Писмени испит из Анализе 3 за И смер **ЈУН 1 2021**

1. (15 поена) Функција f дефинисана је са

$$f(x,y)=\begin{cases} 1-\frac{x^2+y^2}{2}\ln\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ A, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

(а) Одредити $A\in\mathbb{R}$ тако да функција f буде непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\neq(0,0)$ f непр као композиција непрекидних! (*)

$(x,y)=(0,0)$ f непр у $(0,0)$ $\longleftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{array}\ (x,y)\to(0,0)\iff\rho\to0\right|=\frac{1}{2}\lim_{\rho\to0}\rho^2\ln\rho=0$$

$\longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1 \implies$ за $A=1$ f је непр у $(0,0)$ (**)

(*) (**)
$\implies$ за $A=1$ f непр на $\mathbb{R}^2$

(б) Одредити парцијалне изводе функције f на $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\neq(0,0)$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\overset{\cdots}{=}-\frac{x\left(\ln(x^2+y^2)+1\right)}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\overset{\cdots}{=}-\frac{y\left(\ln(x^2+y^2)+1\right)}{2}$$

$(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\ln|h|}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}h\cdot\ln|h|=0$$

Слично $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

(в) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\neq(0,0)$ Парцијални изводи, непр на некој околини тачке $(x,y) \overset{T}{\Longrightarrow}$ f је диф за $(x,y)\neq(0,0)$

$(x,y)=(0,0)$?

$$f \text{ диф у } (0,0) \iff f(h,k)-\overset{1}{f(0,0)}=\overset{0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}h+\overset{0}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}k+o((h,k)),\quad (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff f(h,k)-1=o(h,k)\iff 1-\frac{h^2+k^2}{2}\ln\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)-1=o(h,k)\quad (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff \frac{1}{2}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\ln\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{1}{2}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\ln\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)=0 \implies f \text{ диф у } (0,0)$$

$h=\rho\cos\varphi$
$k=\rho\sin\varphi$
$(h,k)\to(0,0)\iff\rho\to0\ldots$

$\implies f$ диф на $\mathbb{R}^2$

(г) Одредити једначину тангентне равни на график функције f у тачки $(1, 0, f(1, 0))$.

$$z = 1 - \frac{x^2+y^2}{2}\ln(\sqrt{x^2+y^2}) \longrightarrow \underbrace{(x^2+y^2)\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + 2z - 2}_{F(x,y,z)} = 0$$

$z = f(1,0) = 1 - 0 = 1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial t}{\partial x} = x\cdot(\ln(x^2+y^2)+1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial y} = y\cdot(\ln(x^2+y^2)+1) \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \nabla F(1,0,1) = (1, 0, 2) \to \text{вектор нормале}$$

ј-на тан. равни $\quad 1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-0) + 2\cdot(z-1) = 0$

$$x - 1 + 2z - 2 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{x + 2z - 3 = 0}$$

2. (15 поена) Решити диференцијалну једначину $xy' + y = y^3 \ln x,\ x > 0$.

$\longrightarrow$ Бернулијева ДЈ $\longrightarrow \boxed{y' + \frac{y}{x} = y^3\frac{\ln x}{x}}$ (*) $\quad \boxed{\alpha = 3}$

$y' + p(x)y = g(x)y^\alpha$

$\boxed{\text{смена}}$ $\quad z = y^{1-\alpha} = y^{1-3} = y^{-2} \ /' \longrightarrow z' = -2y^{-3}\cdot y' = -2\frac{y'}{y^3}$

(*) $/\cdot -\frac{2}{y^3} \longrightarrow \underbrace{\boxed{-\frac{2y'}{y^3}}}_{z'} - 2\underbrace{\boxed{\frac{1}{y^2}}}_{z}\cdot\frac{1}{x} = -2\frac{\ln x}{x} \longrightarrow z' - \frac{2}{x}z = -2\frac{\ln x}{x}$

$y \neq 0$

(за $y=0$ на крају)

Линеарна ДЈ $y' + p(x)y = g(x)$

$p(x) = -2/x \quad g(x) = -2\frac{\ln x}{x}$

Решење линеарне ДЈ $\quad z(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$

$$\int p(x)dx = -2\int\frac{dx}{x} = -2\ln|x| \overset{x>0}{=} -2\ln x$$

$$\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int -2\frac{\ln x}{x}e^{\ln x^{-2}}dx = -2\int\frac{\ln x}{x^3}dx = \frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$\left[\int\frac{\ln x}{x^3}dx \overset{\dots}{=} -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2}\right]$$

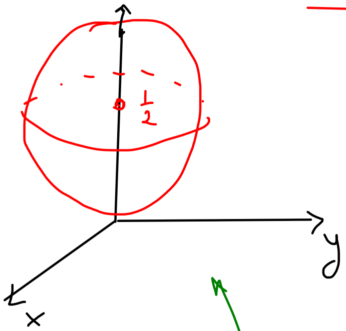
$$\longrightarrow z(x) = \underbrace{e^{2\ln x}}_{x^2}\left(c + \frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{2x^2}\right) = cx^2 + \ln x + \frac{1}{2},\quad c\in\mathbb{R}$$

