Решење. а) Увођењем смене

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \left(\begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t \end{array}\right) = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

добијамо да интеграл дивергира.

б)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} u = \ln\frac{x+1}{x} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = x \end{array}\right) \\ &= x\ln\frac{x+1}{x}\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln 2 - 0 + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - 0 + \ln|x+1|\big|_0^1 = 2\ln 2.\end{aligned}$$

в) Када $x \to +\infty$ имамо $\frac{1}{x^2+x-2} \sim \frac{1}{x^2}$, одакле на основу задатка 2.48 интеграл дивергира.

△

Задатак 2.74. Доказати да интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)}$ конвергира за свако $p \in \mathbb{R}$ и да његова вредност не зависи од p.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)} \\ &= \left(\text{у другом интегралу увешћемо смену } \frac{1}{x} = t\right) \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)} + \int_0^1 \frac{x^p\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1 \frac{(1+x^p)\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)} \\ &= \operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.75. Израчунати интеграл $\int\limits_0^1 \ln\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x$

Решење.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \ln\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} x=\cos 2t \\ \mathrm{d}x=-2\sin 2t\mathrm{d}t \\ 1-\cos 2t = 2\sin^2 t, 1+\cos 2t = 2\cos^2 t \end{array}\right) \\
&= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2\cos^2 t}-\sqrt{2\sin^2 t}\right)\sin 2t\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}|\cos t|-\sqrt{2}|\sin t|\right)\sin 2t\mathrm{d}t \\
&= \ln 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\mathrm{d}t + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos t-\sin t\right)\sin 2t\mathrm{d}t = \ln 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2I_1 \\
&= \frac{\ln 2}{2}+2I_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos t-\sin t\right)\sin 2t\mathrm{d}t = \left(\begin{array}{c} u=\ln\left(\cos t-\sin t\right) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u=\frac{-\sin t-\cos t}{\cos t-\sin t}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v=\sin 2t\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; v=-\frac{1}{2}\cos 2t \end{array}\right) \\
&= \ln\left(\cos t-\sin t\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\,\cos 2t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\,\cos 2t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}t+1}{1-\mathrm{tg}t}\left(\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2 t}-1\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \frac{u+1}{1-u}\left(\frac{2}{1+u^2}-1\right)\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \frac{(u+1)^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \left(\frac{1}{u^2+1}+\frac{2u}{(u^2+1)^2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}u\big|_0^1 - \frac{1}{u^2+1}\Bigg|_0^1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Према томе,

$$I=\frac{\ln 2}{2}+2I_1=\frac{\ln 2}{2}+2\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

△

Задатак 2.76. Израчунати интеграл $\int_0^\pi \frac{x\mathrm{d}x}{4+5\sin x}$

Решење. $\frac{\pi\ln 2}{3}$. △

Задатак 2.77. Доказати:

а) $\int\limits_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t \sim x$ када $x \to 0$;

б) $\int\limits_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ када $x \to +\infty$.

Решење. а)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t\right)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

б)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\int\limits_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)} = 2 \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{e^{x^2}2x^2 - e^{x^2}}{x^2}} = 2 \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x^2-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

△

Задатак 2.78. За $n \in \mathbb{N}$ израчунати следеће интеграле:

а) $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \mathrm{d}x$;

б) $\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Решење. а)

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} x = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \end{array} \right) = \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \dots = \frac{1}{2}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\cdot(2n-1)!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot(2n-1)!\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} \mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} x = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t = \left(\begin{array}{c} u = t^n \ \Rightarrow\ \mathrm{d}u = nt^{n-1}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t \ \Rightarrow\ v = -e^{-t} \end{array} \right) \\
&= -\frac{1}{2}t^n e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}n \int\limits_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}n \int\limits_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \dots = \frac{1}{2}n(n-1)\cdot\dots\cdot 1 \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{n!}{2}.
\end{aligned}$$

△

Задатак 2.79. Израчунати $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x$, где је $p > -1$.

Решење.

$$\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x = \left(\begin{array}{c} \ln\frac{1}{x} = t \\ \mathrm{d}x = -e^{-t}\mathrm{d}t \end{array}\right) = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \Gamma(p+1).$$

△

Задатак 2.80. Наћи природне бројеве m и n за које интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$ конвергира и за такве вредности m и n израчунати интеграл.

