dr L. Stefanović,
mr M. Matejić, dr S. Marinković

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

ZA STUDENTE TEHNIČKIH FAKULTETA

SKC Niš, 2006.

dr Lidija Stefanović,
mr Marjan Matejić, dr Slađana Marinković

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

ZA STUDENTE TEHNIČKIH FAKULTETA

I izdanje, Niš, 2006.

Recenzenti:
dr Ljubiša Kocić, red. prof. Elektronskog fakulteta u Nišu
dr Predrag Rančić, red. prof. Elektronskog fakulteta u Nišu

Izdavač:
Studentski kulturni centar Niš

Za izdavača:
Miroslav Jović, direktor

Urednik:
Aleksandar Blagojević

Tehnička obrada:
dr Lidija Stefanović

Štampa:
"Petrograf" Niš

Tiraž:
150 primeraka

ISBN 86–7757–126–4

PREDGOVOR

Ova knjiga je proistekla iz višegodišnjeg iskustva autora u držanju teorijske i praktične nastave na Elektronskom fakultetu u Nišu. Zato je, pre svega, prilagođena studentima tehničkih nauka. Naravno, mogu da je koriste i studenti drugačije profesionalne orijentacije, koji u okviru predviđenog nastavnog programa imaju ovde iznetu materiju.

Knjiga se odnosi na samo jednu oblast matematike, Diferencijalne jednačine, jer u ovom trenutku nije poznato da li će i na kojem studijskom programu biti izučavana ta oblast. Detaljno su obrađene samo linearne diferencijalne jednačine (obične i parcijalne) jer se one trenutno izučavaju na studijskom programu Elektroenergetika pri Elektronskom fakultetu u Nišu, na kojem autori izvode nastavu. Ostali delovi ove oblasti matematike, inače veoma obimne i još uvek nedovoljno istražene, dati su samo u onoj meri koja je potrebna studentima tehničkih nauka. Pri tome su mnogobrojni značajni teorijski pojmovi i zaključivanja prećutani ili samo napomenuti. Takve su, npr., teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja. Zainteresovanima za bolji uvid u razmatranu problematiku citirana je adekvatna literatura. S tim u vezi, autori naročito preporučuju knjige dr Svetlane Janković, profesora Prirodno–matematičkog fakultetu u Nišu.

Knjiga sadrži teoriju i rešene primere, koji u potpunosti ilustruju izloženu teoriju. Takođe, knjiga sadrži i zadatke predviđene za vežbu, ali sa rešenjima ili neophodnim uputstvima, uz često osvrtanje na ranije izučavano gradivo. Autori smatraju da je upravo u prezentovanim primerima i zadacima glavna prednost ove knjige nad ostalom literaturom koja se bavi istom problematikom. S obzirom na veliki broj rešenih zadataka, knjiga može da se koristi istovremeno kao udžbenik i kao zbirka zadataka.

Osim matematički korektnog izlaganja materije, autori su se trudili da knjiga ima pedagoške i metodološke kvalitete. Na čitaocima ostaje krajnja procena da li su i koliko u tome uspeli.

Tekst knjige je urađen pomoću programskog paketa EMTEX (verzija Amstex 2.0), a slike pomoću programskog paketa MATHEMATICA (verzija 5.0).

Autori duguju i ovom prilikom iskazuju zahvalnost mr Branislavu Ranđeloviću jer je pročitao rukopis u celini i ukazao na njegove manjkavosti, kako po pitanju materijalnih grešaka, tako i u svakom drugom pogledu. Takođe, autori iskreno zahvaljuju recenzentima, prof. dr Ljubiši Kociću i prof. dr Predragu Rančiću, koji su svojim dobronamernim sugestijama doprineli konačnom uobličenju teksta. Prof. dr Ljubiša Kocić je ukazao na lepotu grafičkog prikaza dobijenih rezultata, koji su ilustrativno dati u Prilogu ove knjige. Prof. dr Predrag Rančić je ukazao na neophodnost elementarnog poznavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina od strane studenata tehničkih nauka, čime je doprineo nastanku dela teksta koji se odnosi na tu vrstu jednačina. Autori smatraju da bi bez pomenutih dodatih delova, u odnosu na prvobitni rukopis, knjiga bila estetski i smisaono znatno siromašnija i za praksu manje upotrebljiva. I na kraju, autori zahvaljuju Dekanu Elektronskog fakulteta u Nišu, prof. dr Draganu Antiću, za istrajnu i odlučnu podršku na publikovanju ove knjige.

Niš, 2006. g. Autori

SADRŽAJ

1. OSNOVNI POJMOVI

1.1. Pojam diferencijalne jednačine i rešenja diferencijalne jednačine

Diferencijalna jednačina je svaka jednačina u kojoj se javljaju nezavisno promenljiva x, nepoznata funkcija $y(x)$ i izvodi te funkcije. Opšti oblik ove jednačine je

$$\Phi\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \ . \tag{1.1.1}$$

Ovo je "obična" diferencijalna jednačina jer nepoznata funkcija zavisi samo od jedne nezavisno promenljive. Sem običnih, postoje i parcijalne diferencijalne jednačine kod kojih nepoznata funkcija zavisi od više nezavisno promenljivih. Nadalje ćemo za diferencijalne jednačine koristiti oznaku DJ.

Red diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji se javlja u DJ.

Rešavanje diferencijalne jednačine je određivanje nepoznate funkcije $y(x)$ koja se u njoj javlja. Funkcija $y(x)$ koja identički zadovoljava DJ (1.1.1) je **rešenje** (**integral**) **diferencijalne jednačine**.

Rešenje DJ (1.1.1) može da bude opšte, partikularno i singularno.

Opšte rešenje sadrži onoliko proizvoljnih konstanata koliki je red DJ. U posmatranom slučaju (1.1.1) opšte rešenje je oblika

$$y = y(x, c_1, \dots, c_n) \ . \tag{1.1.2}$$

Proizvoljne konstante $c_1, \dots, c_n$ su, u stvari, integracione konstante koje se javljaju pri rešavanju DJ neodređenom integracijom. Geometrijski, opšte rešenje (1.1.2) predstavlja familiju krivih u xy koordinatnoj ravni.

Partikularno rešenje se dobija iz opšteg izborom konkretnih vrednosti za neke ili sve proizvoljne konstante. Ukoliko se konkretizuju sve konstante u (1.1.2), partikularno rešenje je samo jedna kriva iz familije krivih

(1.1.2). Za određivanje partikularnog rešenja najčešće se zadaju tzv. početni (Cauchyevi) uslovi:

$$y(x_0) = a_0 \ , \quad y'(x_0) = a_1 \ , \ \ldots \ , \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \ , \tag{1.1.3}$$

gde su $x_0, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ zadati brojevi. Dobijeno partikularno rešenje se zove Cauchyevo.

Singularno rešenje ne može da se dobije iz opšteg, ali jeste rešenje jer zadovoljava DJ. Obično se dobija iz ograničenja pod kojima se rešava DJ, tj. nalazi opšte rešenje.

Ograničenja pod kojima se rešava DJ utiču na *oblast definisanosti* opšteg rešenja. Radi ilustracije, ova ograničenja ćemo da razmatramo samo u početku, a kasnije ćemo da ih podrazumevamo. Oblast definisanosti DJ, egzistencija i jedinstvenost njenog rešenja, a s tim u vezi i oblast definisanosti rešenja, detaljno su obrađeni u [**1**], str. 1–6, 14–15, 67–69, itd.

Sistem diferencijalnih jednačina se sastoji od više DJ sa više nepoznatih funkcija, npr.

$$\Phi_i\big(x; y_1, \ldots, y_1^{(n)}; \ldots ; y_m, \ldots, y_m^{(n)}\big) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \ . \tag{1.1.4}$$

U ovom slučaju, *opšte rešenje sistema* je uređena m–torka funkcija

$$\Big(y_1(x, c_{11}, \ldots, c_{n1}) \ , \ \ldots \ , \ y_m(x, c_{1m}, \ldots, c_{nm})\Big) \ , \tag{1.1.5}$$

a Cauchyevi uslovi za nalaženje partikularnog rešenja su:

$$y_i(x_0) = a_{i0} \ , \quad y_i'(x_0) = a_{i1} \ , \ \ldots \ , \quad y_i^{(n-1)}(x_0) = a_{i,n-1} \qquad (i = 1, \ldots, m) \ . \tag{1.1.6}$$

Parcijalna diferencijalna jednačina reda m ima opšti oblik

$$\Phi\Big(x_1, \ldots, x_n; f; \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}\Big) = 0 \ , \tag{1.1.7}$$

gde je $f(x_1, \ldots, x_n)$ nepoznata funkcija n nezavisno promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Specijalno, parcijalna diferencijalna jednačina I reda je oblika

$$\Phi\Big(x_1, \ldots, x_n; f; \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big) = 0 \ . \tag{1.1.8}$$

Parcijalne diferencijalne jednačine ćemo nadalje označavati sa PDJ.

Kao i kod DJ (1.1.1), rešavanje PDJ (1.1.7) je određivanje nepoznate funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ koja se u njoj javlja i koja je njeno *rešenje* (*integral*). Po pitanju tipova rešenja, kod PDJ je situacija znatno složenija nego kod DJ. Postoji više definicija, npr. Lagrangeove definicije (videti [**1**], str. 256–260). Ove definicije ne navodimo, a pojmove opšteg i partikularnog rešenja ćemo da uvedemo kasnije, za konkretne slučajeve PDJ koje budemo razmatrali.

1.2. Snižavanje reda diferencijalne jednačine

Ako u DJ (1.1.1) n–tog reda funkcija Φ ima poseban oblik, rešavanje ove DJ može da se svede na rešavanje nove DJ reda $n-1$. Navodimo dva najčešća slučaja.

Neka funkcija Φ ne zavisi od nepoznate funkcije y, već samo od nezavisno promenljive x i izvoda funkcije y. Oblik ove DJ je

$$\Phi\big(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \ . \tag{1.2.1}$$

Uvođenjem smene

$$z(x) = y'(x) \ ,$$

dobija se $y'' = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-1)}$, pa se DJ (1.2.1) svodi na DJ reda $n-1$ po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$,

$$\Phi\big(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\big) = 0 \ ,$$

čije je opšte rešenje $z = z(x, c_1, \ldots, c_{n-1})$. Opšte rešenje polazne DJ (1.2.1) dobija se rešavanjem DJ prvog reda

$$y' = z(x, c_1, \ldots, c_{n-1}) \ .$$

Neka funkcija Φ ne zavisi od nezavisno promenljive x, već samo od nepoznate funkcije y i njenih izvoda. Oblik ovakve DJ je

$$\Phi\big(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \ . \tag{1.2.2}$$

U ovom slučaju se uvodi smena

$$z(y) = y' \ .$$

Imajući u vidu da je $y = y(x)$ i $y'(x) = z\big(y(x)\big)$, iz prethodne smene sledi:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = z'y' = z'z\ , \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}(z'z) = \frac{dz'}{dx}\,z + z'\,\frac{dz}{dx} = \frac{dz'}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,z + z'\,\frac{dz}{dx} \\ &= z''y'z + +z'y'' = z''z^2 + {z'}^2 z\ , \\ &\ \vdots \\ y^{(n)} &= u\big(z, z', \dots, z^{(n-1)}\big)\ , \end{aligned}$$

gde je u odgovarajuća funkcija. Zamenom nađenih izvoda u polaznu DJ (1.2.2), ona se svodi na DJ reda $n-1$ po nepoznatoj funkciji $z = z(y)$,

$$\Phi\big(y, z, z'z, \dots, u(z, z', \dots, z^{(n-1)})\big) = 0\ ,$$

tj.

$$\Phi_1\big(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}\big) = 0\ .$$

Opšte rešenje poslednje DJ je $z = z(y, c_1, \dots, c_{n-1})$, pa se opšte rešenje DJ (1.2.2) dobija rešavanjem DJ prvog reda

$$y' = z(y, c_1, \dots, c_{n-1})\ .$$

2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE I REDA

2.1. DJ sa razdvojenim promenljivama

Najjednostavniji oblik ove DJ je

$$y' = f(x) \ , \tag{2.1.1}$$

gde je f zadata funkcija. Ovo je očigledno DJ tipa (1.1.1) i to prvog reda. Kako je

$$y' = \frac{dy}{dx} \ ,$$

DJ (2.1.1) se transformiše u

$$dy = f(x)\, dx \ ,$$

što se rešava direktnom integracijom,

$$y = \int f(x)\, dx \ .$$

Opšti oblik DJ sa razdvojenim promenljivama je

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy \ , \tag{2.1.2}$$

gde su f i g zadate funkcije. Ako ovu DJ zapišemo drugačije,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \ , \quad y' = \frac{f(x)}{g(y)} \ ,$$

ona je takođe tipa (1.1.1), prvog reda. Rešava se direktnom integracijom

$$\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy \ . \tag{2.1.3}$$

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ i $G(y)$ primitivna funkcija za $g(y)$, iz (2.1.3) dobijamo

$$F(x) + c_1 = G(y) + c_2 \ ,$$

pa je

$$F(x) - G(y) = c_2 - c_1 \ .$$

Zbog proizvoljnosti integracionih konstanata c_1 i c_2, proizvoljna je i konstanta $c = c_2 - c_1$, pa je opšte rešenje DJ (2.1.2) dato implicitno sa

$$F(x) - G(y) = c \ .$$

$\boxed{\text{PRIMER 2.1.1.}}$ Naći opšte rešenje DJ

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3 \ ,$$

a zatim naći ono partikularno rešenje koje sadrži tačku $(0, 0)$.

Datu DJ dovodimo na oblik (2.1.2):

$$\begin{aligned} 3y^2\,\frac{dy}{dx} &= -16x + 2xy^3 = 2x(y^3 - 8) \ , \\ \frac{3y^2}{y^3 - 8}\,dy &= 2x\,dx \ . \end{aligned}$$

Dobijenu DJ rešavamo integracijom, uz ograničenje $y \neq 2$. Dobija se redom:

$$\begin{aligned} \int \frac{3y^2}{y^3 - 8}\,dy &= \int 2x\,dx \ , \\ \int \frac{d(y^3 - 8)}{y^3 - 8} &= \int d(x^2) \ , \\ \ln|y^3 - 8| + c_1 &= x^2 + c_2 \ , \\ \ln|y^3 - 8| &= x^2 + c_3 \quad (c_3 = c_2 - c_1) \ , \\ |y^3 - 8| &= e^{x^2 + c_3} = e^{c_3} \cdot e^{x^2} = c_4 e^{x^2} \quad (c_4 = e^{c_3}) \ , \\ y^3 - 8 &= \pm c_4 e^{x^2} = c e^{x^2} \quad (c = \pm c_4) \ . \end{aligned}$$

Dakle, opšte rešenje je dato implicitno sa

$$y^3 - 8 = c e^{x^2} \ .$$

Primetimo da u ovom slučaju opšte rešenje može da se iskaže i eksplicitno sa

$$y = \sqrt[3]{8 + c e^{x^2}} \ .$$

Do opšteg rešenja smo došli uz ograničenje $y \neq 2$. Proveravamo šta je sa funkcijom $y = 2$. Direktnom smenom $y = 2$ u datu DJ dobijamo $16x = 16x$. Dakle, $y = 2$ identički zadovoljava DJ, pa to jeste njeno rešenje. Ovo rešenje je partikularno jer se dobija iz opšteg za $c = 0$.

Smenom $x = 0$, $y = 0$ u opšte rešenje sledi $c = -8$, pa je traženo partikularno rešenje

$$y^3 - 8 = -8e^{x^2} .$$

Primećujemo da je uslov prolaska krive $y(x)$ kroz tačku $(0,0)$ isto što i $y(0) = 0$, pa je ovo početni (Cauchyev) uslov (1.1.3) i nađeno partikularno rešenje je Cauchyevo. △

2.2. Homogena DJ

Opšti oblik ove DJ je

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) , \tag{2.2.1}$$

gde je f zadata funkcija i $x \neq 0$. Rešava se smenom

$$u = \frac{y}{x} ,$$

gde je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija. Za ovu smenu je

$$y = xu , \quad y' = u + xu' ,$$

pa se DJ (2.2.1) redom transformiše u:

$$\begin{aligned} u + xu' &= f(u) , \\ x\,\frac{du}{dx} &= f(u) - u , \\ \frac{du}{f(u) - u} &= \frac{dx}{x} . \end{aligned}$$

Poslednja DJ je sa razdvojenim promenljivama koja se rešava integracijom, pod ograničenjem $f(u) \neq u$:

$$\begin{aligned} \ln|x| &= \int \frac{du}{f(u) - u} = F(u) + c_1 , \\ x &= \pm e^{c_1} e^{F(u)} , \\ x &= ce^{F(u)} \quad (c = \pm e^{c_1}) . \end{aligned}$$

Imajući u vidu smenu $u = y/x$, dobijamo opšte rešenje u implicitnom obliku

$$x = ce^{F(y/x)} \ ,$$

gde je F odgovarajuća primitivna funkcija i c proizvoljna konstanta.

Ako je $f(u) = u$, polazna DJ (2.2.1) je

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \ ,$$

tj.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama.

PRIMER 2.2.1. Naći opšte rešenje DJ

$$y' = \frac{x^3 + 2x^2y - y^3}{x^3 + x^2y} \ .$$

Ako i brojilac i imenilac na desnoj strani prethodne jednakosti podelimo sa x^3, data DJ dobija oblik

$$y' = \frac{1 + 2\,\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^3}{1 + \dfrac{y}{x}} \ ,$$

što je oblik (2.2.1) homogene DJ. Zato uvodimo smenu $u = y/x$, iz koje je $y' = u + xu'$, pa DJ dalje postaje:

$$\begin{aligned} xu' &= \frac{1 + 2u - u^3}{1 + u} - u = 1 - u^2 \ , \\ x\,\frac{du}{dx} &= 1 - u^2 \ , \\ \frac{du}{1 - u^2} &= \frac{dx}{x} \ . \end{aligned}$$

Poslednja DJ je sa razdvojenim promenljivama i rešava se pod ograničenjima $u \neq \pm 1$. Rešenje je:

$$\begin{aligned} \ln|x| &= \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + c_1 \ , \\ x &= c_2\sqrt{\left|\frac{u+1}{u-1}\right|} \ , \quad (c_2 = \pm e^{c_1}) \\ x^2 &= c\,\frac{u+1}{u-1} \quad (c = \pm c_2^2) \ . \end{aligned}$$

Vraćamo se sa smenom $u = y/x$ i dobijamo traženo opšte rešenje u implicitnom obliku

$$x^2 = c\,\frac{y+x}{y-x}$$

ili u eksplicitnom obliku

$$y = \frac{x(x^2+c)}{x^2-c}\ .$$

$\boxed{\text{PRIMER 2.2.2.}}$ Naći opšte rešenje DJ

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2\ .$$

Posmatrajmo DJ oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)\ , \tag{2.2.2}$$

u kojoj je f poznata funkcija, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3)$ konstante i $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$. Uvodimo smene

$$x = X + \alpha_1\ ,\quad y = Y + \alpha_2\ ,$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ privremeno neodređene konstante, X nova nezavisno promenljiva i $Y = Y(X)$ nova nepoznata funkcija. Kako je $dx = dX$ i $dy = dY$, to je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = Y'\ ,$$

pa se DJ (2.2.2) transformiše u

$$Y' = f\left(\frac{a_1X+a_2Y+a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3}{b_1X+b_2Y+b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3}\right)\ .$$

Konstante α_1, α_2 određujemo tako da je

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3 = 0\ ,\quad b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3 = 0\ ,$$

čime poslednja DJ postaje

$$Y' = f\left(\frac{a_1X+a_2Y}{b_1X+b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1+a_2\dfrac{Y}{X}}{b_1+b_2\dfrac{Y}{X}}\right)\ ,$$

što je homogena DJ oblika (2.2.1) po nepoznatoj funkciji $Y = Y(X)$.

Ako je $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, DJ (2.2.2) se smenom $u = a_1x + a_2y$ svodi na DJ sa razdvojenim promenljivama po nepoznatoj funkciji $u = u(x)$.

Lako se uočava da je zadata DJ oblika (2.2.2) sa $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$ i $a_1 b_2 - b_1 a_2 = -1 \neq 0$. Zato za njeno rešavanje primenjujemo prethodno opisani postupak. Iz sistema

$$\alpha_2 + 2 = 0 \ , \quad \alpha_1 + \alpha_2 - 1 = 0$$

određujemo $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -2$. Smene

$$x = X + 3 \ , \quad y = Y - 2$$

dovode do homogene DJ

$$Y' = 2\Big(\frac{Y}{X+Y}\Big)^2 = 2\,\frac{\Big(\dfrac{Y}{X}\Big)^2}{\Big(1+\dfrac{Y}{X}\Big)^2} \ ,$$

koja se rešava uobičajeno.

Za $u = Y/X$ dobijena homogena DJ postaje DJ sa razdvojenim promenljivama

$$-\frac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}\,du = \frac{dX}{X}$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(X)$. Ako je $u \neq 0$, razlomak na levoj strani prethodne jednakosti rastavljamo na delimične razlomke i vršimo integraciju. Dobija se redom:

$$\begin{aligned} -\frac{du}{u} - 2\,\frac{du}{1+u^2} &= \frac{dX}{X} \ , \\ -\ln|u| - 2\arctan u &= \ln|X| + c_1 \ , \\ 2\arctan u + \ln|Xu| &= c \quad (c = -c_1) \ . \end{aligned}$$

Kako je $u = Y/X$, $X = x - 3$, $Y = y + 2$, iz poslednje jednakosti sledi

$$2\arctan\frac{Y}{X} + \ln|Y| = c$$

i

$$2\arctan\frac{y+2}{x-3} + \ln|y+2| = c \ ,$$

što je traženo opšte rešenje u implicitnom obliku. $\triangle$

2.3. Linearna DJ

Opšti oblik ove DJ je

$$y' + f(x)y = h(x) \ , \tag{2.3.1}$$

gde su f i h zadate funkcije. Linearne DJ ćemo nadalje označavati sa LDJ. Za $h(x) \not\equiv 0$, LDJ (2.3.1) je *nehomogena LDJ*. Ako je $h(x) \equiv 0$, (2.3.1) postaje

$$y' + f(x)y = 0 \ , \tag{2.3.2}$$

što je *homogena LDJ*.

Rešavamo prvo homogenu LDJ (2.3.2). Ova jednačina može da se zapiše u obliku

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y \ ,$$

tj.

$$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx \ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama. Njeno rešenje je

$$y = c \exp\Big(-\int f(x)\,dx\Big) \ , \tag{2.3.3}$$

uz ograničenje $y \neq 0$. Kako $y = 0$ zadovoljava polaznu homogenu LDJ (2.3.2), to jeste njeno rešenje. Ovo rešenje je partikularno jer se dobija iz opšteg rešenja (2.3.3) za $c = 0$.

Da bismo našli rešenje nehomogene LDJ (2.3.1), pretpostavimo da c iz (2.3.3) nije konstanta, već funkcija od x i opšte rešenje nehomogene LDJ potražimo u obliku

$$y = c(x) \exp\Big(-\int f(x)\,dx\Big) \ . \tag{2.3.4}$$

Iz poslednje jednakosti je

$$y' = c'(x) \exp\Big(-\int f(x)\,dx\Big) - c(x)f(x) \exp\Big(-\int f(x)\,dx\Big) \ .$$

Zamenom ovako iskazanih y i y' u nehomogenu LDJ (2.3.1) dobijamo

$$c'(x) \exp\Big(-\int f(x)\,dx\Big) = h(x) \ .$$

Odavde je

$$c'(x) = h(x) \exp\Big(\int f(x)\,dx\Big) \ ,$$

što integracijom daje

$$c(x) = \int h(x) \exp\Big(\int f(x)\,dx\Big)\,dx = F(x) + k \ ,$$

gde je $F(x)$ odgovarajuća primitivna funkcija i k proizvoljna integraciona konstanta. Smenom nađenog $c(x)$ u (2.3.4) dobijamo opšte rešenje nehomogene LDJ (2.3.1). Pošto mogućnost zabune više ne postoji, upotrebićemo uobičajenu oznaku c za proizvoljnu konstantu, umesto prethodno korišćene oznake k. Tako opšte rešenje nehomogene LDJ glasi

$$y = \exp\Big(-\int f(x)\,dx\Big)\Big[c + \int h(x) \exp\Big(\int f(x)\,dx\Big)\,dx\Big] \ . \tag{2.3.5}$$

Prethodno opisani metod, kojim smo došli do rešenja (2.3.5), zove se *metod varijacije konstanata* jer je konstanta c iz (2.3.3) "varirala" u funkciju $c(x)$ iz (2.3.4).

Sem metoda varijacije konstanata, koristi se i *metod smene* $y = uv$, gde su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ nove nepoznate funkcije. Ovaj metod ćemo da prosledimo kroz primer, a detaljno ćemo da ga razmotrimo kod LDJ II reda. Metod smene $y = uv$ se drugačije zove *metod invarijanata.*

Naravno, za nalaženje opšteg rešenja LDJ (2.3.1) uvek može da se iskoristi i gotova formula (2.3.5).

PRIMER 2.3.1. Naći opšte rešenje LDJ

$$y' - \frac{1}{x}\,y = x^2 \ .$$

1) Prosleđujemo postupak varijacije konstanata.

Prvo rešavamo homogenu LDJ

$$y' - \frac{1}{x}\,y = 0 \ .$$

Dovodimo je na oblik

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \ .$$

Uz ograničenja $x \neq 0$, $y \neq 0$, rešenje poslednje LDJ se dobija integracijom,

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1 \ ,$$

tj.

$$y = cx \ .$$

Neka je proizvoljna konstanta c funkcija od x. Potražimo rešenje date LDJ u obliku

$$y = c(x)x \ .$$

Iz poslednje jednakosti je $y' = c'x + c$, što zamenom u datu LDJ daje

$$c'(x) = x \ .$$

Integracijom se dobija

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k \ ,$$

pa je traženo opšte rešenje

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + k\right)x$$

i, zamenom oznake k oznakom c,

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)x \ .$$

2) Pokazujemo sada metod smene $y = uv$.

Diferenciranjem smene nalazimo $y' = u'v + uv'$, što zamenom u polaznu LDJ daje

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}\,uv = x^2 \ ,$$

tj.

$$vu' + \left(v' - \frac{v}{x}\right)u = x^2 \ . \tag{2.3.6}$$

S obzirom da smenom $y = uv$ funkcije u i v nisu jednoznačno određene, jednu od njih možemo da izaberemo proizvoljno. Izaberimo funkciju v tako da je

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \ . \tag{2.3.7}$$

Iz (2.3.7) je

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \ ,$$

uz uslov $v \neq 0$. Integracijom se dobija $v = cx$, gde je c proizvoljna konstanta. Konstantu c biramo tako da funkcija v bude što jednostavnija. Ovde je to $c = 1$, pa je

$$v(x) = x \ .$$

Vraćajući se u (2.3.6) dobijamo

$$u'x = x^2 \ ,$$

odakle je $u' = x$ i

$$u(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta. Dakle, traženo opšte rešenje je

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)x\ . \quad \triangle$$

$\boxed{\text{PRIMER 2.3.2.}}$ Naći opšte rešenje LDJ

$$(x^2-1)y' - 2xy + 2x - 2x^3 = 0\ .$$

Opšte rešenje date LDJ određujemo prema gotovoj formuli (2.3.5).

Deobom sa x^2-1 ($x \neq \pm 1$) datu LDJ dovodimo na oblik (2.3.1),

$$y' - \frac{2x}{x^2-1}\,y = 2x\ ,$$

odakle je

$$f(x) = -\frac{2x}{x^2-1}\ , \quad h(x) = 2x\ .$$

Određujemo

$$\int f(x)\,dx = \int -\frac{2x}{x^2-1}\,dx = -\ln|x^2-1|\ ,$$

pa opšte rešenje, prema (2.3.5), postaje

$$y = |x^2-1|\left(c_1 + 2\int \frac{x}{|x^2-1|}\,dx\right)\ ,$$

tj.

$$y = c_1|x^2-1| + |x^2-1|\int \frac{2x}{|x^2-1|}\,dx\ .$$

Kako ispred integrala i u podintegralnoj funkciji figuriše isti izraz $|x^2-1| = \pm(x^2-1)$, to se znaci $\pm$ poništavaju, pa poslednja jednakost postaje

$$y = c(x^2-1) + (x^2-1)\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx \quad (c = \pm c_1)\ .$$

Zato je dalje

$$\begin{aligned} y &= c(x^2-1) + (x^2-1)\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} \\ &= c(x^2-1) + (x^2-1)\ln|x^2-1| \\ &= (x^2-1)(c + \ln|x^2-1|)\ , \end{aligned}$$

što je traženo opšte rešenje.

Primetimo da ovo opšte rešenje možemo da predstavimo i u drugačijem obliku. Označimo c sa c_2 i stavimo $c_3 = e^{c_2}$. Tada prethodno opšte rešenje postaje

$$\begin{aligned} y &= (x^2-1)(c_2 + \ln|x^2-1|) = (x^2-1)(\ln c_3 + \ln|x^2-1|) = (x^2-1)\ln(c_3|x^2-1|) \\ &= (x^2-1)\ln c(x^2-1) \quad (c = \pm c_3)\ . \quad \triangle \end{aligned}$$

2.4. Bernoullieva DJ

Opšti oblik ove DJ je

$$y' + f(x)y = h(x)y^r \quad (r \in \mathbb{R})\ . \tag{2.4.1}$$

Za $r = 0$ i $r = 1$ ova DJ je linearna. Zato pretpostavljamo da je $r \neq 0$ i $r \neq 1$.

DJ (2.4.1) se rešava smenom

$$y = z^k\ , \tag{2.4.2}$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, a k pogodno izabrana konstanta. Iz ove smene je $y' = kz^{k-1}z'$, što zamenom u polaznu DJ daje

$$kz^{k-1}z' + fz^k = hz^{kr}$$

i, deobom sa z^{k-1},

$$kz' + fz = hz^{kr-k+1}\ . \tag{2.4.3}$$

Konstanta k se bira tako da bude $kr - k + 1 = 0$, dakle

$$k = \frac{1}{1-r}\ .$$

Zato (2.4.3) postaje

$$\frac{1}{1-r}z' + fz = h\ ,$$

tj.

$$z' + (1-r)f(x)z = (1-r)h(x)\ , \tag{2.4.4}$$

što je LDJ po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Rešavamo LDJ (2.4.4) i nalazimo njeno opšte rešenje

$$z = z(x,c)\ .$$

Povratkom u (2.4.2) dobijamo opšte rešenje Bernoullieve DJ

$$y = z(x,c)^{1/(1-r)} \ .$$

$\boxed{\text{PRIMER 2.4.1.}}$ Naći opšte rešenje DJ

$$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0 \ .$$

Datu DJ prvo dovodimo na oblik Bernoullieve (2.4.1),

$$y' - \frac{4}{x}\,y = x\sqrt{y} \ ,$$

uz ograničenje $x \neq 0$. Ovde je:

$$f(x) = -\frac{4}{x} \ , \quad h(x) = x \ , \quad r = \frac{1}{2} \ .$$

Uvodimo smenu $y = z^k$, gde je $k = 1/(1-r) = 2$. Dakle, smena je

$$y = z^2 \ .$$

Zato je $y' = 2zz'$, pa se DJ transformiše u

$$2zz' - \frac{4}{x}\,z^2 = xz \ ,$$

tj.

$$z' - \frac{2}{x}\,z = \frac{x}{2} \ .$$

Dobijena DJ je nehomogena LDJ po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Njeno rešenje određujemo prema formuli (2.3.5),

$$\begin{aligned} z &= \exp\Big(-\int -\frac{2}{x}\,dx\Big)\Big[c + \int \frac{x}{2}\exp\Big(\int -\frac{2}{x}\,dx\Big)\Big] \\ &= x^2\Big[c + \frac{1}{2}\ln|x|\Big] \ . \end{aligned}$$

Zato je traženo opšte rešenje

$$y = z^2 = x^4\Big(c + \frac{1}{2}\ln|x|\Big)^2 \ . \quad \triangle$$

2.5. Riccatieva DJ

Opšti oblik ove DJ je

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \ , \tag{2.5.1}$$

gde su P, Q, R zadate funkcije. DJ (2.5.1) ne može da se reši u opštem slučaju. U sledećim slučajevima se svodi na rešive DJ.

Neka su a_i $(i = 1, 2, 3)$ poznate konstante i $f(x)$ poznata funkcija. Ako je

$$y' = f(x)\big(a_1 y^2 + a_2 y + a_3\big) \ ,$$

DJ (2.5.1) je DJ sa razdvojenim promenljivama. Ako je

$$y' = \frac{a_1}{x^2}\, y^2 + \frac{a_2}{x}\, y + a_3 \ ,$$

DJ (2.5.1) je homogena. Ako je

$$y' = a_1 y^2 + \frac{a_2}{x}\, y + \frac{a_3}{x^2} \ ,$$

DJ (2.5.1) se smenom $y = z/x$ svodi na DJ sa razdvojenim promenljivama po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$.

Riccatieva DJ uvek može da se reši ako je poznato neko njeno partikularno rešenje $y_1 = y_1(x)$. Uvođenjem smene

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \ ,$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, dobija se

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

i DJ (2.5.1) postaje

$$z^2\big(y_1' - P y_1^2 - Q y_1 - R\big) = z' + 2P y_1 z + Qz + P \ ,$$

odnosno

$$z' + (2P y_1 + Q)z + P = 0 \ , \tag{2.5.2}$$

što je LDJ po nepoznatoj funkciji z. Analogno, smenom

$$y = y_1 + z$$

se Riccatieva DJ svodi na Bernoullievu

$$z' - (2Py_1 + Q)z = Pz^2 \; . \tag{2.5.3}$$

$\boxed{\text{PRIMER 2.5.1.}}$ Naći opšte rešenje DJ

$$y' = \frac{1}{1-x^3}\, y^2 - \frac{x^2}{1-x^3}\, y - \frac{2x}{1-x^3}$$

ako je $y_1 = ax^2$ jedno njeno partikularno rešenje i a konstanta koju treba odrediti.

Iz $y_1 = ax^2$ sledi $y_1' = 2ax$, što zamenom u datu DJ daje

$$2ax = \frac{1}{1-x^3}\, a^2x^4 - \frac{x^2}{1-x^3}\, ax^2 - \frac{2x}{1-x^3}$$

i sređivanjem

$$2(a+1)x - a(a+1)x^4 = 0 \; .$$

Poslednja jednakost važi za svako x ako je $a+1=0$, tj. $a=-1$. Zato je partikularno rešenje

$$y_1 = -x^2 \; .$$

Data DJ je Riccatieva sa

$$P(x) = \frac{1}{1-x^3} \; , \quad Q(x) = -\frac{x^2}{1-x^3} \; , \quad R(x) = -\frac{2x}{1-x^3} \; .$$

Uvodimo smenu

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = -x^2 + \frac{1}{z} \; ,$$

posle koje se DJ transformiše u LDJ (2.5.2), tj. u

$$z' - \frac{3x^2}{1-x^3}\, z = -\frac{1}{1-x^3} \; .$$

Opšte rešenje ove LDJ se određuje prema formuli (2.3.5) i glasi

$$z = \frac{c-x}{1-x^3} \; ,$$

pa je traženo opšte rešenje

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = -x^2 + \frac{1-x^3}{c-x} = \frac{1-cx^2}{c-x} \; ,$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Smenom

$$y = y_1 + z = -x^2 + z$$

se polazna DJ svodi na Bernoullievu (2.5.3), tj.

$$z' + \frac{3x^2}{1-x^3}\, z = \frac{1}{1-x^3}\, z^2 \ ,$$

čijim rešavanjem se dobija

$$z = \frac{1-x^3}{c-x}$$

i, jasno, isto opšte rešenje

$$y = \frac{1-cx^2}{c-x} \ . \quad \triangle$$

2.6. DJ u totalnom diferencijalu

Opšti oblik ove DJ je

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \ , \tag{2.6.1}$$

uz obavezan uslov

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ . \tag{2.6.2}$$

Uslov (2.6.2) obezbeđuje egzistenciju funkcije $u(x,y)$, takve da je njen totalni diferencijal

$$du = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

(videti [**1**], str. 33–35), pa DJ (2.6.1) zato i nosi ime "u totalnom diferencijalu". Primećujemo da iz poslednje jednakosti sledi

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \ . \tag{2.6.3}$$

Jednakosti (2.6.3) se koriste za izvođenje formule kojom je dato opšte rešenje polazne DJ (2.6.1). To izvođenje nećemo teorijski da razmatramo, već ćemo da ga prosledimo kroz konkretan primer. Gotova formula opšteg rešenja, do koje pomenuto izvođenje dovodi, glasi

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt = c \ . \tag{2.6.4}$$

U formuli (2.6.4) je (x_0, y_0) proizvoljna tačka iz oblasti u kojoj važi uslov (2.6.2). Ova tačka se obično konkretno bira i to tako da drugi integral iz (2.6.4),

$$\int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\, dt \ ,$$

bude jednostavan za rešavanje.

