Писмени испит из Анализе 3 за И смер **ЈУН 2 2021**

1. (15 поена) Дата је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{y^6+x^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(а) Испитати непрекидност функције f.

За $(x,y)\neq(0,0)$ непр као композиција непр.

$(x,y)=(0,0)$?

Т о 2 полицајца

$$0<\left|\frac{x^3}{y^6+x^2}\right|=|x|\underbrace{\frac{x^2}{y^6+x^2}}_{\leq 1}<|x|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \Rightarrow f \text{ непр у } (0,0)$$

$\Rightarrow f$ непр на $\mathbb{R}^2$

(б) Испитати диференцијабилност функције f.

$(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^6}{(x^2+y^6)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{6x^3y^5}{(x^2+y^6)^2}$$

непр на околини тачке $(x,y)\neq(0,0)$ $\xRightarrow{T}$ f диф на $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

T Ако f има парц. изводе у околини тачке $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, који су НЕПРЕКИДНИ у a $\Rightarrow$ ф-ја f је диференцијабилна у a.

$(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3}{h^3}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f \text{ диф у } (0,0) \iff f(h,k)-\underbrace{f(0,0)}_{=0}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=1}h+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0}k+o(h,k),\quad (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff \frac{h^3}{h^2+k^6}-h=o(h,k),\quad (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff \frac{h^3-h^3-hk^6}{h^2+k^6}=o(h,k),\quad (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff \frac{-hk^6}{h^2+k^6}=o(h,k),\quad (h,k)\to(0,0)$$

$$\iff \frac{-hk^6}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^6)}\xrightarrow{(h,k)\to(0,0)}0$$

ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ

$$\longrightarrow \lim_{\rho\to 0} -\frac{\rho^7\cos\varphi\sin^6\varphi}{\rho(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^6\sin^6\varphi)} = \lim_{\rho\to 0} -\frac{\rho^4\cos\varphi\sin^6\varphi}{\cos^2\varphi+\rho^4\sin^6\varphi} \cdots = 0$$

$\longrightarrow$ f диф на $\mathbb{R}^2$

(в) Одредити једначину тангенте на криву која се налази у пресеку графика функције $z = f(x,y)$ и функције $z = \frac{x^5}{2}$ у тачки $(1,1,\frac{1}{2})$. (ПОГЛЕДАТИ СЛИКУ 3.6. СА ВЕЖБИ !)

Крива чију тангенту тражимо лежи на обе површи!

Наћи ћемо тангентне равни обих површи и у њиховом пресеку се налази тражена тангента!

$$z = f(x,y) \longrightarrow \underbrace{z - \frac{x^3}{y^6+x^2}}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{x^4+3x^2y^6}{(x^2+y^6)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{6x^3y^5}{(x^2+y^6)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

вектор нормале у тачки $(1,1,\frac{1}{2})$ је $\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,\tfrac{1}{2})}_{-\frac{1+3}{(1+1)^2} = -1}, \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,\tfrac{1}{2})}_{\frac{6}{4} = \frac{3}{2}}, \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,\tfrac{1}{2})}_{1}\right)$

Ј-на тант. равни: $-1\cdot(x-1) + \frac{3}{2}(y-1) + 1\cdot(z-\frac{1}{2}) = 0 \quad /\cdot 2$

$$-2x + 2 + 3y - 3 + 2z - 1 = 0$$

$$\boxed{-2x + 3y + 2z - 2 = 0} \quad 1)$$

Још треба наћи тант. раван ф-је $z = \frac{x^5}{2}$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{z - \frac{x^5}{2}}_{F} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{5}{2}x^4 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

Ј-на тант. равни: $-\frac{5}{2}(x-1) + 0\cdot(y-1) + 1\cdot(z-\frac{1}{2}) = 0 \quad /\cdot 2$

$$-5x + 5 + 2z - 1 = 0$$

$$\boxed{-5x + 2z + 4 = 0} \quad 2)$$

У пресеку 1) и 2) се налази тражена тангента

из 2) $\longrightarrow$ $2z = 5x-4$ убацимо у 1) $\longrightarrow$ $-2x+3y+5x-4-2=0$

$\downarrow$

$z = \frac{5x-4}{2}$

$3x+3y-6=0$

$x+y=2 \longrightarrow y=2-x$

Ј-на тангенте: $x=t$, $y=2-t$, $z=\frac{5t-4}{2}$, $t\in\mathbb{R}$

---

2. (15 поена) Нека је $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ функција задата са: $f(x,y)=(x+y)e^{-x^2-y^2}$.

(а) Одредити локалне екстремуме функције f.

