Писмени испит из Анализе 2 за И смер **СЕП 1 2022**

1. Израчунати

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x.$$

2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију следећих редова

$$\text{(а)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}, \qquad \text{(б)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{3}{4}}+(-1)^{3n}}.$$

3. Дата је функција

$$f(x) = \frac{1+2x}{(1-2x)^3}.$$

(а) Развити функцију у Маклоренов ред.

(б) Одредити област конвергенције добијеног степеног реда.

(в) Израчунати суму $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$.

РЕШЕЊА

1. Једини сингуларитет датог несвојственог интеграла је $+\infty$. Како је

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \sim \frac{1}{x^2},\ x\to\infty,$$

то дати интеграл конвергира па га можемо рачунати.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t \\ x = \frac{\sqrt{3}\mathrm{tg}\ t-1}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \\ x=-\frac{1}{2} \longrightarrow t=0 \\ x=+\infty \longrightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sqrt{3}\mathrm{tg}\ t+1}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sqrt{3}\frac{\sin t}{\cos t}+1}{2}\cdot\frac{1}{\cos t}}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}\sin t+\cos t}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} p = \mathrm{tg}\frac{t}{2} \\ t = 2\mathrm{arctg}\ p \\ \mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}p}{1+p^2} \\ \sin t = \frac{2p}{1+p^2} \\ \cos t = \frac{1-p^2}{1+p^2} \\ t=0 \longrightarrow p=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \longrightarrow p=1 \end{bmatrix} = 2\int_0^1 \frac{\frac{2}{1+p^2}}{\frac{2\sqrt{3}p}{1+p^2}+\frac{1-p^2}{1+p^2}}\mathrm{d}p$$

$$= -4\int_0^1 \frac{1}{p^2-2\sqrt{3}p-1}\mathrm{d}p = -4\int_0^1 \frac{1}{(p-\sqrt{3}-2)(p-\sqrt{3}+2)}\mathrm{d}p$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{p-\sqrt{3}-2} - \frac{1}{p-\sqrt{3}+2}\right)\mathrm{d}p = \ln\left|\frac{p-\sqrt{3}+2}{p-\sqrt{3}-2}\right|\Bigg|_0^1$$

$$= \ln\frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \ln\frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

<u>Други начин:</u> Ојлерова смена $\sqrt{x^2+x+1} = t-x\ldots$

<u>Трећи начин:</u> Смена $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \sinh t\ldots$.

2. (а) Дати ред је ред са позитивним члановима. Означимо $a_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}\sqrt[n]{n}}{\cancel{n^n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} = 1 \neq 0,$$

то дати ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције.

(б) Означимо $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{3}{4}}+(-1)^{3n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}+(-1)^n}$. Искористили смо да је $\cos(n\pi) = (-1)^n$ и $(-1)^{3n} = (-1)^n$.

Апсолутна конвергенција:

$$|a_n| = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}+1} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} n \to \infty,$$

па дати ред не конвергира апсолутно (на основу првог и другог проедбеног критеријума).

Условна конвергенција:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}} \sim \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}\left(1-\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{n^{\frac{6}{4}}},\ n\to\infty.$$

Ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ конвергира на основу Лајбницовог критеријума, а ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{4}}}$ конвергира јер је $\frac{3}{2} > 1$, па дати ред конвергира условно.

3. (а) Користимо познати развој

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

за $\alpha = -3$. Приметимо да је

$$\binom{-3}{n} = \frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-(n+1))(-(n+2))}{n!} = \frac{(-1)^n(n+2)!}{2n!} = \frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
f(x) = (1+2x)(1-2x)^{-3} &= (1+2x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-2x)^n \\
&= (1+2x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}\cdot(-1)^n\cdot 2^n\cdot x^n \\
&= (1+2x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n2^{n-1}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((n+2)(n+1)+(n+1)n\big)\,2^{n-1}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 2^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 2^n x^n
\end{aligned}$$

(б) Означимо $a_n = (n+1)^2 2^n$. Како је

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{(n+1)^2}} = \frac{1}{2},$$

то је $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subseteq D$. Када убацимо $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$ у добијени степени ред, добијамо бројне редове $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2$ који дивергирају, па је коначно тражена област конвергенције $D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(в) Приметимо

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n},$$

па је тражена сума

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} = f\left(\frac{1}{4}\right) - 1 - 2 = 9.$$