Postoje DJ koje nisu u totalnom diferencijalu, ali pomoću tzv. integracionog faktora mogu da se dovedu na oblik totalnog diferencijala (2.6.1) (videti [**1**], str. 37–40).

PRIMER 2.6.1. Naći opšte rešenje DJ

$$(3x^2 + 6xy^2)\, dx + (6x^2y + 4y^2)\, dy = 0 \ .$$

Ovde je

$$M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 \ , \quad N(x, y) = 6x^2y + 4y^2 \ .$$

Zato je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy \ , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy \ ,$$

pa je uslov (2.6.2) ispunjen i data DJ je u totalnom diferencijalu.

1) Prosleđujemo prethodno pomenuti postupak.

Zbog ispunjenog uslova (2.6.2), postoji funkcija $u(x, y)$ takva da važi (2.6.3), tj.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = 6x^2y + 4y^2 \ . \tag{2.6.5}$$

Uzimamo, npr., prvu jednačinu iz (2.6.5) i integracijom dobijamo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = \int \big(3x^2 + 6xy^2\big)\, dx \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) \ , \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

gde je $\varphi(y)$ proizvoljna integraciona konstanta u odnosu na integraciju po x.

Diferencirajući (2.6.6) po y i koristeći drugu jednačinu iz (2.6.5), imamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = N(x, y) = 6x^2y + 4y^2 \ .$$

Odavde je

$$\varphi'(y) = 4y^2 \ ,$$

pa je

$$\varphi(y) = \int 4y^2\, dy = \frac{4}{3}\, y^3 + c_1 \ ,$$

gde je c_1 proizvoljna konstanta. Zato je, prema (2.6.6),

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}\,y^3 + c_1\ .$$

S druge strane, iz zadate DJ je $du = 0$, pa je

$$u(x,y) = c_2\ .$$

Poslednje dve jednakosti zajedno daju traženo opšte rešenje

$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}\,y^3 + c_1 = c_2\ ,$$

tj.

$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}\,y^3 = c \quad (c = c_2 - c_1)\ .$$

2) Do istog rešenja dolazimo korišćenjem gotove formule (2.6.4).

Prvo primećujemo da je uslov (2.6.2) ispunjen za svako x i y. Zato za tačku (x_0, y_0) možemo da uzmemo bilo koju, npr. $(x_0, y_0) = (0,0)$. Formula (2.6.4) sada glasi

$$\int_0^x M(t,y)\,dt + \int_0^y N(0,t)\,dt = c\ ,$$

ili konkretno

$$\int_0^x (3t^2 + 6ty^2)\,dt + \int_0^y 4t^2\,dt = c\ .$$

Integracijom dobijamo

$$(t^3 + 3t^2y^2)\Big|_{t=0}^{t=x} + \frac{4}{3}\,t^3\Big|_{t=0}^{t=y} = c\ ,$$

tj.

$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}\,y^3 = c\ ,$$

što je traženo opšte rešenje. $\triangle$

2.7. Lagrangeova i Clairautova DJ

Lagrangeova i Clairautova DJ spadaju u grupu DJ čiji je opšti oblik

$$y = f(x, y')\ , \tag{2.7.1}$$

sa poznatom funkcijom f. DJ (2.7.1) se rešava smenom

$$t = y'\ ,$$

posle koje postaje

$$y = f(x,t) \ . \tag{2.7.2}$$

Kako je $y = y(x)$, to je

$$dy = y'\,dx = t\,dx \ .$$

S druge strane, $f(x,t)$ je funkcija dve nezavisno promenljive, pa diferenciranjem (2.7.2) sledi

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \ .$$

Iz poslednje dve jednakosti dobijamo

$$t\,dx = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \tag{2.7.3}$$

i

$$\Big(t - \frac{\partial f}{\partial x}\Big)\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \ .$$

Pod uslovom

$$t - \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0 \ ,$$

određujemo opšte rešenje $x = x(t,c)$ DJ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{t - \dfrac{\partial f}{\partial x}} \ , \tag{2.7.4}$$

što smenom u (2.7.2) daje $y = f\big(x(t,c),t\big)$. Jednakosti

$$x = x(t,c) \ , \quad y = f\big(x(t,c)\,,\,t\big) \ , \tag{2.7.5}$$

gde je c proizvoljna konstanta, definišu opšte rešenje DJ (2.7.1) u parametarskom obliku.

Iz jednakosti

$$t - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{2.7.6}$$

se određuje singularno rešenje DJ (2.7.1). Ovo rešenje predstavlja obvojnicu familije krivih (2.7.5) (videti [**1**], str. 54–55).

Lagrangeova DJ ima opšti oblik

$$y = xP(y') + Q(y') \ , \tag{2.7.7}$$

gde su P, Q zadate funkcije i $P(y') \neq y'$. Dakle, DJ (2.7.7) je specijalan slučaj DJ (2.7.1) koji nastaje za

$$f(x, y') = xP(y') + Q(y') \ ,$$

tj.

$$f(x, t) = xP(t) + Q(t) \ .$$

Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(t) \ , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = xP'(t) + Q'(t) \ ,$$

DJ (2.7.4) dobija oblik

$$\frac{dx}{dt} = \frac{xP'(t) + Q'(t)}{t - P(t)} \ . \tag{2.7.8}$$

Pod ograničenjem

$$t - P(t) \neq 0 \ ,$$

opšte rešenje (2.7.5) postaje

$$x = x(t, c) \ , \quad y = x(t, c)P(t) + Q(t) \ ,$$

gde je $x = x(t, c)$ opšte rešenje DJ (2.7.8) i c proizvoljna konstanta.

Neka je a konstanta takva da je $t = a$ neko rešenje jednačine (2.7.6), tj.

$$t - P(t) = 0 \ .$$

Tada je

$$y = xP(a) + Q(a)$$

singularno rešenje Lagrangeove DJ (2.7.7).

Clairautova DJ ima opšti oblik

$$y = xy' + Q(y') \ , \tag{2.7.9}$$

gde je Q zadata funkcija. Očigledno je (2.7.9) specijalan slučaj DJ (2.7.1) za

$$f(x, y') = xy' + Q(y') \ .$$

Smenom $t = y'$, DJ (2.7.9) postaje

$$y = xt + Q(t) \; . \tag{2.7.10}$$

Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = t \; , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = x + Q'(t) \; ,$$

(2.7.3) se svodi na

$$t\,dx = t\,dx + \big(x + Q'(t)\big)\,dt \; ,$$

tj.

$$\big(x + Q'(t)\big)\,dt = 0 \; . \tag{2.7.11}$$

Jednakost (2.7.11) važi ako je $dt = 0$ ili $x + Q'(t) = 0$.

Iz $dt = 0$ sledi $t = c$, što zamenom u (2.7.10) daje opšte rešenje Clairaut-ove DJ

$$y = cx + Q(c) \; ,$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Iz $x + Q'(t) = 0$ sledi $x = -Q'(t)$, što zamenom u (2.7.10) dovodi do singularnog rešenja u parametarskom obliku

$$x = -Q'(t) \; , \quad y = -t\,Q'(t) + Q(t) \; .$$

PRIMER 2.7.1. Naći opšte i singularno rešenje DJ

$$5y = x^2 + xy' - {y'}^2 \; .$$

Data DJ je oblika (2.7.1) sa

$$f(x, y') = \frac{1}{5}(x^2 + xy' - {y'}^2) \; ,$$

pa se smenom $t = y'$ transformiše u

$$y = \frac{1}{5}(x^2 + xt - t^2) \; . \tag{2.7.12}$$

Kako je $f(x,t) = \dfrac{1}{5}(x^2 + xt - t^2)$, to je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5}\,(2x + t) \; , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{5}\,(x - 2t)$$

i (2.7.4) postaje

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\,\frac{x-2t}{x-2t}\ .$$

Ako je $x - 2t \neq 0$, tada je:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\ , \quad dx = -\frac{1}{2}\,dt$$

i integracijom

$$x = -\frac{1}{2}\,t + c\ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta. Zamenom nađenog $x = x(t, c)$ u (2.7.12) sledi

$$y = \frac{1}{5}\left[\left(-\frac{1}{2}\,t + c\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\,t + c\right)t - t^2\right] = -\frac{1}{4}\,t^2 + \frac{1}{5}\,c^2\ ,$$

pa je traženo opšte rešenje

$$x = -\frac{1}{2}\,t + c\ , \quad y = -\frac{1}{4}\,t^2 + \frac{1}{5}\,c^2\ .$$

U ovom slučaju je jednostavno eliminisati parametar t, čime se sa prethodnog parametarskog oblika prelazi na eksplicitni oblik. Iz prve jednačine je $t = 2c - 2x$, što smenom u drugu jednačinu daje

$$y = -\frac{1}{4}\,(2c - 2x)^2 + \frac{1}{5}\,c^2 = -(c - x)^2 + \frac{1}{5}\,c^2\ .$$

Neka je sada $x - 2t = 0$. Tada je $x = 2t$ i, zamenom u (2.7.12), $y = t^2$. Dakle, traženo singularno rešenje u parametarskom obliku je

$$x = 2t\ , \quad y = t^2$$

ili u eksplicitnom obliku

$$y = \frac{1}{4}\,x^2\ . \quad \triangle$$

$\boxed{\text{PRIMER 2.7.2.}}$ Naći opšte i singularno rešenje DJ

$$y = 2xy' + {y'}^2\ .$$

Ovo je Lagrangeova DJ (2.7.7) sa

$$P(y') = 2y'\ , \quad Q(y') = {y'}^2\ ,$$

pa se smenom $t = y'$ transformiše u

$$y = 2xt + t^2\ . \tag{2.7.13}$$

Kako je $P(t)=2t,\ Q(t)=t^2$, to je $P'(t)=2,\ Q'(t)=2t$ i (2.7.8) postaje

$$\frac{dx}{dt}=-2\,\frac{x+t}{t}\ .$$

Neka je $t\neq 0$. Poslednja jednakost je tada LDJ

$$x'+\frac{2}{t}\,x=-2$$

po nepoznatoj funkciji $x=x(t)$ i ima opšte rešenje

$$x=\frac{c}{t^2}-\frac{2}{3}\,t\ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta. Zamenom nađenog $x=x(t,c)$ u (2.7.13) sledi traženo opšte rešenje u parametarskom obliku

$$x=\frac{c}{t^2}-\frac{2}{3}\,t\ ,\quad y=\frac{2c}{t}-\frac{4}{3}\,t^2+t^3\ .$$

Za $t=0$ je $P(0)=0$, $Q(0)=0$, pa je

$$y=xP(0)+Q(0)=0$$

singularno rešenje date DJ. $\triangle$

PRIMER 2.7.3. Naći opšte i singularno rešenje DJ

$$y=xy'-\frac{1}{3}\,y'^3\ .$$

Ovo je Clairautova DJ (2.7.9) sa

$$Q(y')=-\frac{1}{3}\,y'^3\ ,$$

pa se smenom $t=y'$ transformiše u

$$y=xt-\frac{1}{3}\,t^3\ . \tag{2.7.14}$$

Kako je $Q(t)=-t^3/3$, to je $Q'(t)=-t^2$ i (2.7.11) postaje

$$\left(x-t^2\right)dt=0\ .$$

Iz $dt=0$ sledi $t=c$, što zamenom u (2.7.14) daje opšte rešenje polazne DJ

$$y=cx-\frac{1}{3}\,c^3\ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Iz $x-t^2=0$ je $x=t^2$ i, prema (2.7.14), $y=2t^3/3$. Zato je traženo singularno rešenje u parametarskom obliku

$$x=t^2\ ,\quad y=\frac{2}{3}\,t^3\ .$$

Ovo singularno rešenje može da se iskaže i na eksplicitan način. Iz prve jednakosti je $t=\pm\sqrt{x}$, pa je iz druge jednakosti

$$y=\pm\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\ .\quad\triangle$$

3. LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE II REDA

3.1. Opšta teorija o LDJ II reda

I ovde, kao i u slučaju linearnih DJ I reda, koristimo kraću oznaku LDJ.
Opšti oblik LDJ II reda je

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \ , \tag{3.1.1}$$

gde su f, g i h zadate funkcije. Ovo je nehomogena LDJ II reda za $h(x) \not\equiv 0$. Ako je $h(x) \equiv 0$, (3.1.1) postaje

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \ , \tag{3.1.2}$$

što je homogena LDJ II reda. U obe jednačine su koeficijenti uz y i y' funkcije, pa su (3.1.1) i (3.1.2) redom *nehomogena i homogena LDJ II reda sa funkcionalnim koeficijentima.* Ako su koeficijenti uz y, y' i y'' realne konstante, dobija se

$$y'' + ay' + by = h(x) \ , \tag{3.1.3}$$

što je *nehomogena LDJ II reda sa konstantnim koeficijentima* i

$$y'' + ay' + by = 0 \ , \tag{3.1.4}$$

što je *homogena LDJ II reda sa konstantnim koeficijentima.*

Tvrđenja koja navodimo u nastavku odnose se na homogene (3.1.2) i (3.1.4), odnosno na nehomogene (3.1.1) i (3.1.3). Zato ih dajemo samo za opštiji slučaj jednačina (3.1.2) i (3.1.1).

Teorema 3.1.1. *Ako je $y_1(x)$ rešenje homogene LDJ* (3.1.2), *tada je $cy_1(x)$ takođe rešenje LDJ* (3.1.2), *gde je c proizvoljna konstanta.*

Dokaz. Imajući u vidu da je y_1 rešenje LDJ (3.1.2), diferenciranjem cy_1 i zamenom u (3.1.2) dobijamo

$$cy_1'' + fcy_1' + gcy_1 = c(y_1'' + fy_1' + gy_1) = 0 \ . \quad \square$$

Teorema 3.1.2. *Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja homogene LDJ* (3.1.2)*, tada je i $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ rešenje LDJ* (3.1.2)*, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.*

Dokaz. Kako su y_1 i y_2 rešenja LDJ (3.1.2), diferenciranjem $c_1y_1 + c_2y_2$, zamenom u LDJ (3.1.2) i sređivanjem dobijamo

$$c_1(y_1'' + fy_1' + gy_1) + c_2(y_2'' + fy_2' + gy_2) = 0 \ . \quad \square$$

Teorema 3.1.3. *Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno nezavisna rešenja homogene LDJ* (3.1.2)*, tada je*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3.1.5}$$

opšte rešenje LDJ (3.1.2)*, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.*

Prema Teoremi 3.1.2, (3.1.5) jeste rešenje LDJ (3.1.2). Dokaz da je to opšte, a ne partikularno rešenje, zahteva poznavanje šire teorije od ovde iznete, pa ga izostavljamo (videti [**1**], str. 79).

Linearna nezavisnost rešenja y_1 i y_2 znači da ne postoje konstante k_1 i k_2, od kojih je bar jedna različita od 0, takve da je $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$ za svako $x \in D$, gde je D presek oblasti definisanosti LDJ (3.1.2) i oblasti definisanosti rešenja y_1, y_2. Linearna nezavisnost (zavisnost) se praktično ispituje pomoću jednakosti

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 = 0 \ .$$

Ako ova jednakost važi za svako $x \in D$, y_1 i y_2 su linearno zavisna rešenja. Zaista, iz prethodne jednakosti je

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} \ ,$$

odakle je redom:

$$\ln|y_1| = \ln|y_2| + c \ , \quad y_1 = ky_2 \quad (k = \pm e^c) \ , \quad y_1 - ky_2 = 0 \ ,$$

pa postoje konstante $k_1 = 1$ i $k_2 = -k$ takve da je $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$. Slično, y_1 i y_2 su linearno nezavisna rešenja ako za svako $x \in D$ važi

$$y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0 \ . \tag{3.1.6}$$

NAPOMENA 3.1.1. Za razliku od Teoreme 3.1.3, Teorema 3.1.2 dozvoljava da y_1, y_2 budu linearno zavisna rešenja. U ovom slučaju je sa (3.1.5) dato partikularno rešenje, što se lako proverava. Iz linearne zavisnosti rešenja y_1 i y_2 sledi da postoje konstante k_1 i k_2, od kojih je bar jedna različita od 0, takve da je $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$ za svako $x \in D$. Tada je, npr., $y_1 = -(k_2/k_1)y_2$, pa je

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = -c_1\frac{k_2}{k_1}\,y_2 + y_2 = \Big(c_2 - c_1\frac{k_2}{k_1}\Big)y_2 = c\,y_2 \ ,$$

gde je $c = c_2 - c_1(k_2/k_1)$. Dakle, (3.1.5) sadrži samo jednu proizvoljnu konstantu c, pa je to partikularno rešenje. $\triangle$

NAPOMENA 3.1.2. Definicije i teoreme koje se odnose na oblast definisanosti DJ, sistema DJ i njihovih rešenja su veoma komplikovane. Zato ih ne navodimo, a čitaoce upućujemo na literaturu, npr. na [**1**], [**2**]. $\triangle$

Teorema 3.1.4. *Ako je $y_1(x)$ jedno partikularno rešenje homogene LDJ* (3.1.2)*, drugo linearno nezavisno partikularno rešenje $y_2(x)$ se određuje smenom*

$$y = y_1z \ , \tag{3.1.7}$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija.

Dokaz. Diferenciranjem (3.1.7) i zamenom nađenih izvoda y' i y'' u LDJ (3.1.2), dobijamo

$$\frac{z''}{z'} = -2\,\frac{y_1'}{y_1} - f(x) \ .$$

Uz uslove $y_1 \neq 0$, $z' \neq 0$, integracijom sledi

$$\int \frac{z''}{z'}\,dx = \int \frac{(z')'}{z'}\,dx = \int \frac{d(z')}{z'} = \ln|z'|$$

i analogno

$$\int \Big[-2\,\frac{y_1'}{y_1} - f(x)\Big]\,dx = -2\ln|y_1| - \int f(x)\,dx \ ,$$

što zajedno daje

$$\ln|z'| = -2\ln|y_1| - \int f(x)\,dx \ .$$

Iz poslednje jednakosti se nalazi z' i još jednom integrali. Pri obe integracije se proizvoljne konstante biraju konkretno. Nađenu funkciju $z(x)$ zamenjujemo u (3.1.7) i dobijamo drugo partikularno rešenje

$$y_2(x) = y_1(x)z(x) \ .$$

Rešenja y_1 i y_2 su linearno nezavisna jer je

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = y_1(y_1'z + y_1z') - y_1'y_1z = y_1^2z' \neq 0 \ . \quad \square$$

NAPOMENA 3.1.3. Ako se pri određivanju funkcije $z(x)$ zadrže proizvoljne konstante, dobija se $z = z(x, c_1, c_2)$, pa

$$y(x) = y_1(x)z(x, c_1, c_2)$$

daje opšte rešenje LDJ (3.1.2). $\triangle$

Teorema 3.1.5. *Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_p(x)$ nehomogene LDJ* (3.1.1), *tada se smenom*

$$y = y_p + z \tag{3.1.8}$$

nehomogena LDJ (3.1.1) *svodi na homogenu* (3.1.2) *po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$.*

Dokaz. Nalaženjem y' i y'' iz (3.1.8) i zamenom u (3.1.1) sledi

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0 \ . \quad \square$$

Teorema 3.1.6. *Neka je $y_p(x)$ partikularno rešenje nehomogene LDJ* (3.1.1) *i $y_h(x)$ opšte rešenje homogene* (3.1.2). *Tada je opšte rešenje nehomogene LDJ* (3.1.1) *dato sa*

$$y = y_p(x) + y_h(x) \ . \tag{3.1.9}$$

Dokaz. Ova teorema je posledica Teoreme 3.1.5. Vidimo da je, posle smene $y = y_p + z$, dobijena LDJ po z ista kao homogena LDJ (3.1.2). Dakle, za datu nehomogenu (3.1.1) treba formirati odgovarajuću homogenu (3.1.2),

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

i naći njeno opšte rešenje

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \ ,$$

a zatim ga smeniti u (3.1.8). □

Teorema 3.1.7. *Ako je poznato opšte rešenje* $y_h(x)$ *homogene LDJ* (3.1.2)*, tada se može odrediti i opšte rešenje nehomogene LDJ* (3.1.1)*.*

Dokaz. Neka je

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

opšte rešenje homogene LDJ (3.1.2). Pretpostavimo da c_1 i c_2 nisu konstante, već funkcije

$$c_1(x) \ , \quad c_2(x)$$

i potražimo opšte rešenje nehomogene (3.1.1) u obliku

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 \ . \tag{3.1.10}$$

Iz (3.1.10) nalazimo

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2' = (c_1' y_1 + c_2' y_2) + c_1 y_1' + c_2 y_2' \tag{3.1.11}$$

i stavljamo

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \ , \tag{3.1.12}$$

posle čega (3.1.11) postaje

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \ .$$

Daljim diferenciranjem sledi

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' \ .$$

Zamenom ovako iskazanih y' i y'' u LDJ (3.1.1) i sređivanjem, dobijamo

$$c_1\big(y_1'' + f y_1' + g y_1\big) + c_2\big(y_2'' + f y_2' + g y_2\big) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = h(x) \ .$$

Kako su y_1 i y_2 rešenja homogene LDJ (3.1.2), to su izrazi u zagradama jednaki 0, pa je

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = h(x) \ . \tag{3.1.13}$$

Rešavanjem sistema (3.1.12)–(3.1.13) određujemo $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, a zatim integracijom i $c_1(x)$, $c_2(x)$. Pri integraciji se javljaju proizvoljne konstante k_1 i k_2, tako da je

$$c_1(x) = c_1(x, k_1) \ , \quad c_2(x) = c_2(x, k_2) \ ,$$

što zamenom u (3.1.10) daje opšte rešenje LDJ (3.1.1). □

Metod izložen u Teoremi 3.1.7 zove se *metod varijacije konstanata*. Teoremama 3.1.6 i 3.1.7 su data dva različita načina za nalaženje opšteg rešenja LDJ (3.1.1). Obe teoreme zahtevaju poznavanje opšteg rešenja homogene LDJ (3.1.2), ali Teorema 3.1.6 zahteva još i poznavanje partikularnog rešenja nehomogene LDJ. Zato je Teorema 3.1.6 na prvi pogled komplikovanija od Teoreme 3.1.7. Međutim, česte su situacije u kojima je Teorema 3.1.6 mnogo pogodnija za primenu.

Teorema 3.1.8. *Neka je u nehomogenoj LDJ* (3.1.1) *funkcija* $h(x)$ *oblika*

$$h(x) = h_1(x) + \cdots + h_m(x) \ .$$

Takođe, neka su $y_{p1}(x), \ldots, y_{pm}(x)$ *redom partikularna rešenja jednačina*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_i(x) \quad (i = 1, \ldots, m) \ .$$

Tada je

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + \cdots + y_{pm}(x) \tag{3.1.14}$$

partikularno rešenje LDJ (3.1.1).

Dokaz. Diferenciranjem (3.1.14) sledi

$$y_p' = \sum_{i=1}^{m} y_{pi}' \ , \quad y_p'' = \sum_{i=1}^{m} y_{pi}'' \ ,$$

što zamenom u (3.1.1) daje

$$y_p'' + fy_p' + gy_p = \sum_{i=1}^{m} \big(y_{pi}'' + fy_{pi}' + gy_{pi} \big) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x) = h(x) \ .$$

Dakle, y_p jeste rešenje za (3.1.1). □

3.2. Homogena LDJ II reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ smo već dali kao (3.1.4). Radi preglednosti izlaganja, ovde ga navodimo pod novom oznakom,

$$y'' + ay' + by = 0 \ , \tag{3.2.1}$$

gde su $a, b \in \mathbb{R}$ poznate realne konstante. Ovo je samo specijalan slučaj LDJ (3.1.2), pa ranije navedene Teoreme 3.1.1–3.1.8 važe i ovde.

Rešavanje LDJ (3.2.1) se sastoji u sledećem. Pretpostavimo da je neko rešenje jednačine (3.2.1) oblika

$$y = e^{\lambda x} ,$$

gde je $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleksna konstanta u opštem slučaju. Tada je $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, što zamenom u (3.2.1) daje

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 ,$$

tj.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 . \tag{3.2.2}$$

Dobijena jednačina (3.2.2) se zove *karakteristična jednačina* za LDJ (3.2.1). Ovo je kvadratna jednačina po λ, čijim rešavanjem mogu da nastupe sledeći slučajevi.

1° Neka su λ_1 i λ_2 rešenja karakteristične jednačine (3.2.2), takva da je

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 . \tag{3.2.3}$$

U ovom slučaju su funkcije

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} , \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \tag{3.2.4}$$

rešenja LDJ (3.2.1), što se zamenom u (3.2.1) lako proverava. Takođe, ovo su linearno nezavisna rešenja jer je, zbog $\lambda_1 \neq \lambda_2$, za svako x ispunjen uslov (3.1.6), tj.

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x} \neq 0 .$$

Prema Teoremi 3.1.3, opšte rešenje LDJ (3.2.1) dato je sa

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} , \tag{3.2.5}$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

2° Neka su λ_1 i λ_2 rešenja karakteristične jednačine (3.2.2), takva da je

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 . \tag{3.2.6}$$

Koeficijenti karakteristične jednačine a, b su realni brojevi, pa se kompleksna rešenja $\lambda_{1,2}$ javljaju u paru, kao konjugovani brojevi. Neka su to

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \ , \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \ ,$$

gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Kako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, imamo

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} \ , \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

i odgovarajuće opšte rešenje

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ .$$

Umesto dobijenih partikularnih rešenja y_1 i y_2 u praksi se koriste druga dva partikularna rešenja. Birajući konkretno $c_1 = c_2 = 1$, iz opšteg rešenja dobijamo partikularno

$$y_{p1}(x) = y_1 + y_2 \ .$$

Takođe, za $c_1 = 1$ i $c_2 = -1$, iz opšteg se dobija drugo partikularno rešenje

$$y_{p2}(x) = y_1 - y_2 \ .$$

Kako su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja, to su i y_{p1}, y_{p2} linearno nezavisna, što se vidi iz

$$y_{p1} y'_{p2} - y'_{p1} y_{p2} = -2(y_1 y'_2 - y'_1 y_2) \neq 0 \ .$$

U posmatranom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} y_{p1}(x) &= y_1 + y_2 \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x \ , \\ y_{p2}(x) &= y_1 - y_2 \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) - e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x \ . \end{aligned}$$

Konačno, prema Teoremi 3.1.1, za linearno nezavisna partikularna rešenja umesto nađenih y_{p1}, y_{p2} možemo da uzmemo

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \ , \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \ , \tag{3.2.7}$$

gde su upotrebljene iste oznake y_1, y_2 kao ranije. Zato je opšte rešenje

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x) \ , \tag{3.2.8}$$

sa proizvoljnim konstantama c_1, c_2.

3° Neka su λ_1 i λ_2 rešenja karakteristične jednačine (3.2.2), takva da je

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\ , \quad \lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)\ . \tag{3.2.9}$$

Za $\lambda_1 \neq \lambda_2$, prema (3.2.5) sa $c_1 = -c_2 = 1/(\lambda_1 - \lambda_2)$, funkcija

$$y = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\big(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\big)$$

je rešenje LDJ (3.2.1). Tražimo graničnu vrednost te funkcije kad $\lambda_2 \to \lambda_1 = \lambda$. Dobijamo

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = x e^{\lambda x}\ , \tag{3.2.10}$$

pa je i

$$y = x e^{\lambda x}$$

rešenje LDJ (3.2.1). Imajući u vidu da je $\lambda = \lambda_{1,2} = -a/2$, zamenom nađenog y u (3.2.1) tačnost prethodnog zaključka se neposredno proverava. Partikularna rešenja

$$y_1(x) = e^{\lambda x}\ , \quad y_2(x) = x e^{\lambda x} \tag{3.2.11}$$

su nezavisna jer je za svako x zadovoljen uslov

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{2\lambda x} \neq 0\ .$$

Opšte rešenje LDJ (3.2.1) dato je sa

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}\ , \tag{3.2.12}$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

NAPOMENA 3.2.1. Graničnu vrednost (3.2.10) smo našli prema sledećem. Posmatrajmo funkciju f datu sa

$$f(\lambda) = e^{\lambda x}$$

i stavimo

$$\Delta\lambda \equiv \Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2\ .$$

Tada je

$$\Delta f(\lambda) \equiv \Delta f(\lambda_1) = f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\ ,$$

pa je

$$\frac{\Delta f(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \ .$$

Kad $\lambda_2 \to \lambda_1$, imamo $\Delta\lambda \to 0$, pa je

$$\lim_{\lambda_1 \to \lambda_2} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta f(\lambda)}{\Delta\lambda} = f'(\lambda) = x e^{\lambda x} \ . \quad \triangle$$

NAPOMENA 3.2.2. Pošto smo znali jedno rešenje $y_1 = e^{\lambda x}$, umesto nalaženja granične vrednosti (3.2.10), do drugog rešenja smo mogli da dođemo i korišćenjem Teoreme 3.1.4, tj. smenom $y = y_1 z = e^{\lambda x} z$. $\triangle$

PRIMER 3.2.1. Naći opšte rešenje LDJ

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \ .$$

Za datu LDJ karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \ ,$$

odakle je $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Ovo je slučaj (3.2.3), pa se opšte rešenje određuje prema (3.2.5),

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \ . \quad \triangle$$

PRIMER 3.2.2. Naći opšte rešenje LDJ

$$y'' + y' + y = 0 \ .$$

Karakteristična jednačina

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

ima kompleksna rešenja

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

pa se radi o slučaju (3.2.6) sa $\alpha = -1/2$, $\beta = \sqrt{3}/2$. Zato je opšte rešenje oblika (3.2.8),

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) \ . \quad \triangle$$

PRIMER 3.2.3. Naći opšte rešenje LDJ

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \ .$$

Karakteristična jednačina

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

ima rešenja $\lambda_{1,2} = \lambda = 2$, što je slučaj (3.2.9). Zato je opšte rešenje, prema (3.2.12),

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x} \ . \quad \triangle$$

3.3. Nehomogena LDJ II reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ smo već dali i on je

$$y'' + ay' + by = h(x) \ , \tag{3.3.1}$$

gde su $a, b \in \mathbb{R}$ poznate konstante.

Pošto uvek možemo da nađemo opšte rešenje odgovarajuće homogene LDJ (3.2.1), metodom varijacije konstanata (Teorema 3.1.7) možemo da nađemo i opšte rešenje nehomogene LDJ (3.3.1).

U nekim specijalnim slučajevima, koji se odnose na oblik funkcije $h(x)$, korisnije je primeniti Teoremu 3.1.6 jer se u tim slučajevima lako određuje partikularno rešenje nehomogene LDJ (3.3.1). Takođe, Teorema 3.1.6 se lako generalizuje na LDJ višeg reda, dok metod varijacije konstanata kod ovih LDJ može da bude veoma komplikovan.

1° Neka je $h(x)$ oblika

$$h(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \ , \tag{3.3.2}$$

gde je

$$P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

polinom n–tog stepena sa realnim koeficijentima i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo sledeće podslučajeve.

a) α *nije nula* karakteristične jednačine (3.2.2).

U ovom slučaju partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = e^{\alpha x} R_n(x) \ , \tag{3.3.3}$$

gde je

$$R_n(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n \tag{3.3.4}$$

polinom n–tog stepena, čiji se koeficijenti $B_0, \ldots, B_n$ određuju smenom y_p, y_p', y_p'' u polaznu LDJ (3.3.1).

b) α *je nula reda* 1 karakteristične jednačine (3.2.2).

Partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = xe^{\alpha x} R_n(x) \ , \tag{3.3.5}$$

gde je $R_n(x)$ polinom (3.3.4).

c) α *je nula reda* 2 karakteristične jednačine (3.2.2).

Partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = x^2 e^{\alpha x} R_n(x) \ , \tag{3.3.6}$$

gde je $R_n(x)$ polinom (3.3.4).

2° Neka je $h(x)$ oblika

$$h(x) = e^{\alpha x}\big[P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x\big] \ , \tag{3.3.7}$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi n–tog stepena sa realnim koeficijentima i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Podslučajevi su sledeći.

a) $\alpha \pm i\beta$ *nisu nule* karakteristične jednačine (3.2.2).

Partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\big[R_n(x) \cos \beta x + S_n(x) \sin \beta x\big] \ , \tag{3.3.8}$$

gde su $R_n(x)$ i $S_n(x)$ polinomi n–tog stepena oblika (3.3.4), čiji koeficijenti se određuju smenom y_p, y_p', y_p'' u polaznu LDJ (3.3.1).

b) $\alpha \pm i\beta$ *su nule, svaka reda* 1, karakteristične jednačine (3.2.2).

Partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = xe^{\alpha x}\big[R_n(x) \cos \beta x + S_n(x) \sin \beta x\big] \ , \tag{3.3.9}$$

gde $R_n(x)$ i $S_n(x)$ imaju isto značenje kao u (3.3.8).

3° Neka je $h(x)$ oblika

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_m(x) \ , \tag{3.3.10}$$

pri čemu su $h_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ oblika 1° ili 2°.

Ovaj slučaj je objašnjen u Teoremi 3.1.8. Partikularno rešenje je dato sa (3.1.14), tj. sa

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + \cdots + y_{pm}(x) \ . \tag{3.3.11}$$

PRIMER 3.3.1. Metodom varijacije konstanata naći opšte rešenje LDJ

$$y'' - 4y = 4e^{-2x} \ .$$

Prvo rešavamo odgovarajuću homogenu LDJ

$$y'' - 4y = 0 \ .$$

Karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - 4 = 0 \ ,$$

pa su njena rešenja $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Ovo je slučaj (3.2.3), pa se partikularna rešenja homogene LDJ određuju prema (3.2.4),

$$y_1(x) = e^{2x} \ , \quad y_2(x) = e^{-2x} \ ,$$

a opšte rešenje prema (3.2.5),

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \ .$$

Stavimo da su c_1 i c_2 funkcije od x i potražimo opšte rešenje nehomogene LDJ u obliku

$$y = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{-2x} \ . \tag{3.3.12}$$

Primenom metoda varijacije konstanata (Teorema 3.1.7), formiramo sistem (3.1.12)–(3.1.13),

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \ , \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= h(x) \ , \end{aligned}$$

koji u konkretnom slučaju dobija oblik

$$\begin{aligned} c_1' e^{2x} + c_2' e^{-2x} &= 0 \ , \\ 2c_1' e^{2x} - 2c_2' e^{-2x} &= 4e^{-2x} \ , \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} c_1' e^{2x} + c_2' e^{-2x} &= 0 \ , \\ c_1' e^{2x} - c_2' e^{-2x} &= 2e^{-2x} \ . \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Sabiranjem jednačina sistema sledi

$$2c_1' e^{2x} = 2e^{-2x} \ ,$$

odakle je $c_1'(x) = e^{-4x}$ i integracijom

$$c_1(x) = \int e^{-4x}\, dx = -\frac{1}{4}\, e^{-4x} + k_1 \ .$$

Zamenom nađenog $c_1'(x)$, npr., u prvu jednačinu sistema (3.3.13) sledi

$$1 + c_2' = 0 \ ,$$

pa je $c_2'(x) = -1$ i

$$c_2(x) = \int -dx = -x + k_2 \ .$$

Sa k_1 i k_2 smo označili proizvoljne integracione konstante.