Кандидати $\longrightarrow$ стационарне тачке ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$ за које $\nabla f = (0,0)$)

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ''

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} + (x+y)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2-2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}(1-2y^2-2yx)$$

$\uparrow$ f симетрична по x и y

$$\nabla f=(0,0) \iff \begin{array}{l} e^{-x^2-y^2}(1-2x^2-2xy)=0 \\ e^{-x^2-y^2}(1-2y^2-2yx)=0\end{array} \quad /:e^{-x^2-y^2} \iff \left.\begin{array}{l} 2xy = 1-2x^2 \\ 2xy = 1-2y^2\end{array}\right\} \; x^2=y^2$$

1° $x=y$ вратимо у 1° $\longrightarrow$ $2x^2=1-2x^2 \longrightarrow x^2=\frac{1}{4} \longrightarrow x_1=\frac{1}{2} \;\vee\; x_2=-\frac{1}{2}$

$\longrightarrow$ $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $M_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

2° $x=-y$ $\longrightarrow$ $-2x^2=1-2x^2$ $\lightning$ Значи овај случај отпада

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x^2-y^2}(4x^3+4x^2y-6x-2y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}\left(4\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}-6\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-x^2-y^2}(4y^3+4xy^2-6y-2x) \qquad = -3e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = e^{-x^2-y^2}(-2x+4yx(x+y)-2y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}(-1+1\cdot1-1) = -e^{-\frac{1}{2}}$$

$$D^2 f(M_1) = \begin{bmatrix} f''_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & f''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ f''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & f''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-\frac{1}{2}} & -e^{-\frac{1}{2}} \\ -e^{-\frac{1}{2}} & -3e^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}$$

Гледамо миноре!

$\longrightarrow \quad A_2 = \begin{vmatrix} -3e^{-\frac12} & -e^{-\frac12} \\ -e^{-\frac12} & -3e^{-\frac12}\end{vmatrix} = 9e^{-1} - e^{-1} = \frac{8}{e} > 0$

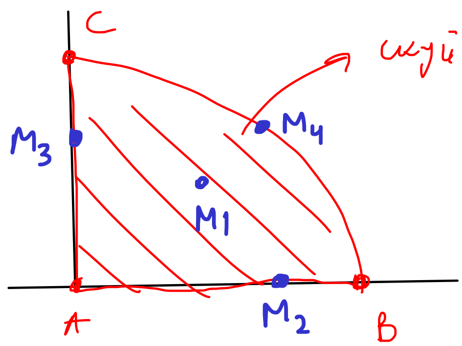
$A_1 = -3e^{-\frac12} < 0$

Силвестер

$\Rightarrow$ Придружена форма је нег дефинитна $\overset{T}{\Longrightarrow}$ $M_1(\frac12,\frac12)$ тачка локалног максимума

Аналогно: $M_2(-\frac12,-\frac12)$ тачка лок минимума

(б) Одредити најмању и највећу вредност функције f на скупу $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$. $=: T$



T затворен, огр $\Rightarrow$ T компактан.

Вајерштрас $\Rightarrow$ f достиже min/max на T

испитујемо Int T и ∂T и A, B, C

Int T $\xrightarrow{a)}$ $\boxed{M_1}$; $\partial T \to$ AB, AC, $\overset{\frown}{BC}$

$f(M_1) = 1\cdot e^{-\frac12}$

AB: $(t,0)$, $0<t<1$

$g(t) = f(t,0) = te^{-t^2} \xrightarrow[g']{\cdots} t = \frac{\sqrt2}{2} \longrightarrow M_2(\frac{\sqrt2}{2},0)\in AB$

AC: слично $\longrightarrow M_3(0,\frac{\sqrt2}{2}) \in AC$

— $f(M_2)=f(M_3) = \frac{\sqrt2}{2}e^{-\frac12}$

$\overset{\frown}{BC}$: $(t,\sqrt{1-t^2})$, $0<t<1$

$g(t) = f(t,\sqrt{1-t^2}) = (t+\sqrt{1-t^2})e^{\overbrace{-t^2-(\sqrt{1-t^2})^2}^{e^{-1}}} = \frac1e(t+\sqrt{1-t^2})$

$g'(t) = \frac1e\left(1+\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac1e\left(\frac{\sqrt{1-t^2}-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \longrightarrow g'(t)=0 \iff t=\sqrt{1-t^2} \;/^2$

$2t^2=1 \xrightarrow{t\ge 0} t=\frac{\sqrt2}{2}$

$\longrightarrow M_4(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})\in\overset{\frown}{BC}$ $\quad f(M_4) = \left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)e^{-\frac12-\frac12} = \sqrt2 e^{-1} < f(M_1)$

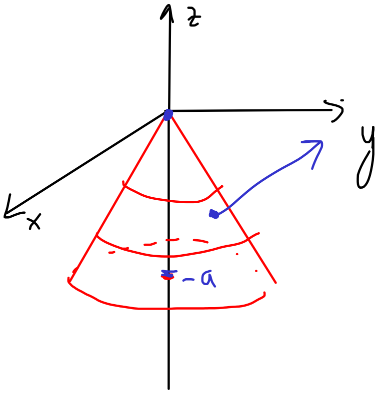
$f(A)=0$, $f(B)=1\cdot e^{-1}=f(C) < f(M_1)$

