Решења - А3 (И смер) - СЕПТ 1

1. (15 поена) Функција f дефинисана је са

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^4+2y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(а) Испитати непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\neq(0,0)$ непр као комп. непр

$(x,y)=(0,0)$?

$$0\leqslant|f(x,y)|=|x|\frac{y^2}{x^4+2y^2}=\frac{|x|}{2}\underbrace{\frac{2y^2}{x^4+2y^2}}_{\leqslant 1}\leqslant\frac{|x|}{2}\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0\quad\longrightarrow\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

$\Longrightarrow$ f непр у $(0,0)$

$\Longrightarrow$ f непр на $\mathbb{R}^2$

(б) Одредити парцијалне изводе функције f на $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2(-3x^4+2y^2)}{(x^4+2y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x^5y}{(x^4+2y^2)^2}$$

$(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0,\quad\text{слично}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

(в) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\neq(0,0)$ f диф (теорема: парцијални непр ...)

$(x,y)=(0,0)$?

$$f \text{ диф у } (0,0) \iff f(h,k)-\underbrace{f(0,0)}_{0}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0}h+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}k+o(h,k),\ (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff f(h,k)=o(h,k),\ (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff \frac{hk^2}{(h^4+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\xrightarrow{(h,k)\to(0,0)}0$$

$$(x_n,y_n)=\left(\frac1n,\frac1n\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$f(x_n,y_n)=\frac{\frac1n\cdot\frac1{n^2}}{\left(\frac1{n^4}+\frac2{n^2}\right)\sqrt{\frac1{n^2}+\frac1{n^2}}}=\frac{\frac1{n^3}}{\frac{1+2n^2}{n^4}\cdot\frac{\sqrt2}{n}}=\frac{n^5}{\sqrt2\,n^3+2\sqrt2\,n^5}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt2}\neq0$$

$\Rightarrow f$ није диф у $(0,0)$ $\Rightarrow f$ диф на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

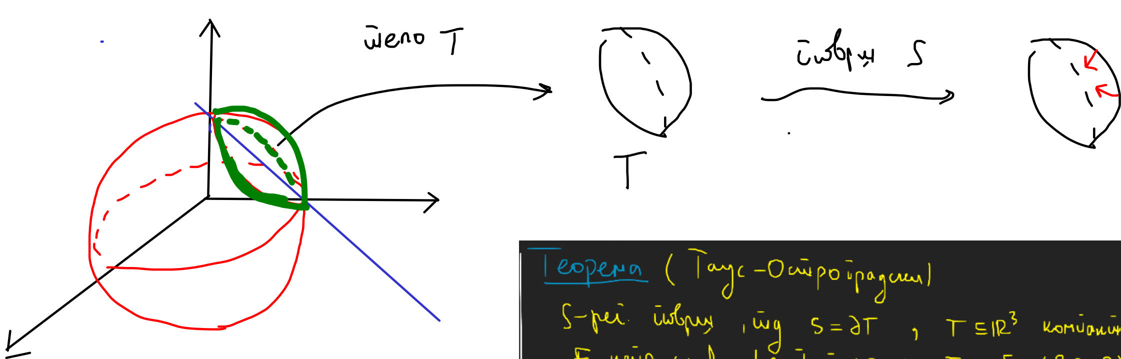
(г) Доказати $(x^4+2y^2)(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{3y}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = 2y^2 f(x,y)$.

за $(x,y)\neq(0,0)$ (јер за $(x,y)=(0,0)$ тривијално важи)

лева страна $= (x^4+2y^2)\left(x\cdot\frac{y^2(-3x^4+2y^2)}{(x^4+2y^2)^2}+\frac{3y}{2}\,\frac{2x^5y}{(x^4+2y^2)^2}\right) = \frac{-3x^5y^2+2xy^4+3x^5y^2}{x^4+2y^2} = \frac{2xy^4}{x^4+2y^2}$

десна страна $= 2y^2\frac{xy^2}{x^4+2y^2} = \frac{2xy^4}{x^4+2y^2}$ ✓

2. (15 поена) Дато је векторско поље $F(x,y,z)=(xz+2zy, y+\sin z, e^{\operatorname{arctg}(xy)}-z)$.
Израчунати $\iint\limits_S F\cdot dS$ где је S унутрашња страна површи која је граница тела $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1, z+y-1\geq 0\}$.