Zamenom nađenih $c_1(x)$ i $c_2(x)$ u (3.3.12) dobijamo opšte rešenje polazne nehomogene LDJ

$$y = \Big(-\frac{1}{4}\,e^{-4x} + k_1\Big)e^{2x} + (-x + k_2)e^{-2x} \ .$$

Pošto više ne može da dođe do zabune, upotrebićemo uobičajene oznake c_1 i c_2 za proizvoljne konstante umesto prethodno korišćenih k_1 i k_2. Tako opšte rešenje glasi

$$y = \Big(-\frac{1}{4}\,e^{-4x} + c_1\Big)e^{2x} + (-x + c_2)e^{-2x} \ .$$

Dobijeno opšte rešenje zapisujemo drugačije,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}\,e^{-2x} + c_1e^{2x} - xe^{-2x} + c_2e^{-2x} \\ &= -xe^{-2x} + c_1e^{2x} + \Big(c_2 - \frac{1}{4}\Big)e^{-2x} \ . \end{aligned}$$

Kako je c_2 proizvoljna konstanta, to je i $c_2 - 1/4$ proizvoljna konstanta. Zato za $c_2 - 1/4$ možemo da koristimo istu oznaku c_2 i dobijamo

$$y = -xe^{-2x} + \big(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}\big) \ . \tag{3.3.14}$$

Lako se proverava da je $-xe^{-2x}$ rešenje polazne nehomogene LDJ, dakle

$$y_p(x) = -xe^{-2x} \ .$$

Imajući u vidu opšte rešenje homogene LDJ, $y \equiv y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$, (3.3.14) postaje

$$y = y_p + y_h \ ,$$

što je oblik (3.1.9) opšteg rešenja nehomogene. $\triangle$

$\boxed{\text{PRIMER 3.3.2.}}$ Naći partikularno, a zatim i opšte rešenje LDJ

$$y'' - 4y = 4e^{-2x} \ .$$

Ovo je ista LDJ kao u prethodnom primeru. Zato su rešenja karakteristične jednačine $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Funkcija koja daje nehomogenost jednačini je

$$h(x) = 4e^{-2x} \ ,$$

što je oblika (3.3.2) sa $P_n(x) \equiv P_0(x) = 4$ i $\alpha = -2$. Kako je

$$\alpha = -2 = \lambda_2$$

nula reda 1 karakteristične jednačine, radi se o podslučaju b), pa je partikularno rešenje oblika (3.3.5), tj.

$$y_p(x) = xe^{\alpha x} R_n(x) = xe^{-2x} R_0(x) = Axe^{-2x} \ ,$$

gde je $R_0(x) = A$ privremeno neodređena konstanta. Da bismo odredili konstantu A, nalazimo:

$$y_p' = A(1-2x)e^{-2x} \ , \quad y_p'' = -4A(1-x)e^{-2x} \ .$$

Zamenom y_p, y_p', y_p'' u polaznu LDJ dobijamo

$$-4A(1-x)e^{-2x} - 4Axe^{-2x} = 4e^{-2x}$$

i

$$A = -1 \ .$$

Dakle, traženo partikularno rešenje je

$$y_p(x) = Axe^{-2x} = -xe^{-2x} \ .$$

U Primeru 3.3.1 je već nađeno opšte rešenje odgovarajuće homogene LDJ

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \ .$$

Prema Teoremi 3.1.6, opšte rešenje nehomogene LDJ je

$$y = y_p + y_h = -xe^{-2x} + \left(c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}\right) \ ,$$

što je isto kao u Primeru 3.3.1. △

PRIMER 3.3.3. Naći partikularno, a zatim i opšte rešenje LDJ

$$y'' + 4y = 2 + (8x-1)\sin 2x \ .$$

Odgovarajuća homogena LDJ je

$$y'' + 4y = 0 \ .$$

Njena karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 + 4 = 0 \ ,$$

sa rešenjima $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Ovo je slučaj (3.2.6), pa se opšte rešenje homogene LDJ nalazi prema (3.2.8),

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \ .$$

Funkcija $h(x)$ koja jednačinu čini nehomogenom je oblika (3.3.10), tj.

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) \ ,$$

gde je

$$h_1(x) = 2 \ , \quad h_2(x) = (8x-1)\sin 2x \ .$$

Zato je partikularno rešenje polazne LDJ oblika (3.3.11), tj.

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) \ . \tag{3.3.15}$$

Prema Teoremi 3.1.8, y_{p1} i y_{p2} su redom partikularna rešenja nehomogenih LDJ

$$y'' + 4y = h_1(x) \ , \quad y'' + 4y = h_2(x) \ .$$

Funkcija $h_1(x)$ može da se predstavi u obliku (3.3.2),

$$h_1(x) = 2 = e^{\alpha x} P_n(x) \ ,$$

gde je $\alpha = 0$ i $P_n(x) \equiv P_0(x) = 2$. Kako $\alpha = 0$ nije rešenje karakteristične jednačine, prema (3.3.3) partikularno rešenje y_{p1} ima oblik

$$y_{p1}(x) = R_0(x) = A \ ,$$

gde je A privremeno neodređena konstanta.

Funkcija $h_2(x)$ ima oblik (3.3.7),

$$h_2(x) = (8x-1)\sin 2x = e^{\alpha x}\big[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\big] \ ,$$

gde je $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_n(x) \equiv P_0(x) = 0$ i $Q_n(x) \equiv Q_1(x) = 8x-1$. Kako su $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ rešenja karakteristične jednačine, svako reda 1, prema (3.3.9) partikularno rešenje y_{p2} ima oblik

$$y_{p2}(x) = x\big[R_1(x)\cos 2x + S_1(x)\sin 2x\big] \ ,$$

gde su $R_1(x) = Bx + C$ i $S_1(x) = Dx + E$ polinomi čije koeficijente treba odrediti.

Prema prethodnom, partikularno rešenje (3.3.15) postaje

$$y_p(x) = A + x\big[(Bx+C)\cos 2x + (Dx+E)\sin 2x\big] \ .$$

Diferenciranjem nalazimo:

$$\begin{aligned}
y_p' &= \big[2Dx^2 + 2(B+E)x + C\big]\cos 2x + \big[-2Bx^2 - 2(C-D)x + E\big]\sin 2x \ ,\\
y_p'' &= 2\big[-2Bx^2 + 2(2D-C)x + B + 2E\big]\cos 2x\\
&\quad + 2\big[-2Dx^2 - 2(2B+E)x - 2C + D\big]\sin 2x \ ,
\end{aligned}$$

što smenom u polaznu LDJ daje

$$(8Dx + 2B + 4E)\cos 2x + (-8Bx - 4C + 2D)\sin 2x + 4A = 2 + (8x-1)\sin 2x \ ,$$

tj.

$$4A - 2 + 2(B + 2E)\cos 2x + (1 - 4C + 2D)\sin 2x + 8Dx\cos 2x - 8(B+1)x\sin 2x = 0 \ .$$

Iz poslednje jednakosti je:

$$4A - 2 = 0 \ , \quad 2(B + 2E) = 0 \ , \quad 1 - 4C + 2D = 0 \ , \quad 8D = 0 \ , \quad -8(B+1) = 0 \ ,$$

odakle je $A = E = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/4$ i $D = 0$. Konačno, partikularno rešenje je

$$y_p(x) = \frac{1}{2} + x\Big(\frac{1}{4} - x\Big)\cos 2x + \frac{1}{2}\, x\sin 2x \ .$$

Prema Teoremi 3.1.6, opšte rešenje nehomogene LDJ je

$$y = y_p + y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{2} + x\Big(\frac{1}{4} - x\Big)\cos 2x + \frac{1}{2}\, x\sin 2x \ . \quad \triangle$$

3.4. Homogena LDJ II reda sa funkcionalnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ je

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \ . \tag{3.4.1}$$

Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ ove LDJ, Teorema 3.1.4 objašnjava kako se nalazi drugo partikularno rešenje $y_2(x)$, pri čemu su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja. Prema Teoremi 3.1.3, tada znamo i opšte rešenje

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \ .$$

PRIMER 3.4.1. Data je LDJ

$$xy'' + (2 + x)y' + y = 0 \ ,$$

čije je jedno partikularno rešenje $y_1 = 1/x$. Naći drugo partikularno, a zatim i opšte rešenje date LDJ.

Prema Teoremi 3.1.4, uvodimo smenu

$$y = y_1 z = \frac{1}{x}\, z \ , \tag{3.4.2}$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Diferenciranjem (3.4.2) nalazimo

$$y' = -\frac{1}{x^2}\, z + \frac{1}{x}\, z' \ , \quad y'' = \frac{2}{x^3}\, z - \frac{2}{x^2}\, z' + \frac{1}{x}\, z'' \ ,$$

što smenom u zadatu LDJ daje

$$z'' + z' = 0 \; . \tag{3.4.3}$$

Dobijena jednačina je homogena sa konstantnim koeficijentima. Njena karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \; ,$$

pa su rešenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$. Zato su partikularna rešenja DJ (3.4.3)

$$z_1(x) = e^{\lambda_1 x} = 1 \; , \quad z_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-x} \; .$$

Vraćajući se u smenu (3.4.2), dobijamo $y_1(x) = (1/x)z_1 = 1/x$, što smo već znali i

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\, z_2 = \frac{1}{x}\, e^{-x} \; ,$$

što je traženo drugo partikularno rešenje. Zato je opšte rešenje

$$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x}\, e^{-x} = \frac{1}{x}\big(c_1 + c_2 e^{-x}\big) \; . \tag{3.4.4}$$

Primetimo da smo do drugog partikularnog rešenja DJ (3.4.3) mogli da dođemo i drugačije, s obzirom da je ova DJ oblika (1.2.1). Uvođenjem smene

$$u(x) = z'(x) \; ,$$

(3.4.3) postaje LDJ I reda po nepoznatoj funkciji $u = u(x)$,

$$u' + u = 0 \; .$$

Ovo je, u stvari, DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{du}{u} = -dx \; ,$$

čije rešenje se nalazi direktnom integracijom

$$\ln|u| = -x$$

i dalje

$$u(x) = e^{-x} \; .$$

Dakle, imamo $z' = e^{-x}$, pa je

$$z(x) = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$$

i

$$y_2(x) = y_1 z = -\frac{1}{x}\, e^{-x} \; .$$

Zato je

$$y = c_1 \frac{1}{x} - c_2 \frac{1}{x} e^{-x} \ .$$

Kako je c_2 proizvoljna konstanta, to je i $-c_2$ proizvoljna konstanta, pa za $-c_2$ koristimo istu oznaku c_2 i dobijamo opšte rešenje (3.4.4),

$$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x} e^{-x} \ . \quad \triangle$$

Za nalaženje jednog partikularnog rešenja ne postoje posebni metodi, pa to rešenje u opštem slučaju ne umemo da nađemo. Zato su razvijeni drugi metodi za rešavanje LDJ (3.4.1). Neki od njih se zasnivaju na transformaciji DJ sa funkcionalnim koeficijentima u DJ sa konstantnim koeficijentima. Na žalost, oni mogu da se primene samo u specijalnim slučajevima, ne i generalno. Navodimo dva takva metoda: metod invarijanata i metod smene nezavisno promenljive.

Metod invarijanata je zasnovan na smeni

$$y = uv \ , \tag{3.4.5}$$

gde su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ privremeno nepoznate funkcije. Nalaženjem izvoda

$$y' = u'v + uv' \ , \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

i zamenom u (3.4.1), dobija se

$$u''v + 2u'v' + uv'' + fu'v + fuv' + guv = 0 \ . \tag{3.4.6}$$

Poslednju DJ možemo da sredimo na dva načina, po funkciji u i njenim izvodima ili po funkciji v i njenim izvodima:

$$vu'' + (2v' + fv)u' + (v'' + fv' + gv)u = 0 \ , \tag{3.4.7}$$

$$uv'' + (2u' + fu)v' + (u'' + fu' + gu)v = 0 \ . \tag{3.4.8}$$

Primećujemo da (3.4.7) i (3.4.8) imaju isti oblik (oznake u i v su uzajamno promenile mesta), pa se metod smene $y = uv$ zato i zove metod invarijanata. Svejedno je koji ćemo od oblika da tretiramo. Uzmimo, npr., oblik (3.4.7). Kako smenom $y = uv$ funkcije u i v nisu jednoznačno određene, jednu od njih možemo da izaberemo proizvoljno. Za oblik (3.4.7) biramo funkciju v tako da je

$$2v' + fv = 0 \ , \tag{3.4.9}$$

što je homogena LDJ I reda po nepoznatoj funkciji $v = v(x)$ i njeno rešenje je oblika (2.3.3), tj.

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx\right) . \tag{3.4.10}$$

Ovde je uzeto partikularno rešenje ($c = 1$) zbog "proizvoljnosti" funkcije v, a radi jednostavnosti daljeg rada sa tom funkcijom. LDJ (3.4.7) sada postaje

$$vu'' + (v'' + fv' + gv)u = 0 ,$$

tj.

$$u'' + \frac{v'' + fv' + gv}{v}\,u = 0 .$$

Dobijena LDJ po nepoznatoj funkciji $u = u(x)$ je sa konstantnim koeficijentima ako je

$$\frac{v'' + fv' + gv}{v} = K , \tag{3.4.11}$$

gde je $K \in \mathbb{R}$ konstanta. Imajući u vidu nađeni izraz (3.4.10) za funkciju v, imamo

$$v' = -\frac{1}{2}\,fv , \quad v'' = -\frac{1}{2}\,f'v + \frac{1}{4}\,f^2v ,$$

pa se uslov (3.4.11) svodi na

$$g - \frac{1}{4}\,f^2 - \frac{1}{2}\,f' = K .$$

Leva strana poslednje jednakosti se često označava sa

$$I(x) = g(x) - \frac{1}{4}\,f^2(x) - \frac{1}{2}\,f'(x) . \tag{3.4.12}$$

Dakle, da bismo LDJ (3.4.1) rešavali smenom $y = uv$, prvo treba proveriti da li je

$$I(x) = K \quad (K = \text{const.}) \tag{3.4.13}$$

jer se samo tada (3.4.1) svodi na LDJ sa konstantnim koeficijentima

$$u'' + Ku = 0 ,$$

tj.

$$u'' + I(x)u = 0 \; . \tag{3.4.14}$$

Rešavanjem poslednje DJ nalazimo

$$u = u(x, c_1, c_2) \; ,$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Vraćajući se u (3.4.5), dobijamo opšte rešenje LDJ (3.4.1),

$$y = u(x, c_1, c_2)\, v(x) \; .$$

NAPOMENA 3.4.1. Uporedimo Teoremu 3.1.4 i metod invarijanata. U oba slučaja se uvodi smena istog tipa, tj. y se predstavlja kao proizvod dve druge funkcije. Međutim, u Teoremi 3.1.4 jedna od funkcija je poznato partikularno rešenje y_1 LDJ (3.4.1), dok su kod metoda invarijanata obe funkcije u i v proizvoljne. U slučaju Teoreme 3.1.4 opšte rešenje je

$$y = y_1(x)\, z(x, c_1, c_2) \; ,$$

dok je kod metoda invarijanata

$$y = v(x)\, u(x, c_1, c_2) \; ,$$

gde je funkcija v određena sa (3.4.10). Funkcija v u opštem slučaju nije partikularno rešenje LDJ (3.4.1). Direktnom smenom (3.4.10) u (3.4.1) dobijamo

$$I(x)v = 0 \; ,$$

što je tačno samo ako je

$$I(x) = 0 \; . \tag{3.4.15}$$

Dakle, $v(x)$ jeste partikularno rešenje za (3.4.1) samo ako je $I(x) = 0$. Na osnovu prethodnog sledi da su Teorema 3.1.4 i metod invarijanata isti samo ako važi (3.4.15). U ovom slučaju može da se uzme $y_1(x) = v(x)$.

Zaključujemo da je Teoremu 3.1.4 moguće uvek primeniti, dok se metod invarijanata primenjuje samo u specijalnim slučajevima (3.4.13). △

PRIMER 3.4.2. Metodom invarijanata naći opšte rešenje LDJ

$$y'' + e^{2x} y' + \left(\frac{1}{4}\, e^{4x} + e^{2x} \right) y = 0 \; .$$

U zadatoj LDJ je

$$f(x) = e^{2x} \; , \quad g(x) = \frac{1}{4}\, e^{4x} + e^{2x} \; ,$$

pa je, prema (3.4.12), $I(x) = 0$. Zato za rešavanje date LDJ može da se primeni smena $y = uv$, gde se v određuje pomoću (3.4.10) i nalazi se

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{4}\, e^{2x} \right) \; .$$

Zadata LDJ postaje $u'' + I(x)u = 0$, tj.

$$u'' = 0 \ .$$

Iz poslednje DJ je

$$u' = c_1 \ , \quad u(x) = c_1 x + c_2 \ ,$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne integracione konstante. Opšte rešenje je

$$y = uv = (c_1 x + c_2)\exp\Bigl(-\frac{1}{4}\, e^{2x}\Bigr) \ . \quad \triangle$$

Metod smene nezavisno promenljive je zasnovan na smeni $x = x(t)$ i njoj inverznoj smeni $t = t(x)$, gde je t argument nove funkcije $u = u(t)$ takve da je $u(t) = y\bigl(x(t)\bigr)$, odnosno

$$y(x) = u\bigl(t(x)\bigr) \ . \tag{3.4.16}$$

Tada je

$$y' = u't' \ , \quad y'' = u''{t'}^2 + u't'' \ ,$$

pri čemu je $u' = \dfrac{du}{dt} = u'\bigl(t(x)\bigr)$, $u'' = \dfrac{d^2u}{dt^2} = u''\bigl(t(x)\bigr)$. Smenom u LDJ (3.4.1) dobijamo

$${t'}^2 u'' + (t'' + ft')u' + gu = 0 \ ,$$

tj.

$$u'' + \frac{t'' + ft'}{{t'}^2}\, u' + \frac{g}{{t'}^2}\, u = 0 \ . \tag{3.4.17}$$

Funkciju $t(x)$ biramo tako da je

$$\frac{g}{{t'}^2} = K_1 \ ,$$

gde je $K_1 \in \mathbb{R}$ konstanta. Iz poslednje jednakosti je redom:

$${t'}^2 = \frac{g}{K_1} \ , \quad t' = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{K_1}} = K\sqrt{g} \quad \Bigl(K = \frac{1}{\sqrt{K_1}}\Bigr)$$

i

$$t = t(x) = K\int \sqrt{g(x)}\, dx \quad (K = \text{const.}) \ . \tag{3.4.18}$$

Konstanta K se bira konkretno, tako da $t(x)$ bude pogodna funkcija za dalji rad. Ako je još

$$\frac{t'' + ft'}{t'^2} = K_2 \ , \tag{3.4.19}$$

gde je $K_2 \in \mathbb{R}$ konstanta, jednačina (3.4.17) se svodi na LDJ sa konstantnim koeficijentima

$$u'' + K_2 u' + K_1 u = 0$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$.

Praktično, treba odrediti funkciju $t(x)$ iz (3.4.18), a zatim proveriti da li važi (3.4.19). Ako je za nađeno $t(x)$ jednačina (3.4.19) zadovoljena, LDJ (3.4.17) je sa konstantnim koeficijentima i rešava se prema ranije izloženoj teoriji. Po nalaženju opšteg rešenja

$$u = u(t, c_1, c_2)$$

treba zameniti $t = t(x)$, čime se dobija se opšte rešenje polazne LDJ (3.4.1),

$$y = y(x, c_1, c_2) = u\big(t(x), c_1, c_2\big) \ .$$

$\boxed{\text{PRIMER 3.4.3.}}$ Metodom smene nezavisno promenljive naći opšte rešenje LDJ

$$y'' + \tan x \ y' - \cos^2 x \ y = 0 \ .$$

U datoj LDJ je $f(x) = \tan x$ i $g(x) = -\cos^2 x$, pa prema (3.4.18) imamo

$$t(x) = K \int \sqrt{-\cos^2 x}\, dx = Ki \int \cos x \, dx = Ki \sin x = \sin x \ ,$$

gde je K izabrano tako da je $\pm Ki = 1$. Kako je $t' = \cos x$ i $t'' = -\sin x$, lako se proverava da važi (3.4.19), tj.

$$\frac{t'' + ft'}{t'^2} = \frac{-\sin x + \tan x \ \cos x}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x + \sin x}{\cos^2 x} = 0 \ .$$

Diferenciranjem nalazimo

$$y' = u't' = \cos x \ u' \ , \quad y'' = -\sin x \ u' + \cos x \ u''t' = -\sin x \ u' + \cos^2 x \ u'' \ ,$$

što smenom u zadatu LDJ daje

$$u'' - u = 0 \ .$$

Poslednja jednačina je sa konstantnim koeficijentima po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$. Njena karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - 1 = 0 \ ,$$

pa su rešenja $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Zato su partikularna rešenja

$$u_1(t) = e^t \ , \quad u_2(t) = e^{-t} \ .$$

Zamenom $t = \sin x$, dobijamo partikularna rešenja polazne LDJ

$$y_1(x) = e^{\sin x} \ , \quad y_2(x) = e^{-\sin x} \ ,$$

pa je traženo opšte rešenje

$$y = c_1 e^{\sin x} + c_2 e^{-\sin x} \ . \quad \triangle$$

Posebno važna LDJ tipa (3.4.1) je **Eulerova DJ**. Opšti oblik ove jednačine je

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \ , \tag{3.4.20}$$

gde su $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ konstante. Deobom sa $a_0 x^2$, za $x \neq 0$, dobija se

$$y'' + \frac{a_1}{a_0 x}\, y' + \frac{a_2}{a_0 x^2}\, y = 0 \ ,$$

pa je (3.4.20) zaista oblika (3.4.1) sa $f(x) = a_1/(a_0 x)$ i $g(x) = a_2/(a_0 x^2)$.

Za rešavanje ove LDJ može da se primeni prethodno opisani metod smene nezavisno promenljive. Prema (3.4.18) imamo

$$\int \sqrt{g(x)}\, dx = \pm\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\ \ln|x|$$

i, za $K = \pm\sqrt{a_0/a_2}$,

$$t = \ln|x| \ . \tag{3.4.21}$$

Iz smene (3.4.21) sledi

$$t' = \frac{1}{x} \ , \quad t'' = -\frac{1}{x^2} \ .$$

Imajući u vidu (3.4.16), dalje je

$$y' = u't' = \frac{1}{x}\, u' \ , \quad y'' = u'' t'^2 + u' t'' = \frac{1}{x^2}\, u'' - \frac{1}{x^2}\, u' \ ,$$

što smenom u (3.4.20) daje LDJ sa konstantnim koeficijentima

$$a_0 u'' + (a_1 - a_0) u' + a_2 u = 0 \ , \tag{3.4.22}$$

gde je $u = u(t)$ nova nepoznata funkcija takva da važi (3.4.16).

Drugi način za rešavanje LDJ (3.4.20) se sastoji u sledećem. Partikularna rešenja se traže u obliku

$$y = x^k \ .$$

Smenom u LDJ se dobija kvadratna jednačina po k

$$a_0k^2 + (a_1 - a_0)k + a_2 = 0 \ , \tag{3.4.23}$$

odakle se nalaze k_1 i k_2. Ako je $k_1 \neq k_2$, partikularna rešenja su

$$y_1(x) = x^{k_1} \ , \quad y_2(x) = x^{k_2} \ ,$$

pa je opšte rešenje

$$y = c_1x^{k_1} + c_2x^{k_2} \ .$$

Ako je $k_1 = k_2 = k$, dobija se samo jedno partikularno rešenje $y_1 = x^k$, a zatim se primeni Teorema 3.1.4 za nalaženje drugog partikularnog rešenja y_2, ili direktno opšteg (videti Napomenu 3.1.3).

NAPOMENA 3.4.2. Primetimo da je jednakost (3.4.23) karakteristična jednačina za LDJ (3.4.22). Zato je moguće kombinovati navedena dva načina. Prvo se formira karakteristična jednačina (3.4.23). Ako je $k_1 \neq k_2$, primenjuje se drugi način. Ako je $k_1 = k_2$, primenjuje se prvi način. Sam drugi način se u praksi ređe koristi zbog mogućih komplikacija u slučaju $k_1 = k_2$. $\triangle$

$\boxed{\text{PRIMER 3.4.4.}}$ Naći opšte rešenje Eulerove DJ

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \ .$$

1) Prosleđujemo prvi način. U zadatoj DJ je

$$a_0 = 1 \ , \quad a_1 = -3 \ , \quad a_2 = 4 \ ,$$

pa DJ (3.4.22) glasi

$$u'' - 4u' + 4u = 0 \ .$$

Karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

i njena rešenja su $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Zato su partikularna rešenja

$$u_1(t) = e^{2t} \ , \quad u_2(t) = te^{2t} \ .$$

Kako je $t = \ln|x|$, to su partikularna rešenja Eulerove DJ

$$y_1(x) = e^{2\ln|x|} = x^2 \ , \quad y_2(x) = \ln|x| \ e^{2\ln|x|} = x^2 \ln|x| \ .$$

Opšte rešenje je

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x| = x^2(c_1 + c_2 \ln|x|) \ .$$

2) Prosleđujemo drugi način. Smenom

$$y = x^k \ , \quad y' = kx^{k-1} \ , \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

u polaznu LDJ dobijamo

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \ ,$$

odakle je $k_1 = k_2 = 2$. Jedno partikularno rešenje je

$$y_1(x) = x^2 \ .$$

Drugo partikularno rešenje nalazimo smenom $y = y_1 z = x^2 z$, posle koje dobijamo LDJ

$$xz'' + z' = 0$$

po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Prema dokazu Teoreme 3.1.4, ovu DJ transformišemo u

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{x}$$

i integracijom nalazimo

$$\ln|z'| = -\ln|x| \ ,$$

tj.

$$z' = \frac{1}{x} \ .$$

Ponovnom integracijom se dobija

$$z(x) = \ln|x| \ ,$$

pa je drugo partikularno rešenje

$$y_2(x) = x^2 z(x) = x^2 \ln|x| \ .$$

Opšte rešenje je

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x| = x^2(c_1 + c_2 \ln|x|) \ .$$

Dobili smo, naravno, isti rezultat kao i primenom metoda smene nezavisno promenljive.

Ovaj primer nam ukazuje na očiglednu prednost prvog načina u slučaju dvostruke nule karakteristične jednačine. $\triangle$

3.5. Nehomogena LDJ II reda sa funkcionalnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ je

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \; . \tag{3.5.1}$$

Ako je poznato opšte rešenje

$$y_h = y_h(x, c_1, c_2)$$

odgovarajuće homogene LDJ (3.4.1), za rešavanje LDJ (3.5.1) se primenjuje ranije opisani metod varijacije konstanata (videti Teoremu 3.1.7), tj. rešenje LDJ (3.5.1) se traži u obliku

$$y = y\big(x, c_1(x), c_2(x)\big) \; .$$

PRIMER 3.5.1. Metodom varijacije konstanata naći opšte rešenje LDJ

$$xy'' + (2 + x)y' + y = e^{-x} \; .$$

Opšte rešenje homogene

$$xy'' + (2 + x)y' + y = 0$$

smo već našli u Primeru 3.4.1 i ono glasi

$$y_h = \frac{1}{x}(c_1 + c_2 e^{-x}) \; .$$

Odavde uočavamo partikularna rešenja

$$y_1(x) = \frac{1}{x} \; , \quad y_2(x) = \frac{1}{x}\, e^{-x} \; .$$

Formiramo sistem (3.1.12)–(3.1.13), tj.

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \; , \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= h(x) \; . \end{aligned}$$

Deobom polazne LDJ sa x dobijamo funkciju $h(x)$,

$$h(x) = \frac{1}{x}\, e^{-x} \; .$$

Nalaženjem y_1', y_2' i smenom u prethodni sistem, on postaje

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' e^{-x} &= 0 \ , \\ c_1' + c_2'(1+x)e^{-x} &= -xe^{-x} \ . \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema sledi

$$c_1'(x) = e^{-x} \ , \quad c_2'(x) = -1 \ ,$$

odakle se integracijom dobija

$$c_1(x) = -e^{-x} + k_1 \ , \quad c_2(x) = -x + k_2 \ .$$

U izrazima za $c_1(x)$ i $c_2(x)$ su k_1 i k_2 proizvoljne integracione konstante. Umesto ovih oznaka, u izrazu za opšte rešenje koristimo standardne oznake c_1 i c_2. Opšte rešenje je

$$\begin{aligned} y &= c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \\ &= (-e^{-x} + c_1)\frac{1}{x} + (-x + c_2)\frac{1}{x}\, e^{-x} \ , \end{aligned}$$

što sređivanjem daje

$$y = -e^{-x} + \frac{1}{x}(c_1 + c_2 e^{-x}) \ .$$

Zbog proizvoljnosti konstante c_2, pri sređivanju je za konstantu $c_2 - 1$ upotrebljena ista oznaka c_2. $\triangle$

Već smo videli da opšte rešenje y_h odgovarajuće homogene LDJ (3.4.1) nije jednostavno naći. Zato se LDJ (3.5.1), kao i LDJ (3.4.1), uglavnom rešava tako što se transformiše u nehomogenu LDJ sa konstantnim koeficijentima (3.3.1), koja se dalje rešava primenom Teoreme 3.1.6 ili Teoreme 3.1.7. Međutim, transformacija (3.5.1) u (3.3.1) je moguća samo u nekim specijalnim slučajevima. To su isti oni slučajevi koji su već opisani kod homogenih LDJ (3.4.1).

Jedan od slučajeva je (3.4.13), tj.

$$I(x) = g - \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f' = \text{const.} \ ,$$

kada se primenjuje metod invarijanata. Ponavljajući postupak kao kod homogenih LDJ, dolazimo do novih DJ iz kojih se određuju funkcije u i v:

$$2v' + fv = 0 \ , \tag{3.5.2}$$

$$u'' + I(x)u = \frac{h}{v} \ . \tag{3.5.3}$$

Prva jednačina (3.5.2) je ista kao (3.4.9) kod homogenih, dok se druga (3.5.3) razlikuje u odnosu na (3.4.14) zbog nehomogenosti LDJ (3.5.1).

Drugi je slučaj (3.4.18), (3.4.19), tj.

$$t(x) = K \int \sqrt{g}\, dx \ , \qquad \frac{t'' + ft'}{t'^2} = \text{const.} \ ,$$

sa pogodnom izabranom konstantom K, kada se primenjuje metod smene nezavisno promenljive.

PRIMER 3.5.2. Metodom invarijanata naći opšte rešenje LDJ

$$y'' + e^{2x} y' + \left(\frac{1}{4}\, e^{4x} + e^{2x}\right) y = \exp\left(-\frac{1}{4}\, e^{2x}\right) \ .$$

U Primeru 3.4.2 je već provereno da važi $I(x) = 0$ i prema (3.4.10) je određena funkcija

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{4}\, e^{2x}\right) \ .$$

Zato (3.5.3) postaje

$$u'' = \exp\left(-\frac{1}{4}\, e^{2x}\right) \Big/ \exp\left(-\frac{1}{4}\, e^{2x}\right) = 1 \ .$$

Uzastopnom integracijom se lako nalazi

$$u' = x + c_1 \ , \quad u(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \ ,$$

pa je opšte rešenje

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right) \exp\left(-\frac{1}{4}\, e^{2x}\right) \ . \quad \triangle$$

NAPOMENA 3.5.1. Metod invarijanata se primenjuje i na nehomogene LDJ I reda, što smo pokazali kroz Primer 2.3.1. $\triangle$

PRIMER 3.5.3. Metodom smene nezavisno promenljive naći opšte rešenje LDJ

$$y'' + \tan x \ y' - \cos^2 x \ y = \cos^2 x \ e^{-\sin x} \ .$$

Primenom (3.4.18) je u Primeru 3.4.3 već određena smena

$$t = t(x) = \sin x$$

i provereno je da važi (3.4.19), tj.

$$\frac{t'' + ft'}{t'^2} = 0 \ .$$

Istu smenu uvodimo i u zadatu nehomogenu LDJ. Dobija se

$$u'' - u = e^{-t} \; , \tag{3.5.4}$$

gde je $u = u(t)$ nova nepoznata funkcija. Dobijena LDJ (3.5.4) je nehomogena sa konstantnim koeficijentima u kojoj je

$$h(t) = e^{-t} = P_0(t)e^{\alpha t} \; ,$$

sa $P_0(t) = 1$ i $\alpha = -1$. Rešenja karakteristične jednačine smo već našli u Primeru 3.4.3, $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, pa je $\alpha = \lambda_2 = -1$ nula prvog reda karakteristične jednačine. Zato je partikularno rešenje u_p oblika

$$u_p(t) = R_0(t)te^{\alpha t} = Ate^{-t} \; .$$

Diferenciranjem nalazimo

$$u_p' = A(1-t)e^{-t} \; , \quad u_p'' = A(t-2)e^{-t} \; ,$$

što smenom u LDJ (3.5.4) daje

$$A = -\frac{1}{2} \; ,$$

pa je

$$u_p(t) = -\frac{1}{2}\, te^{-t} \; .$$

Kako je $u_h = c_1e^t + c_2e^{-t}$ opšte rešenje odgovarajuće homogene LDJ $u'' - u = 0$, prema Teoremi 3.1.6 opšte rešenje LDJ (3.5.4) je

$$u = u_p + u_h = -\frac{1}{2}\, te^{-t} + c_1e^t + c_2e^{-t} \; .$$

Zamenom $t = -\sin x$, dobija se opšte rešenje zadate LDJ

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{2} \sin x \; e^{-\sin x} + c_1e^{\sin x} + c_2e^{-\sin x} \; . \quad \triangle$$

Kao i kod homogenih, izdvajamo slučaj **Eulerove DJ**

$$a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = h(x) \; . \tag{3.5.5}$$

Ova DJ se rešava smenom (3.4.21) za $x \neq 0$, tj.

$$t = \ln|x| \; ,$$

posle koje se svodi na nehomogenu LDJ sa konstantnim koeficijentima oblika (3.3.1).

PRIMER 3.5.4. Naći opšte rešenje Eulerove DJ

$$(2+x)^2 y'' - 3(2+x)y' + 4y = (2+x)^2 \ .$$

Da ne bismo komplikovali oznake uvođenjem nove promenljive ξ smenom $\xi = 2 + x$, rešavaćemo DJ

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2 \tag{3.5.6}$$

i u dobijeni rezultat samo zameniti x sa $x + 2$.

Poslednja DJ je Eulerova (3.5.5), koja smenom $t = \ln|x|$ postaje

$$u'' - 4u' + 4u = e^{2t} \ . \tag{3.5.7}$$

Ovde je

$$h(t) = e^{2t} = e^{\alpha t} P_0(t) \ ,$$

gde je $P_0(t) = 1$ i $\alpha = 2$. Odgovarajuću homogenu Eulerovu DJ smo već rešavali u Primeru 3.4.4 i našli rešenje drugog reda karakteristične jednačine $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Kako je $\alpha = 2$, to je partikularno rešenje u_p oblika

$$u_p(t) = R_0(t) t^2 e^{2t} = A t^2 e^{2t} \ .$$

Nalaženjem u_p', u_p'' i zamenom u (3.5.7) sledi

$$A = \frac{1}{2} \ ,$$

pa je

$$u_p(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \ .$$

Zamenom $t = \ln|x|$, partikularno rešenje zadate Eulerove DJ je

$$y_p(x) = \frac{1}{2} (\ln|x|)^2 e^{2\ln|x|} = \frac{1}{2} x^2 \ln^2|x| \ .$$

Opšte rešenje homogene smo našli u Primeru 3.4.4 i ono je

$$y_h(x) = x^2 (c_1 + c_2 \ln|x|) \ .$$

Sada je opšte rešenje DJ (3.5.6)

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{2} x^2 \ln^2|x| + x^2 (c_1 + c_2 \ln|x|) = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln^2|x| + c_1 + c_2 \ln|x| \right) \ .$$

Zamenom x sa $x + 2$ konačno dobijamo traženo opšte rešenje polazne LDJ

$$y = (x+2)^2 \left(\frac{1}{2} \ln^2|x+2| + c_1 + c_2 \ln|x+2| \right) \ . \quad \triangle$$

4. LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

4.1. Opšta teorija o LDJ višeg reda

Opšti oblik ovih LDJ je

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = h(x) \ , \tag{4.1.1}$$

gde su $f_1, \ldots , f_n$ i h zadate funkcije. Ovo je nehomogena LDJ n–tog reda ako je $h(x) \not\equiv 0$. Ako je $h(x) \equiv 0$, (4.1.1) postaje

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = 0 \ , \tag{4.1.2}$$

što je homogena LDJ n–tog reda. U obe jednačine su koeficijenti uz y i odgovarajuće izvode funkcije, pa su (4.1.1) i (4.1.2) redom *nehomogena* i *homogena LDJ n–tog reda sa funkcionalnim koeficijentima.* Ako su koeficijenti realne konstante, dobija se

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = h(x) \ , \tag{4.1.3}$$

što je *nehomogena LDJ n–tog reda sa konstantnim koeficijentima* i

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0 \ , \tag{4.1.4}$$

što je *homogena LDJ n–tog reda sa konstantnim koeficijentima.*

Važe analogne teoreme ranije navedenim Teoremama 3.1.1–3.1.8 kod LDJ II reda. Ovde ih samo navodimo.

