1. Одредити површину торуса насталог ротацијом круга $x^2+(y-R)^2=r^2$ $(r<R)$ око x-осе.

2. Испитати конвергенцију редова

$$\text{(а)}\ \sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right),\qquad \text{(б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

3.

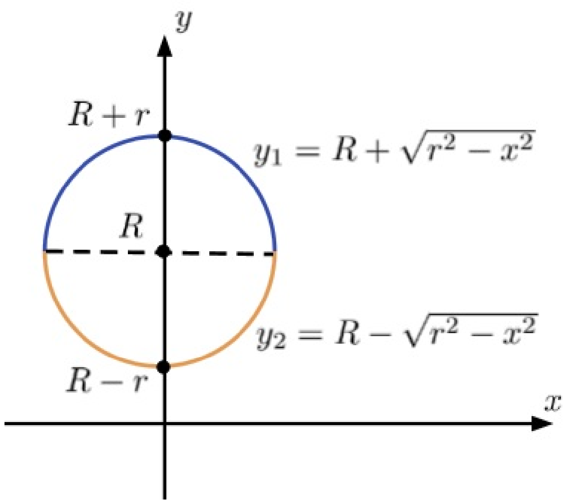
(а) Одредити радијус конвергенције реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(2n-2)!}.$$

(б) Сумирати ред (наћи функцију чији је ово степени ред) за $x>0$.

РЕШЕЊА

1. Површину торуса рачунамо као збир две површине P_1 (заротирана функција y_1 око x-осе) и P_2 (заротирана функција y_2 око x-осе).



Формула за рачунање површине обртног тела је

$$P=\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x,$$

паизрачунајмо најпре $(y_1')^2$ и $(y_2')^2$.

$$(y_1')^2=\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2=\frac{x^2}{r^2-x^2},$$

$$(y_2')^2=\left(\frac{2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2=\frac{x^2}{r^2-x^2}.$$

Тражена површина је

$$\begin{aligned}
P &= P_1 + P_2 \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} y_1 \sqrt{1+(y_1')^2}\mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} y_2 \sqrt{1+(y_2')^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2-x^2}\right) \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2-x^2}\right) \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \left(R \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} + \cancel{r}\right)\mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} \left(R \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} - \cancel{r}\right)\mathrm{d}x \\
&= 4Rr\pi \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} \\
&= 8R\pi \int_{0}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x}{r} = \sin t \\ \mathrm{d}x = r\cos t\mathrm{d}t \\ x = 0 \longrightarrow t = 0 \\ x = r \longrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \\
&= 8Rr\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t \\
&= 4Rr\pi^2
\end{aligned}$$

2. (а) Дати ред је ред са позитивним члановима. Означимо $a_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\right)$. Како је

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3},\ n \to \infty$$

и ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира, то и дати ред дивергира на основу другог поредбеног критеријума.

(б) Означимо $a_n = \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Искористили смо непарност функције $\sin x$.

Апсолутна конвергенција:

$$|a_n| = \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}, n \to \infty,$$

и ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира, то дати ред не конвергира апсолутно на основу другог поредбеног критеријума.

Условна конвергенција: Низ $\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ опада и тежи нули, па на основу Лајбницовог критеријума дати ред конвергира условно.

3. (а) Означимо $a_n = \frac{1}{n(2n-2)!}$. Тражени радијус конвергенције је

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(2n-2)!}}{\frac{1}{(n+1)(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}2n(2n-1) = +\infty.$$

(б) Нека је

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(2n-2)!}.$$

Тада је

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n(2n-2)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!}.$$

Развој функције $f'(x)$ нас подсећа на развој експоненцијалне функције, а разлика је у томе што овде имамо суму по парним индексима па хоћемо да некако постигнемо да "нестану" непарни сабирци из експоненцијалне функције. То можемо урадити на следећи начин.

$$e^x + e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

тј. имамо да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Одавде закључујемо да је

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cosh\sqrt{x},$$

па је тражена функција

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \cosh\sqrt{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x (e^{\sqrt{t}} + e^{-\sqrt{t}})\mathrm{d}t \\
&= \begin{bmatrix} y = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}t = 2y\mathrm{d}y \\ t = 0 \longrightarrow y = 0 \\ t = x \longrightarrow y = \sqrt{x} \end{bmatrix} \\
&= \int_0^{\sqrt{x}} (e^y + e^{-y})y\mathrm{d}y \\
&= \begin{bmatrix} u = y & \mathrm{d}v = (e^y - e^{-y})\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y & v = e^y - e^{-y} \end{bmatrix} \\
&= y(e^y - e^{-y})\Big|_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} (e^y - e^{-y})\mathrm{d}y \\
&= 2\sqrt{x}\sinh\sqrt{x} - 2\cosh\sqrt{x} + 2
\end{aligned}$$