Теорема (Гаус-Остроградски)
S-рег. површ, тд $S=\partial T$, $T\subseteq\mathbb{R}^3$ компактан
F непр-диф. вект. поље на T, $F=(P,Q,R)$
Тада је: $\iint\limits_S F\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_T \operatorname{div}F\,dx\,dy\,dz$
при чему интегралимо по спољној страни површи S

$$\iint\limits_S F\cdot d\vec{S} = - \iiint\limits_T \operatorname{div}F\,dx\,dy\,dz = -\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz = -\iint\limits_D dx\,dy\left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\right) =$$

$$\left[\operatorname{div}F = \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z} = z+1-1 = z\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\iint\limits_D (1-x^2-y^2-(1-y)^2)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\iint\limits_D(1-x^2-y^2-1+2y-y^2)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\iint\limits_D(-x^2-2y^2+2y)\,dx\,dy = (*)$$

D пројекција у Oxy раван

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = 1-y \quad /^2 \longrightarrow 1-x^2-y^2 = 1-2y+y^2 \longrightarrow x^2+2y^2-2y=0$$

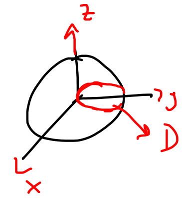
$x^2+2\left(y-2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0 \longrightarrow x^2+2\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=0$

$\longrightarrow x^2+\dfrac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ параметризација

$x = r\cos\varphi$

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\varphi$ $\qquad |J| = \frac{1}{\sqrt{2}} r$

$r\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\varphi\in[0,\pi]$



$$\circledast = \frac{1}{2}\iint_D x^2+y^2-2y\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \left(x^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)dxdy = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2-\frac{1}{2}\right) r\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(r^3-\frac{r}{2}\right)dr = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - r^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\frac{1}{4}}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1-8}{16}\right) = \boxed{-\frac{7\pi}{32\sqrt{2}}}$$

3. (15 поена) Дата је диференцијална једначина $y' = \dfrac{2x+y}{2x}, x > 0$.
(a) Одредити опште решење диференцијалне једначине.

II начин $y' - \frac{1}{2x}y = 1$ линеарна ...

$$y' = \frac{\frac{2x+y}{x}}{\frac{2x}{x}} \longrightarrow y' = \frac{2+\frac{y}{x}}{2}$$

Хомогена: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Смена: $z = \frac{y}{x} \longrightarrow y = zx \,/' \longrightarrow y' = z'x + z$

$$\longrightarrow z'x + z = \frac{2+z}{2} \longrightarrow z'x = \frac{2+z-2z}{2} \longrightarrow \frac{dz}{dx}x = \frac{2-z}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{dz}{2-z} = \frac{dx}{2x}$$

овде смо делили са $z-2$. На крају ћемо видети шта се дешава за $z=2$

$$\longrightarrow -\ln|z-2| = \frac{1}{2}\ln|x|$$

$$|z-2| = \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad C\in\mathbb{R}$$

$z>2 \longrightarrow z-2=\frac{c}{\sqrt{x}} \longrightarrow z=\frac{c}{\sqrt{x}}+2$

$z<2 \longrightarrow 2-z=\frac{c}{\sqrt{x}} \longrightarrow z=-\frac{c}{\sqrt{x}}+2$

$\longrightarrow z=\frac{c}{\sqrt{x}}+2, \ c\in\mathbb{R}$

можемо објединити

вратимо смену

$\longrightarrow \frac{y}{x}=\frac{c}{\sqrt{x}}+2 \longrightarrow \boxed{y=c\sqrt{x}+2x, \ c\in\mathbb{R}}$ (*)

$z=2$?

$z=2 \iff \frac{y}{x}=2 \longrightarrow y=2x$ Да ли је решење почетне?

$\left(2=\frac{4x}{2x}=2 \ \checkmark\right)$

Да ли се $y=2x$ може добити из (*) за неко $c\in\mathbb{R}$?