Teorema 4.1.1. *Ako je $y_1(x)$ rešenje homogene LDJ* (4.1.2)*, tada je $cy_1(x)$ takođe rešenje LDJ* (4.1.2)*, gde je c proizvoljna konstanta.*

Teorema 4.1.2. *Ako su $y_1(x), y_2(x), \ldots , y_k(x)$ $(k \leq n)$ rešenja homogene LDJ* (4.1.2)*, tada je i $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$ rešenje LDJ* (4.1.2)*, gde su $c_1, \ldots , c_k$ proizvoljne konstante.*

Teorema 4.1.3. *Ako su* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *linearno nezavisna rešenja homogene LDJ* (4.1.2)*, tada je*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{4.1.5}$$

opšte rešenje LDJ (4.1.2)*, gde su* $c_1, \ldots, c_n$ *proizvoljne konstante.*

Linearna nezavisnost rešenja $y_1, \ldots, y_n$ se praktično ispituje pomoću uslova

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \ . \tag{4.1.6}$$

Teorema 4.1.4. *Neka je* $y_p(x)$ *partikularno rešenje nehomogene LDJ* (4.1.1) *i* $y_h(x)$ *opšte rešenje homogene* (4.1.2)*. Tada je opšte rešenje nehomogene LDJ* (4.1.1) *dato sa*

$$y = y_p(x) + y_h(x) \ . \tag{4.1.7}$$

Teorema 4.1.5. *Ako je poznato opšte rešenje homogene LDJ* (4.1.2)

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \ ,$$

gde su $c_1, \ldots, c_n$ *proizvoljne konstante, tada je opšte rešenje nehomogene LDJ* (4.1.1) *oblika*

$$y = c_1(x) y_1 + \cdots + c_n(x) y_n \ .$$

Nepoznate funkcije $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ *određuju se iz sistema jednačina*

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n &= 0 \ , \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n' &= 0 \ , \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \ , \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= h(x) \ . \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Ovo je generalizacija ranije opisanog *metoda varijacije konstanata.*

Teorema 4.1.6. *Neka je u nehomogenoj LDJ* (4.1.1) *funkcija* $h(x)$ *oblika*

$$h(x) = h_1(x) + \cdots + h_m(x) \ .$$

Takođe, neka su $y_{p1}(x), \ldots, y_{pm}(x)$ *redom partikularna rešenja jednačina*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = h_i(x) \quad (i = 1, \ldots, m) \ .$$

Tada je

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + \cdots + y_{pm}(x) \tag{4.1.9}$$

partikularno rešenje LDJ (4.1.1).

4.2. Homogena LDJ višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ smo već dali kao (4.1.4). Radi preglednosti izlaganja, ovde ga navodimo pod novom oznakom,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \ , \tag{4.2.1}$$

gde su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ poznate konstante.

Neposredno se proverava da je

$$y = e^{\lambda x}$$

rešenje LDJ (4.2.1) ako je λ rešenje karakteristične jednačine

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \ . \tag{4.2.2}$$

Pri rešavanju jednačine (4.2.2) mogu da nastupe sledeći slučajevi.

1° Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ rešenje karakteristične jednačine (4.2.2) reda 1, tj. neka je λ prost koren jednačine (4.2.2). Ovom λ odgovara partikularno rešenje LDJ (4.2.1)

$$y_p(x) = e^{\lambda x} \ . \tag{4.2.3}$$

2° Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ rešenje karakteristične jednačine (4.2.2) reda 1. Kako su koeficijenti karakteristične jednačine $a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi, to se kompleksna rešenja javljaju u parovima, kao konjugovani brojevi. Neka su to

$$\lambda = \lambda_p = \alpha + i\beta \ , \quad \lambda_q = \alpha - i\beta \ ,$$

gde je λ_q takođe reda 1. Ovom paru kompleksnih rešenja odgovaraju partikularna rešenja LDJ (4.2.1),

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \ , \quad y_q(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \ . \tag{4.2.4}$$

3° Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ rešenje karakteristične jednačine (4.2.2) reda r, tj. λ je višestruki koren jednačine (4.2.2). Ovom λ odgovara r partikularnih rešenja LDJ (4.2.1):

$$y_{p1}(x) = e^{\lambda x} \ , \quad y_{p2}(x) = xe^{\lambda x} \ , \ \dots \ , \quad y_{pr}(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \ . \tag{4.2.5}$$

4° Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ rešenje karakteristične jednačine (4.2.2) reda r. Kako se kompleksna rešenja javljaju u parovima, uzimamo

$$\lambda = \lambda_p = \alpha + i\beta \ , \quad \lambda_q = \alpha - i\beta \ ,$$

gde je λ_q takođe reda r. Ovom paru kompleksnih rešenja odgovara $2r$ partikularnih rešenja LDJ (4.2.1):

$$\begin{aligned}
&y_{p1}(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \ , \quad y_{p2}(x) = xe^{\alpha x} \cos \beta x \ , \ \dots \ , \\
&y_{pr}(x) = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \ ; \\
&y_{q1}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \ , \quad y_{q2}(x) = xe^{\alpha x} \sin \beta x \ , \ \dots \ , \\
&y_{qr}(x) = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \ .
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Navedena partikularna rešenja (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6) su linearno nezavisna u bilo kojoj međusobnoj kombinaciji (videti [**1**], str. 88–89).

NAPOMENA 4.2.1. Leva strana karakteristične jednačine (4.2.2) je polinom stepena n. Zato je nalaženje rešenja jednačine (4.2.2) isto što i određivanje nula polinoma n–tog stepena. Ovo, u opštem slučaju, nije nimalo jednostavan problem. $\triangle$

PRIMER 4.2.1. Naći opšte rešenje LDJ

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0 \ .$$

Za datu LDJ karakteristična jednačina (4.2.2) je

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

ili, u faktorizovanom obliku,

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \ .$$

Kvadratni trinom $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ ima kompleksne nule $1 \pm i$, pa su sva rešenja karakteristične jednačine:

$$\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = 1 + i \ , \quad \lambda_3 = 1 - i \ .$$

Kako je $\lambda_1 = 1$ prost koren karakteristične jednačine, njemu odgovara partikularno rešenje LDJ oblika (4.2.3), tj.

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x \ .$$

Rešenja $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ su konjugovano kompleksna sa $\alpha = \beta = 1$, svako reda 1. Prema (4.2.4), njima odgovaraju partikularna rešenja LDJ

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x = e^x \cos x \ , \quad y_3(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x = e^x \sin x \ .$$

Lako se proverava da je

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x & e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\cos x + \sin x) \\ e^x & -2e^x \sin x & 2e^x \cos x \end{vmatrix} = e^{3x} \ ,$$

pa su nađena partikularna rešenja linearno nezavisna jer zadovoljavaju uslov (4.1.6) za svako x.

Prema Teoremi 4.1.3, opšte rešenje je oblika (4.1.5), tj.

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x = (c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x) e^x \ , \end{aligned}$$

gde su c_1, c_2 i c_3 proizvoljne konstante. △

PRIMER 4.2.2. Naći opšte rešenje LDJ

$$y''' - 3y' + 2y = 0 \ .$$

Karakteristična jednačina je

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \ ,$$

što u faktorizovanom obliku glasi

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \ ,$$

pa su rešenja

$$\lambda_1 = -2 \ , \quad \lambda_{2,3} = 1 \ .$$

Rešenje $\lambda_1 = -2$ je prosto, pa mu odgovara partikularno rešenje LDJ oblika (4.2.3),

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-2x} \ .$$

Rešenje $\lambda = \lambda_{2,3} = 1$ je dvostruko, pa mu odgovaraju partikularna rešenja oblika (4.2.5),

$$y_2(x) = e^{\lambda x} = e^x \ , \quad y_3(x) = x e^{\lambda x} = x e^x \ .$$

Opšte rešenje je oblika (4.1.5),

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x) e^x \ ,$$

gde su c_1, c_2 i c_3 proizvoljne konstante. △

PRIMER 4.2.3. Naći opšte rešenje LDJ

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0 \ .$$

Karakteristična jednačina je

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

ili

$$\lambda^2(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = 0 \ .$$

Odmah uočavamo realni dvostruki koren $\lambda_{1,2} = 0$ karakteristične jednačine. Ostale korene određujemo iz bikvadratne jednačine

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \ .$$

Uvodimo smenu $\mu = \lambda^2$ i dobijamo kvadratnu jednačinu

$$\mu^2 + 2\mu + 1 = 0 \ ,$$

koja ima dvostruko rešenje $\mu = \mu_{1,2} = -1$. Iz smene $\mu = \lambda^2$ nalazimo

$$\lambda = \pm\sqrt{\mu} = \pm\sqrt{-1} = \pm i \ ,$$

pa su $\lambda_{3,4} = i$, $\lambda_{5,6} = -i$ kompleksna rešenja karakteristične jednačine, svako reda 2. Dakle, sva rešenja karakteristične jednačine su:

$$\lambda_{1,2} = 0 \ , \quad \lambda_{3,4} = i \ , \quad \lambda_{5,6} = -i \ .$$

Rešenju $\lambda = \lambda_{1,2} = 0$ odgovaraju partikularna rešenja LDJ oblika (4.2.5),

$$y_1(x) = e^{\lambda x} = 1 \ , \quad y_2(x) = x e^{\lambda x} = x \ .$$

U rešenjima $\lambda_{3,4;5,6} = \alpha \pm i\beta = \pm i$ je $\alpha = 0$, $\beta = 1$, pa im odgovaraju partikularna rešenja oblika (4.2.6),

$$\begin{aligned} y_3(x) &= e^{\alpha x}\cos\beta x = \cos x \ , \quad y_4(x) = x e^{\alpha x}\cos\beta x = x\cos x \ , \\ y_5(x) &= e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin x \ , \quad y_6(x) = x e^{\alpha x}\sin\beta x = x\sin x \ . \end{aligned}$$

Opšte rešenje je oblika (4.1.5),

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 x + c_3\cos x + c_4 x\cos x + c_5\sin x + c_6 x\sin x \\ &= c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)\cos x + (c_5 + c_6 x)\sin x \ , \end{aligned}$$

gde su c_i $(i = 1, \ldots, 6)$ proizvoljne konstante. △

4.3. Nehomogena LDJ višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ smo već dali i on je

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = h(x) \ , \tag{4.3.1}$$

gde su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ poznate konstante i $h(x)$ poznata funkcija.

Prema Teoremi 4.1.5, opšte rešenje može da se nađe metodom varijacije konstanata ako je poznato opšte rešenje odgovarajuće homogene LDJ (4.2.1). Ovde ćemo da razmotrimo primenu Teoreme 4.1.4. Navodimo neke slučajeve u kojima se lako prepoznaje oblik partikularnog rešenja LDJ (4.3.1).

1° Neka je $h(x)$ oblika

$$h(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \ , \tag{4.3.2}$$

gde je

$$P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

polinom n–tog stepena sa realnim koeficijentima i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo sledeće podslučajeve.

a) *α nije nula* karakteristične jednačine (4.2.2).

U ovom slučaju partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = e^{\alpha x} R_n(x) \ , \tag{4.3.3}$$

gde je

$$R_n(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n \tag{4.3.4}$$

polinom n–tog stepena, čiji se koeficijenti $B_0, \ldots, B_n$ određuju smenom y_p i odgovarajućih izvoda u polaznu LDJ (4.3.1).

b) *α je nula reda r* karakteristične jednačine (4.2.2).

Partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x} R_n(x) \ , \tag{4.3.5}$$

gde je $R_n(x)$ polinom (4.3.4).

2° Neka je $h(x)$ oblika

$$h(x) = e^{\alpha x} \big[P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x \big] \ , \tag{4.3.6}$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi n–tog stepena sa realnim koeficijentima i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Podslučajevi su sledeći.

a) $\alpha \pm i\beta$ *nisu nule* karakteristične jednačine (4.2.2).

Partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\big[R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x\big] \;, \tag{4.3.7}$$

gde su $R_n(x)$ i $S_n(x)$ polinomi n–tog stepena, čiji koeficijenti se određuju smenom y_p i odgovarajućih izvoda u polaznu LDJ (4.3.1).

b) $\alpha \pm i\beta$ *su nule, svaka reda r,* karakteristične jednačine (4.2.2).

Partikularno rešenje ima oblik

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}\big[R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x\big] \;, \tag{4.3.8}$$

gde $R_n(x)$ i $S_n(x)$ imaju isto značenje kao u (4.3.7).

3° Neka je $h(x)$ oblika

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_m(x) \;. \tag{4.3.9}$$

Ovaj slučaj je objašnjen u Teoremi 4.1.6. Partikularno rešenje je dato sa (4.1.9), tj. sa

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + \cdots + y_{pm}(x) \;. \tag{4.3.10}$$

PRIMER 4.3.1. Metodom varijacije konstanata naći opšte rešenje LDJ

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x \;.$$

Partikularna rešenja odgovarajuće homogene LDJ smo našli u Primeru 4.2.1:

$$y_1(x) = e^x \;, \quad y_2(x) = e^x\cos x \;, \quad y_3(x) = e^x \sin x \;,$$

kao i opšte rešenje

$$y = c_1e^x + c_2e^x\cos x + c_3e^x\sin x \;.$$

Prema Teoremi 4.1.5, opšte rešenje nehomogene LDJ je oblika

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^x\cos x + c_3(x)e^x\sin x \;,$$

gde se funkcije $c_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ određuju iz sistema (4.1.8),

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 &= 0 \;, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' &= 0 \;, \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' &= h(x) \;. \end{aligned}$$

Ovaj sistem u konkretnom slučaju glasi

$$\begin{aligned} c_1'e^x + c_2'e^x\cos x + c_3'e^x\sin x &= 0 \ , \\ c_1'e^x + c_2'e^x(\cos x - \sin x) + c_3'e^x(\cos x + \sin x) &= 0 \ , \\ c_1'e^x - 2c_2'e^x\sin x + 2c_3'e^x\cos x &= e^x \ , \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} c_1' + c_2'\cos x + c_3'\sin x &= 0 \ , \\ c_1' + c_2'(\cos x - \sin x) + c_3'(\cos x + \sin x) &= 0 \ , \\ c_1' - 2c_2'\sin x + 2c_3'\cos x &= 1 \ . \end{aligned}$$

Oduzimamo prvu od druge jednačine. Dobijamo

$$-c_2'\sin x + c_3'\cos x = 0$$

i

$$c_2' = \frac{\cos x}{\sin x}\, c_3' \ .$$

Smenom c_2' u prvu jednačinu dobijamo

$$c_1' = -\frac{1}{\sin x}\, c_3' \ .$$

Smenom nađenih c_1' i c_2' u treću jednačinu sistema sledi

$$-\frac{1}{\sin x}\, c_3' - 2\sin x\,\frac{\cos x}{\sin x}\, c_3' + 2\cos x\, c_3' = 1 \ ,$$

odakle je

$$c_3'(x) = -\sin x$$

i dalje

$$c_1'(x) = 1 \ , \quad c_2'(x) = -\cos x \ .$$

Integracijom nalazimo:

$$c_1(x) = x + c_1 \ , \quad c_2(x) = -\sin x + c_2 \ , \quad c_3(x) = \cos x + c_3 \ ,$$

gde su c_1, c_2 i c_3 proizvoljne konstante.

Traženo opšte rešenje sada glasi

$$\begin{aligned} y &= (x + c_1)e^x + (-\sin x + c_2)e^x\cos x + (\cos x + c_3)e^x\sin x \\ &= (x + c_1)e^x + c_2e^x\cos x + c_3e^x\sin x \ . \quad \triangle \end{aligned}$$

PRIMER 4.3.2. Naći partikularno, a zatim i opšte rešenje LDJ

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x \ .$$

Ovo je ista LDJ kao u prethodnom primeru. U Primeru 4.2.1 smo našli rešenja karakteristične jednačine

$$\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm i \ ,$$

kao i opšte rešenje odgovarajuće homogene LDJ

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x \ .$$

Funkcija

$$h(x) = e^x$$

je oblika (4.3.2) sa $\alpha = 1$ i $P_n(x) \equiv P_0(x) = 1$. Kako je

$$\alpha = 1 = \lambda_1$$

nula reda 1 karakteristične jednačine, partikularno rešenje date LDJ ima oblik (4.3.5), tj.

$$y_p(x) = x e^{\alpha x} R_n(x) = x e^x R_0(x) = A x e^x \ ,$$

gde je $R_0(x) = A$ konstanta. Diferenciranjem sledi:

$$\begin{aligned} y_p' &= A\big(e^x + x e^x\big) = A(1+x)e^x \ , \\ y_p'' &= A\big(e^x + (1+x)e^x\big) = A(2+x)e^x \ , \\ y_p''' &= A\big(e^x + (2+x)e^x\big) = A(3+x)e^x \ . \end{aligned}$$

Zamenom y_p i nađenih izvoda u datu LDJ dobijamo

$$A(3+x)e^x - 3A(2+x)e^x + 4A(1+x)e^x - 2Axe^x = e^x$$

i

$$A = 1 \ ,$$

pa je traženo partikularno rešenje

$$y_p(x) = x e^x \ .$$

Prema Teoremi 4.1.4, opšte rešenje date nehomogene LDJ je

$$\begin{aligned} y &= y_p + y_h \\ &= x e^x + c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x \\ &= (x + c_1) e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x \ , \end{aligned}$$

što je, naravno, isto kao u Primeru 4.3.1. $\triangle$

PRIMER 4.3.3. Naći partikularno, a zatim i opšte rešenje LDJ

$$y''' - 3y' + 2y = 2 + 3e^x \ .$$

Odgovarajuću homogenu LDJ smo rešavali u Primeru 4.2.2 i našli smo rešenja karakteristične jednačine

$$\lambda_1 = -2\ , \quad \lambda_{2,3} = 1\ ,$$

kao i opšte rešenje

$$y_h = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x)e^x\ .$$

Funkcija

$$h(x) = 2 + 3e^x$$

je oblika $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, gde je

$$h_1(x) = 2\ , \quad h_2(x) = 3e^x\ .$$

Prema Teoremi 4.1.6, partikularno rešenje je

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)\ ,$$

gde su y_{p1} i y_{p2} redom partikularna rešenja nehomogenih LDJ:

$$y''' - 3y' + 2y = h_1(x)\ , \quad y''' - 3y' + 2y = h_2(x)\ .$$

Funkcija $h_1(x)$ je oblika (4.3.2),

$$h_1(x) = 2 = e^{\alpha x} P_n(x)\ ,$$

gde je $\alpha = 0$ i $P_n(x) \equiv P_0(x) = 2$. Kako $\alpha = 0$ nije rešenje karakteristične jednačine, prema (4.3.3) partikularno rešenje y_{p1} ima oblik

$$y_{p1}(x) = R_0(x) = A\ .$$

Funkcija $h_2(x)$ je istog oblika (4.3.2), sa $\alpha = 1$ i $P_n(x) \equiv P_0(x) = 3$. Kako je $\alpha = 1$ nula reda 2 karakteristične jednačine, partikularno rešenje y_{p2} ima oblik (4.3.5), tj.

$$y_{p2}(x) = x^2 e^x R_0(x) = Bx^2 e^x\ .$$

Prema prethodnom, partikularno rešenje y_p je

$$y_p(x) = A + Bx^2 e^x\ .$$

Nalaženjem potrebnih izvoda y_p', y_p'', y_p''' i zamenom u datu LDJ dobijamo vrednosti konstanata

$$A = 1\ , \quad B = \frac{1}{2}\ ,$$

pa je partikularno rešenje

$$y_p(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 e^x\ .$$

Traženo opšte rešenje je

$$\begin{aligned} y &= y_p + y_h \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 e^x + c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x)e^x \\ &= 1 + c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x + \frac{1}{2}x^2)e^x\ . \quad \triangle \end{aligned}$$

PRIMER 4.3.4. Naći opšte rešenje LDJ

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0 \ .$$

Ovo je homogena LDJ koju smo već rešili u Primeru 4.2.3. Ovde je razmatramo s drugog aspekta.

Datu LDJ možemo da zapišemo u obliku

$$\left(y^{(4)} + 2y'' + y\right)'' = 0 \ .$$

Uzastopnom integracijom dobijamo:

$$\begin{aligned} \left(y^{(4)} + 2y'' + y\right)' &= c_1 \ , \\ y^{(4)} + 2y'' + y &= c_1 x + c_2 \ , \end{aligned}$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Dobijena DJ je nehomogena LDJ sa konstantnim koeficijentima, koja ima isto rešenje kao i polazna homogena LDJ. Međutim, polazna LDJ je šestog reda, a dobijena LDJ četvrtog, dakle nižeg reda. Snižavanje reda DJ u mnogim situacijama može značajno da olakša rešavanje DJ, pa se preporučuje kad god oblik DJ to dozvoljava (videti deo 1.2. Snižavanje reda diferencijalne jednačine). $\triangle$

4.4. Homogena LDJ višeg reda sa funkcionalnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ je

$$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x) y = 0 \ . \tag{4.4.1}$$

Videli smo da se ovaj tip LDJ, već u slučaju LDJ II reda, teško rešava. Uglavnom se rešavaju specijalni slučajevi kada je moguće ovu LDJ prevesti na LDJ sa konstantnim koeficijentima. Zato nećemo da razmatramo opšti slučaj ovih LDJ. Posmatraćemo samo **Eulerovu DJ**, koja ima opšti oblik

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \ . \tag{4.4.2}$$

Kao i u slučaju Eulerove DJ II reda, DJ (4.4.2) se rešava smenom nezavisno promenljive

$$t = \ln|x| \ ,$$

posle koje se svodi na homogenu LDJ sa konstantnim koeficijentima.

PRIMER 4.4.1. Naći opšte rešenje Eulerove DJ

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0 \ .$$

Imajući u vidu (3.4.16), tj.

$$y(x) = u\big(t(x)\big) \ ,$$

nalazimo:

$$y' = u't' \ , \quad y'' = u''t'^2 + u't'' \ , \quad y''' = u'''t'^3 + 3u''t't'' + u't''' \ .$$

Za smenu $t = \ln|x|$ je

$$t' = \frac{1}{x} \ , \quad t'' = -\frac{1}{x^2} \ , \quad t''' = \frac{2}{x^3} \ ,$$

pa je

$$y' = \frac{1}{x}\, u' \ , \quad y'' = \frac{1}{x^2}\, u'' - \frac{1}{x}\, u' \ , \quad y''' = \frac{1}{x^3}\, u''' - \frac{3}{x^3}\, u'' + \frac{2}{x^3}\, u' \ .$$

Zamenom funkcije y i nađenih izvoda u datu LDJ dobijamo

(4.4.3) $$u''' - u'' - u' + u = 0 \ .$$

Poslednja DJ je homogena sa konstantnim koeficijentima po nepoznatoj funkciji $u = u(x)$.

Karakteristična jednačina DJ (4.4.3) je

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

i njena rešenja su

$$\lambda_1 = -1 \ , \quad \lambda_{2,3} = 1 \ .$$

Kako je $\lambda_1 = -1$ prosta, a $\lambda = \lambda_{2,3} = 1$ dvostruka nula, partikularna rešenja DJ (4.4.3) su:

$$u_1(t) = e^{-t} \ , \quad u_2(t) = e^t \ , \quad u_3(t) = te^t \ ,$$

pa je opšte rešenje

$$u = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 t e^t \ ,$$

gde su c_1, c_2 i c_3 proizvoljne konstante. Pošto je $t = \ln|x|$, iz poslednje jednakosti dobijamo opšte rešenje polazne Eulerove DJ

$$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x + c_3 x \ln|x| \ . \quad \triangle$$

NAPOMENA 4.4.1. Iz Primera 4.4.1 vidimo da je kod Eulerovih DJ višeg reda naporno nalaziti više izvode funkcije y. Zato se, između ostalog, Eulerove DJ višeg reda u literaturi uglavnom i ne razmatraju. $\triangle$

4.5. Nehomogena LDJ višeg reda sa funkcionalnim koeficijentima

Opšti oblik ove LDJ je

(4.5.1) $$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x) y = h(x) \ .$$

Ova LDJ se rešava tako što se na neki način prevede u LDJ sa konstantnim koeficijentima (4.3.1), koja se zatim rešava prema prethodno izloženoj teoriji. Naravno, ako je poznato opšte rešenje odgovarajuće homogene LDJ (4.4.1), moguće je primeniti metod varijacije konstanata (Teorema 4.1.5).

Specijalan slučaj je **Eulerova DJ**

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = h(x) \ . \tag{4.5.2}$$

Rešava se istom smenom nezavisno promenljive

$$t = \ln|x| \ ,$$

posle koje se svodi na nehomogenu LDJ sa konstantnim koeficijentima.

PRIMER 4.5.1. Naći opšte rešenje Eulerove DJ

$$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = x^2 \ .$$

Smenom $t = \ln|x|$ data DJ postaje

$$u''' - u'' - u' + u = e^{2t} \ . \tag{4.5.3}$$

Ovde je

$$h(t) = e^{2t} = e^{\alpha t}P_0(t) \ ,$$

gde je $P_0(t) = 1$ i $\alpha = 2$. Odgovarajuću homogenu LDJ smo rešavali u Primeru 4.4.1 i našli smo rešenja karakteristične jednačine $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Kako je $\alpha = 2 \neq \lambda_{1,2}$, to je partikularno rešenje u_p oblika

$$u_p(t) = Ae^{2t} \ .$$

Nalaženjem izvoda u_p', u_p'', u_p''' i zamenom u (4.5.3) sledi

$$A = \frac{1}{3} \ ,$$

pa je

$$u_p(t) = \frac{1}{3}\,e^{2t} \ .$$

Imajući u vidu već nađeno opšte rešenje odgovarajuće homogene DJ (Primer 4.4.1), opšte rešenje DJ (4.5.3) je

$$u = \frac{1}{3}e^{2t} + c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3te^t \ .$$

S obzirom na smenu $t = \ln|x|$, traženo opšte rešenje polazne LDJ je

$$y = \frac{1}{3}x^2 + c_1\frac{1}{x} + c_2x + c_3x\ln|x| \ . \quad \triangle$$

4.6. Rešavanje DJ pomoću redova

Posmatrajmo DJ n-tog reda

$$y^{(n)} = F\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{4.6.1}$$

i pretpostavimo da su funkcija $y = y(x)$ i njeni izvodi definisani u nekoj okolini tačke $x = x_0$. Neka je:

$$y(x_0) = a_0\ , \quad y'(x_0) = a_1\ , \ \dots\ , \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}\ . \tag{4.6.2}$$

Ako je funkcija F analitička u tački $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ([**1**], str. 117–119), tada postoji jedinstveno rešenje DJ (4.6.1) koje može da se predstavi u obliku potencijalnog reda

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k\ , \tag{4.6.3}$$

gde x pripada oblasti konvergencije tog reda, a $c_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ su privremeno neodređene konstante (videti [**5**], str. 45–48, 54–56). Konstante c_k određuju se diferenciranjem (4.6.3) i zamenom funkcije i nađenih izvoda u (4.6.1). Ako n konstanata ostane neodređeno, (4.6.3) daje opšte rešenje. Ako je broj neodređenih konstanata manji od n, sa (4.6.3) je dato partikularno rešenje.

Primetimo da je (4.6.3) Taylorov razvoj funkcije y u okolini tačke x_0 za

$$c_k = \frac{1}{k!}\, y^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)\ ,$$

pa je, prema (4.6.2),

$$c_k = \frac{a_k}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)\ . \tag{4.6.4}$$

Imajući u vidu da su sa (4.6.2) dati Cauchyevi uslovi (1.1.3), rešenje (4.6.3) sa konstantama (4.6.4) je Cauchyevo.

Pod navedenim pretpostavkama, izloženi metod može da se primeni na sve DJ oblika (4.6.1), ne samo na linearne DJ. Međutim, izuzetno je pogodan za rešavanje upravo linearnih DJ, pa je zato svrstan u ovaj deo teksta.

Primenu metoda ilustrovaćemo sledećim primerom.

PRIMER 4.6.1. Odrediti rešenje DJ

$$xy'' + (2 + x)y' + y = 0\ .$$

Rešenje date DJ tražimo u obliku potencijalnog reda

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \ . \tag{4.6.5}$$

Red iz (4.6.5) ima oblik reda iz (4.6.3) za $x_0 = 0$. U oblasti konvergencije može da se vrši diferenciranje član po član (videti [**5**], str. 50), pa važi

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \ , \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \ .$$

Zamenom y, y' i y'' u polaznu DJ dobija se

$$x \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + (2+x) \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \ ,$$

tj.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \ .$$

Izdvajanjem početnog člana iz druge i četvrte sume sledi

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-1} + 2c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} 2k c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0 \ .$$

Sve sume dovodimo na istu početnu vrednost indeksa $k = 1$ i dobijamo

$$c_0 + 2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k c_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0 \ ,$$

što dovođenjem na zajedničku sumu postaje

$$c_0 + 2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(k+1) k c_{k+1} + 2(k+1) c_{k+1} + k c_k + c_k \Big] x^k = 0 \ .$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene od x na levoj i desnoj strani poslednje jednakosti, sledi

$$c_0 + 2c_1 = 0 \ , \quad (k+2) c_{k+1} + c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \ .$$

Iz dobijenih rekurentnih veza određuju se konstante

$$c_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \ c_0 \quad (k = 1, 2, \dots) \ ,$$

pa (4.6.5) postaje

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\, x^k \,, \tag{4.6.6}$$

gde je c_0 proizvoljna konstanta.

Poluprečnik konvergencije R reda iz (4.6.6) određuje se prema D'Alambertovom kriterijumu (videti [**5**], str. 48) i dobija se

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}\right|} = +\infty \,.$$

Zato red konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$. Sumiranjem reda iz (4.6.6) sledi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\, x^k &= -\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{(k+1)!} = -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= -\frac{1}{x}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} - 1\Big) = \frac{1}{x}\big(1 - e^{-x}\big) \,, \end{aligned}$$

pa je rešenje

$$y = c_0 \frac{1 - e^{-x}}{x} \,,$$

gde je $c_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Pošto rešenje sadrži jednu proizvoljnu konstantu, a data DJ je drugog reda, radi se o partikularnom rešenju. Opšte rešenje je određeno u Primeru 3.4.1. $\triangle$

5. SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Sistemi DJ predstavljaju posebnu, veoma obimnu oblast u teoriji diferencijalnih jednačina (videti [**1**], str. 155–238; [**2**], str. 3–79). U detaljnije razmatranje ove problematike nećemo da se upuštamo. Izložićemo samo sisteme DJ I reda i to u osnovnim crtama.

5.1. Normalni oblik sistema DJ

Normalni oblik sistema DJ (ili *normalni sistem* DJ) je

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(x, y_1, \ldots, y_n) \ , \\ y_2' &= F_2(x, y_1, \ldots, y_n) \ , \\ &\vdots \\ y_n' &= F_n(x, y_1, \ldots, y_n) \ , \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

gde su $F_1, \ldots, F_n$ zadate, a $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ nepoznate funkcije. *Opšte rešenje* ovog sistema DJ je uređena n–torka funkcija

$$\Big(y_1(x, c_1, \ldots, c_n) \ , \ \ldots \ , \ y_n(x, c_1, \ldots, c_n)\Big) \ , \tag{5.1.2}$$

gde su $c_1, \ldots, c_n$ proizvoljne konstante. Za konkretan izbor konstanata dobija se partikularno rešenje.

Ako se funkcije iz (5.1.2) grupišu u sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, c_1, \ldots, c_n) \ , \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(x, c_1, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

i ovaj sistem reši po konstantama $c_1, \dots, c_n$, dobija se

$$c_i = \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n) \; . \tag{5.1.3}$$

Svaka od prethodnih jednačina zove se *prvo* (*primarno*) *rešenje* (*integral*) sistema (5.1.1). Ukoliko su sva primarna rešenja iz (5.1.3) nezavisna, skupom jednačina (5.1.3) je definisano *opšte rešenje* sistema (5.1.1) u implicitnom obliku. Pri tome, za primarna rešenja kažemo da su *nezavisna* ako i samo ako važi uslov

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.1.4}$$

za svako x iz oblasti definisanosti sistema (5.1.1) i oblasti definisanosti rešenja (5.1.2) (videti Napomenu 3.1.2). Sistem (5.1.1) može da ima najviše n nezavisnih primarnih rešenja ([**2**], str. 17–18).

Svaki sistem (1.1.4) može da se svede na normalni sistem oblika (5.1.1), pri čemu su ovi sistemi ekvivalentni u smislu rešivosti. Preciznije, na osnovu poznatog rešenja (1.1.5) može da se odredi rešenje (5.1.2) i obrnuto ([**2**], str. 4, 9–10). Zato je za proučavanje sistema DJ dovoljno posmatrati normalne sisteme.

Svakoj DJ n-tog reda oblika

$$y^{(n)} = F\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{5.1.5}$$

može da se pridruži sistem DJ oblika (5.1.1). Zaista, ako u (5.1.5) stavimo $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, dobija se normalni sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \; , \\ y_2' &= y_3 \; , \\ &\;\vdots \\ y_n' &= F(x, y_1, \dots, y_n) \; . \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Što je red DJ (5.1.5) veći, to sistem (5.1.6) ima veći broj jednačina, tj. sadrži veći broj nepoznatih funkcija $y_1, \dots, y_n$.

Pod izvesnim uslovima važi i obrnuto. Normalnom sistemu (5.1.1) može da se pridruži odgovarajuća DJ (5.1.5) (videti [**1**], str. 156–157). Postupak kojim se vrši ovo pridruživanje poznat je kao *metod eliminacije*.

PRIMER 5.1.1. Ako su $y = y(x)$ i $z = z(x)$ nepoznate funkcije, prevesti sistem DJ

$$y''' = xy'' + y - z' + x + 1 \ ,$$
$$z'' = \sin x \, y' + y - z + x^2$$

na normalni sistem.

Odmah uočavamo da je dati sistem oblika (1.1.4). Uvođenjem novih funkcija:

$$y_1 = y \ , \quad y_2 = y' \ , \quad y_3 = y'' \ ; \quad y_4 = z \ , \quad y_5 = z' \ ,$$

dobija se normalni sistem oblika (5.1.1),

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \ , \\ y_2' &= y_3 \ , \\ y_3' &= xy_3 + y_1 - y_5 + x + 1 \ , \\ y_4' &= y_5 \ , \\ y_5' &= \sin x \, y_2 + y_1 - y_4 + x^2 \ . \quad \triangle \end{aligned}$$

PRIMER 5.1.2. Ako su $y = y(x)$ i $z = z(x)$ nepoznate funkcije, naći opšte rešenje normalnog sistema DJ

$$y' = 8x + y - z \ ,$$
$$z' = 5y - z \ .$$

Rešenje nalazimo metodom eliminacije.