$\xrightarrow{z=y^{-2}}$ $\quad \frac{1}{y^2} = cx^2 + \ln x + \frac{1}{2},\ c\in\mathbb{R} \longrightarrow \boxed{y^2 = \frac{2}{2cx^2 + 2\ln x + 1} \quad \text{и} \quad y = 0}$

и $y = 0$ јесте р-ње (сингуларно)

3. (15 поена) Нека је $T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le z,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}$. Израчунати $\iiint_T \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz$

$\to x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$



Тело T део лопте која се налази у I октанту

сферне координате:

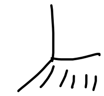
$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$
$$|J| = \rho^2 \sin\varphi$$

Границе за ρ, φ, θ?

Како се све дешава у полупростору $z\ge 0$

$\longrightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$x, y \ge 0 \longrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$



За ρ? Убацимо у $x^2+y^2+z^2 \le z$

$\longrightarrow \rho^2 \le \rho\cos\varphi \to \rho \le \cos\varphi$

$\Rightarrow \rho \in [0, \cos\varphi]$

$$\iiint_T \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\rho\cos\varphi} \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^2} e^{\rho^3}\cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\right)d\varphi\right)d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi\sin\varphi \int_0^{\cos\varphi} e^{\rho^3} \underbrace{\rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}d(\rho^3)}\right)d\varphi = \frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi\ e^{\rho^3}\Big|_0^{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2\varphi\sin\varphi}_{-\frac{1}{3}d(\cos^3\varphi)}\ e^{\cos^3\varphi}\, d\varphi - \frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \overbrace{\sin\varphi\, d\varphi}^{-d(\cos\varphi)}$$

$$= -\frac{\pi}{18} e^{\cos^3\varphi}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{6}\,\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{18}e^0 + \frac{\pi}{18}e + \frac{\pi}{18}(0-1) = -2\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18}e = \boxed{\frac{\pi}{9}\left(\frac{e}{2}-1\right)}$$

---

4. (15 поена) Дато је векторско поље $F(x,y) = (\underbrace{2xye^{x^2y}}_{P(x,y)}, \underbrace{x^2e^{x^2y}}_{Q(x,y)})$.

(a) Показати да $\int_{(1,0)}^{(2,2)} F\cdot dr$ не зависи од избора путање.

Векторско поље F дефинисано на $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ просто повезан

и P, Q су непрекидно диференцијабилне

$$\left.\begin{aligned} P_y' &= (2xye^{x^2y})_y' = 2xe^{x^2y} + 2xy\cdot x^2e^{x^2y} = 2xe^{x^2y}(1+x^2y) \\ Q_x' &= (x^2e^{x^2y})_x' = 2xe^{x^2y} + x^2\cdot 2xy\,e^{x^2y} = 2xe^{x^2y}(1+x^2y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_y' = Q_x'$$

став $\Longrightarrow \int_{(1,0)}^{(2,2)} F\cdot dr$ не зависи од избора пута (*)

(б) Да ли је векторско поље F градијентно? Ако је одговор потврдан, наћи неку функцију чији је градијент једнак веткроском пољу F.

(*) $\overset{T}{\iff}$ F градијентно шт $\exists f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ шд $\boxed{F=\nabla f}$

$$F=(P,Q)=\nabla f=(f'_x, f'_y) \longrightarrow \begin{array}{ll} f'_x = P = 2xye^{x^2y} & 1) \\ f'_y = Q = x^2e^{x^2y} & 2) \end{array}$$

1) $/\int dx \rightsquigarrow f(x,y)=\int \underbrace{2xye^{\overset{t}{x^2y}}dx}_{dt} = e^{x^2y}+c(y) \quad /'_y \rightsquigarrow \boxed{f'_y = x^2e^{x^2y}+c(y)}$ #

$$\underbrace{x^2e^{x^2y} = Q = f'_y \overset{\#}{=} x^2e^{x^2y}} + c(y)$$

$$c(y)=0 \longrightarrow c(y)=c\in\mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ једна таква ф-ја (која задовољава $F=\nabla f$) је $f(x,y)=e^{x^2y}$

(в) Израчунати $\int_{(1,0)}^{(2,2)} F\cdot dr$.

Став: $F=\nabla f$ на D и $A,B\in D$ и C произвољна крива која их спаја

Тада важи:

$$\int_C F\cdot dr = f(B)-f(A)$$

НАПОМЕНА: овај став је аналог Њутн-Лајбницове формуле ($\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$)

$$\Longrightarrow \int_{(1,0)}^{(2,2)} F\cdot dr = f(2,2)-f(1,0) = e^{2^2\cdot 2} - e^{1^2\cdot 0} = \boxed{e^8-1}$$