Решење. Сингуларитет је у $+\infty$. Када $x \to +\infty$ имамо

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^{n-m+1}},$$

одакле интеграл конвергира акко $n - m + 1 > 1$, односно $n > m$. За вредности m, n за које је $n > m$ важи

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} x^n = t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{d}t \end{array}\right) = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} t^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}. \end{aligned}$$

△

Задатак 2.81. Нека су $p, q > -1$ реални бројеви. Израчунати $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x &= \left(\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \\ -\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(-2t\mathrm{d}t) \end{array}\right) \\ &= \int_0^1 t^p(1-t^2)^{\frac{q}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^p(1-t^2)^{\frac{q-1}{2}}\mathrm{d}t = \left(\begin{array}{c} t = \sqrt{u} \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} \end{array}\right) \\ &= \int_0^1 u^{\frac{p}{2}}(1-u)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{p-1}{2}}(1-u)^{\frac{q-1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right). \end{aligned}$$

△

3 Примене интеграла

Задатак 3.1. Израчунати површину дела равни ограниченог параболом $y = 2 - x^2$ и правом $y = -x$.

Решење. $P = \int\limits_{-1}^{2}(2 - x^2 + x)\mathrm{d}x = (2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$. △

Задатак 3.2. Наћи запремину тела добијеног ротацијом области између x-осе и криве $y = x^2 - 2x$ око: а) x-осе; б) праве $y = -1$; в) y-осе; г) праве $x = 2$; д) праве $y = 2$.

Решење. а) $V = \pi\int\limits_{0}^{2}(x^2 - 2x)^2\mathrm{d}x = \pi\int\limits_{0}^{2}(x^4 - 2x^3 + 4x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{16\pi}{15}$;

б) $V = \pi\int\limits_{0}^{2}(1 - (x^2 - 2x + 1)^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{5}$;

в) $V = \pi\int\limits_{-1}^{0}((1 + \sqrt{1+y})^2 - (1 - \sqrt{1+y})^2)\,\mathrm{d}y = 4\pi\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{1+y}\,\mathrm{d}y = \frac{8\pi}{3}$;

г) $V = \frac{8\pi}{3}$;

д) $V = \pi\int\limits_{0}^{2}((x^2 - 2x - 2)^2 - (-2)^2)\,\mathrm{d}x = \frac{32\pi}{5}$. △

Задатак 3.3. Наћи дужину лука криве $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}, x \in [1, 4]$.

Решење. $L = \int\limits_{1}^{4}\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{4}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3}$. △

Задатак 3.4. Наћи површину површи добијене ротацијом криве $y = \sqrt{2x+1}, x \in [0, 3]$ око x-осе.

Решење.

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\int\limits_{0}^{3} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int\limits_{0}^{3}\sqrt{2x+1}\sqrt{1 + \frac{1}{2x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{2}\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{28\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

△

Задатак 3.5. Нека су $A(-a, a^2)$ и $B(a, a^2)$ тачке на параболи $y = x^2$, нека је $O(0, 0)$ координатни почетак и нека је са $P(x^2, a^2)$ означена површина дела равни ограниченог параболом $y = x^2$ и правом $y = a^2$. Израчунати $\lim\limits_{a\to 0}\frac{P(\triangle ABO)}{P(x^2,a^2)}$.

Решење. $P(\triangle ABO) = a^3,\ P(x^2, a^2) = \int\limits_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4a^3}{3},\ \lim\limits_{a\to 0}\frac{P(\triangle ABO)}{P(x^2,a^2)} = \frac{3}{4}$. △

Задатак 3.6. Израчунати обим и површину фигуре ограничене кривом $(x-1)^2 + y^2 = 4$ и правама $y = 0$, $x = 1$ и $\sqrt{3}x + 3y - 3\sqrt{3} = 0$. Затим, одредити запремину тела које се добија ротацијом дате фигуре око x-осе.