$\Longrightarrow$ може за $c=0$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ $\boxed{y=c\sqrt{x}+2x, \ c\in\mathbb{R}}$

(б) Одредити партикуларно решење које задовољава услов $y(1)=1$.

$1=y(1)=c\cdot\sqrt{1}+2 \longrightarrow 1=c+2 \longrightarrow c=-1$

Тражено партикуларно: $\boxed{y=2x-\sqrt{x}}$

4. (15 поена) Нека је $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ задата са $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy-5y+x$.

(а) Одредити локалне екстремуме функције f.

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l}2x-2y+1=0\\ 4y-2x-5=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}2x-2y=-1\\ -2x+4y=5\end{array}\right| + \quad 2y=4 \longrightarrow y=2$

$2x=-1+2y \longrightarrow x=-\frac{1}{2}+y$

$x=\frac{3}{2}$

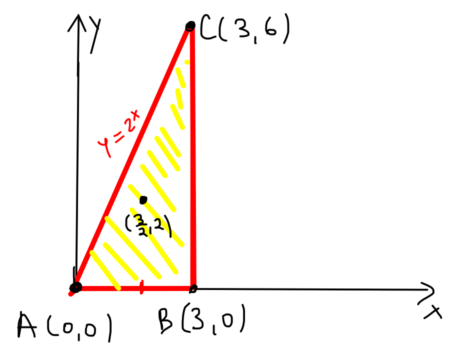
$\longrightarrow \left(\frac{3}{2},2\right)$ кандидат.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-2$

$D^2 f(x,y)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ $\quad A_1=2 \quad A_2=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=8-(-2)(-2)=8-4=4$

$A_1>0 \quad A_2>0 \xrightarrow{\text{Силвестер}}$ форма поз деф $\longrightarrow \left(\frac{3}{2},2\right)$ лок мин (б) Одредити највећу и најмању вредност функције на скупу $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 3, y \geq 0, y \leq 2x\}$.

Вајерштрас $\longrightarrow$ f достиже min и max на D



Кандидати $\longrightarrow$ int D због а) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

$\longrightarrow$ A, B, C $\}$ ∂D

$\longrightarrow$ AB, BC и CA

∂D: $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 5y + x.$

$$f\left(\tfrac{3}{2}, 2\right) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2\cdot 2^2 - 2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot 2 - 5\cdot 2 + \tfrac{3}{2}$$
$$= \tfrac{9}{4} + 8 - 6 - 10 + \tfrac{3}{2}$$
$$= \frac{9+6}{4} - 8 = \frac{15-32}{4} = -\frac{17}{4}$$

$$f(A) = 0, \quad f(B) = 9 + 3 = 12$$

$$f(C) = f(3,6) = 9 + 72 - 36 - 30 + 3 = 18$$

AB: $(t, 0)$, $0 < t < 3$

$g(t) = f(t, 0) = t^2 + t \longrightarrow g'(t) = 2t + 1 \Longrightarrow g'(t) = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \notin AB$

BC: $(3, t)$, $0 < t < 6$

$g(t) = f(3, t) = 9 + 2t^2 - 6t - 5t + 3 = 2t^2 - 11t + 12$

$g'(t) = 4t - 11 \longrightarrow g'(t) = 0 \iff t = \frac{11}{4}$

$\longrightarrow \left(3, \frac{11}{4}\right)$ $\quad \frac{11}{4} < 6$ ✓ $\quad \left(3, \frac{11}{4}\right) \in BC$ (кандидат)

$f\left(3, \frac{11}{4}\right) \overset{\dots}{=} -\frac{25}{8}$

CA: $(t, 2t)$, $t \in (0, 3)$

$g(t) = f(t, 2t) = t^2 + 8t^2 - 4t^2 - 10t + t = 5t^2 - 9t \longrightarrow g'(t) = 0 \longleftrightarrow t = \frac{9}{10}$

$f\left(\frac{9}{10}, \frac{18}{10}\right) \overset{\dots}{=} -\frac{81}{20}$

$f_{min} = -\frac{17}{4} \quad f_{max} = 18$

(в) Одредити $f(D)$ $\longrightarrow$ $f(D) = [f_{min}, f_{max}]$ (D повезан, f непр и кодомен $\mathbb{R}$)