$\longrightarrow \boxed{f_{min}=f(A)=0}$, $\boxed{f_{max}=f(M_1)=\frac{1}{\sqrt e}}$

---

3. (15 поена) Нека је површ Π спољашња страна дела конуса $z^2=x^2+y^2$ између равни $z=-a$ и $z=0$, за неко $a\ge 0$. Израчунати површински интеграл:

$$\underbrace{\iint_\Pi x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy.}_{=:\,I}$$



Вектор нормале показује споља

$$z^2 = x^2+y^2 \longrightarrow z = \pm\sqrt{x^2-y^2}$$

Параметризујемо површ као график ф-је $\quad z = z(x,y)$

$z: D \to \mathbb{R}$

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$$

$$\longrightarrow r(x,y) = (x, y, z(x,y)), \quad (x,y)\in D$$

Ако је S график неке ф-је $z = z(x,y)$

тада је једна параметризација: $r(x,y) = (x,y,z(x,y))$

и имамо $r'_x = (1,0,z'_x)$, $r'_y = (0,1,z'_y)$

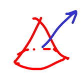
$$r'_x \times r'_y = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = \vec i \begin{vmatrix} 0 & z'_x \\ 1 & z'_y \end{vmatrix} - \vec j \begin{vmatrix} 1 & z'_x \\ 0 & z'_y \end{vmatrix} + \vec k \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec i \cdot (-z'_x) + \vec j(-z'_y) + \vec k \cdot 1$$

$$= (-z'_x, -z'_y, 1)$$

$$r'_x \times r'_y = (-z'_x, -z'_y, \boxed{1})$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$$

Параметризација је САГЛАСНА (Показује споља!)



Рачунамо користећи:

Теорема: $r: D \to \mathbb{R}^3$ рег. параметризација површи S

S глатка и оријентисана сагласно са параметр. и F в. поље на S

Тада је: $\displaystyle\iint_S F \cdot d\vec S = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r'_u \times r'_v)\, du\, dv$

$$F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$$

$$I = \iint_D \underbrace{F\left(x, y, -\sqrt{x^2+y^2}\right)}_{(x^2,\, y^2,\, x^2+y^2)} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2+y^2 \right) dx\,dy = \left| \begin{matrix} x = r\cos\theta & \theta \in [-\pi, \pi] \\ y = r\sin\theta & r \in [0, a] \\ |J| = r & \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \left(r^2 \cos^3\theta + r^2 \sin^3\theta + r^2 \right) \overset{|J|}{r}\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^3\theta + \sin^3\theta + 1) \left(\int_0^a r^3\, dr \right) d\theta = \frac{a^4}{4} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^3\theta + \sin^3\theta)\, d\theta}_{=0\ \ldots} + \frac{a^4}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4} \cdot 2\pi = \boxed{\frac{a^4 \pi}{2}}$$

II начин $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Гаус Остроградски}}$ $\longrightarrow$ Пробајте за вежбу!

---

4. (15 поена) Израчунати троструки интеграл:

$$\iiint_T x\,dx\,dy\,dz, =: I$$

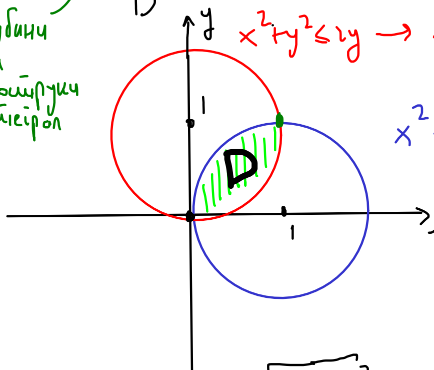
где је тело T дато са: $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2 + y^2 \le 2x,\ x^2 + y^2 \le 2y,\ 0 \le z \le y\}$.

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x,\ x^2+y^2 \le 2y\}$$

$$I = \iint_D x \left(\int_0^y dz \right) dx\,dy = \iint_D xy\,dx\,dy = (*)$$

Фубини за троструки интеграл

$$x^2+y^2 \le 2y \longrightarrow x^2+(y-1)^2 \le 1$$



$$x^2+y^2 \le 2x \longrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$$

$y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ доњи део црвене кружнице

$y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ горњи део плаве

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 1-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{2x-x^2}\}$$

$$(*) = \int_0^1 x \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[2x-x^2-\left(1-2\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^2 - \cancel{x^3} - x + 2x\sqrt{1-x^2} - x + \cancel{x^3}\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{-2x}_{d(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$