Решење.

$$\begin{aligned}
P &= \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{4-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}{2} = \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{4-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \begin{pmatrix} x-1=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \begin{pmatrix} t = 2\sin u \\ \mathrm{d}t = 2\cos u \mathrm{d}u \end{pmatrix} = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \cos^2 u \mathrm{d}u + \frac{5\sqrt{3}}{6} \\
&= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2u)\mathrm{d}u + \frac{5\sqrt{3}}{6} = 2\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} + \frac{5\sqrt{3}}{6} = (2u+\sin 2u)|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \\
&= 2\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O &= O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{(0-1)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} + O_4 \\
&= 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + O_4 = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + O_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_4 &= \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{4-(x-1)^2}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1 + \left[\frac{-2(x-1)}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}\right]^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1 + \frac{(x^2-2x+1)}{4-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{\frac{4-x^2+2x-1+x^2-2x+1}{4-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x \begin{pmatrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{pmatrix} \\
&= 2\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\arcsin\frac{t}{2}\Bigg|_{-2}^{-1} = 2\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},
\end{aligned}$$

$$O = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + O_4 = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 = \pi\int\limits_{-1}^{0} \left(\sqrt{4-(x-1)^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \pi\int\limits_{0}^{1} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\int\limits_{-1}^{0} (3+2x-x^2)\,\mathrm{d}x + \pi\int\limits_{0}^{1} \left(3 - 2x + \frac{1}{3}x^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \pi\left(3x - x^2 - \frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \pi\left(3-1-\frac{1}{3}\right) + \pi\left(3-1-\frac{1}{9}\right) \\
&= \frac{34}{9}\pi.
\end{aligned}$$

△

Задатак 3.7. Израчунати површину и запремину торуса који се добија ротацијом круга $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ око x-осе.

Решење. $V = 2\pi^2 a^2 b, P = 4\pi^2 ab.$ △

4 Нумерички редови

4.1 Појам и својства бројног реда

Неке је $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ низ реалних бројева. Израз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \ ,$$

назива се бесконачним реалним редом с општим чланом a_n, или краће реалним редом. Збирови

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1,\\
&s_2 = a_1 + a_2,\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&............\\
&s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\\
&............
\end{aligned}$$

називају се парцијалним збировима или парцијалним сумама реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција 4.1. Ако постоји коначан лимес $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ низа $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, онда се каже да тај ред конвергира и да му је збир једнак s. У том случају се пише $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тај запис се користи и када је $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$. За ред који не конвергира (било да је $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ бесконачан, било да не постоји) каже се да дивергира.

Теорема 4.1. *Ако ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира, онда конвергира и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$, $c \in \mathbb{R}$. *При томе је* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ако редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *конвергирају, онда конвергира и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. *При томе је* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 4.2. *Ако ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира, онда је* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задатак 4.1. Израчунати парцијалне суме и испитати конвергенцију редова:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)$.

Решење. а) Из једнакости $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ имамо

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1},$$

одакле је $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$, па ред конвергира.

б) Низ парцијалних сума је

$$S_n = \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}\right) + \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) + ... + \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = \sqrt[3]{n+1} - 1,$$

одакле је $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, па ред дивергира.

в) Из једнакости $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ следи да је $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, одакле је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, па ред конвергира.

г) Низ парцијалних сума је $S_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} + 1 - \sqrt{2}$ и ред конвергира.

△

Задатак 4.2. Нека је $q \in \mathbb{R}$. Испитати конвегенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$.

Решење. Нађимо низ парцијалних сума

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{m+1}}{1-q}, & q \neq 1; \\ m, & q = 1. \end{cases}$$

Ако је $|q| < 1$, онда је $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

Ако је $q > 1$, онда је $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = +\infty$.

Ако је $q = 1$, онда је $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty} m = +\infty$.

Ако је $q \leq -1$, онда не постоји $\lim\limits_{m\to\infty} S_m$.

Према томе, ред конвергира за $|q| < 1$.

△

Задатак 4.3. Нека је $|q| < 1$. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$.

Решење. Први начин. Нека је $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}$ и множењем са обе стране са q имамо систем

$$\begin{aligned} S_n &= q + 2q^2 + 3q^3 + ... + nq^n \\ qS_n &= q^2 + 2q^3 + 3q^4 + ... + nq^{n+1}. \end{aligned}$$

Одузимањем друге једначине од прве добијамо

$$(1-q)S_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n - nq^{n+1},$$

одакле је

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1-q}(q + q^2 + q^3 + ... + q^n - nq^{n+1}) = \frac{q}{1-q}(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} - nq^n) \\ &= \frac{q}{1-q}\left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n\right). \end{aligned}$$

Одавде је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q}{1-q}\left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n\right) = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Други начин за решавање овог задатка је помоћу интеграције функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

△

Задатак 4.4. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{3^n}$.