Diferenciranjem prve jednačine i zamenom y' i z' iz datog sistema, dobijamo

$$y'' = 8 + y' - z' = 8 + 8x + y - z - (5y - z) = 8 + 8x - 4y \ ,$$

što je DJ oblika (5.1.5). Ako ovu DJ zapišemo kao

$$y'' + 4y = 8(x + 1) \ , \tag{5.1.7}$$

vidimo da je to nehomogena LDJ II reda sa konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća homogena DJ ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 + 4 = 0 \ ,$$

sa rešenjima $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, pa je njeno opšte rešenje

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \ .$$

S obzirom da DJ (5.1.7) nehomogenom čini funkcija $h(x) = 8(x+1)$, partikularno rešenje tražimo u obliku $y_p = Ax + B$. Zamenom y_p i $y_p'' = 0$ u jednačinu, dobijamo $A = B = 2$ i $y_p = 2x + 2$. Opšte rešenje DJ (5.1.7) je

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x + 2 \ . \tag{5.1.8}$$

Kako je

$$y' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x + 2 \ ,$$

iz prve jednačine sistema dobija se i druga nepoznata funkcija

$$z = 8x + y - y' = (c_1 - 2c_2)\cos 2x + (2c_1 + c_2)\sin 2x + 10x \ . \tag{5.1.9}$$

Rešenje datog normalnog sistema je uređeni par nađenih funkcija (5.1.8) i (5.1.9),

$$\Big(y(x, c_1, c_2), z(x, c_1, c_2)\Big) \ . \quad \triangle$$

5.2. Simetrični oblik sistema DJ

Simetrični oblik sistema DJ (ili *simetrični sistem* DJ) je

$$\begin{aligned} \frac{dx}{G_1(x, y_1, \ldots, y_n)} &= \frac{dy_1}{G_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \cdots \\ &= \frac{dy_n}{G_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n)} \ , \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

gde su $G_1, \ldots, G_{n+1}$ zadate, a $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ nepoznate funkcije. Ovo je sistem od n DJ i lako se svodi na normalni oblik (5.1.1),

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{dy_1}{dx} = \frac{G_2(x, y_1, \ldots, y_n)}{G_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = F_1(x, y_1, \ldots, y_n) \ , \\ &\ \vdots \\ y_n' &= \frac{dy_n}{dx} = \frac{G_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n)}{G_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n) \ . \end{aligned}$$

Takođe, imajući u vidu da iz $y_i' = dy_i/dx = F_i$ sledi $dx = dy_i/F_i$ ($i = 1, \ldots, n$), sistem (5.1.1) može da se predstavi u simetričnom obliku (5.2.1),

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{F_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{F_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \cdots = \frac{dy_n}{F_n(x, y_1, \ldots, y_n)} \ ,$$

sa $G_1 \equiv 1$, $G_{i+1} \equiv F_i$ ($i = 1, \ldots, n$).

U sistemu (5.2.1) pretpostavljeno je da je x nezavisno promenljiva, a $y_1, \ldots, y_n$ funkcije od x. Opštiji od oblika (5.2.1) je simetrični oblik

$$\frac{dx_1}{G_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{G_2(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{G_n(x_1, \ldots, x_n)} \ . \tag{5.2.2}$$

Prednost ovakvog oblika je u tome što su sve promenljive ravnopravne, pa bilo koja od njih može da se uzme za nezavisnu, dok su ostale zavisne. Neka je, npr., nezavisna x_1. Tada su ostale promenljive funkcije od x_1, tj. $x_i = x_i(x_1)$ $(i = 2, \dots, n)$. Sistem (5.2.2) ima $n-1$ DJ i lako se svodi na normalni oblik

$$
\begin{aligned}
x_2' &= \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{G_2(x_1, \dots, x_n)}{G_1(x_1, \dots, x_n)} = F_2(x_1, \dots, x_n)\ , \\
&\vdots \\
x_n' &= \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{G_n(x_1, \dots, x_n)}{G_1(x_1, \dots, x_n)} = F_n(x_1, \dots, x_n)\ .
\end{aligned}
$$

Opšta rešenja sistema (5.2.1) i (5.2.2) su opšta rešenja odgovarajućih normalnih sistema, oblika (5.1.2) ili (5.1.3). Analogno važi i za primarna rešenja.

Primetimo da je simetrični oblik, u stvari, oblik višestruke (produžene) proporcije. Ova činjenica se koristi pri rešavanju sistema DJ, a postupak rešavanja se često zove *metod integralnih kombinacija*.

PRIMER 5.2.1. Naći opšte rešenje simetričnog sistema DJ

$$
-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}\ .
$$

Neka je x nezavisno promenljiva, a $y = y(x)$ i $z = z(x)$ funkcije. Tada je normalni oblik datog sistema

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{2z^2 - xy}{x^2}\ , \\
z' &= \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}\ .
\end{aligned}
\tag{5.2.3}
$$

Druga jednačina sistema (5.2.3) je DJ sa razdvojenim promenljivama

$$
\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}\ ,
$$

iz koje se integracijom dobija $\ln|z| = -\ln|x| + c$, tj. jedno primarno rešenje

$$
xz = c_1\ , \tag{5.2.4}
$$

gde je $c_1 = \pm e^c$. Zamenom $z = c_1/x$ u prvu jednačinu sistema (5.2.3), ona postaje

$$
y' = \frac{2\dfrac{c_1^2}{x^2} - xy}{x^2}\ ,
$$

što sredjivanjem daje LDJ I reda

$$y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{2c_1^2}{x^4}\ .$$

Rešavanjem ove DJ po formuli (2.3.5) dobija se

$$y = \exp\Big(-\int \frac{dx}{x}\Big)\Big[c_2 + \int \frac{2c_1^2}{x^4}\,\exp\Big(\int \frac{dx}{x}\Big)\,dx\Big] = \frac{1}{x}\Big(c_2 - \frac{c_1^2}{x^2}\Big)$$

i, vraćanjem $c_1 = xz$,

$$y = \frac{1}{x}(c_2 - z^2)\ ,$$

tj. drugo primarno rešenje

$$xy + z^2 = c_2\ . \tag{5.2.5}$$

Nađena primarna rešenja su nezavisna. Zaista, za

$$c_1 = \varphi_1(x,y,z) = xz\ , \quad c_2 = \varphi_2(x,y,z) = xy + z^2$$

je

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 2z \end{vmatrix} = -x^2\ .$$

Za $x = 0$ nije definisan razlomak $-dx/x^2$, pa $x = 0$ ne pripada oblasti definisanosti datog sistema i uslov (5.1.4) važi.

Jednakostima (5.2.4) i (5.2.5) je dato opšte rešenje polaznog sistema DJ u implicitnom obliku. △

PRIMER 5.2.2. Naći ono partikularno rešenje simetričnog sistema DJ

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

koje zadovoljava uslove $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

Za produženu proporciju

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_k}{b_k} \quad (k \geq 2)$$

važi

$$\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k}{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_k}{b_k}\ ,$$

gde je $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Ova osobina produžene proporcije se jednostavno dokazuje, a poznata je iz nižih kurseva matematike.

Koristeći navedenu osobinu proporcije, iz datog sistema dobijamo

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{z(x+y)} ,$$

tj.

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z} ,$$

odakle integracijom sledi $\ln|x-y| = \ln|z| + c$ i

$$\frac{x-y}{z} = c_1 , \tag{5.2.6}$$

što je jedan primarni integral datog sistema.

Zamenom $x = y + c_1 z$ iz (5.2.6) u jednakost

$$\frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)} ,$$

dobija se

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2\dfrac{z}{y} + c_1\left(\dfrac{z}{y}\right)^2}{1 - \dfrac{z}{y}} ,$$

što je homogena DJ oblika (2.2.1), tj. $z' = f(z/y)$, po nepoznatoj funkciji $z = z(y)$. Uvođenjem smene $u = z/y$, ova DJ se transformiše u DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-u}{u + (1+c_1)u^2}\, du$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(y)$, čijim rešavanjem se dobija

$$y\Big[1 + (1+c_1)u\Big]^{(2+c_1)/(1+c_1)} = c_2 u .$$

Kako je $u = z/y$ i $c_1 = (x-y)/z$, iz poslednje jednakosti sledi drugi primarni integral

$$\frac{y^2}{z}\left(\frac{x+z}{y}\right)^{(x-y+2z)/(x-y+z)} = c_2 . \tag{5.2.7}$$

Opšte rešenje u implicitnom obliku je dato jednakostima (5.2.6) i (5.2.7).

Prema datim uslovima $x = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$, iz jednakosti (5.2.6) i (5.2.7) sledi $c_1 = 1$, $c_2 = -i$, pa ove jednakosti postaju

$$x - y = z , \quad y(y+2z)^3 + z^2 = 0 \tag{5.2.8}$$

i definišu traženo partikularno rešenje. Kako su zadati uslovi oblika (1.1.6), partikularno rešenje (5.2.8) je Cauchyevo.

Primetimo da smo do rešenja (5.2.8) mogli da dođemo i bez nalaženja drugog primarnog i opšteg rešenja. Smenom datih uslova u prvi primarni integral (5.2.6) odmah se određuje $c_1 = 1$, čime (5.2.6) postaje

$$x - y = z \; . \tag{5.2.9}$$

Postupak se dalje ponavlja sa $x = y + z$ i dobija se rešenje odgovarajuće homogene jednačine

$$y(y + 2z)^3 = c_2 z^2 \; ,$$

iz kojeg se, smenom početnih uslova, određuje $c_2 = -1$ i

$$y(y + 2z)^3 + z^2 = 0 \; . \tag{5.2.10}$$

Jednakosti (5.2.9) i (5.2.10) definišu traženo partikularno rešenje, što je prirodno isti rezultat kao (5.2.8). △

6. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Algoritmi za analitičko rešavanje PDJ u generalnom slučaju ne postoje. Već kod PDJ II reda se razmatraju samo specijalni tipovi. Takvi su, npr., eliptički, parabolički i hiperbolički tip, u koje spadaju i poznate jednačine matematičke fizike (videti [**4**]): Laplaceova jednačina (eliptički tip), jednačina provođenja toplote ili Fourierova jednačina (parabolički tip), talasna jednačina ili jednačina žice koja treperi (hiperbolički tip).

Za rešavanje PDJ je razvijen veliki broj numeričkih metoda (videti [**3**]), čime se u praksi značajno prevazilazi nedostatak analitičkih metoda.

U svom izlaganju se ograničavamo samo na PDJ I reda (1.1.8), a među njima na homogenu linearnu i kvazilinearnu PDJ.

6.1. Linearna homogena PDJ

Opšti oblik ove PDJ je

$$G_1(x_1,\dots,x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+G_n(x_1,\dots,x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_n}=0\ , \tag{6.1.1}$$

gde su $G_1,\dots,G_n$ zadate, a $f(x_1,\dots,x_n)$ nepoznata funkcija.

Jednačini (6.1.1) pridružujemo sistem DJ oblika (5.2.2), tj.

$$\frac{dx_1}{G_1(x_1,\dots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{G_n(x_1,\dots,x_n)}\ , \tag{6.1.2}$$

koji je poznat kao *sistem karakteristika* PDJ (6.1.1). Ovaj sistem može da se zapiše u ekvivalentnom obliku

$$dx_1=\lambda G_1\ ,\ \dots\ ,\ dx_n=\lambda G_n\ , \tag{6.1.3}$$

gde je uvedena oznaka $\lambda = dx_i/G_i$ $(i=1,\dots,n)$.

Ako je poznato neko rešenje PDJ (6.1.1), tada je poznat jedan primarni integral sistema (6.1.2) i obrnuto, o čemu govori sledeća teorema.

Teorema 6.1.1. *Rešavanje linearne homogene PDJ* (6.1.1) *i rešavanje sistema karakteristika* (6.1.2) *su ekvivalentni problemi.*

Dokaz. Pretpostavimo da je poznat jedan prvi integral sistema (6.1.2),

$$c = \varphi(x_1, \dots, x_n) \; , \tag{6.1.4}$$

gde je c proizvoljna konstanta. Pokažimo da je tada

$$f = \varphi(x_1, \dots, x_n) \tag{6.1.5}$$

rešenje PDJ (6.1.1).

Diferenciranjem (6.1.4) sledi $d\varphi = 0$, tj.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\, dx_n = 0 \; . \tag{6.1.6}$$

Zamenjujući diferencijale $dx_1, \dots, dx_n$ iz (6.1.3) u (6.1.6), dobija se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, \lambda G_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\, \lambda G_n = 0 \; ,$$

tj.

$$G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \cdots + G_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \; , \tag{6.1.7}$$

što je PDJ (6.1.1) sa $f = \varphi$. Dakle, funkcija φ zadovoljava PDJ (6.1.1), pa je (6.1.5) zaista njeno rešenje.

Obrnuto, neka je (6.1.5) neko rešenje PDJ (6.1.1), tj. neka važi (6.1.7). Pokažimo da je tada (6.1.4) jedan prvi integral sistema (6.1.2).

Diferenciranjem (6.1.4) sledi $d\varphi = 0$, tj. (6.1.6). Upoređivanjem (6.1.6) sa (6.1.7) zaključujemo da važi (6.1.3), tj. (6.1.2). Dakle, (6.1.4) zadovoljava sistem (6.1.2), pa je (6.1.4) primarni integral sistema (6.1.2). □

Na osnovu poznatih rešenja oblika (6.1.5) može da se odredi još jedno rešenje PDJ (6.1.1), koje se razlikuje od (6.1.5) u opštem slučaju, a formulisano je sledećom teoremom.

Teorema 6.1.2. *Neka su* $f_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ $(i = 1, \dots, k;\; k \le n-1)$ *rešenja PDJ* (6.1.1) *i neka je* ψ *proizvoljna diferencijabilna funkcija od* k *argumenata. Tada je*

$$f = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \tag{6.1.8}$$

takođe rešenje PDJ (6.1.1).

Dokaz. Kako je $f_i = \varphi_i$ rešenje PDJ (6.1.1) za svako $i = 1, \ldots, k$, to važi

$$G_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + G_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \ .$$

Množenjem svake od jednačina sa $\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_i}$ i sabiranjem po $i = 1, \ldots, k$, dobija se

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(G_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + G_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \Big) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_i} = 0 \ ,$$

tj.

$$G_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + G_n \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0 \ .$$

Imajući u vidu da je $f_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ je složena funkcija, pa je svaka od dobijenih suma njen odgovarajući parcijalni izvod. Zato poslednja jednakost može da se zapiše u obliku

$$G_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdots + G_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0 \ ,$$

što je PDJ (6.1.1) sa $f = \psi$. Dakle, funkcija (6.1.8) je zaista rešenje PDJ (6.1.1). $\square$

Neka su

$$c_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{6.1.9}$$

sva nezavisna rešenja sistema (6.1.2) i

$$f_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{6.1.10}$$

njima odgovarajuća rešenja PDJ (6.1.1). Kako (6.1.9) definiše opšte rešenje sistema (6.1.2), to i (6.1.10) određuje opšte rešenje PDJ (6.1.1). Imajući u vidu Teoremu 6.1.2, *opšte rešenje* PDJ (6.1.1) je dato sa

$$f = \psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \ , \tag{6.1.11}$$

gde je ψ proizvoljna diferencijabilna funkcija od $n-1$ argumenata. Primećujemo da opšte rešenje (6.1.11) sadrži jednu proizvoljnu funkciju, analogno običnim DJ čije opšte rešenje sadrži jednu proizvoljnu konstantu. Dakle, broj proizvoljnih elemenata u opštem rešenju DJ i PDJ I reda je isti, ali se razlikuje njihova priroda.

Pod *partikularnim rešenjem* ćemo da podrazumevamo svako rešenje PDJ (6.1.1) koje se dobija iz opšteg, a nije opšte. Napominjemo da ovo nije precizna definicija partikularnog rešenja, već samo naš interni dogovor. Tako je rešenje (6.1.8) partikularno ako su rešenja $c_1 = \varphi_1, \ldots, c_{n-1} = \varphi_{n-1}$ međusobno zavisna ili ako je $k < n-1$. Takođe, svako od rešenja (6.1.10) je partikularno jer se dobija iz opšteg ako je funkcija ψ konkretno izabrana kao

$$\psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \varphi_i \quad (i = 1, \ldots, n-1) .$$

Za partikularna rešenja (6.1.10) kažemo da su *nezavisna* ili *bazna* rešenja.

Za nalaženje partikularnog rešenja zadaju se dodatni uslovi, među kojima su najpoznatiji Cauchyevi uslovi. Tada se partikularno rešenje zove Cauchyevo rešenje (videti [**2**], str. 137–138). Zadavanje Cauchyevih uslova i nalaženje Cauchyevog rešenja ilustrovaćemo primerom.

PRIMER 6.1.1. Ako je $f(x, y, z)$ nepoznata funkcija, naći opšte rešenje PDJ

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\,\frac{\partial f}{\partial y} + z\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$

Zatim naći ona partikularna rešenja koja zadovoljavaju uslove:

(1°) $$z = 1 , \quad f(x, y, 1) = x - 2y ,$$

(2°) $$y = 2x , \quad f(x, 2x, z) = x^2 + z^2 .$$

Formiramo sistem karakteristika

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x-y} = \frac{dz}{z} .$$

Iz DJ sa razdvojenim promenljivama $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}$ integracijom se dobija jedan prvi integral sistema karakteristika

$$\frac{z}{x} = c_1 .$$

DJ $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{x-y}$ je LDJ I reda $y' + \dfrac{1}{x}\,y = 1$, čije se opšte rešenje nalazi prema formuli (2.3.5) i glasi

$$y = \frac{x}{2} + \frac{c}{x} ,$$

što sređivanjem daje drugi prvi integral sistema karakteristika

$$2xy - x^2 = c_2 .$$

Lako se proverava, prema (5.1.4), da su dobijeni prvi integrali nezavisni. Zato su

$$f_1 = \varphi_1(x, y, z) = \frac{z}{x} , \quad f_2 = \varphi_2(x, y, z) = 2xy - x^2 \tag{6.1.12}$$

nezavisna (bazna) partikularna rešenja date PDJ, pa je njeno opšte rešenje

$$f(x, y, z) = \psi(\varphi_1, \varphi_2) = \psi\left(\frac{z}{x} , 2xy - x^2\right) ,$$

gde je ψ proizvoljna diferencijabilna funkcija.

Pre nalaženja traženih partikularnih rešenja, obratimo pažnju na date uslove. U slučaju (1°) zadata je konkretna vrednost jedne od promenljivih $z = 1$, a u slučaju (2°) veza između nezavisno promenljivih $y = 2x$. U oba slučaja data je i odgovarajuća "vrednost" opšteg rešenja $f(x, y, 1) = x - 2y$, odnosno $f(x, 2x, z) = x^2 + z^2$, koja nije uvek eksplicitnog oblika kao ovde. Ovo su dva načina zadavanja Cauchyevih uslova, pa su tražena partikularna rešenja Cauchyeva.

(1°) Zamenjujući prvi Cauchyev uslov $z = 1$ u (6.1.12), dobijamo

$$\varphi_1(x, y, 1) = \frac{1}{x} , \quad \varphi_2(x, y, 1) = 2xy - x^2 ,$$

odakle određujemo

$$x = \frac{1}{\varphi_1} , \quad y = \frac{1 + \varphi_1^2\varphi_2}{2\varphi_1} .$$

Nađene x, y zamenjujemo u drugi Cauchyev uslov i dobijamo

$$f(x, y, 1) = x - 2y = -\varphi_1\varphi_2 .$$

S obzirom na $f(x, y, z) = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$, iz poslednje jednakosti zaključujemo da funkcija ψ za date Cauchyeve uslove uzima konkretan oblik

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2) = -\varphi_1\varphi_2 .$$

Zato je traženo Cauchyevo rešenje

$$f(x, y, z) = -\varphi_1(x, y, z)\varphi_2(x, y, z) = z(x - 2y) .$$

(2°) Za $y = 2x$, (6.1.12) postaje

$$\varphi_1(x, 2x, z) = \frac{z}{x} , \quad \varphi_2(x, 2x, z) = 3x^2 ,$$

odakle je

$$x^2 = \frac{1}{3}\,\varphi_2 , \quad z^2 = x^2\varphi_1^2 = \frac{1}{3}\,\varphi_1^2\varphi_2 ,$$

pa iz drugog uslova sledi

$$f(x, 2x, z) = x^2 + z^2 = \frac{1}{3}\,\varphi_2 + \frac{1}{3}\,\varphi_1^2\varphi_2 = \frac{1}{3}\,(1 + \varphi_1^2)\varphi_2 .$$

Dakle, u ovom slučaju je

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{3}\,(1 + \varphi_1^2)\varphi_2$$

i Cauchyevo rešenje glasi

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}\,\bigl(1 + \varphi_1^2(x, y, z)\bigr)\,\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{3x}\,(2y - x)(x^2 + z^2)\ . \quad \triangle$$

$\boxed{\text{PRIMER 6.1.2.}}$ Ako je $f(x, y)$ nepoznata funkcija, naći opšte rešenje PDJ

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0\ .$$

Zatim naći ona partikularna rešenja koja zadovoljavaju uslove:

$$(1^\circ) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 4(x^2 + y^2)\ ,$$

$$(2^\circ) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$

Sistem karakteristika se sastoji samo od jedne jednačine

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}\ .$$

Ovo je DJ sa razdvojenim promenljivama $-x\,dx = y\,dy$, čije opšte rešenje određuje prvi integral sistema karakteristika

$$x^2 + y^2 = c\ .$$

Zato je

$$f = \varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

odgovarajuće partikularno rešenje date PDJ, dok je

$$f(x, y) = \psi(\varphi) = \psi(x^2 + y^2)$$

njeno opšte rešenje, sa proizvoljnom diferencijabilnom funkcijom ψ.

Nalazimo sada tražena partikularna rešenja, uz napomenu da ni jedno od njih nije Cauchyevo jer zadati uslovi nisu Cauchyevi.

(1°) Imajući u vidu da je $\psi \equiv \psi\bigl(x^2 + y^2\bigr)$ složena funkcija, diferenciranjem opšteg rešenja nalazimo

$$(6.1.13) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\psi'\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\psi'\ ,$$

pa dati uslov postaje $4x^2\psi'^2 + 4y^2\psi'^2 = 4\bigl(x^2 + y^2\bigr)$, tj. $\psi'^2 = 1$ i

$$\psi' = \pm 1\ ,$$

gde je $\psi' \equiv \psi'(x^2+y^2)$. Za $t = x^2+y^2$, integracijom sledi $\psi(t) = \pm t + a$, odnosno

$$\psi(x^2+y^2) = \pm(x^2+y^2) + a \ .$$

Zato iz opšteg rešenja $f(x,y) = \psi(x^2+y^2)$ dobijamo dva partikularna rešenja:

$$f_1(x,y) = x^2+y^2+a \ , \quad f_2(x,y) = -(x^2+y^2)+a \ ,$$

gde je a proizvoljna konstanta.

(2°) Diferenciranjem (6.1.13) sledi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2\psi'' + 2\psi' \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2\psi'' + 2\psi' \ ,$$

pa dati uslov postaje

$$(x^2+y^2)\psi'' + \psi' = 0 \ ,$$

gde je $\psi' \equiv \psi'(x^2+y^2)$, $\psi'' \equiv \psi''(x^2+y^2)$. Za $t = x^2+y^2$ poslednja jednakost glasi

$$t\psi''(t) + \psi'(t) = 0 \ ,$$

koja se smenom $u = \psi'$ svodi na DJ sa razdvojenim promenljivama $\dfrac{du}{u} = -\dfrac{dt}{t}$ po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$ i ima opšte rešenje $tu = a$. Dalje je

$$u(t) = \psi'(t) = \frac{a}{t}$$

i integracijom $\psi(t) = a\ln|t| + b$, tj.

$$\psi(x^2+y^2) = a\ln(x^2+y^2) + b \ .$$

Traženo partikularno rešenje je

$$f(x,y) = \psi(x^2+y^2) = a\ln(x^2+y^2) + b \ ,$$

gde su a i b proizvoljne konstante.

Primećujemo da partikularna rešenja, nađena pod (1°) i (2°), sadrže proizvoljne konstante. Pri tome, broj konstanata zavisi od zadatih uslova. Ako je uslov oblika parcijalne DJ I reda (slučaj (1°)), partikularno rešenje sadrži jednu konstantu, ako je uslov parcijalna DJ II reda (slučaj (2°)), javljaju se dve konstante, itd. △

6.2. Kvazilinearna PDJ

Opšti oblik ove PDJ je

$$\begin{aligned} G_1(x_1,\ldots,x_n,f)\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + G_n(x_1,\ldots,x_n,f)\,\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ = G_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,f) \ , \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

gde su $G_1, \ldots, G_{n+1}$ zadate, a $f(x_1, \ldots, x_n)$ nepoznata funkcija.

Kvazilinearnoj PDJ (6.2.1) pridružimo linearnu homogenu PDJ

$$\begin{aligned} G_1(x_1, \ldots, x_n, f) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + G_n(x_1, \ldots, x_n, f) \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ + G_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, f) \frac{\partial u}{\partial f} = 0 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

po nepoznatoj funkciji $u(x_1, \ldots, x_n, f)$, koja zavisi od $n+1$ argumenata. Sistem karakteristika PDJ (6.2.2) je

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{G_1(x_1, \ldots, x_n, f)} = \cdots = \frac{dx_n}{G_n(x_1, \ldots, x_n, f)} \\ = \frac{df}{G_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, f)} \ . \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Ako je poznato neko rešenje PDJ (6.2.2), tada je poznato jedno rešenje PDJ (6.2.1) i obrnuto, o čemu svedoči sledeća teorema.

Teorema 6.2.1. *Rešavanje kvazilinearne PDJ* (6.2.1) *i rešavanje linearne homogene PDJ* (6.2.2) *su ekvivalentni problemi.*

Dokaz. Neka je

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, f) \tag{6.2.4}$$

rešenje PDJ (6.2.2). Pokažimo da je tada funkcija $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, implicitno data sa

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, f) = 0 \ , \tag{6.2.5}$$

rešenje PDJ (6.2.1).

Kako je (6.2.4) rešenje PDJ (6.2.2), to važi

$$G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + G_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + G_{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial f} = 0 \ . \tag{6.2.6}$$

S druge strane, imajući u vidu da je

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, f) \equiv \varphi\big(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

složena funkcija, diferenciranjem (6.2.5) po bilo kojoj od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ sledi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \ . \tag{6.2.7}$$

Odavde je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial f}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

i, zamenom u (6.2.6),

$$-G_1\,\frac{\partial \varphi}{\partial f}\,\frac{\partial f}{\partial x_1} - \cdots - G_n\,\frac{\partial \varphi}{\partial f}\,\frac{\partial f}{\partial x_n} + G_{n+1}\,\frac{\partial \varphi}{\partial f} = 0\ ,$$

tj.

$$G_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + G_n\,\frac{\partial f}{\partial x_n} = G_{n+1}\ ,$$

što je kvazilinearna PDJ (6.2.1). Dakle, ako je (6.2.4) rešenje PDJ (6.2.2), tada je (6.2.5) implicitni oblik rešenja f PDJ (6.2.1).

Obrnuto, neka je sa (6.2.5) implicitno dato rešenje $f = f(x_1, \dots, x_n)$ PDJ (6.2.1). Pokažimo da je tada (6.2.4) rešenje PDJ (6.2.2).

Iz (6.2.7) iskazujemo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial \varphi}{\partial f} \quad (i = 1, \dots, n)$$

i zamenjujemo u (6.2.1). Dobija se (6.2.6), što je PDJ (6.2.2) sa $u = \varphi$. Dakle, (6.2.4) je rešenje PDJ (6.2.2). $\square$

Neka su

$$c_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, f) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{6.2.8}$$

sva nezavisna rešenja sistema (6.2.3). Prema prethodnom izlaganju o linearnim homogenim PDJ, tada je

$$u = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

opšte rešenje PDJ (6.2.2), gde je ψ proizvoljna funkcija. Zato je, prema Teoremi 6.2.1,

$$\psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0 \tag{6.2.9}$$

opšte rešenje PDJ (6.2.1) u implicitnom obliku. Opšte rešenje (6.2.9) može da se iskaže i u obliku

$$\varphi_k = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n) \quad (k = 1, \dots, n)\ , \tag{6.2.10}$$

gde je za proizvoljnu funkciju upotrebljena ista oznaka ψ. Zavisno od konkretne situacije, koristi se pogodniji od oblika (6.2.9) ili (6.2.10).

Za pojam *partikularnog rešenja* usvajamo isti dogovor kao kod linearnih homogenih PDJ. Cauchyevi uslovi se zadaju analogno.

PRIMER 6.2.1. Ako je $f(x,y,z)$ nepoznata funkcija, naći opšte rešenje PDJ

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+(z+f)\,\frac{\partial f}{\partial y}+(y+f)\,\frac{\partial f}{\partial z}=y+z\ .$$

Zatim naći ono Cauchyevo rešenje koje zadovoljava uslove

$$x=1\ ,\quad y+z+f=2\ .$$

Sistem karakteristika je

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z+f}=\frac{dz}{y+f}=\frac{df}{y+z}\ .$$

Iz $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{z+f}=\dfrac{df}{y+z}$, koristeći osobinu produžene proporcije (videti Primer 5.2.2), sledi

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy-df}{y-f}=-\frac{d(y-f)}{y-f}\ ,$$

odakle integracijom dobijamo jedno primarno rešenje

$$x(y-f)=c_1\ . \tag{6.2.11}$$

Analogno, iz $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{y+f}=\dfrac{df}{y+z}$ se dobija drugo primarno rešenje

$$x(z-f)=c_2\ . \tag{6.2.12}$$

Tretirajući (6.2.11) i (6.2.12) kao sistem, npr., po nepoznatima z, f i rešavajući ga, sledi

$$z=y+\frac{1}{x}\,(c_2-c_1)\ ,\quad f=y-\frac{1}{x}\,c_1\ .$$

Iz $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{z+f}$, zamenom ovako iskazanih z, f i sređivanjem, dobija se LDJ I reda $y'-\dfrac{2}{x}\,y=\dfrac{c_2-2c_1}{x^2}$. Opšte rešenje poslednje DJ je

$$y=cx^2+\frac{2c_1-c_2}{3x}\ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta. Iskazujući c_1, c_2 pomoću (6.2.11) i (6.2.12) i označavajući $3c$ sa c_3, iz prethodne jednakosti sledi treće primarno rešenje

$$\frac{y+z+f}{x^2}=c_3\ .$$

Lako se proverava, prema (5.1.4), da su dobijena primarna rešenja nezavisna. Stavljajući:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x,y,z,f) = x(y-f)\ , \quad \varphi_2(x,y,z,f) = x(z-f)\ , \\ &\varphi_3(x,y,z,f) = \frac{y+z+f}{x^2}\ , \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

prema (6.2.8) i (6.2.9) sledi traženo opšte rešenje u implicitnom obliku

$$\psi(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = \psi\Big(x(y-f)\,,\, x(z-f)\,,\, \frac{y+z+f}{x^2}\Big) = 0\ ,$$

gde je ψ proizvoljna funkcija.

Prema prvom Cauchyevom uslovu $x = 1$, (6.2.13) postaje

$$\varphi_1(1,y,z,f) = y-f\ , \quad \varphi_2(1,y,z,f) = z-f\ , \quad \varphi_3(1,y,z,f) = y+z+f\ ,$$

pa drugi Cauchyev uslov

$$\varphi_3(1,y,z,f) = y+z+f = 2$$

dovodi do traženog Cauchyevog rešenja u implicitnom obliku

$$\varphi_3(x,y,z,f) = 2\ ,$$

tj.

$$y+z+f = 2x^2\ ,$$

ili u eksplicitnom obliku

$$f(x,y,z) = 2x^2 - y - z\ .$$

Primetimo da se ovo partikularno rešenje dobija iz opšteg za konkretan oblik funkcije ψ,

$$\psi(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = \varphi_3 - 2\ . \quad \triangle$$

$\boxed{\text{PRIMER 6.2.2.}}$ Ako je $f(x,y)$ nepoznata funkcija, naći opšte rešenje PDJ

$$-x\,\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\,\frac{\partial f}{\partial y} = f\ .$$

Zatim naći ono Cauchyevo rešenje koje zadovoljava uslov

$$x = 2y = f\ .$$

Sistem karakteristika je

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{x+y} = \frac{df}{f}\ .$$

Jednačina $-\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{x+y}$ je LDJ I reda $y' + \dfrac{1}{x}\,y = -1$ sa opštim rešenjem $y = \dfrac{c}{x} - \dfrac{x}{2}$, koje sređivanjem daje primarno rešenje

$$xy + \frac{x^2}{2} = c_1\ .$$

Iz $-\dfrac{dx}{x} = \dfrac{df}{f}$ se dobija drugo primarno rešenje

$$xf = c_2 \ .$$

Dobijena primarna rešenja su nezavisna. Traženo opšte rešenje predstavljamo u obliku (6.2.10), npr. $\varphi_2 = \psi(\varphi_1)$, gde je ψ proizvoljna funkcija i

$$\varphi_1(x,y,f) = xy + \frac{x^2}{2} \ , \quad \varphi_2(x,y,f) = xf \ . \tag{6.2.14}$$

Dobija se

$$xf = \psi\left(xy + \frac{x^2}{2}\right) \ ,$$

tj.

$$f(x,y) = \frac{1}{x}\,\psi\left(xy + \frac{x^2}{2}\right) \ . \tag{6.2.15}$$

Cauchyevo rešenje nalazimo na dva načina.

Prvi način se odnosi na nalaženje veze između funkcija φ_1 i φ_2 na osnovu datih uslova. Smenom $x = 2y = f$ u (6.2.14) sledi

$$\varphi_1\left(x, \frac{x}{2}, x\right) = x^2 \ , \quad \varphi_2\left(x, \frac{x}{2}, x\right) = x^2 \ ,$$

pa za Cauchyevo rešenje mora da važi

$$\varphi_1(x,y,f) = \varphi_2(x,y,f) \ .$$

Dakle, traženo Cauchyevo rešenje je

$$xy + \frac{x^2}{2} = xf \ ,$$

tj.

$$f(x,y) = y + \frac{x}{2} \ .$$

Nalaženjem veze između φ_1 i φ_2 našli smo, u stvari, oblik funkcije ψ. Upoređivanjem $\varphi_2 = \psi(\varphi_1)$ i $\varphi_2 = \varphi_1$ vidimo da je $\psi(\varphi_1) = \varphi_1$, tj. funkcija ψ ima oblik $\psi(t) = t$.

Drugi način se sastoji u direktnom određivanju oblika funkcije ψ iz opšteg rešenja. Smenom $x = 2y = f$ u (6.2.15) sledi

$$f\left(x, \frac{x}{2}\right) = x = \frac{1}{x}\,\psi(x^2) \ ,$$

odakle je $\psi(x^2) = x^2$, tj. $\psi(t) = t$, pa je

$$f(x,y) = \frac{1}{x}\left(xy + \frac{x^2}{2}\right) = y + \frac{x}{2}$$

traženo Cauchyevo rešenje.

Koji od načina se koristi, zavisi od njegove pogodnosti za rešavanje konkretnog problema. $\triangle$

PRIMER 6.2.3. Ako je $f(x,y)$ nepoznata funkcija, naći opšte rešenje PDJ

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\ .$$

Zatim naći ona partikularna rešenja koja zadovoljavaju uslove:

$$(1^\circ)\qquad y = x^2\ ,\quad f = 2xy\ ,$$

$$(2^\circ)\qquad x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2}{x^2+y^2}\ .$$

Sistem karakteristika je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{df}{2xy}\ .$$

Iz $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ se dobija primarno rešenje

$$\frac{x}{y} = c_1\ .$$

Iz $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{df}{2xy}$, zamenom $x = c_1 y$, sledi $df = 2c_1 y\,dy$, odakle je $f = c_1 y^2 + c_2$. Za $c_1 = x/y$ dobija se drugo primarno rešenje

$$f - xy = c_2\ .$$

Opšte rešenje predstavljamo u obliku (6.2.10), npr. $\varphi_2 = \psi(\varphi_1)$, gde je ψ proizvoljna funkcija i

$$(6.2.16)\qquad \varphi_1(x,y,f) = \frac{x}{y}\ ,\quad \varphi_2(x,y,f) = f - xy\ .$$

Dobija se

$$f - xy = \psi\left(\frac{x}{y}\right)\ ,$$

tj.

$$(6.2.17)\qquad f(x,y) = xy + \psi\left(\frac{x}{y}\right)\ .$$

(1°) Smenjujući date uslove u (6.2.17) dobijamo

$$f(x,x^2) = 2x^3 = x^3 + \psi\left(\frac{1}{x}\right)\ ,$$

odakle je $\psi(1/x) = x^3$, pa funkcija ψ ima oblik $\psi(t) = 1/t^3$. Dakle, traženo rešenje je

$$f(x,y) = xy + \left(\frac{y}{x}\right)^3 .$$

Ovo rešenje je Cauchyevo jer su zadati uslovi Cauchyevi.

