Писмени испит из Анализе 2 за И смер **ЈУН 2 2022**

1. У зависности од реалног параметра $a \in (1,2)$ израчунати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a(x)\sin^{4-2a}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}(x)\mathrm{d}x.$$

2. Испитати условну и апсолутну конвергенцију следећих редова:

$$\text{(а)} \sum_{n=4}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{[\frac{n}{2}]+(-1)^n}}, \qquad \text{(б)} \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}.$$

3.

(а) Развити функцију $f(x)=\cosh x$ у Фуријеов ред на интервалу $[-\pi,\pi]$.

(б) Израчунати суму $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2+1}$.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a(x)\sin^{4-2a}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^a(x)\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{2-a}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}(x)\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{2-a}\sin x\mathrm{d}x\\
&= \begin{bmatrix} t=\cos x\\ \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x\\ x=0\longrightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{2}\longrightarrow t=0\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2^{2-a}}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{2-a}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2^{2-a}}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{3-a-1}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2^{2-a}}B(a,3-a)\\
&= \frac{1}{2^{2-a}}\frac{\Gamma(a)\Gamma(3-a)}{\Gamma(a+3-a)}\\
&= \frac{1}{2^{2-a}}\frac{\Gamma(a)(2-a)(1-a)\Gamma(1-a)}{2!}\\
&= \frac{(2-a)(1-a)}{2^{3-a}}\cdot\frac{\pi}{\sin(a\pi)}
\end{aligned}$$

2. (а) Означимо $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{[\frac{n}{2}]+(-1)^n}}$. Како је

$$|a_n|=\frac{1}{\sqrt{[\frac{n}{2}]+(-1)^n}}>\frac{1}{\sqrt{n}-1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$$

и ред $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира, то дати ред не конвергира апсолутно. Испитајмо условну конвергенцију. Не можемо применити Лајбницов критеријум на дати ред јер $\frac{1}{\sqrt{[\frac{n}{2}]+(-1)^n}}$ не опада.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{[\frac{n}{2}]+(-1)^n}} \\ &\sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &\sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$ конвергира на основу Лајбницовог критеријума, али ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, па дати ред не конвергира ни условно.

(б) Означимо $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$. Како је $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, у питању је ред са позитивним члановима па је условна уједно и апсолутна конвергенција. Имамо

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^3},$$

па како $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ конвергира, то и дати ред конвергира апсолутно.

3. Можемо користити особине хиперболичких функција (нпр. $(\sinh x)' = \cosh x$ итд.), а можемо и искористити дефиницију $f(x) = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Одредимо коефицијенте Фуријеовог реда.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(e^x-e^{-x})\Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$b_n = 0 \text{ јер је } f(x) \text{ парна},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}(e^x+e^{-x})\cos(nx)\mathrm{d}x}_{I} \\ &= \begin{bmatrix} u=\cos(nx) & \mathrm{d}v=(e^x+e^{-x})\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=-n\sin(nx)\mathrm{d}x & v=e^x-e^{-x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\cos(nx)(e^x-e^{-x})\Big|_0^{\pi} + n\int_0^{\pi}(e^x-e^{-x})\sin(nx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}(e^x-e^{-x})\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} u=\sin(nx) & \mathrm{d}v=(e^x-e^{-x})\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=n\cos(nx)\mathrm{d}x & v=e^x+e^{-x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi} + \frac{n}{\pi}\left(\sin(nx)(e^x+e^{-x})\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}(e^x+e^{-x})\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi} - \frac{n^2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}(e^x+e^{-x})\cos(nx)\mathrm{d}x}_{I} \end{aligned}$$

Дакле,

$$\frac{1}{\pi}I = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi} - \frac{n^2}{\pi}I$$
$$I = (-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi}) - n^2 I,$$

па је

$$I = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{1+n^2}.$$

Коначно,

$$a_n = \frac{1}{\pi}I = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}.$$

Одавде је тражени Фуријеов ред

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \\ &= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}\cdot\cos(nx) \end{aligned}$$

(б) Означимо тражену суму са

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2+1}.$$

Израчунајмо $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Имамо да је

$$\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ непарно} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ парно} \end{cases}$$

па је

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+(2n)^2)}\cdot(-1)^n = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\cdot A.$$

Знамо да је

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\right)}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2},$$

па је тражена сума

$$A = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$