Решење. Из познате суме (задатак 4.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1 = -\frac{1}{4},$$

одакле је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{3^n} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

△

Задатак 4.5. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Решење. На основу задатка 4.3 имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$$

. △

Задатак 4.6. Сумирати ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

Решење.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

Низ парцијалних сума је једнак

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{4m+1}\right), \end{aligned}$$

одакле је

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{1}{4}.$$

△

Задатак 4.7. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

Решење. Из граничне вредности низа

$$\lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

долазимо до закључка да општи члан не конвергира нули, па ред дивергира на основу Теореме 4.2. △

4.2 Редови с позитивним члановима

Дефиниција 4.2. За ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

кажемо да је ред с позитивним члановима ако постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $a_n \geq 0$ за $n \geq n_0$. Код ових редова низ (s_n) парцијалних сума је растући за $n \geq n_0$.

Теорема 4.3. *Ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с позитивним члановима конвергира ако и само ако је низ* (s_n) *његових парцијалних сума ограничен.*

Теорема 4.4. *Нека су дати редови* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *с позитивним члановима, при чему постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да је* $a_n \leq b_n$ *за* $n \geq n_0$*.*

- *а) Ако ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *конвергира, онда и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира.*
- *б) Ако ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *дивергира, онда и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *дивергира.*

Теорема 4.5. *Нека су дати редови* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *с позитивним члановима, при чему* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,\ 0 \leq K \leq +\infty$*.*

- *а) Ако је* $K = +\infty$ *и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *дивергира, онда и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *дивергира.*
- *б) Ако је* $K = 0$ *и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *конвергира, онда и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира.*
- *в) Ако је* $0 < K < +\infty$*, онда су редови* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *еквиконвергентни. Специјалан случај, ако је* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ *(кажемо да се* a_n *понаша као* b_n *и пишемо* $a_n \sim b_n, n \to +\infty$*) редови су еквиконвергентни.*

Теорема 4.6. *(Даламберов критеријум) Нека је дат позитиван ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

- *а) Ако постоје* $n_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \mathbb{R}$*, тако да је*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \textit{за } n \geq n_0,$$

онда ред конвергира.

Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \mathbb{R}$, *тако да је*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1 \quad \text{за } n \geq n_0,$$

онда ред дивергира.

б) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *онда за* $q < 1$ *ред конвергира, а за* $q > 1$ *ред дивергира. За* $q = 1$ *овај критеријум нам не може помоћи да одредимо конвергенцију.*

Теорема 4.7. *(Кошијев критеријум) Нека је дат позитиван ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

а) Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \mathbb{R}$, *тако да је*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \text{за } n \geq n_0,$$

онда ред конвергира.

Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \mathbb{R}$, *тако да је*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1 \quad \text{за } n \geq n_0,$$

онда ред дивергира.

б) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *онда за* $q < 1$ *ред конвергира, а за* $q > 1$ *ред дивергира. За* $q = 1$ *овај критеријум нам не може помоћи да одредимо конвергенцију.*

Теорема 4.8. *(Уопштени Кошијев критеријум) Нека је дат позитиван ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Ако је* $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = q$, *онда за* $q < 1$ *ред конвергира, а за* $q > 1$ *ред дивергира. За* $q = 1$ *овај критеријум нам не може помоћи да одредимо конвергенцију.*

Теорема 4.9. *(Интегрални критеријум) Нека је* f *непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за* $x \geq 1$ *и нека је* $a_n = f(n)$. *Тада ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира ако и само ако конвергира несвојствени интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Задатак 4.8. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$?

Решење. На основу интегралног критеријума (Теорема 4.9) важи да ред конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, а он на основу задатка 2.48 конвергира за $\alpha > 1$. △

Задатак 4.9. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}$.