(2°) Diferenciranjem (6.2.17) nalazimo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{1}{y}\,\psi' \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}\,\psi' \ ,$$

što smenom u zadati uslov daje

$$\frac{x}{y}\,\psi' = \frac{x^2}{x^2+y^2} \ ,$$

gde je $\psi' \equiv \psi'(x/y)$. Uvodeći smenu $t = x/y$, poslednja jednakost postaje

$$\psi'(t) = \frac{t}{t^2+1} \ ,$$

odakle integracijom sledi $\psi(t) = \dfrac{1}{2}\ln\bigl(t^2+1\bigr) + a$, odnosno

$$\psi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{y^2} + a \ .$$

Zato je traženo partikularno rešenje

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{y^2} + a \ ,$$

gde je a proizvoljna konstanta. Primetimo da zadati uslov nije Cauchyev, pa ni dobijeno rešenje nije Cauchyevo. $\triangle$

7. ZADACI ZA VEŽBU

$\boxed{1.}$ Naći opšte rešenje DJ

$$y\sqrt{1-x^2}\ dy + x\sqrt{1-y^2}\ dx = 0\ .$$

Rešenje. Uz ograničenja $x \neq \pm 1$, $y \neq \pm 1$, datu DJ dovodimo na oblik DJ sa razdvojenim promenljivama (2.1.2),

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\ dy = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx\ .$$

Integracijom dobijamo redom:

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\ dy = -\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx\ , \quad -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

i

$$-\sqrt{1-y^2} + c_1 = \sqrt{1-x^2} + c_2\ .$$

Za $c = c_1 - c_2$, opšte rešenje je dato implicitno sa

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c\ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Zamenom u datu DJ neposredno utvrđujemo da prave $x = \pm 1$ identički zadovoljavaju ovu DJ. Isto važi i za prave $y = \pm 1$. Zaključujemo da su $x = \pm 1$ i $y = \pm 1$ rešenja date DJ. Ovo su singularna rešenja jer ne mogu da se dobiju iz opšteg ni za jednu vrednost konstante c.

$\boxed{2.}$ Naći opšte rešenje DJ

$$3y^2 y' + 16x = 2xy^3\ ,$$

a zatim naći ono partikularno rešenje koje ostaje ograničeno kad $x \to +\infty$.

Rešenje. Opšte rešenje date DJ smo odredili u Primeru 2.1.1 i ono glasi

$$y = \sqrt[3]{8 + ce^{x^2}} \ .$$

Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$, to funkcija $y = y(x)$ može da ostane ograničena jedino ako je $c = 0$. Traženo partikularno rešenje je

$$y = 2 \ .$$

$\boxed{\mathbf{3}}$. Naći opšte rešenje DJ

$$x^2y' - \cos 2y = 1 \ ,$$

a zatim naći ono partikularno rešenje za koje je $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Rešenje. Data DJ je sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{dy}{1+\cos 2y} = \frac{dx}{x^2}$$

i rešava se integracijom

$$\int \frac{dy}{1+\cos 2y} = \int \frac{dx}{x^2} \ .$$

Kako je

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \ ,$$

to je dalje:

$$\int \frac{dy}{2\cos^2 y} = \int \frac{dx}{x^2} \ , \quad \frac{1}{2}\tan y = -\frac{1}{x} + c \ , \quad \tan y = -\frac{2}{x} + c \ ,$$

što je implicitni oblik opšteg rešenja. U prethodnim jednakostima smo proizvoljnu konstantu uvek isto označavali sa c, što ćemo da radimo i nadalje.

Posmatrajući funkciju $\tan y$ samo za $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, dobija se

$$y = \arctan\left(c - \frac{2}{x}\right) \ .$$

Iz datog uslova je

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(c - \frac{2}{x}\right) = \arctan c = \frac{\pi}{4} \ ,$$

pa je $c = \tan(\pi/4) = 1$ i traženo partikularno rešenje je

$$y = \arctan\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ .$$

$\boxed{4.}$ Naći opšte rešenje DJ

$$y' = (4x + y + 2)^2 \ .$$

Rešenje. Posmatrajmo DJ oblika

$$y' = f(a_1 x + a_2 y + a_3) \ ,$$

gde je f poznata funkcija i $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ konstante. Uvodimo smenu

$$z = a_1 x + a_2 y + a_3 \ ,$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Kako je

$$z' = a_1 + a_2 y' \ , \quad y' = f(z) \ ,$$

polazna DJ se transformiše u

$$z' = a_1 + a_2 f(z) \ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{dz}{a_1 + a_2 f(z)} = dx \ .$$

Zadata DJ je očigledno navedenog oblika sa $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ i $f(z) = z^2$, pa se smenom

$$z = 4x + y + 2$$

svodi na

$$z' = 4 + f(z) = 4 + z^2 \ ,$$

tj.

$$\frac{dz}{4 + z^2} = dx \ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Integracijom sledi:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \int dx \ , \quad \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{2} = x + c \ , \quad z = 2 \tan(2x + c) \ .$$

Za $z = 4x + y + 2$, traženo opšte rešenje je

$$y = 2 \tan(2x + c) - 4x - 2 \ .$$

$\boxed{5.}$ Naći opšta rešenja DJ:

(1°) $\qquad (x + y)\, dy - (x - y)\, dx = 0 \ ,$

(2°) $\qquad \left(x^2 + 2xy - y^2\right) dx + \left(y^2 + 2xy - x^2\right) dy = 0 \ ,$

(3°) $\qquad xy' - y = (x + y) \ln \dfrac{x + y}{x} \ .$

Rešenje. U sva tri slučaja date DJ su homogene oblika (2.2.1).

(1°) Datu DJ zapisujemo na način

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}} \ .$$

Smenom $u = y/x$, gde je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija, dobijamo $y' = u + xu'$ i

$$u + xu' = \frac{1-u}{1+u} \ ,$$

što sređivanjem daje DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{1+u}{1-2u-u^2}\, du = \frac{dx}{x} \ .$$

Integracijom sledi:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-2u-u^2)}{1-2u-u^2} = \int \frac{dx}{x} \ ,$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2| = \ln|x| + c$$

i

$$\ln\Big(|x|\sqrt{|1-2u-u^2|}\Big) = c \ , \quad |x|\sqrt{|1-2u-u^2|} = c \ , \quad x^2(1-2u-u^2) = c \ .$$

Kako je $u = y/x$, traženo opšte rešenje je

$$x^2\left(1 - 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) = c \ ,$$

tj.

$$x^2 - 2xy - y^2 = c \ .$$

(2°) Datu DJ dovodimo na oblik homogene DJ

$$y' = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 2\dfrac{y}{x} - 1}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\dfrac{y}{x} - 1}$$

i smenom $u = y/x$ na DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}\, du = -\frac{dx}{x} \ .$$

Rastavljanjem na delimične razlomke dobijamo

$$\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1} = \frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)} = -\frac{1}{u+1} + \frac{2u}{u^2+1}\ ,$$

pa integracijom poslednje DJ sledi:

$$\begin{gathered}
-\int \frac{du}{u+1} + \int \frac{2u}{u^2+1}\,du = -\int \frac{dx}{x}\ ,\\
-\int \frac{d(u+1)}{u+1} + \int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\ln|x| + c\ ,\\
-\ln|u+1| + \ln(u^2+1) = -\ln|x| + c
\end{gathered}$$

i

$$\ln\left|x\frac{u^2+1}{u+1}\right| = c\ , \quad x\frac{u^2+1}{u+1} = c\ .$$

Kako je $u = y/x$, traženo opšte rešenje je

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = c$$

ili drugačije

$$x^2+y^2 = c(x+y)\ .$$

(3°) Datu DJ lako svodimo na homogenu

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)\ ,$$

odakle se smenom $u = y/x$ dobija DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{du}{(1+u)\ln(1+u)} = \frac{dx}{x}$$

i integracijom

$$\int \frac{du}{(1+u)\ln(1+u)} = \int \frac{dx}{x}\ .$$

Integral na levoj strani jednakosti se rešava smenom $t = \ln(1+u)$ i dobija se

$$\int \frac{du}{(1+u)\ln(1+u)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln(1+u)| + c\ .$$

Zato je:

$$\ln|\ln(1+u)| = \ln|x| + c\ , \quad \ln\left|\frac{\ln(1+u)}{x}\right| = c\ , \quad \ln(1+u) = cx$$

i, za $u = y/x$,

$$\ln \frac{x+y}{x} = cx \ , \quad x + y = xe^{cx} \ ,$$

pa je traženo opšte rešenje u eksplicitnom obliku

$$y = x\big(e^{cx} - 1\big) \ .$$

6. Naći opšta rešenja DJ:

$$(1^\circ) \qquad (2x + 3y + 1)\, dx + (3x + 4y - 1)\, dy = 0 \ ,$$

$$(2^\circ) \qquad (3y - 7x + 7)\, dx - (3x - 7y - 3)\, dy = 0 \ .$$

Uputstvo. Oba slučaja rešavaju se potpuno analogno Primeru 2.2.2. Zato za slučaj (1°) dajemo samo međurezultate, koristeći iste oznake kao u Primeru 2.2.2, dok za slučaj (2°) dajemo samo konačno rešenje.

(1°) Ovde je

$$y' = -\frac{2x + 3y + 1}{3x + 4y - 1}$$

i $a_1 b_2 - b_1 a_2 = -1 \neq 0$, pa je $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$. Za $x = X + 1$, $y = Y - 1$, prethodna DJ postaje homogena

$$Y' = -\frac{2 + 3\,\dfrac{Y}{X}}{3 + 4\,\dfrac{Y}{X}}$$

po nepoznatoj funkciji $Y = Y(X)$. Smenom $u = Y/X$ ova DJ se svodi na DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{3 + 4u}{2u^2 + 3u + 1}\, du = -2\, \frac{dX}{X} \ ,$$

čijim rešavanjem se dobija

$$X^2\big(2u^2 + 3u + 1\big) = c \ .$$

Vraćanjem $u = Y/X$, $X = x - 1$, $Y = y + 1$ sledi traženo opšte rešenje

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y = c \ .$$

(2°) Opšte rešenje zadate DJ je

$$(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = c \ .$$

7. Naći opšte rešenje DJ

$$(2x + 4y + 3)\, dy - (x + 2y + 1)\, dx = 0 \ .$$

Rešenje. Datu DJ dovodimo na oblik (2.2.2) iz Primera 2.2.2,

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3} \ .$$

Kako je $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, uvodimo smenu

$$u = a_1x + a_2y = x + 2y$$

i dobijamo: $u' = 1 + 2y'$,

$$u' = 1 + 2\frac{u+1}{2u+3} \ , \quad dx = \frac{2u+3}{4u+5}\,du \ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama po nepoznatoj funkciji $u = u(x)$. Opšte rešenje ove DJ je

$$4u + 5 = ce^{8x-4u} \ ,$$

pa je traženo opšte rešenje

$$4x + 8y + 5 = ce^{4x-8y} \ .$$

Primetimo da smo datu DJ mogli da tretiramo kao DJ iz Zadatka 4, oblika

$$y' = f(a_1x + a_2y + a_3) \ .$$

Prosleđivanjem postupka datog u Zadatku 4, sa

$$z = a_1x + a_2y + a_3 = x + 2y + 1 \ , \quad f(z) = \frac{z}{2z+1} \ ,$$

jasno da se dobija isti rezultat.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Odrediti konstantu $a \in \mathbb{R}$ tako da se DJ

$$\left(x^2y^2 - 1\right)dy + 2xy^3\,dx = 0$$

smenom $y = z^a$ svodi na homogenu DJ po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Zatim naći njeno opšte rešenje.

Rešenje. Datu DJ zapisujemo u obliku

$$y' = -\frac{2xy^3}{x^2y^2 - 1} \ .$$

Za $y = z^a$ je $y' = az^{a-1}z'$, pa je dalje:

$$az^{a-1}z' = -\frac{2xz^{3a}}{x^2z^{2a} - 1} \ , \quad z' = -\frac{2xz^{2a+1}}{a\left(x^2z^{2a} - 1\right)}$$

i, deobom brojioca i imenioca razlomka sa x^{2a+2},

$$z' = -\frac{2}{a}\,\frac{\left(\dfrac{z}{x}\right)^{2a+1}}{\left(\dfrac{z}{x}\right)^{2a} - x^{-2a-2}} \ .$$

Dobijena DJ je homogena ako je $-2a-2=0$, tj. $a=-1$.

Za $a=-1$ poslednja DJ postaje

$$z' = 2\frac{\left(\dfrac{z}{x}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{z}{x}\right)^{-2}-1} = 2\frac{\dfrac{z}{x}}{1-\left(\dfrac{z}{x}\right)^{2}}$$

i rešava se na standardan način, smenom $u=z/x$. Dobija se redom:

$$u = cx(u^2+1)\ , \quad z = c(x^2+z^2)$$

i traženo opšte rešenje

$$y = c(1+x^2y^2)\ .$$

$\boxed{9.}$ Naći opšta i odgovarajuća Cauchyeva rešenja DJ:

(1°) $$y' + e^x y = e^{2x}\ , \quad y(0)=e\ ;$$

(2°) $$dx + \big(e^y - x\big)\,dy = 0\ , \quad y(e)=0\ ;$$

(3°) $$\big(1-x^2\big)y' + xy - 1 = 0\ , \quad y(0)=1\ .$$

Rešenje. (1°) Data DJ je oblika linearne DJ (2.3.1) po nepoznatoj funkciji $y=y(x)$, pa njeno opšte rešenje određujemo prema formuli (2.3.5),

$$\begin{aligned} y &= \exp\Big(-\int e^x\,dx\Big)\Big[c+\int e^{2x}\exp\Big(\int e^x\,dx\Big)\,dx\Big] \\ &= e^{-e^x}\Big(c-\int e^{2x}e^{e^x}\,dx\Big)\ . \end{aligned}$$

Smenom $t=e^x$ i parcijalnom integracijom nalazimo

$$\int e^{2x}e^{e^x}\,dx = \int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t = e^{e^x}(e^x-1)$$

i dobijamo opšte rešenje

$$y = e^{-e^x}\Big(c + e^{e^x}(e^x-1)\Big) = ce^{-e^x} + e^x - 1\ .$$

Cauchyevo rešenje je ona od krivih $y(x)$ iz familije definisane opštim rešenjem za koju je $y(0)=e$, tj. koja prolazi kroz tačku $(0,e)$. Zato zamenjujemo $x=0$, $y=e$ u opšte rešenje. Dobija se $c=e^2$ i traženo rešenje (kriva)

$$y = e^{2-e^x} + e^x - 1\ .$$

(2°) Neka je y nezavisno promenljiva i $x = x(y)$ funkcija. Datu DJ dovodimo na oblik

$$\frac{dx}{dy} + e^y - x = 0 \ ,$$

tj.

$$x' - x = -e^y \ ,$$

što je linearna DJ po nepoznatoj funkciji $x = x(y)$. Primenjujući formulu (2.3.5) nalazimo opšte rešenje

$$\begin{aligned} x &= \exp\Big(\int dy\Big)\Big[c + \int -e^y \exp\Big(\int -dy\Big)\, dy\Big] \\ &= e^y\Big(c - \int e^y e^{-y}\, dy\Big) = e^y(c - y) \end{aligned}$$

ili, drugačije zapisano,

$$xe^{-y} + y = c \ .$$

Zamenom $x = e$, $y = 0$ u opšte rešenje sledi $c = e$, pa je traženo Cauchyevo rešenje kriva

$$x = (e - y)e^y \ .$$

(3°) Ako datu DJ zapišemo u obliku

$$y' + \frac{x}{1 - x^2}\, y = \frac{1}{1 - x^2} \ ,$$

vidimo da je to linearna DJ po nepoznatoj funkciji $y = y(x)$. Primenjujemo formulu (2.3.5) i nalazimo

$$y = \sqrt{|1 - x^2|}\Big(c + \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{|1 - x^2|}}\Big) \ .$$

Opšte rešenje se sastoji od dve različite familije krivih: jedne koja se dobija za $1 - x^2 > 0$ i druge koja se dobija za $1 - x^2 < 0$. Da bismo odredili partikularno rešenje, interesuje nas samo ona familija kojoj to rešenje pripada. Cauchyev uslov je zadat u tački $x = 0$ za koju je $1 - x^2 = 1 > 0$, pa odgovarajuću familiju krivih određujemo iz

$$y = \sqrt{1 - x^2}\Big(c + \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}\Big) \ .$$

Uvođenjem smene $x = \sin t$ jednostavno se rešava

$$\int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

i dobija se

$$y = \sqrt{1 - x^2}\Big(c + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\Big) = x + c\sqrt{1 - x^2} \ .$$

Iz datog uslova sledi $y(0) = c = 1$, pa je traženo Cauchyevo rešenje

$$y = x + \sqrt{1 - x^2} \ .$$

$\boxed{\mathbf{10}.}$ Naći opšta rešenja DJ:

$$(1^\circ) \qquad \Big(\frac{y^2}{x} - x^3\Big)\, dx - y\, dy = 0 \ ,$$

$$(2^\circ) \qquad y' x^3 \sin y = xy' - 2y \ .$$

Rešenje. (1°) Datu DJ dovodimo na oblik Bernoullieve (2.4.1),

$$y' - \frac{1}{x}\, y = -\frac{x^3}{y}$$

sa $r = -1$. Zato uvodimo smenu $y = z^k$, gde je $k = 1/(1-r) = 1/2$ i $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Iz smene $y = \sqrt{z}$ je $y' = (1/2\sqrt{z})z'$, pa se Bernoullieva DJ transformiše u

$$\frac{1}{2\sqrt{z}}\, z' - \frac{1}{x}\, \sqrt{z} = -\frac{x^3}{\sqrt{z}} \ ,$$

tj. u linearnu DJ

$$z' - \frac{2}{x}\, z = -2x^3 \ .$$

Opšte rešenje ove DJ jednostavno nalazimo na ranije opisani način i dobijamo

$$z = cx^2 - x^4 \ .$$

Pošto je $y = \sqrt{z}$, to je $z = y^2$, pa je opšte rešenje polazne Bernoullieve DJ

$$y^2 = cx^2 - x^4 \ .$$

(2°) Datu DJ transformišemo na oblik Bernoullieve:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x - x^3 \sin y} \ , \\ x' &= \frac{dx}{dy} = \frac{x - x^3 \sin y}{2y} \ , \\ x' - \frac{1}{2y}\, x &= -\frac{\sin y}{2y}\, x^3 \ , \end{aligned}$$

gde je nepoznata funkcija $x = x(y)$ i $r = 3$. Zato je $k = 1/(1-r) = -1/2$, pa je smena $x = z^k = 1/\sqrt{z}$ i $x' = -z'/2z\sqrt{z}$. Bernoullieva DJ postaje linearna

$$z' + \frac{1}{y}\, z = \frac{\sin y}{y}$$

po nepoznatoj funkciji $z = z(y)$ i jednostavno se rešava. Za opšte rešenje se dobija

$$z = \frac{1}{y}\,(c - \cos y) \ ,$$

što smenom $z = 1/x^2$ daje opšte rešenje Bernoullieve DJ

$$y = x^2(c - \cos y) \ .$$

$\boxed{\mathbf{11.}}$ Naći opšta rešenja DJ:

$$(1^\circ) \qquad x\big(1 - x^2\big)y' + \big(2x^2 - 1\big)y - x^3y^3 = 0 \ ,$$

$$(2^\circ) \qquad (x+1)\big(y^2 + y'\big) + y = 0 \ .$$

Rešenje. (1°) Data DJ je Bernoullieva

$$y' + \frac{2x^2 - 1}{x\big(1 - x^2\big)}\,y = \frac{x^2}{1 - x^2}\,y^3 \ .$$

Smenom $y = 1/\sqrt{z}$ svodi se na linearnu

$$z' - 2\frac{2x^2 - 1}{x\big(1 - x^2\big)}\,z = -\frac{2x^2}{1 - x^2}$$

po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Opšte rešenje linearne DJ je

$$z = \frac{c}{x^2\big(1 - x^2\big)} - \frac{2}{5}\,\frac{x^3}{1 - x^2} \ ,$$

a opšte rešenje Bernoullieve je

$$y^2\big(2x^5 + c\big) = 5x^2\big(x^2 - 1\big) \ .$$

(2°) Datu DJ dovodimo na oblik Bernoullieve

$$y' + \frac{1}{x+1}\,y = -y^2$$

i prevodimo je smenom $y = 1/z$ na linearnu

$$z' - \frac{1}{x+1}\,z = 1 \ .$$

Opšte rešenje linearne određujemo slično kao u Primeru 2.3.2 i dobijamo

$$z = (x+1)\ln c(x+1) \ .$$

Zbog $z = 1/y$, opšte rešenje Bernoullieve je

$$y = \frac{1}{(x+1)\ln c(x+1)} \ .$$

$\boxed{\mathbf{12}.}$ Naći opšte rešenje DJ

$$y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$$

ako je poznato njeno partikularno rešenje $y_1 = \cos x$.

Rešenje. Data DJ je Riccatieva (2.5.1),

$$y' = -\frac{\cos x}{1 - \sin x \cos x}\, y^2 + \frac{1}{1 - \sin x \cos x}\, y - \frac{\sin x}{1 - \sin x \cos x} \ .$$

Zato uvodimo smenu

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = \cos x + \frac{1}{z}$$

i dobijamo linearnu DJ (2.5.2),

$$z' + \frac{1 - 2\cos^2 x}{1 - \sin x \cos x}\, z = \frac{\cos x}{1 - \sin x \cos x}$$

po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$. Opšte rešenje ove DJ se određuje prema (2.3.5), pri čemu se za rešavanje odgovarajućih neodređenih integrala koriste trigonometrijske formule

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \ , \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ .$$

Tako je:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - 2\cos^2 x}{1 - \sin x \cos x}\, dx &= \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \sin x \cos x}\, dx = -2 \int \frac{\cos 2x}{2 - \sin 2x} = \int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x - 2} \\
&= \ln|\sin 2x - 2| \ , \\
\int \frac{\cos x(\sin 2x - 2)}{1 - \sin x \cos x}\, dx &= \int \frac{2\sin x \cos^2 x - 2\cos x}{1 - \sin x \cos x}\, dx = \int \frac{2\cos x(\sin x \cos x - 1)}{1 - \sin x \cos x}\, dx \\
&= -2\sin x \ ,
\end{aligned}$$

pa je opšte rešenje linearne DJ

$$z = \frac{c + 2\sin x}{2 - \sin 2x}$$

i opšte rešenje Riccatieve

$$y = \cos x + \frac{2 - \sin 2x}{c + 2\sin x} \ .$$

$\boxed{\mathbf{13}.}$ Naći opšta rešenja DJ:

$$(1^\circ) \qquad x\big(y^2+1\big)\,dx + y\big(x^2+2y^2\big)\,dy = 0\ ,$$

$$(2^\circ) \qquad (\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0\ .$$

Rešenje. (1°) Uvodimo oznake

$$M(x,y) = x(y^2+1)\ ,\quad N(x,y) = y(x^2+2y^2)$$

i proveravamo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy\ .$$

Prema uvedenim oznakama, data DJ je oblika (2.6.1) i zadovoljava uslov (2.6.2), pa se radi o DJ u totalnom diferencijalu. Zato postoji funkcija $u(x,y)$ takva da je

$$du = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = x(y^2+1)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = y(x^2+2y^2)\ .$$

Integracijom sledi

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \int x(y^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\,x^2y^2 + \frac{1}{2}\,x^2 + \varphi(y)\ ,$$

a diferenciranjem po y i izjednačavanjem sa N,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y) = y(x^2+2y^2)\ .$$

Iz poslednje jednakosti je $\varphi'(y) = 2y^3$ i integracijom

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}\,y^4 + c_1\ ,$$

pa je funkcija $u(x,y)$ data sa

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2y^2 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,y^4 + c_1\ .$$

S druge strane, iz $du = 0$ sledi $u(x,y) = c_2$, pa je

$$\frac{1}{2}\,x^2y^2 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,y^4 + c_1 = c_2\ .$$

Kako su integracione konstante c_1, c_2 proizvoljne, proizvoljna je i konstanta $c = 2(c_2 - c_1)$. Konačno, opšte rešenje je

$$x^2 + x^2y^2 + y^4 = c\ .$$

(2°) Ako je

$$M(x,y) = \sin xy + xy \cos xy \ , \quad N(x,y) = x^2 \cos xy \ ,$$

za svako x, y važi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy \ ,$$

pa je data DJ u totalnom diferencijalu. Njeno opšte rešenje nalazimo prema formuli (2.6.4). Tačka (x_0, y_0) može da bude bilo koja, npr. $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Tada (2.6.4) postaje

$$\int_0^x (\sin ty + ty \cos ty)\, dt = c \ ,$$

tj.

$$\int_0^x \sin ty\, dt + \int_0^x ty \cos ty\, dt = c \ .$$

Drugi od integrala se rešava parcijalnom integracijom. Dobija se

$$-\frac{1}{y} \cos ty \Big|_0^x + t \sin ty \Big|_0^x + \frac{1}{y} \cos ty \Big|_0^x = c$$

i opšte rešenje

$$x \sin xy = c \ .$$

$\boxed{\textbf{14.}}$ Naći opšte rešenje DJ

$$y' = \frac{2xy + 1}{y - x^2} \ ,$$

a zatim naći ono partikularno rešenje koje dodiruje pravu $y = 1$.

Rešenje. Datu DJ zapisujemo na način

$$(2xy + 1)\, dx + (x^2 - y)\, dy = 0$$

i lako proveravamo da je to DJ u totalnom diferencijalu. Primenjujući bilo koji od postupaka izloženih u Zadatku 13 (ili Primeru 2.6.1), nalazimo opšte rešenje

$$2x^2 y + 2x - y^2 = c \ .$$

Neka je (x_0, y_0) zajednička tačka krivih $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Tada je $y_0 = f(x_0)$ i $y_0 = g(x_0)$, pa važi $f(x_0) = g(x_0)$. Zato se apscisa x_0 zajedničke tačke (x_0, y_0) određuje iz jednakosti

$$f(x) = g(x) \ .$$

Zajednička tačka je tačka dodira ako važi $f'(x_0) = g'(x_0)$, pa je za određivanje apscise tačke dodira uključena još jedna jednakost

$$f'(x) = g'(x) \ .$$

Međutim, rešavanje zadatka pomoću prethodnih jednakosti se komplikuje, zbog čega primenjujemo jednostavniji postupak.

Iz nađenog opšteg rešenja je $y = x^2 \pm \sqrt{x^4 + 2x - c}$. Označavajući

$$y = f(x) = 1 \ , \quad y = g(x) = x^2 \pm \sqrt{x^4 + 2x - c} \ ,$$

jednakost $f(x) = g(x)$ postaje $1 = x^2 \pm \sqrt{x^4 + 2x - c}$ i kvadriranjem

$$2x^2 + 2x - 1 - c = 0 \ .$$

Prema prethodnom, rešenja ove kvadratne jednačine su apscise zajedničkih tačaka prave $y = 1$ i krivih iz familije definisane opštim rešenjem. Da bi zajednička tačka bila tačka dodira, kvadratna jednačina mora da ima dvostruko rešenje, a to znači da je diskriminanta jednaka 0, tj.

$$12 + 8c = 0 \ .$$

Iz dobijenog uslova je $c = -3/2$, pa je traženo partikularno rešenje

$$2x^2 y + 2x - y^2 = -\frac{3}{2} \ ,$$

tj.

$$4x^2 y + 4x - 2y^2 + 3 = 0 \ .$$

15. Odrediti funkciju $f = f(t)$ tako da DJ

$$f(x+y)\Big[\big(1 + 3x^2 + y^2\big)\, dx + \big(1 + x^2 + 3y^2\big)\, dy\Big] = 0$$

bude u totalnom diferencijalu. Zatim naći njeno opšte rešenje.

Rešenje. Neka je

$$M(x,y) = f(x+y)\big(1 + 3x^2 + y^2\big) \ , \quad N(x,y) = f(x+y)\big(1 + x^2 + 3y^2\big) \ .$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= f'(x+y)\big(1 + 3x^2 + y^2\big) + 2y\, f(x+y) \ , \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= f'(x+y)\big(1 + x^2 + 3y^2\big) + 2x\, f(x+y) \ .
\end{aligned}$$

Da bi data DJ bila u totalnom diferencijalu, mora da važi uslov (2.6.2),

$$f'(x+y)\big(1 + 3x^2 + y^2\big) + 2y\, f(x+y) = f'(x+y)\big(1 + x^2 + 3y^2\big) + 2x\, f(x+y) \ .$$

Sređivanjem poslednje jednakosti i uvođenjem smene $t = x + y$, dobija se:

$$\begin{aligned}
(x+y)f'(x+y) - f(x+y) &= 0 \ , \\
t f'(t) - f(t) &= 0 \ ,
\end{aligned}$$

tj.

$$\frac{df}{f} = \frac{dt}{t} \ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama po nepoznatoj funkciji $f = f(t)$, čije je opšte rešenje tražena funkcija

$$f = f(t) = ct \ .$$

Za ovako određenu funkciju f data DJ postaje DJ u totalnom diferencijalu

$$(x+y)\big(1+3x^2+y^2\big)\,dx + (x+y)\big(1+x^2+3y^2\big)\,dy = 0$$

i rešava se na uobičajen način. Opšte rešenje je

$$2x^2 + 4xy + 3x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^2 + 3y^4 = c$$

ili, posle sređivanja,

$$(x+y)^2\big(3x^2+3y^2-2xy+2\big) = c \ .$$

Funkcija $f(t)$ koju smo određivali u ovom zadatku je, tzv., integracioni faktor.

16. Naći opšte i singularno rešenje DJ

$$y' - \ln y' - y + x = 0 \ .$$

Rešenje. Odmah primećujemo da je $y' > 0$ jer $\ln y'$ nije definisan za $y' \le 0$. Zapisujući datu DJ na način

$$y = x + y' - \ln y' \ ,$$

vidimo da je ona oblika (2.7.1), pa se rešava smenom $t = y' > 0$, posle koje postaje

$$y = f(x,t) = x + t - \ln t \ .$$

Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 1 - \frac{1}{t} \ ,$$

uslov pod kojim se određuje opšte rešenje je

$$t - \frac{\partial f}{\partial x} = t - 1 \ne 0 \ .$$

Pod prethodnim uslovom, (2.7.4) je DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \dfrac{1}{t}}{t-1} = \frac{t-1}{t(t-1)} = \frac{1}{t} \ ,$$

tj.

$$dx = \frac{dt}{t} \ ,$$

sa opštim rešenjem

$$x = \ln t + c \ .$$

Zamenom nađenog $x = x(t, c)$ u $y = f(x, t)$ sledi

$$y = \ln t + c + t - \ln t = t + c \ ,$$

pa je opšte rešenje polazne DJ u parametarskom obliku

$$x = \ln t + c \ , \quad y = t + c \ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta. Eliminacijom parametra t dobija se eksplicitni oblik opšteg rešenja

$$y = e^{x-c} + c \ .$$

Iz uslova $t - 1 = 0$ je $t = 1$, što zamenom u $y = f(x, t)$ daje singularno rešenje polazne DJ

$$y = x + 1 \ .$$

17. Odrediti konstante $a, b \in \mathbb{R}$ tako da DJ

$$5y + {y'}^2 = x(ax + by')$$

bude: (1°) Lagrangeova, (2°) Clairautova. U oba slučaja naći opšte i singularno rešenje.

Rešenje. Datu DJ zapisujemo u obliku (2.7.1),

$$y = \frac{a}{5}\, x^2 + \frac{b}{5}\, xy' - \frac{1}{5}\, {y'}^2 \ .$$

(1°) Da bi prethodna DJ imala oblik (2.7.7) Lagrangeove DJ, mora da je $a = 0$, $b \neq 5$. Radi jednostavnosti rešavanja, za b biramo konkretnu vrednost, npr. $b = 10$. Dobija se

$$y = xP(y') + Q(y') = 2xy' - \frac{1}{5}\, {y'}^2$$

i, posle smene $t = y'$,

$$y = xP(t) + Q(t) = 2tx - \frac{1}{5}\, t^2 \ .$$

Kako je $P(t) = 2t$, $Q(t) = -t^2/5$, to je $P'(t) = 2$, $Q'(t) = -2t/5$ i $t - P(t) = -t$. Za $t \neq 0$, (2.7.8) postaje

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x - \dfrac{2}{5}\, t}{t - 2t} = -\frac{2}{5}\, \frac{5x - t}{t} \ .$$

Poslednja DJ je linearna

$$x' + \frac{2}{t}\, x = \frac{2}{5}$$

po nepoznatoj funkciji $x = x(t)$ i ima opšte rešenje

$$x = \frac{c + 2t^3}{15t^2} \ .$$

Zamenom nađenog $x = x(t, c)$ u $y = xP(t) + Q(t)$ sledi

$$y = \frac{2c + t^3}{15t} \ ,$$

pa je opšte rešenje Lagrangeove DJ dato parametarski sa

$$x = \frac{c + 2t^3}{15t^2} \ , \quad y = \frac{2c + t^3}{15t} \ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Za $t = 0$ se dobija singularno rešenje

$$y = xP(0) + Q(0) = 0 \ .$$

(2°) Da bi data DJ imala oblik (2.7.9) Clairautove DJ, mora da je $a = 0$, $b = 5$. Posle smene $t = y'$ dobija se

$$y = xt + Q(t) = xt - \frac{1}{5}\, t^2 \ .$$

Kako je $Q(t) = -t^2/5$ i $Q'(t) = -2t/5$, jednakost (2.7.11) postaje

$$\left(x - \frac{2}{5}\, t\right) dt = 0 \ .$$

Iz $dt = 0$ sledi $t = c$, što zamenom u $y = xt + Q(t)$ daje opšte rešenje

$$y = cx - \frac{1}{5}\, c^2 \ ,$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Iz $x - 2t/5 = 0$ je $x = 2t/5$, što zamenom u $y = xt + Q(t)$ daje $y = t^2/5$, pa je singularno rešenje dato parametarski sa

$$x = \frac{2}{5}\, t \ , \quad y = \frac{1}{5}\, t^2 \ .$$

Ovo rešenje se jednostavno iskazuje u eksplicitnom obliku

$$y = \frac{1}{5}\, t^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}\, x\right)^2 = \frac{5}{4}\, x^2 \ .$$

18. Naći opšta i singularna rešenja DJ:

(1°) $\quad 2xy' - y = \ln y' \ ,$ $\qquad$ (2°) $\quad xy' - y = \ln y' \ .$

Uputstvo. (1°) Data DJ je Lagrangeova

$$y = 2xy' - \ln y'$$

sa $y' > 0$. Rešava se standardno, smenom $t = y' > 0$, kao u Primeru 2.7.2 ili Zadatku 17(1°). Pošto je $t \neq 0$, za opšte rešenje se dobija

$$x = \frac{c+t}{t^2}\ , \quad y = \frac{2c + 2t - t\ln t}{t}\ .$$

Iz istog razloga $t \neq 0$, singularno rešenje ne postoji.

(2°) Data DJ je Clairautova

$$y = xy' + \ln y'$$

sa $y' > 0$. Rešava se analogno Primeru 2.7.3 ili Zadatku 17(2°) i dobija se: za $dt = 0$ opšte rešenje

$$y = cx - \ln c\ ,$$

za $x - 1/t = 0$ singularno rešenje

$$x = \frac{1}{t}\ , \quad y = 1 - \ln t\ ,$$

tj.

$$y = 1 - \ln\frac{1}{x} = 1 + \ln x\ .$$

19. Naći opšta rešenja DJ:

(1°) $\quad x^2y'' - {y'}^2 = 0\ ,$ $\qquad$ (2°) $\quad y'' + 2y{y'}^3 = 0\ .$

Rešenje. Date DJ su II reda. Rešavamo ih dovođenjem na DJ I reda (videti deo 1.2. Snižavanje reda diferencijalne jednačine).

(1°) DJ je oblika (1.2.1) sa

$$\Phi(x, y', y'') = x^2y'' - {y'}^2$$

jer ne sadrži funkciju y. Zato se uvodi smena

$$z(x) = y'(x)$$

i dobija se:

$$x^2z' - z^2 = 0\ , \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}\ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama (I reda) po nepoznatoj funkciji $z = z(x)$, čije je opšte rešenje

$$z = \frac{x}{1 + c_1x}\ .$$

Iz uvedene smene je $y = \int z(x)\,dx$, pa je traženo opšte rešenje

$$
\begin{aligned}
y &= \int \frac{x}{1+c_1x}\,dx = \frac{1}{c_1}\int \frac{c_1x+1-1}{1+c_1x}\,dx = \frac{1}{c_1}\Big(\int dx - \int \frac{dx}{1+c_1x}\Big)\\
&= \frac{1}{c_1}\Big(x - \frac{1}{c_1}\ln|1+c_1x| + c\Big) = \frac{1}{c_1}\,x - \frac{1}{c_1^2}\ln|1+c_1x| + c_2\ ,
\end{aligned}
$$

gde su c_1 i $c_2 = c/c_1$ proizvoljne konstante.

(2°) DJ je oblika (1.2.2) sa

$$\Phi(y, y', y'') = y'' + 2yy'^3$$

jer ne sadrži nezavisno promenljivu x. Zato se uvodi smena

$$z(y) = y'$$

i dobija se: $y'' = z'y' = z'z$,

$$z' + 2yz^2 = 0\ ,\qquad \frac{dz}{z^2} = -2y\,dy\ ,$$

što je DJ sa razdvojenim promenljivama (I reda) po nepoznatoj funkciji $z = z(y)$, čije je opšte rešenje

$$z = \frac{1}{y^2+c_1}\ .$$

Iz uvedene smene je:

$$y' = \frac{1}{y^2+c_1}\ ,\qquad (y^2+c_1)\,dy = dx$$

i integracijom

$$y^3 + 3c_1y - 3x + c_2 = 0\ ,$$

što je traženo opšte rešenje sa proizvoljnim konstantama c_1, c_2.

20. U zavisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ naći opšte rešenje LDJ

$$y'' - 2y' + ay = 0\ .$$

Rešenje. Data LDJ je homogena II reda sa konstantnim koeficijentima oblika (3.2.1). Njena karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - 2\lambda + a = 0$$

i ima rešenja

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1-a}\ ,\qquad \lambda_2 = 1 - \sqrt{1-a}\ .$$

Neka je $a < 1$. Tada je $1-a > 0$, pa je $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a} \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ovo je slučaj (3.2.3), za koji je opšte rešenje dato sa (3.2.5) i konkretno

$$y = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x} = c_1e^{(1+\sqrt{1-a})x} + c_2e^{(1-\sqrt{1-a})x}\ .$$

Neka je $a > 1$. Tada je $1 - a < 0$, pa je $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{a-1} \in \mathbb{C}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ovo je slučaj (3.2.6) sa $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{a-1}$, za koji je opšte rešenje dato sa (3.2.8), tj.

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) = e^x (c_1 \cos \sqrt{a-1}\ x + c_2 \sin \sqrt{a-1}\ x) \ .$$

Za $a = 1$ je $1 - a = 0$ i $\lambda_{1,2} = \lambda = 1 \in \mathbb{R}$, što je slučaj (3.2.9) sa opštim rešenjem (3.2.12),

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^x \ .$$

U sva tri slučaja su c_1, c_2 proizvoljne konstante.

$\boxed{\mathbf{21}.}$ Metodom varijacije konstanata naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1} \ ,$$ (2°) $$y'' - y' = \frac{x^2 - 2}{x^3} \ ,$$

(3°) $$y'' + 2y' + y = 3\sqrt{x+1}\ e^{-x} \ .$$

Rešenje. Date LDJ su nehomogene II reda sa konstantnim koeficijentima oblika (3.3.1).

(1°) Odgovarajuća homogena LDJ je

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

i ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

sa rešenjima $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$. Zato su linearno nezavisna partikularna rešenja homogene LDJ

$$y_1(x) = e^{-2x} \ , \quad y_2(x) = e^{-x} \ ,$$

a opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \ .$$

Pretpostavimo da c_1, c_2 nisu konstante, već funkcije od x i primenimo Teoremu 3.1.7, u kojoj je izložen metod varijacije konstanata. U tom cilju formiramo sistem (3.1.12)–(3.1.13),

$$\begin{aligned} c_1' e^{-2x} + c_2' e^{-x} &= 0 \ , \\ -2c_1' e^{-2x} - c_2' e^{-x} &= \frac{1}{e^x + 1} \ . \end{aligned}$$

Sabiranjem jednačina sistema određujemo

$$c_1'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

i zamenom u prvu jednačinu sistema

$$c_2'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \ .$$

Funkcije $c_1(x)$, $c_2(x)$ nalazimo integracijom, pri čemu se u oba slučaja integrali rešavaju smenom $t = e^x$:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = -\int \frac{e^x}{e^x+1}\,d(e^x) = -\int \frac{t}{t+1}\,dt = -t + \ln|t+1| + k_1 \\ &= -e^x + \ln(1+e^x) + k_1 \ , \\ c_2(x) &= \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{e^x+1}\,d(e^x) = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + k_2 \\ &= \ln(1+e^x) + k_2 \ . \end{aligned}$$

Opšte rešenje (3.1.10) date nehomogene LDJ je

$$\begin{aligned} y &= c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \\ &= [-e^x + \ln(1+e^x) + k_1]e^{-2x} + [\ln(1+e^x) + k_2]e^{-x} \\ &= c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x}(1+e^x)\ln(1+e^x) \ , \end{aligned}$$

gde su $c_1 = k_1$ i $c_2 = k_2 - 1$ proizvoljne integracione konstante.

(2°) Na isti način kao pod (1°) nalazimo:

$$y_1(x) = 1 \ , \quad y_2(x) = e^x \ ; \quad c_1'(x) = \frac{2-x^2}{x^3} \ , \quad c_2'(x) = \frac{x^2-2}{x^3}\,e^{-x} \ .$$

Funkciju $c_1(x)$ jednostavno određujemo pomoću

$$c_1(x) = \int \frac{2-x^2}{x^3}\,dx = 2\int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x^2} - \ln|x| + c_1 \ .$$

Da bismo odredili funkciju $c_2(x)$, uvedimo oznake

$$I_1 = \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx \ , \quad I_2 = \int \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$$

i primetimo da za bilo koji neodređeni integral I važi $I - I = c$, gde je c proizvoljna konstanta. Dvostrukom primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,d(e^{-x}) = -\frac{1}{x}\,e^{-x} - \int \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{x}\,e^{-x} + \int \frac{1}{x^2}\,d(e^{-x}) = -\frac{1}{x}\,e^{-x} + \frac{1}{x^2}\,e^{-x} + 2\int \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx = \frac{1-x}{x^2}\,e^{-x} + 2I_2 \ , \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \frac{x^2-2}{x^3}\,e^{-x}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx - 2\int \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx \\ &= I_1 - 2I_2 = \left(\frac{1-x}{x^2}\,e^{-x} + 2I_2\right) - 2I_2 = \frac{1-x}{x^2}\,e^{-x} + c_2 \ . \end{aligned}$$

Sa c_1, c_2 su označene proizvoljne integracione konstante, koje ne treba mešati sa funkcijama $c_1(x)$, $c_2(x)$. Traženo opšte rešenje je

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{x} - \ln|x| \; .$$

(3°) Ponavljajući postupak iz (1°) redom nalazimo:

$$y_1(x) = e^{-x} \; , \quad y_2(x) = xe^{-x} \; ; \quad c_1'(x) = -3x\sqrt{x+1} \; , \quad c_2'(x) = 3\sqrt{x+1}$$

i

$$c_1(x) = -\frac{2}{5}\,(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + c_1 \; , \quad c_2(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} + c_2 \; ,$$

pri čemu se za rešavanje odgovarajućih integrala koristi smena $x+1=t^2$. Opšte rešenje je

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{4}{5}\,(x+1)^2\,\sqrt{x+1} \right) e^{-x} \; .$$

$\boxed{\mathbf{22.}}$ Naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $\quad y'' - 2y' - 3y = 25x^2 e^{4x}$, $\qquad$ (2°) $\quad y'' + y = 4e^x \cos x$.

Rešenje. Date LDJ su nehomogene II reda sa konstantnim koeficijentima. S obzirom na oblik funkcija koje ove LDJ čine nehomogenima, zadatak rešavamo primenom Teoreme 3.1.6.

(1°) Odgovarajuća homogena LDJ je

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

i ima karakterističnu jednačinu $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ sa rešenjima $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Zato je njeno opšte rešenje

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \; .$$

Funkcija koja daje nehomogenost jednačini je

$$h(x) = 25x^2 e^{4x} \; ,$$

što je oblik (3.3.2) sa

$$P_n(x) \equiv P_2(x) = 25x^2 \; , \quad \alpha = 4 \; .$$

Kako je $\alpha \neq \lambda_{1,2}$, partikularno rešenje y_p nehomogene LDJ ima oblik (3.3.3) sa

$$R_n(x) \equiv R_2(x) = Ax^2 + Bx + C \; ,$$

tj.

$$y_p = e^{\alpha x} R_2(x) = e^{4x}\big(Ax^2 + Bx + C\big) \; ,$$

gde su A, B, C privremeno neodređene konstante. Konstante A, B, C određujemo zamenom y_p,

$$
\begin{aligned}
y_p' &= e^{4x}\big[4Ax^2 + 2(A+2B)x + B + 4C\big] \ , \\
y_p'' &= e^{4x}\big[16Ax^2 + 16(A+B)x + 2A + 8B + 16C\big]
\end{aligned}
$$

u polaznu LDJ. Dobijamo:

$$
\begin{aligned}
e^{4x}\big[5Ax^2 + (12A+5B)x + 2A + 6B + 5C\big] &= 25x^2e^{4x} \ , \\
(5A-25)x^2 + (12A+5B)x + 2A + 6B + 5C &= 0
\end{aligned}
$$

i

$$
5A - 25 = 0 \ , \quad 12A + 5B = 0 \ , \quad 2A + 6B + 5C = 0 \ ,
$$

odakle je:

$$
A = 5 \ , \quad B = -12 \ , \quad C = \frac{62}{5} \ .
$$

Partikularno rešenje je

$$
y_p = e^{4x}\left(5x^2 - 12x + \frac{62}{5}\right) \ ,
$$

pa je traženo opšte rešenje nehomogene LDJ

$$
y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \left(5x^2 - 12x + \frac{62}{5}\right)e^{4x} \ ,
$$

gde su c_1, c_2 proizvoljne konstante.

(2°) Odgovarajuća homogena LDJ je $y'' + y = 0$, karakteristična jednačina je $\lambda^2 + 1 = 0$, rešenja karakteristične jednačine su $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ i opšte rešenje homogene LDJ je

$$
y_h = c_1\cos x + c_2\sin x \ .
$$

Funkcija koja daje nehomogenost jednačini je oblika (3.3.7), tj.

$$
h(x) = 4e^x\cos x = e^{\alpha x}\big[P_0(x)\cos\beta x + Q_0(x)\sin\beta x\big] \ ,
$$

gde je očigledno:

$$
P_0(x) = 4 \ , \quad Q_0(x) = 0 \ , \quad \alpha = 1 \ , \quad \beta = 1 \ .
$$

Kako je $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i \neq \lambda_{1,2}$, partikularno rešenje ima oblik (3.3.8), tj.

$$
y_p = e^{\alpha x}\big[R_0(x)\cos\beta x + S_0(x)\sin\beta x\big] = e^x(A\cos x + B\sin x) \ .
$$

Zamenom y_p,

$$
y_p' = e^x\big[(A+B)\cos x + (-A+B)\sin x\big] \ , \quad y_p'' = e^x(2B\cos x - 2A\sin x)
$$

u datu LDJ sledi

$$
(2B + A)\cos x + (-2A + B)\sin x = 4\cos x
$$

i

$$2B + A = 4 \ , \quad -2A + B = 0 \ ; \quad A = \frac{4}{5} \ , \quad B = \frac{8}{5} \ ,$$

pa partikularno rešenje glasi

$$y_p = \frac{4}{5}\, e^x (\cos x + 2\sin x) \ .$$

Traženo opšte rešenje je

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{4}{5}(\cos x + 2\sin x)e^x \ .$$

$\boxed{\mathbf{23.}}$ Naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $$y'' - 2y' + y = xe^x + 5 \ ,$$

(2°) $$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x \ .$$

Rešenje. Date LDJ su nehomogene II reda sa konstantnim koeficijentima. Rešavamo ih primenom Teoreme 3.1.8 i Teoreme 3.1.6.

(1°) Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene LDJ ima rešenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, pa je opšte rešenje

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^x \ .$$

Funkcija $h(x)$ je oblika (3.3.10),

$$h(x) = xe^x + 5 = h_1(x) + h_2(x) \ ,$$

gde je označeno

$$h_1(x) = xe^x \ , \quad h_2(x) = 5 \ .$$

Zato je partikularno rešenje oblika (3.3.11),

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} \ ,$$

gde su y_{p1} i y_{p2} redom partikularna rešenja LDJ:

$$y'' - 2y' + y = h_1(x) \ , \quad y'' - 2y' + y = h_2(x) \ .$$

Funkcija $h_1(x) = xe^x$ je oblika (3.3.2) sa $P_1(x) = x$, $\alpha = 1$. Kako je $\alpha = \lambda_{1,2}$, partikularno rešenje y_{p1} ima oblik (3.3.6), tj.

$$y_{p1} = x^2 e^{\alpha x} R_1(x) = x^2 e^x (Ax + B) \ .$$

Funkcija $h_2(x) = 5$ je istog oblika (3.3.2) sa $P_0(x) = 5$, $\alpha = 0$. Ovde je $\alpha \neq \lambda_{1,2}$, pa partikularno rešenje y_{p2} ima oblik (3.3.3),

$$y_{p2} = e^{\alpha x} R_0(x) = C \ .$$

Zato je

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = x^2 e^x (Ax + B) + C = Ax^3 e^x + Bx^2 e^x + C \ .$$

Nalaženjem y_p', y_p'' i zamenom u zadatu LDJ, određujemo:

$$A = \frac{1}{6} \ , \quad B = 0 \ , \quad C = 5$$

i dobijamo partikularno rešenje

$$y_p = \frac{1}{6} \, x^3 e^x + 5 \ ,$$

a zatim i traženo opšte rešenje

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x) e^x + \frac{1}{6} \, x^3 e^x + 5 = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{6} \, x^3 \right) e^x + 5 \ .$$

(2°) Ovde je $\lambda_1 = 2 + 2i$, $\lambda_2 = 2 - 2i$ i

$$y_h = e^{2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \ .$$

Takođe je $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, gde je

$$h_1(x) = e^{2x} \ , \quad h_2(x) = \sin 2x \ .$$

S obzirom na $\alpha = 2 \neq \lambda_{1,2}$ u funkciji $h_1(x)$, partikularno rešenje y_{p1} je

$$y_{p1} = A e^{2x} \ .$$

Funkcija $h_2(x)$ je oblika (3.3.7) sa $\alpha = 0$, $\beta = 2$, pa je $\alpha \pm i\beta \neq \lambda_{1,2}$. Partikularno rešenje y_{p2} je

$$y_{p2} = B \cos 2x + C \sin 2x \ .$$

Zato je

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = A e^{2x} + B \cos 2x + C \sin 2x \ .$$

Zamenom y_p, y_p', y_p'' u polaznu LDJ sledi:

$$A = \frac{1}{4} \ , \quad B = \frac{1}{10} \ , \quad C = \frac{1}{20} \ .$$

Dakle, partikularno rešenje je

$$y_p = \frac{1}{4} \, e^{2x} + \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{20} \sin 2x \ ,$$

a opšte rešenje je

$$y = y_h + y_p = \left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + \frac{2 \cos 2x + \sin 2x}{20} \ .$$

24. Naći opšta rešenja LDJ:

$$(1^\circ) \qquad y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x \ ,$$
$$(2^\circ) \qquad y'' + 4y' + 4y = \sinh 2x \ .$$

Uputstvo. Upotrebom formula

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \ , \quad \sinh 2\alpha = \frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{2} \ ,$$

funkcije koje date LDJ čine nehomogenima dobijaju oblik (3.3.10), pa je dalje rešavanje ovog zadatka analogno rešavanju Zadatka 23. Zato dajemo samo krajnje rezultate.

(1°) Zadata LDJ se transformiše u

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{2}\,e^{2x}\cos 2x$$

i ima: partikularno rešenje

$$y_p = \frac{1}{2}\,e^{2x} + \frac{1}{6}\,e^{2x}\cos 2x \ ,$$

opšte rešenje

$$y = \left(c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{6}\cos 2x + \frac{1}{2}\right)e^{2x} \ .$$

(2°) Zadata LDJ se transformiše u

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{2}\,e^{-2x}$$

i ima: partikularno rešenje

$$y_p = \frac{1}{32}\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,x^2e^{-2x} \ ,$$

opšte rešenje

$$y = \left(c_1 + c_2x - \frac{1}{4}\,x^2\right)e^{-2x} + \frac{1}{32}\,e^{2x} \ .$$

Napomena. Čitalac je dosad već mogao da uoči neophodnost poznavanja različitih trigonometrijskih formula. Neke od njih smo naveli u okviru Zadatka 3, Zadatka 12 i ovog zadatka, ali samo one koje su neposredno vezane za rešavanje pomenutih zadataka. Što se ostalih tiče, savetujemo čitaoca da ih sam pronađe i obnovi.

25. Odrediti konstante $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da LDJ

$$y'' - 2y' + 5y = 4ae^x\cos 2x - 17\sin 2x$$

ima partikularno rešenje za koje je $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$ i koje ostaje ograničeno kad $x \to +\infty$.

Rešenje. Data LDJ je nehomogena II reda sa konstantnim koeficijentima, u kojoj je funkcija $h(x)$ oblika (3.3.10), pa se rešava na uobičajen način, npr. kao u Zadatku 23. Za opšte rešenje se dobija

$$y = [c_1 \cos 2x + (c_2 + ax) \sin 2x]e^x - 4 \cos 2x - \sin 2x \ .$$

Nalaženjem izvoda y', iz zadatih početnih uslova $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$ sledi:

$$c_1 = \alpha + 4 \ , \quad c_2 = \frac{\beta - \alpha - 2}{2}$$

i Cauchyevo rešenje

$$y = \left[(\alpha + 4) \cos 2x + \left(ax + \frac{\beta - \alpha - 2}{2}\right) \sin 2x\right] e^x - 4 \cos 2x - \sin 2x \ .$$

S obzirom na $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, ovo rešenje ostaje ograničeno kad $x \to +\infty$ ako je

$$\alpha + 4 = 0 \ , \quad ax + \frac{\beta - \alpha - 2}{2} = 0 \ ,$$

odakle je

$$\alpha = -4 \ , \quad a = 0 \ , \quad \beta = -2 \ .$$

26. Naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $$\big(e^x + 1\big)y'' - 2y' - e^x y = 0 \ , \quad y_1 = e^x - 1 \ ;$$

(2°) $$y'' - 2\big(1 + \tan^2 x\big)y = 0 \ , \quad y_1 = \tan x \ ,$$

ako su poznata njihova partikularna rešenja y_1.

Rešenje. Date LDJ su homogene II reda sa funkcionalnim koeficijentima oblika (3.4.1). Zadatak rešavamo primenom Teoreme 3.1.4 i Teoreme 3.1.3.

(1°) Drugo linearno nezavisno partikularno rešenje y_2 određujemo smenom

$$y = y_1 z = (e^x - 1)z \ ,$$

gde je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Iz uvedene smene je:

$$y' = e^x z + (e^x - 1)z' \ , \quad y'' = e^x z + 2e^x z' + (e^x - 1)z'' \ ,$$

što zamenom u polaznu LDJ daje

$$(e^{2x} - 1)z'' + 2(e^{2x} + 1)z' = 0 \ .$$

Poslednja DJ je istog tipa kao i polazna, ali ne sadrži funkciju z, već samo njene izvode, pa je oblika (1.2.1). Rešavamo je analogno Zadatku 19(1°), smenom

$$u = z'$$

i dobijamo DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{du}{u} = -2\,\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(x)$. Integracijom sledi

$$u = \frac{e^{2x}}{\big(e^{2x}-1\big)^2}\ ,$$

a zatim i

$$z = \int u(x)\,dx = \int \frac{e^{2x}}{\big(e^{2x}-1\big)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\big(e^{2x}-1\big)}{\big(e^{2x}-1\big)^2} = -\frac{1}{2\big(e^{2x}-1\big)}\ .$$

Pri prvoj integraciji smo koristili smenu $t = e^x$, a pri obe integracije smo za proizvoljne konstante birali konkretne vrednosti (videti Napomenu 3.1.3). Drugo partikularno rešenje je

$$y_2 = y_1 z = -\frac{1}{2}\,\frac{e^x-1}{e^{2x}-1} = -\frac{1}{2\big(e^x+1\big)}\ ,$$

pa je opšte rešenje

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1\big(e^x-1\big) + c_2\,\frac{1}{e^x+1}\ .$$

(2°) Primenjujući isti postupak i koristeći iste oznake kao pod (1°), redom dobijamo:

$$\frac{du}{u} = -\frac{2}{\cos x\sin x}\,dx\ , \quad u = \frac{1}{\tan^2 x}\ , \quad z = -\frac{1}{\tan x} - x$$

i

$$y_2 = -1 - x\tan x\ , \quad y = c_1\tan x + c_2(1 + x\tan x)\ .$$

Pri obe integracije je korišćena smena $t = \tan x$.

27. Metodom invarijanata naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $$xy'' + 2y' + xy = 0\ ,$$

(2°) $$y'' + 2\big(x^2-2\big)y' + x\big(x^3-4x+2\big)y = 0\ .$$

Rešenje. Obe LDJ su homogene II reda sa funkcionalnim koeficijentima (3.4.1). Metod invarijanata je zasnovan na smeni

$$y = uv\ ,$$

gde se funkcija $v = v(x)$ određuje iz (3.4.10), a funkcija $u = u(x)$ rešavanjem DJ (3.4.14). Pri tome je ovaj metod moguće primeniti samo ako je $I(x)$ konstanta, gde je $I(x)$ dato sa (3.4.12).

(1°) Poštujući ranije uvedene oznake, ovde imamo $f(x) = 2/x$, $g(x) = 1$, pa je

$$I(x) = g - \frac{1}{4}\,f^2 - \frac{1}{2}\,f' = 1$$

i (3.4.14) glasi

$$u'' + u = 0 \ .$$

Dobijena DJ je homogena LDJ II reda sa konstantnim koeficijentima i rešava se standardno. Njeno opšte rešenje je

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x \ .$$

Funkciju v jednostavno nalazimo iz (3.4.10),

$$v = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int \frac{2}{x}\,dx\Big) = \frac{1}{x} \ .$$

Zato je traženo opšte rešenje

$$y = uv = \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{x} \ .$$

(2°) Ponavljajući postupak iz (1°) redom nalazimo:

$$I(x) = -4 \ , \quad u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \ , \quad v = \exp\Big(2x - \frac{x^3}{3}\Big)$$

i opšte rešenje

$$y = (c_1 e^{4x} + c_2) e^{-x^3/3} \ .$$

28. Odrediti konstante $a, b \in \mathbb{R}$ tako da LDJ

$$\big(1 + x^2\big) y'' + axy' + by = 0$$

može da se reši metodom invarijanata. Zatim naći njeno opšte rešenje.

Rešenje. Prema (3.4.12) je

$$I(x) = \frac{(2a - a^2 + 4b)x^2 - 2a + 4b}{4\big(1 + x^2\big)^2} \ .$$

S obzirom da je imenilac razlomka polinom četvrtog, a brojilac polinom drugog stepena, $I(x)$ može da bude konstanta jedino ako je brojilac razlomka 0 za svako x, tj. ako je $I(x) = 0$. Brojilac je 0 za

$$2a - a^2 + 4b = 0 \ , \quad -2a + 4b = 0 \ .$$

Smenjujući $4b = 2a$ iz druge u prvu jednačinu prethodnog sistema, sledi

$$a^2 - 4a = 0 \ ,$$

pa postoje dve mogućnosti:

$$a = 0 \ , \quad b = 0 \ ; \quad a = 4 \ , \quad b = 2 \ .$$

U slučaju $a = 0$, $b = 0$, data LDJ se svodi na

$$(1+x^2)y'' = 0 \ ,$$

tj. na $y'' = 0$, pa se dvostrukom integracijom lako nalazi njeno opšte rešenje

$$y = c_1 x + c_2 \ .$$

U slučaju $a = 4$, $b = 2$, data LDJ se svodi na

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

i metodom invarijanata, sa $I(x) = 0$, se nalazi njeno opšte rešenje

$$y = \frac{c_1 x + c_2}{1+x^2} \ .$$

$\boxed{\mathbf{29}}$. Metodom smene nezavisno promenljive naći opšte rešenje LDJ

$$\big(1+x^2\big)^2 y'' + 2x\big(1+x^2\big)y' + y = 0 \ .$$

Rešenje. Data LDJ je homogena II reda sa funkcionalnim koeficijentima. Metod smene nezavisno promenljive se sastoji u nalaženju funkcija $t = t(x)$ i $u = u(t)$ tako da je $y(x) = u(t(x))$. Funkcija $t(x)$ se određuje iz (3.4.18), a funkcija $u(t)$ iz (3.4.17). Pri tome ovaj metod može da se primeni samo ako važi (3.4.19).

Deobom date LDJ sa $\big(1+x^2\big)^2$, a u skladu sa ranije uvedenim oznakama, imamo

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \ , \quad g(x) = \frac{1}{\big(1+x^2\big)^2} \ .$$

Iz (3.4.18) nalazimo

$$t = K \int \sqrt{g(x)}\, dx = K \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \ ,$$

gde je izabrano $K = 1$. Za ovako određeno $t = t(x)$ je

$$t' = \frac{1}{1+x^2} \ , \quad t'' = -\frac{2x}{\big(1+x^2\big)^2} \ ,$$

pa važi (3.4.19), tj.

$$\frac{t'' - ft'}{t'^2} = 0 \ .$$

Diferenciranjem $y(x) = u(t(x))$ nalazimo

$$\begin{aligned} y' &= u't' = \frac{1}{1+x^2}\, u' \ , \\ y'' &= -\frac{2x}{1+x^2}\, u' + \frac{1}{1+x^2}\, u''t' = -\frac{2x}{\big(1+x^2\big)^2}\, u' + \frac{1}{\big(1+x^2\big)^2}\, u'' \ , \end{aligned}$$

što smenom u zadatu LDJ daje homogenu LDJ sa konstantnim koeficijentima (3.4.17), tj.

$$u'' + u = 0 ,$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$. Opšte rešenje poslednje DJ je

$$u = c_1 \cos t + c_2 \sin t ,$$

pa je traženo opšte rešenje

$$y = c_1 \cos(\arctan x) + c_2 \sin(\arctan x) .$$

Dobijeno rešenje zapisujemo jednostavnije. Imajući u vidu trigonometrijske formule

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} , \quad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} ,$$

iz $\alpha = \arctan x$ sledi:

$$x = \tan\alpha , \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} , \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

i

$$y = c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha = \frac{c_1 + c_2 x}{\sqrt{1+x^2}} .$$

30. Odrediti konstantu $a \in \mathbb{R}$ tako da LDJ

$$x^2 y'' - x(x-1)y' - y = 0$$

ima partikularno rešenje oblika $y_1 = e^{ax}/x$. Zatim naći opšte rešenje LDJ

$$x^2 y'' - x(x-1)y' - y = x^2\big(x^2 + x - 1\big)e^x .$$

Uputstvo. Odmah uočavamo da je druga LDJ nehomogena, a prva LDJ njoj odgovarajuća homogena.

Zamenom y_1, y_1', y_1'' u homogenu LDJ redom dobijamo:

$$(1-a)e^{ax} = 0 , \quad a = 1 , \quad y_1 = \frac{e^x}{x} .$$

Ponavljajući postupak iz Zadatka 26, nalazimo opšte rešenje homogene LDJ

$$y = c_1 \frac{x+1}{x} + c_2 \frac{e^x}{x} ,$$

a metodom varijacije konstanata (videti Zadatak 21) i opšte rešenje nehomogene

$$y = c_1 \frac{x+1}{x} + c_2 \frac{e^x}{x} + \frac{1}{12}(3x-4)x^2 e^x .$$

Pri realizaciji metoda varijacije konstanata koristi se parcijalna integracija.

31. Metodom smene nezavisno promenljive naći opšte rešenje LDJ

$$9x\sqrt[3]{x}\ y'' + 6\sqrt[3]{x}\ y' - y = \cos\sqrt[3]{x}\ ,$$

a zatim naći ono partikularno rešenje za koje je $y(0) = 1$, $y(-x) = y(x)$.

Rešenje. Ponavljajući postupak iz Zadatka 29 (ili Primera 3.4.3 i 3.5.3) određujemo

$$t = t(x) = \sqrt[3]{x}$$

i datu LDJ transformišemo u nehomogenu LDJ sa konstantnim koeficijentima

$$u'' - u = \cos t$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$. Opšte rešenje poslednje DJ je

$$u = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t\ ,$$

pa je opšte rešenje polazne LDJ

$$y = c_1 e^{\sqrt[3]{x}} + c_2 e^{-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}\cos\sqrt[3]{x}\ .$$

Iz zadatih uslova sledi:

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 1\ , \quad c_1 - c_2 = 0\ ; \quad c_1 = c_2 = \frac{3}{4}\ .$$

Kako je

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\ ,$$

traženo partikularno rešenje je

$$y = \frac{3}{2}\,\frac{e^{\sqrt[3]{x}} + e^{-\sqrt[3]{x}}}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt[3]{x} = \frac{3\cosh\sqrt[3]{x} - \cos\sqrt[3]{x}}{2}\ .$$

32. Naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2\ ,$$

(2°) $$(2x-1)^3 y'' - 8(2x-1)y = 24\ln(2x-1)\ .$$

Rešenje. (1°) Data LDJ je Eulerova (3.5.5) i rešava se smenom nezavisno promenljive

$$t = \ln|x|\ ,$$

za koju je

$$t' = \frac{1}{x} \ , \quad t'' = -\frac{1}{x^2} \ .$$

Kako je $y(x) = u(t(x))$, to je

$$y' = u't' = \frac{1}{x}\, u' \ , \quad y'' = u''t'^2 + u't'' = -\frac{1}{x^2}\, u' + \frac{1}{x^2}\, u'' \ ,$$

pa se Eulerova DJ transformiše u nehomogenu LDJ sa konstantnim koeficijentima

$$u'' - 4u' + 5u = 3e^{2t}$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$. Ovu LDJ rešavamo na poznati način i dobijamo opšte rešenje

$$u = (c_1 \cos t + c_2 \sin t + 3)e^{2t} \ .$$

Vraćanjem $t = \ln|x|$, dobijamo i opšte rešenje date Eulerove DJ

$$y = x^2\big(c_1 \cos(\ln|x|) + c_2 \sin(\ln|x|) + 3\big) \ .$$

(2°) Odmah uočavamo da je $2x - 1 > 0$ kao argument funkcije $\ln(2x-1)$. Deobom sa $2x - 1$ data LDJ postaje

$$(2x-1)^2 y'' - 8y = 24\, \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \ .$$

Uvodimo novu promenljivu ξ sa $\xi = 2x - 1 > 0$ i novu funkciju $\eta = \eta(\xi)$, takvu da je $y(x) = \eta\big(\xi(x)\big)$. Tada je:

$$\xi' = 2 \ , \quad y' = \eta'\xi' = 2\eta' \ , \quad y'' = 2\eta''\xi' = 4\eta'' \ ,$$

pa iz prethodne DJ dobijamo Eulerovu DJ

$$\xi^2 \eta'' - 2\eta = 6\, \frac{\ln \xi}{\xi}$$

po nepoznatoj funkciji $\eta = \eta(\xi)$. Smenom $t = \ln \xi$ Eulerova DJ se transformiše u LDJ

$$u'' - u' - 2u = 6te^{-t}$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$ za koju je $\eta(\xi) = u\big(t(\xi)\big)$. Opšte rešenje poslednje LDJ je

$$u = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{3}\, t(3t+2)e^{-t} \ ,$$

pa je opšte rešenje Eulerove DJ

$$\eta = \frac{c_1}{\xi} + c_2 \xi^2 - \frac{1}{3}\, \frac{\ln \xi\, (3 \ln \xi + 2)}{\xi}$$

i polazne LDJ

$$y = \frac{c_1}{2x-1} + c_2(2x-1)^2 - \frac{1}{3}\,\frac{\ln(2x-1)\big(3\ln(2x-1)+2\big)}{2x-1} \ .$$

Pri rešavanju zadatka smo koristili dve smene nezavisno promenljive: $\xi = 2x-1$ i $t = \ln\xi$. Rešavanje je moglo da se uprosti uvođenjem direktne smene

$$t = \ln(2x-1) \ .$$

Promenljivu ξ ovde nismo mogli da ignorišemo kao u Primeru 3.5.4 zbog činjenice $\xi' \neq 1$.

$\boxed{\mathbf{33}.}$ Naći opšta rešenja LDJ:

$$(1^\circ) \qquad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \ ,$$

$$(2^\circ) \qquad y^{(6)} - 64y = 0 \ .$$

Rešenje. Obe LDJ su homogene sa konstantnim koeficijentima oblika (4.2.1).

(1°) Data LDJ je trećeg reda sa karakterističnom jednačinom

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \ ,$$

koja se lako faktorizuje

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 &= (\lambda^3-1) + (-3\lambda^2+3\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) - 3\lambda(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-1)^3 = 0 \end{aligned}$$

i ima trostruko rešenje $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1 \in \mathbb{R}$. Ovom rešenju odgovaraju linearno nezavisna partikularna rešenja oblika (4.2.5):

$$y_1(x) = e^{\lambda x} = e^x \ , \quad y_2(x) = xe^{\lambda x} = xe^x \ , \quad y_3(x) = x^2e^{\lambda x} = x^2e^x \ ,$$

pa je opšte rešenje

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x \ ,$$

gde su c_1, c_2, c_3 proizvoljne konstante.

(2°) Data LDJ je šestog reda sa karakterističnom jednačinom

$$\lambda^6 - 64 = 0 \ ,$$

iz koje je $\lambda = \sqrt[6]{64}$. Iz ranijih kurseva matematike je poznato da za kompleksan broj

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

važi

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)\ ,$$

gde je $r = |z| > 0$, $\varphi = \arg z$, $\sqrt[n]{r} > 0$. Za broj $z = 64$ je $r = 64$, $\varphi = 0$ i $\sqrt[6]{r} = 2$, pa su rešenja karakteristične jednačine

$$\lambda_{k+1} = \sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 5)$$

i pojedinačno:

$$\lambda_1 = 2\ , \quad \lambda_2 = 1+i\sqrt{3}\ , \quad \lambda_3 = -1+i\sqrt{3}\ , \quad \lambda_4 = -2\ , \quad \lambda_5 = -1-i\sqrt{3}\ , \quad \lambda_6 = 1-i\sqrt{3}\ .$$

Rešenja $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_4 = -2$ su prosta, pa njima odgovaraju partikularna rešenja LDJ oblika (4.2.3),

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}\ , \quad y_4(x) = e^{\lambda_4 x} = e^{-2x}\ .$$

Rešenja $\lambda_{2,6} = \alpha \pm i\beta = 1 \pm i\sqrt{3}$ su prosta konjugovano kompleksna sa $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$. Njima odgovaraju partikularna rešenja LDJ oblika (4.2.4),

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^x \cos\sqrt{3}\ x\ , \quad y_6(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^x \sin\sqrt{3}\ x\ .$$

Isti je slučaj i sa $\lambda_{3,5} = -1 \pm i\sqrt{3}$, gde je $\alpha = -1$, $\beta = \sqrt{3}$, pa je

$$y_3(x) = e^{-x}\cos\sqrt{3}\ x\ , \quad y_5(x) = e^{-x}\sin\sqrt{3}\ x\ .$$

Opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + (c_3\cos\sqrt{3}\ x + c_4 \sin\sqrt{3}\ x)e^x + (c_5\cos\sqrt{3}\ x + c_6\sin\sqrt{3}\ x)e^{-x}\ .$$

34. Metodom varijacije konstanata naći opšte rešenje LDJ

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = -e^{2x}\ .$$

Uputstvo. Data LDJ je nehomogena trećeg reda sa konstantnim koeficijentima oblika (4.3.1).