Решење. Ред је позитиван јер је $\cos\frac{1}{n} \geq 0$ за $n \in \mathbb{N}$. На основу асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{\cos\frac{1}{n}}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ред конвергира на основу Теореме 4.5 (део под в)) и задатка 4.8. △

Задатак 4.10. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+2n}$.

Решење. На основу асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{n+4}{n^2+2n} \sim \frac{1}{n},$$

ред дивергира на основу Теореме 4.5 (део под в)) и задатка 4.8. △

Задатак 4.11. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Решење. На основу интегралног критеријума важи да ред конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$, а он на основу Теореме 2.8 конвергира за $\alpha > 1$ и за $\alpha = 1$, $\beta > 1$ △

Задатак 4.12. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^3}$.

Решење. Општи члан не тежи нули ($\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n^3} = 1$), па ред дивергира. △

Задатак 4.13. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sin n}$.

Решење. За свако $n \geq 1$ важи $\frac{1}{n+\sin n} \geq \frac{1}{n+1}$, па на основу дивергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ и на основу Теореме 4.4 почетни ред дивергира. △

Задатак 4.14. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{\frac{1}{n^2}}\right)$.

Решење. На основу асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = 1 - e^{\frac{1}{n^2}} \sim 1 - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2},$$

ред конвергира на основу Теореме 4.5 (део под в)) и задатка 4.8. △

Задатак 4.15. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$.

Решење. На основу асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2},$$

ред конвергира на основу Теореме 4.5 (део под в)) и задатка 4.8. △

Задатак 4.16. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Решење. На основу асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ред дивергира на основу Теореме 4.5 (део под в)) и на основу дивергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (погледати задатак 4.8). △

Задатак 4.17. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=19}^{\infty} \sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2}$.

Решење. На основу асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = \sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2} \sim \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ред конвергира на основу Теореме 4.5 (део под в)) и на основу конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (погледати задатак 4.8). △

Задатак 4.18. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n^2(-1)^n}$.

Решење. На основу асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{1}{2^n+n^2(-1)^n} \sim \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1+(-1)^n\frac{n^2}{2^2}} \sim \frac{1}{2^n},$$

при чему смо искористили $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$, ред конвергира на основу Теореме 4.5 (део под в)) и на основу конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (погледати задатак 4.2). △

Задатак 4.19. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a \sin\frac{1}{n^b}\ln\frac{n+1}{n}$.

Решење. Имамо асисмптотског понашања општег члана када $n \to +\infty$

$$a_n = n^a\sin\frac{1}{n^b}\ln\frac{n+1}{n} \sim n^a\sin\frac{1}{n^b}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n^a\cdot\frac{1}{n^b}\cdot\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^{-a+b+1}}.$$

На основу задатка 4.8 ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-a+b+1}}$ конвергира ако је $-a+b+1 > 1$, то јест ако је $a < b$. На основу Теореме 4.5 (део под в)) следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a\sin\frac{1}{n^b}\ln\frac{n+1}{n}$ конвергира ако је $a < b$. △

Задатак 4.20. Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ конвергирају, доказати да конвергирају и редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$.

Решење. а) Из неједнакости $|a_nb_n| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ и конвергенције редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$, следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ конвергира, другим речима ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ апсолутно конвергира, а одатле и обично конвергира.

б) На основу једнакости $(a_n-b_n)^2 = a_n^2-2a_nb_n+b_n^2$, следи да из конвергенције редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ (део под а)) конвергира и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2$.

в) Следи из дела под а) када се узме $b_n = \frac{1}{n}$. △

Задатак 4.21. Нека је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан ред са позитивним члановима и нека је $\alpha > 1$. Доказати да конвергирају и следећи редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin a_n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$.

Решење. а) Коришћењем неједнакости $\sin a_n \leq a_n$ и на основу Теореме 4.4 следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ конвергира.

б) Коришћењем неједнакости $\sin a_n^{\alpha} \leq a_n$ за $n \geq n_0$ и на основу Теореме 4.4 следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ конвергира.