Odgovarajuću homogenu LDJ smo rešili u Primeru 4.2.1 i našli smo opšte rešenje

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x\ .$$

Metod varijacije konstanata smo detaljno izložili u Primeru 4.3.1, pa nećemo da ga ponavljamo. Radeći na potpuno isti način nalazimo:

$$c_1'(x) = -e^x\ , \quad c_2'(x) = e^x\cos x\ , \quad c_3'(x) = e^x \sin x$$

i integracijom:

$$c_1(x) = -e^x + c_1\ , \quad c_2(x) = I_2 = \int e^x \cos x\, dx\ , \quad c_3(x) = I_3 = \int e^x\sin x\, dx\ .$$

Izračunavamo integrale I_2 i I_3. Na jedan od njih, npr. I_2, primenjujemo parcijalnu integraciju na dva načina i dobijamo:

$$I_2 = \int e^x\, d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - I_3 \ ,$$
$$I_2 = \int \cos x\, d(e^x) = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x + I_3 \ .$$

Sabiranjem ovih jednakosti sledi

$$c_2(x) = I_2 = \frac{\sin x + \cos x}{2}\, e^x + c_2 \ ,$$

a oduzimanjem

$$c_3(x) = I_3 = \frac{\sin x - \cos x}{2}\, e^x + c_3 \ ,$$

pa je opšte rešenje

$$y = (c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x)e^x - e^{2x} \ .$$

Integrale I_2, I_3 smo mogli da rešimo i pojedinačno, primenjujući na svaki od njih dva puta parcijalnu integraciju.

35. Naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 1 + 2e^{2x} \ ,$$

(2°) $$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x + \cos x \ .$$

Rešenje. Obe LDJ su nehomogene trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Rešavamo ih primenom Teoreme 4.1.6. i Teoreme 4.1.4.

(1°) Odgovarajuća homogena LDJ ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

sa trostrukim rešenjem $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 2$, pa je njeno opšte rešenje

$$y_h = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{2x} \ .$$

Funkcija koja datu LDJ čini nehomogenom je

$$h(x) = 1 + 2e^{2x} = h_1(x) + h_2(x) \ ,$$

pa je partikularno rešenje y_p dato sa

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} \ ,$$

gde su y_{p1} i y_{p2} redom partikularna rešenja LDJ

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 1 \ , \quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 2e^{2x} \ .$$

Funkcija $h_1(x) = 1$ je oblika (4.3.2) sa

$$P_n(x) \equiv P_0(x) = 1 \ , \quad \alpha = 0 \ .$$

Kako je $\alpha \neq \lambda$, partikularno rešenje y_{p1} ima oblik (4.3.3), tj.

$$y_{p1} = e^{\alpha x} R_0(x) = A \ .$$

Funkcija $h_2(x) = 2e^{2x}$ je istog oblika (4.3.2) sa

$$P_0(x) = 2 \ , \quad \alpha = 2 \ .$$

Ovde je $\alpha = \lambda$, pa partikularno rešenje y_{p2} ima oblik (4.3.5), tj.

$$y_{p2} = x^3 e^{\alpha x} R_0(x) = Bx^3 e^{2x} \ .$$

Zato je

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = A + Bx^3 e^{2x} \ .$$

Izračunavanjem y_p', y_p'', y_p''' i zamenom u polaznu LDJ dobija se:

$$-8A = 1 \ , \quad 6B = 2 \ ; \quad A = -\frac{1}{8} \ , \quad B = \frac{1}{3} \ ,$$

pa je partikularno rešenje

$$y_p = -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} x^3 e^{2x}$$

i traženo opšte rešenje

$$y = y_h + y_p = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{1}{3}\, x^3 \right) e^{2x} - \frac{1}{8} \ .$$

(2°) U Primeru 4.2.1 je nađeno opšte rešenje odgovarajuće homogene LDJ

$$y_h = (c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x) e^x \ ,$$

kao i rešenja njene karakteristične jednačine $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$.

Funkcija $h(x)$ je ovde

$$h(x) = e^x + \cos x = h_1(x) + h_2(x) \ .$$

U Primeru 4.3.2 smo rešavali LDJ

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = h_1(x) = e^x$$

i našli njeno partikularno rešenje

$$y_{p1} = xe^x \ .$$

Funkcija $h_2(x) = \cos x$ je oblika (4.3.6) sa

$$P_n(x) \equiv P_0(x) = 1 \ , \quad Q_n(x) \equiv Q_0(x) = 0 \ , \quad \alpha = 0 \ , \quad \beta = 1 \ .$$

Kako je $\alpha \pm i\beta = \pm i \neq \lambda_{1,2,3}$, partikularno rešenje y_{p2} ima oblik (4.3.7), tj.

$$y_{p2} = e^{\alpha x}\big[R_0(x)\cos\beta x + S_0(x)\sin\beta x\big] = A\cos x + B\sin x \ .$$

Izračunavanjem y'_{p2}, y''_{p2}, y'''_{p2} i zamenom u LDJ

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = h_2(x) = \cos x$$

sledi:

$$-3A + B = 0\ , \quad A + 3B = 1\ ; \quad A = \frac{1}{10}\ , \quad B = \frac{3}{10}\ ,$$

pa je

$$y_{p2} = \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x\ .$$

Zato je partikularno rešenje zadate LDJ

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = xe^x + \frac{\cos x + 3\sin x}{10}\ ,$$

a njeno opšte rešenje

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + x)e^x + \frac{\cos x + 3\sin x}{10}\ .$$

36. Naći opšta rešenja LDJ:

(1°) $$x^2 y''' - 2y' = 2x\ln x\ ,$$

(2°) $$(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0\ .$$

Rešenje. (1°) Množenjem date LDJ sa x dobijamo

$$x^3 y''' - 2xy' = 2x^2\ln x$$

i vidimo da je to Eulerova DJ (4.5.2). Kako je $x > 0$ kao argument funkcije $\ln x$, uvodimo smenu

$$t = \ln x\ ,$$

pri čemu je t nezavisno promenljiva nove funkcije $u = u(t)$ takve da je $y(x) = u\big(t(x)\big)$. Tada je:

$$t' = \frac{1}{x}\ , \quad t'' = -\frac{1}{x^2}\ , \quad t''' = \frac{2}{x^3}$$

i

$$y' = u't' = \frac{1}{x}\,u'\ , \quad y'' = u''t'^2 + u't'' = \frac{1}{x^2}\,u'' - \frac{1}{x^2}\,u'\ ,$$

$$y''' = u'''t'^3 + 3u''t't'' + u't''' = \frac{1}{x^3}\,u''' - \frac{3}{x^3}\,u'' + \frac{2}{x^3}\,u'\ .$$

Zamenom y, y', y'', y''' u Eulerovu DJ, ona postaje nehomogena LDJ sa konstantnim koeficijentima

$$u''' - 3u'' = 2te^{2t}$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$. Ovu LDJ rešavamo na poznati način i dobijamo njeno opšte rešenje

$$u = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{3t} - \frac{1}{2}\, te^{2t} \ ,$$

a time i opšte rešenje Eulerove DJ

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^3 - \frac{1}{2}\, x^2 \ln x \ .$$

(2°) Data LDJ je homogena trećeg reda sa funkcionalnim koeficijentima. Sličnu LDJ, samo nehomogenu II reda, smo detaljno rešavali u Zadatku 32(2°). Tada smo napomenuli da, osim na opisani način, LDJ može da se reši prostije, uvođenjem odgovarajuće direktne smene. Kako se isti postupak primenjuje i u ovom slučaju, nećemo da ga ponavljamo, već ćemo zadatak da rešimo direktnom smenom.

Nezavisno promenljivu x smenjujemo pomoću

$$t = \ln|2x+3| \ ,$$

gde je t argument nove funkcije $u = u(t)$ takve da je $y(x) = u\big(t(x)\big)$. Tada je:

$$t' = \frac{2}{2x+3} \ , \quad t'' = -\frac{4}{(2x+3)^2} \ , \quad t''' = \frac{16}{(2x+3)^3}$$

i, prema izrazima za izvode datim pod (1°),

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{2x+3}\, u' \ , \quad y'' = \frac{4}{(2x+3)^2}\, u'' - \frac{4}{(2x+3)^2}\, u' \ , \\ y''' &= \frac{8}{(2x+3)^3}\, u''' - \frac{24}{(2x+3)^3}\, u'' + \frac{16}{(2x+3)^3}\, u' \ . \end{aligned}$$

Zamenom y i nađenih izvoda u polaznu LDJ, dobija se homogena LDJ sa konstantnim koeficijentima

$$8u''' - 24u'' + 22u' - 6u = 0$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(t)$. Opšte rešenje ove LDJ se nalazi na već više puta izloženi način i glasi

$$u = c_1 e^t + c_2 e^{t/2} + c_3 e^{3t/2} \ .$$

Vraćanjem $t = \ln|2x+3|$, konačno sledi traženo opšte rešenje

$$y = c_1(2x+3) + c_2\sqrt{|2x+3|} + c_3(2x+3)\sqrt{|2x+3|} \ .$$

U toku postupka koji smo izostavili dobija se Eulerova DJ (4.4.2), pa je data LDJ zato ovde svrstana.

37. Naći opšte rešenje LDJ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

u obliku potencijalnog reda, a zatim naći ono partikularno rešenje za koje je $y(0)=2$, $y'(0)=-1$.

Rešenje. Rešenje date LDJ tražimo u obliku reda

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \ .$$

Postupajući analogno kao u Primeru 4.6.1, dobijamo

$$\sum_{k=0}^{\infty}((k+2)(k+1)c_{k+2}-(k+2)(k-1)c_k)x^k=0$$

i

$$(k+1)c_{k+2}-(k-1)c_k=0 \quad (k=0,1,2,\dots)\ ,$$

odakle je

$$c_{k+2}=\frac{k-1}{k+1}\,c_k \quad (k=0,1,2,\dots)\ .$$

Iz dobijene rekurentne veze je $c_2=-c_0$, $c_3=0$, $c_4=-c_0/3$, $c_5=0$ i generalno

$$c_{2k}=-\frac{1}{2k-1}\,c_0\ , \quad c_{2k+1}=0 \quad (k=1,2,\dots)\ ,$$

pa rešenje postaje

$$y=c_0+c_1x+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{1}{2k-1}\,c_0\Big)x^{2k}=c_1x+c_0\Big(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k-1}\Big)\ .$$

Ispitivanjem konvergencije dobijenog reda (videti [**5**], str. 47-48) utvrđujemo da je poluprečnik konvergencije $R=1$, pa postoji zbir

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k-1}=x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

za svako x iz oblasti konvergencije $(-1,1)$. Kako je u oblasti konvergencije dozvoljena integracija član po član i kako je $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^{2k}=\dfrac{1}{1-t^2}$ ([**5**], str. 50-51), to je dalje

$$S(x)=x\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^{2k}\,dt=x\int_0^x\Big(\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}\Big)\,dt=x\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\,x\ln\frac{1+x}{1-x}\ .$$

Zato je traženo opšte rešenje

$$\begin{aligned} y&=c_1x+c_0(1-S(x))=c_1x+c_0\Big(1-\frac{1}{2}\,x\ln\frac{1+x}{1-x}\Big)\\ &=c_0+c_1x-\frac{1}{2}\,c_0x\ln\frac{1+x}{1-x}\ , \end{aligned}$$

gde su $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante.

Određujući

$$y' = c_1 - c_0 \frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{2} c_0 \ln \frac{1+x}{1-x} \ ,$$

iz zadatih početnih uslova $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ sledi:

$$c_0 = 2 \ , \quad c_1 = -1$$

i traženo partikularno (Cauchyevo) rešenje

$$y = 2 - x - x \ln \frac{1+x}{1-x} \ .$$

$\boxed{\textbf{38}}$. Naći opšta rešenja sistema DJ:

$$(1^\circ) \quad \frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y} \ , \qquad (2^\circ) \quad \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} \ ,$$

$$(3^\circ) \quad \frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz} \ .$$

Rešenje. (1°) DJ $\dfrac{dy}{z} = -\dfrac{dz}{y}$ je DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{z} \ ,$$

čijim je opštim rešenjem

$$y^2 + z^2 = c_1$$

definisan jedan primarni integral datog sistema.

Zamenom $z = \pm\sqrt{c_1 - y^2}$ iz nađenog primarnog integrala u

$$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z}$$

sledi

$$dx = \frac{z^2 - y^2}{z}\, dy = \pm \frac{c_1 - 2y^2}{\sqrt{c_1 - y^2}}\, dy \ , \quad x = \pm \int \frac{c_1 - 2y^2}{\sqrt{c_1 - y^2}}\, dy \ .$$

Poslednji integral se rešava smenom $y = \sqrt{c_1} \sin t$ (ili $y = \sqrt{c_1} \cos t$), iz koje je

$$\sin t = \frac{y}{\sqrt{c_1}} \ , \quad \cos t = \frac{c_1 - y^2}{\sqrt{c_1}} \ .$$

Imajući u vidu trigonometrijske formule date u Zadatku 12, dobija se

$$\begin{aligned}\int \frac{c_1 - 2y^2}{\sqrt{c_1 - y^2}}\, dy &= c_1 \int \bigl(1 - 2\sin^2 t\bigr)\, dt = c_1 \int \bigl(\cos^2 t - \sin^2 t\bigr)\, dt = c_1 \int \cos 2t\, dt \\ &= \frac{c_1}{2} \sin 2t + c_2 = c_1 \sin t \cos t + c_2 = y\sqrt{c_1 - y^2} + c_2 \ ,\end{aligned}$$

pa je

$$x = \pm y\sqrt{c_1 - y^2} + c_2 \ .$$

Zato je $x = yz + c_2$, tj.

$$x - yz = c_2$$

drugi primarni integral.

Opšte rešenje sistema u implicitnom obliku (5.1.3) je

$$y^2 + z^2 = c_1 \ , \quad x - yz = c_2 \ .$$

(2°) Koristeći osobinu produžene proporcije navedenu u Primeru 5.2.2, dati sistem transformišemo u

$$\frac{dx + dy + dz}{2(x + y + z)} = \frac{dz - dx}{x - z} = \frac{dz - dy}{y - z} \ ,$$

tj.

$$\frac{d(x + y + z)}{2(x + y + z)} = \frac{d(z - x)}{-(z - x)} = \frac{d(z - y)}{-(z - y)} \ .$$

Integracijom nalazimo

$$\frac{1}{2}\ln|x + y + z| = -\ln|z - x| + c_1 \ ,$$

$$-\ln|z - x| = -\ln|z - y| + c_2 \ ,$$

gde su c_1, c_2 proizvoljne integracione konstante. Sređivanjem prethodnih jednakosti dobijamo prve integrale i opšte rešenje datog sistema

$$(x + y + z)(z - x)^2 = c_1 \ , \quad \frac{z - x}{z - y} = c_2 \ ,$$

pri čemu su za transformisane proizvoljne konstante upotrebljene iste oznake.

(3°) Koristeći pomenutu osobinu proporcije, iz datog sistema dobijamo

$$\frac{dx - dy}{xz - y^2} = \frac{dz}{y^2 - xz} \ ,$$

tj.

$$d(x - y) = -dz \ ,$$

pa je jedan prvi integral sistema

$$x - y + z = c_1 \ .$$

Zamenom $z - y = c_1 - x$ u jednačinu sistema

$$\frac{dx}{x(z - y)} = \frac{dy}{y(y - x)}$$

i sređivanjem sledi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(c_1 - x)} - \frac{y}{c_1 - x} \ ,$$

tj.

$$y' + \frac{1}{c_1 - x}\, y = \frac{1}{x(c_1 - x)}\, y^2 \ ,$$

što je Bernoullieva DJ po nepoznatoj funkciji $y = y(x)$. Opšte rešenje ove DJ nalazimo prema ranije izloženom algoritmu (videti Primer 2.4.1, Zadatak 10, Zadatak 11) i dobijamo

$$\frac{c_1 - x}{y} + \ln|x| = c \ .$$

Zato je dalje:

$$\frac{z - y}{y} + \ln|x| = c \ , \quad \frac{z}{y} + \ln|x| = c + 1$$

i, za $c_2 = \pm e^{c+1}$,

$$x e^{z/y} = c_2 \ ,$$

što je drugi prvi integral.

Dakle, traženo opšte rešenje sistema je

$$x - y + z = c_1 \ , \quad x e^{z/y} = c_2 \ .$$

39. Naći opšte rešenje PDJ

$$(2z - 3y)\,\frac{\partial f}{\partial x} + (3x - z)\,\frac{\partial f}{\partial y} + (y - 2x)\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ .$$

Rešenje. Data PDJ je linearna homogena oblika (6.1.1) po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y, z)$.

Odgovarajući sistem karakteristika (6.1.2) je

$$\frac{dx}{2z - 3y} = \frac{dy}{3x - z} = \frac{dz}{y - 2x} \ .$$

Prema osobini proporcije navedenoj u Primeru 5.2.2, iz prethodnog sistema je

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x(2z - 3y) + y(3x - z)} = \frac{dz}{y - 2x} \ ,$$

tj.

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{(2x - y)z} = \frac{dz}{y - 2x} \ ,$$

pa je dalje:

$$x\,dx + y\,dy = -z\,dz \ , \quad \frac{1}{2}\,d(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}\,d(z^2)$$

i integracijom

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1 \ ,$$

što je jedan prvi integral sistema. Prema istoj osobini proporcije, iz sistema karakteristika je takođe

$$\frac{dx + 2\,dy}{2z - 3y + 2(3x - z)} = \frac{dz}{y - 2x} ,$$

tj.

$$\frac{dx + 2\,dy}{-3(y - 2x)} = \frac{dz}{y - 2x} ,$$

odakle je

$$d(x + 2y) = -3\,dz$$

i intergacijom

$$x + 2y + 3z = c_2 ,$$

šo je drugi prvi integral sistema.

Dobijeni prvi integrali sistema karakteristika su oblika (6.1.9) sa

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 , \quad \varphi_2(x, y, z) = x + 2y + 3z ,$$

pa je traženo opšte rešenje oblika (6.1.11),

$$f(x, y, z) = \psi(\varphi_1, \varphi_2) = \psi\big(x^2 + y^2 + z^2 , x + 2y + 3z\big) ,$$

gde je ψ proizvoljna diferencijabilna funkcija.

$\boxed{\textbf{40}}$. Naći opšta i odgovarajuća partikularna rešenja PDJ:

(1°)
$$x\big(x^2 + 3y^2\big)\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\big(3x^2 + y^2\big)\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2\big(x^2 + y^2\big)f ;$$
$$xy = f , \quad x^2 - y^2 = f^2 ;$$

(2°)
$$x\big(y^2 - f^2\big)\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\big(x^2 + f^2\big)\,\frac{\partial f}{\partial y} = \big(x^2 + y^2\big)f ;$$
$$x = y = f .$$

Rešenje. Obe PDJ su kvazilinearne oblika (6.2.1) po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y)$, sa sistemom karakteristika oblika (6.2.3).

(1°) Za datu PDJ sistem karakteristika je

$$\frac{dx}{x(x^2 + 3y^2)} = \frac{dy}{y(3x^2 + y^2)} = \frac{df}{2(x^2 + y^2)f} .$$

Prema više puta pomenutoj osobini proporcije, ovaj sistem transformišemo redom u:

$$\begin{aligned}
\frac{x\,dx - y\,dy}{x^4 - y^4} &= \frac{y\,dx + x\,dy}{4xy(x^2 + y^2)} = \frac{df}{2(x^2 + y^2)f} ,\\
\frac{x\,dx - y\,dy}{x^2 - y^2} &= \frac{y\,dx + x\,dy}{4xy} = \frac{df}{2f} ,\\
\frac{d(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} &= \frac{d(xy)}{2xy} = \frac{df}{f} .
\end{aligned}$$

Iz $\dfrac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=\dfrac{df}{f}$ integracijom sledi

$$\ln|x^2-y^2|=\ln|f|+c\ ,$$

a iz $\dfrac{d(xy)}{2xy}=\dfrac{df}{f}$ sledi

$$\frac{1}{2}\ln|xy|=\ln|f|+c\ ,$$

što sređivanjem daje prve integrale sistema karakteristika

$$\frac{f}{x^2-y^2}=c_1\ ,\quad \frac{f^2}{xy}=c_2\ .$$

Nađeni prvi integrali su oblika (6.2.8) sa

$$\varphi_1(x,y,f)=\frac{f}{x^2-y^2}\ ,\quad \varphi_2(x,y,f)=\frac{f^2}{xy}\ ,$$

pa je traženo opšte rešenje oblika (6.2.9),

$$\psi(\varphi_1,\varphi_2)=\psi\left(\frac{f}{x^2-y^2}\,,\,\frac{f^2}{xy}\right)=0\ ,$$

gde je ψ proizvoljna diferencijabilna funkcija. Ovo opšte rešenje može da se iskaže i u obliku (6.2.10), npr. $\varphi_2=\psi(\varphi_1)$, tj.

$$\frac{f^2}{xy}=\psi\left(\frac{f}{x^2-y^2}\right)\ .$$

Oblik (6.2.10) je pogodniji za određivanje partikularnih rešenja.

Zamenom zadatih uslova $xy=f$, $x^2-y^2=f^2$ u opšte rešenje dobijamo

$$\frac{f^2}{f}=\psi\left(\frac{f}{f^2}\right)\ ,\quad f=\psi\left(\frac{1}{f}\right)\ .$$

Za $t=1/f$ odavde sledi konkretan oblik funkcije $\psi(t)=1/t$. Zato je traženo partikularno rešenje

$$\frac{f^2}{xy}=\frac{x^2-y^2}{f}\ ,$$

tj.

$$xy(x^2-y^2)=f^3\ .$$

Ovo je Cauchyevo rešenje (videti Primer 6.1.1), s tim što je veza između promenljivih $(xy)^2=x^2-y^2$ data implicitno.

Partikularno rešenje smo mogli da nađemo i zamenom datih uslova u prve integrale sistema karakteristika. Dobili bismo

$$c_1=\frac{1}{f}\ ,\quad c_2=f\ ,$$

pa za to rešenje mora da važi

$$\varphi_2(x,y,f) = \frac{1}{\varphi_1(x,y,f)} \ ,$$

što naravno dovodi do istog rezultata.

(2°) Iz sistema karakteristika

$$\frac{dx}{x(y^2-f^2)} = \frac{dy}{y(x^2+f^2)} = \frac{df}{(x^2+y^2)f}$$

redom imamo:

$$\begin{aligned} \frac{y\,dx + x\,dy}{xy(x^2+y^2)} &= \frac{df}{(x^2+y^2)f} \ , &\quad \frac{x\,dx + f\,df}{y^2(x^2+f^2)} &= \frac{dy}{y(x^2+f^2)} \ ; \\ \frac{y\,dx + x\,dy}{xy} &= \frac{df}{f} \ , & x\,dx + f\,df &= y\,dy \ ; \\ \frac{d(xy)}{xy} &= \frac{df}{f} \ , & \frac{1}{2}\,d(x^2+f^2) &= \frac{1}{2}\,d(y^2) \ . \end{aligned}$$

Integracijom slede prvi integrali

$$\frac{xy}{f} = c_1 \ , \quad x^2 - y^2 + f^2 = c_2 \ .$$

Opšte rešenje oblika (6.2.10) je

$$\frac{xy}{f} = \psi(x^2 - y^2 + f^2) \ .$$

Zamenom uslova $x = y = f$ u opšte rešenje dobijamo $f = \psi(f^2)$, pa je $\psi(t) = \sqrt{t}$ i Cauchyevo rešenje glasi

$$\frac{xy}{f} = \sqrt{x^2 - y^2 + f^2} \ ,$$

tj.

$$x^2y^2 = (x^2 - y^2 + f^2)f^2 \ .$$

$\boxed{\mathbf{41.}}$ Naći opšta i odgovarajuća partikularna rešenja PDJ:

(1°) $$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} - f + xy = 0 \ ; \qquad x = y^2 \ , \quad f = -x^2 \ ;$$

(2°) $$f(x+f)\,\frac{\partial f}{\partial x} - y(y+f)\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ ; \qquad x = 1 \ , \quad f = \sqrt{y} \ .$$

Rešenje. (1°) Ako datu PDJ zapišemo u obliku

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = f - xy \ ,$$

vidimo da je ona kvazilinearna po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y)$.

Sistem karakteristika je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{df}{f - xy} \ .$$

Iz $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ sledi jedan prvi integral

$$\frac{x}{y} = c_1 \ .$$

Zamenom $x = c_1 y$ u $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{df}{f - xy}$ i sređivanjem, dobija se LDJ I reda

$$f' - \frac{1}{y} f = -c_1 y \ ,$$

čije opšte rešenje određuje drugi prvi integral

$$\frac{f + xy}{y} = c_2 \ .$$

Opšte rešenje date PDJ u obliku (6.2.10) je

$$\frac{f + xy}{y} = \psi\left(\frac{x}{y}\right) \ ,$$

tj.

$$f = -xy + y\,\psi\left(\frac{x}{y}\right) \ .$$

Zamenom zadatih uslova $y = \sqrt{x}$, $f = -x^2$, iz prethodnog rešenja sledi

$$-x^2 = -x\sqrt{x} + \sqrt{x}\ \psi\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)$$

i

$$\psi(\sqrt{x}) = \frac{-x^2 + x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}(-\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = x(1 - \sqrt{x}) \ ,$$

tj. $\psi(t) = t^2(1 - t)$. Traženo Cauchyevo rešenje je

$$f = -xy + y\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(1 - \frac{x}{y}\right) = -xy + (y - x)\frac{x^2}{y^2} \ .$$

(2°) Uočavamo da je data PDJ oblika (6.2.1) sa $G_{n+1} \equiv 0$, pa se radi o kvazilinearnoj PDJ po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y)$.

Sistem karakteristika (6.2.3) u ovom slučaju glasi

$$\frac{dx}{f(x + f)} = \frac{dy}{-y(y + f)} = \frac{df}{0} \ .$$

Kako je iz sistema $df = 0$, odmah nalazimo jedan prvi integral

$$f = c_1 \ .$$

Povratkom u sistem dobijamo DJ sa razdvojenim promenljivama

$$\frac{dx}{c_1(x+c_1)} = \frac{dy}{-y(y+c_1)} \ ,$$

čijim rešavanjem nalazimo i drugi prvi integral

$$\frac{y(x+f)}{y+f} = c_2 \ .$$

Opšte rešenje u obliku (6.2.10) je

$$f = \psi\left(\frac{y(x+f)}{y+f}\right) \ .$$

Zamenom $x = 1$, $y = f^2$ u prethodno opšte rešenje, jednostavno nalazimo $\psi(t) = t$, pa je traženo Cauchyevo rešenje

$$f = \frac{y(x+f)}{y+f}$$

i sređivanjem

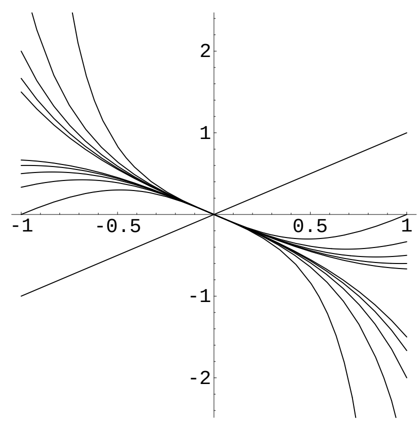
$$f^2 = xy \ .$$

PRILOG

Svi navedeni primeri, kao i zadaci za vežbu, testirani su u programskom paketu MATHEMATICA, verzija 5.0. Radi ilustracije, na sledećim slikama prezentujemo neke od dobijenih grafičkih prikaza za familije krivih, datih opštim rešenjima DJ i sistema DJ:

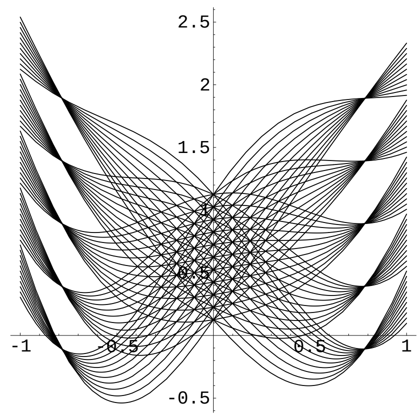
$y' = \big(x^3 + 2x^2y - y^3\big)/\big(x^3 + x^2y\big)$ iz Primera 2.2.1 na Slici 1,
$y'' + 4y = 2 + (8x - 1)\sin 2x$ iz Primera 3.3.3 na Slici 2,
$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ iz Primera 3.4.4 na Slici 3,
$y''' - 3y' + 2y = 0$ iz Primera 4.2.2 na Slici 4,
$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = x^2$ iz Primera 4.5.1 na Slici 5,
$y' = 8x + y - z,\ z' = 5y - z$ iz Primera 5.1.2 na Slici 6 i Slici 7.

Slika 1 se odnosi na familiju krivih generisanu jednom proizvoljnom konstantom.

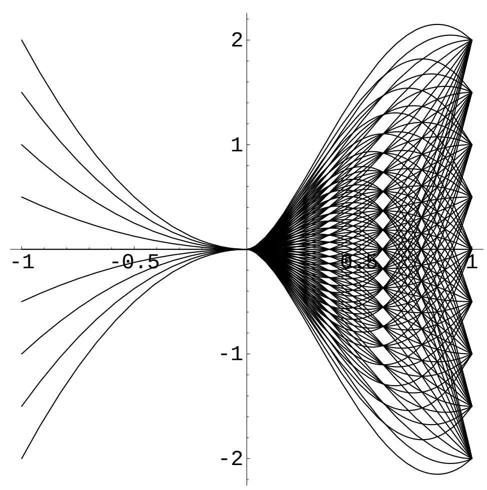


Slika 1. $y(x) = \dfrac{x(x^2 + c)}{x^2 - c}$

Slike 2 i 3 prikazuju familije krivih koje su generisane sa dve proizvoljne konstante.

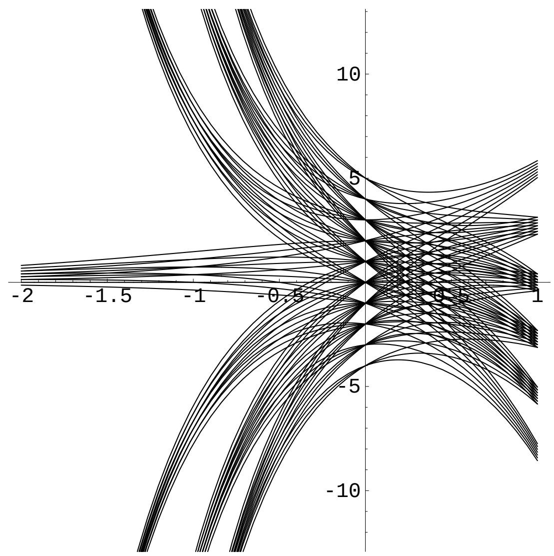


Slika 2. $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2} + x\left(\frac{1}{4} - x\right) \cos 2x + \frac{1}{2}\, x \sin 2x$

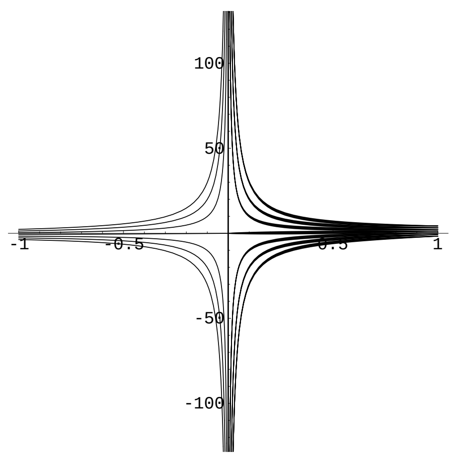


Slika 3. $y(x) = x^2(c_1 + c_2 \ln |x|)$

Slike 4 i 5 prikazuju familije krivih koje zavise od tri proizvoljne konstante.

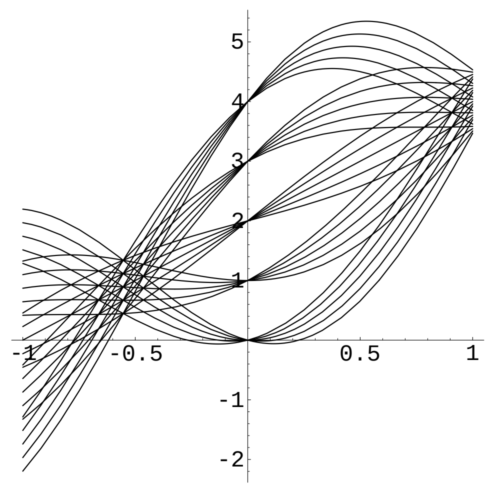


Slika 4. $y(x) = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x)e^x$

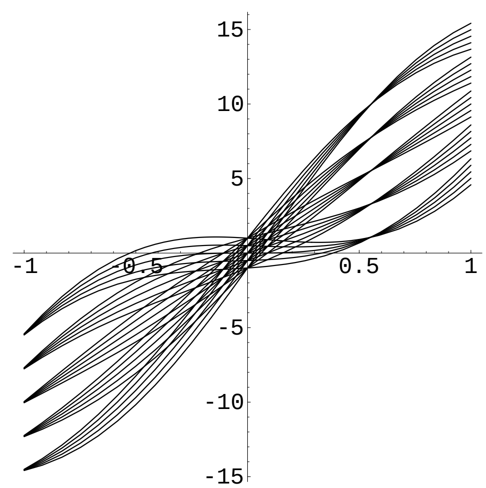


Slika 5. $y(x) = \dfrac{1}{3}\,x^2 + c_1 \dfrac{1}{x} + c_2 x + c_3 x \ln|x|$

Slike 6 i 7 se odnose na familije krivih koje zavise od dve proizvoljne konstante, a dobijene su kao rešenje sistema DJ.



Slika 6. $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x + 2$



Slika 7. $z(x) = (c_1 - 2c_2) \cos 2x + (2c_1 + c_2) \sin 2x + 10x$

LITERATURA

1. **S. Janković** : *Diferencijalne jednačine*, Prirodno–matematički fakultet u Nišu, Niš, 2002.
2. **S. Janković, J. Knežević–Miljanović** : *Diferencijalne jednačine II* (*Zadaci sa elementima teorije*), Matematički fakultet, Beograd, 2005.
3. **G. V. Milovanović** : *Numerička analiza, III deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.
4. **D. S. Mitrinović, J. D. Kečkić** : *Jednačine matematičke fizike*, Građevinska knjiga, Beograd, 1985.
5. **L. Stefanović, B. Ranđelović, M. Matejić** : *Teorija redova za studente tehničkih fakulteta*, Studentski kulturni centar Niš, Niš, 2006.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.9 (075.8)

СТЕФАНОВИЋ, Лидија
Diferencijalne jednačine: za studente tehničkih fakulteta / L. (Lidija) Stefanović, M. (Marjan) Matejić, S. (Slađana) Marinković. – 1. izd. – Niš: Studentski kulturni centar, 2006 (Niš: Petrograf). – VI, 151 str. : graf. prikazi; 25 cm

Tiraž 150. – Bibliografija: str. 151.

ISBN 86–7757–126–4

1. Матејић, Марјан 2. Маринковић, Слађана

а) Диференцијалне једначине
COBISS.SR–ID 132508428