в) На основу асимптотског понашања општег члана $e^{a_n} - 1 \sim a_n$ следи да ред конвергира (погледати Теорему 4.5). △

Задатак 4.22. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4\end{aligned}$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 4.6, део под б)) следи да ред дивергира $(4 > 1)$. △

Задатак 4.23. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 4.7, део под б)) следи да ред конвергира $(\frac{1}{2} < 1)$. △

Задатак 4.24. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 4.7, део под б)) следи да ред конвергира $(0 < 1)$. △

Задатак 4.25. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!3^n(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{3}{4}$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 4.6, део под б)) следи да ред конвергира ($\frac{3}{4} < 1$). △

Задатак 4.26. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+5)n}{3^n}$.

Решење. Испитајмо конвергенцију редова

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{3^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{3^n}.$$

Из граничних вредности

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5}\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3},$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 4.7, део под б)) следи да редови конвергирају ($\frac{1}{3} < 1$, $\frac{2}{3} < 1$), а одатле конвергира и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+5)n}{3^n}$ као збир два конвергентна реда. △

Задатак 4.27. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{e^n}$.

Решење. Испитајмо конвергенцију редова

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n}.$$

Из граничних вредности

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{e} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{e^n}} = \frac{2}{e},$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 4.7, део под б)) следи да редови конвергирају ($\frac{1}{e} < 1$, $\frac{2}{e} < 1$), а одатле конвергира и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{e^n}$ као збир два конвергентна реда. △

Задатак 4.28. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^{-n}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n+1)}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{-n}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\frac{2(n+1)}{n-1}} = \frac{1}{2}e^2,\end{aligned}$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 4.7, део под б)) следи да ред дивергира ($\frac{1}{2}e^2 > 1$). △

ЗАДАТАК 4.29. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 4.7, део под б)) следи да ред конвергира ($0 < 1$). △

ЗАДАТАК 4.30. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(3(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!(n+3)!}}{\frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)!n!(n+1)!(n+2)!}{(n+1)!(n+2)!(n+3)!(3n)!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 27\end{aligned}$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 4.6, део под б)) следи да ред дивергира ($27 > 1$). △

ЗАДАТАК 4.31. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2^{2n+1}} = 0$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 4.6, део под б)) следи да ред дивергира ($0 < 1$). △

ЗАДАТАК 4.32. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\frac{2}{n}}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{2\cdot\frac{\ln n}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 4.7, део под б)) следи да ред конвергира ($\frac{1}{2} < 1$). △

Задатак 4.33. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$$

и на основу уопштеног Кошијевог критеријума (Теорема 4.8) следи да ред конвергира ($\frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$). △

Задатак 4.34. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\sin\frac{1}{n}}$.

Задатак 4.35. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+1^2)\cdot(2+2^2)\cdot\ldots\cdot(2+n^2}$.

Задатак 4.36. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^3\cdot 3^4\cdot\ldots\cdot n^{n+1}}{2^4\cdot 3^5\cdot\ldots\cdot(n-1)^{n+1}}$.

Задатак 4.37. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Задатак 4.38. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{(3n+1)^n}$.

Задатак 4.39. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$.

4.3 Редови с произвољним члановима

Дефиниција 4.3. За ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

кажемо да је апсолутно конвергира ако конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Теорема 4.10. *Ако ред апсолутно конвергира, онда он и конвергира (често се каже обично конвергира).*

Дефиниција 4.4. Ако ред конвергира (обично), а не конвергира апсолутно, онда кажемо да условно конвергира.

Дефиниција 4.5. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, где су реални бројеви $a_n, n \in \mathbb{N}$, сви истог знака, назива се знакопроменљиви (алтернирајући, алтернативни).

Теорема 4.11. *(Лајбницов критеријум) Нека је* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *знакопроменљиви ред и нека низ* a_n *монотоно тежи нули, при чему је монотон после неког* n_0-*члана. Тада тај ред конвергира.*

Задатак 4.40. За које $p \in \mathbb{R}$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ конвергира апсолутно, а за које условно?

Решење. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p}$ конвергира за $p > 1$, па ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ апсолутно конвергира за $p > 1$.

За $p \leq 0$ општи члан $\frac{(-1)^n}{n^p}$ не тежи нули, па ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ дивергира.

Остало је да се испита конвергенција за $p \in (0, 1]$. Доказали смо да тада ред не конвергира апсолутно, али конвергира обично на основу Лајбницовог критеријума (Теорема 4.11) јер $\frac{1}{n^p}$ монотоно тежи нули када $n \to +\infty$.

Према томе ред конвергира апсолутно за $p > 1$, а условно за $p \in (0, 1]$. △

Задатак 4.41. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решење. Условно конвергира на основу Лајбницовог критеријума. Видети задатак 4.40. △

Задатак 4.42. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.

Решење. Доказаћемо да ред апсолутно конвергира. Из неједнакости

$$\left|(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{2(n^2+1)}$$

и конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2(n^2+1)}$ (општи члана се понаша као $\frac{C}{n^2}, C = \frac{\pi}{2}$) следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}\right|$ конвергира, односно да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$ апсолутно конвергира. △

Задатак 4.43. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right).$$

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

можемо закључити да општи члан реда не тежи нули, па ред дивергира. △

Задатак 4.44. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{4n-1}$.

Решење. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{4n-1}\right| = \sum_{n=1}^{`\infty}\frac{\sqrt{n}}{4n-1}$$

не конвергира јер се општи члан понаша као

$$\frac{\sqrt{n}}{4n-1} \sim \frac{1}{4\sqrt{n}},$$

а ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}}$ дивергира. Према томе почетни ред не конвергира апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Доказаћемо да је низ $\frac{\sqrt{n}}{4n-1}$ монотоно опадајући за $n \geq n_0$. Нека је $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4x-1}$. Тада је

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{4x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x-1) - 4\sqrt{x}}{(4x-1)^2} = \frac{(4x-1) - 8x}{2\sqrt{x}(4x-1)^2} = \frac{-1-4x}{2\sqrt{x}(4x-1)^2} < 0$$

за $x > 0$, па је низ $f(n)$ монотоно опадајући за $n \geq 1$. Такође важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n-1} = 0$. Испуњени су услови за Лајбницов критеријум (Теорема 4.11), па почетни ред конвергира. С обзиром да смо доказали да не конвергира апсолутно, онда конвергира условно. △

Задатак 4.45. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$.

Решење. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$$

не конвергира јер се општи члан понаша као

$$\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}} \sim \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}},$$

а ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ дивергира (видети задатак 4.8). Према томе почетни ред не конвергира апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Доказаћемо да је низ $\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$ монотоно опадајући за $n \geq n_0$. Нека је $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^3+1}}$. Тада је

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^3+1}}\right)' = 2 \cdot \frac{\sqrt{x^3+1} - x\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1} = 2 \cdot \frac{2x^3+2-3x^3}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} = 2 \cdot \frac{2-x^3}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

за $x > \sqrt[3]{2}$, па је низ $f(n)$ монотоно опадајући за $n \geq 2$. Такође важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}} = 0$. Испуњени су услови за Лајбницов критеријум (Теорема 4.11), па почетни ред конвергира. С обзиром да смо доказали да не конвергира апсолутно, онда конвергира условно. △

Задатак 4.46. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}$.

Решење. С обзиром да је $\cos(n\pi) = (-1)^n$ имамо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}$. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}$$

не конвергира јер се општи члан понаша као

$$\ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi} \sim \ln\left(1 + \frac{n}{n^2+\pi}\right) \sim \frac{n}{n^2+\pi} \sim \frac{1}{n},$$

а ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира (користили смо $\ln(1+x) \sim x$ када $x \to 0$). Према томе почетни ред не конвергира апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Доказаћемо да је низ $\frac{n}{n^2+\pi}$ монотоно опадајући за $n \geq n_0$. Нека је $f(x) = \frac{x}{x^2+\pi}$. Тада је

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+\pi}\right)' = \frac{x^2+\pi-2x^2}{(x^2+\pi)^2} = \frac{\pi - x^2}{(x^2+\pi)^2} < 0$$

за $x > \sqrt{\pi}$, па је низ $f(n)$ монотоно опадајући за $n \geq 2$. Одатле следи да и низ $\ln\left(1+\frac{n}{n^2+\pi}\right)$ је опадајући. Такође важи $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{n}{n^2+\pi}\right) = 0$. Испуњени су услови за Лајбницов критеријум (Теорема 4.11), па почетни ред конвергира. С обзиром да смо доказали да не конвергира апсолутно, онда конвергира условно. △

Задатак 4.47. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$.

Задатак 4.48. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

Задатак 4.49. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}$.