Математички факултет у Београду
Асистент: Михаило Крстић
mihailo_krstic@matf.bg.ac.rs

1 ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

1.1 Уводни задаци

1. Нека су дати вектори $x = (x_1, 0, 0)$, $y = (y_1, y_2, 0)$ и $z = (z_1, z_2, z_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$. Уколико су ови вектори линеарно зависни одредити $x_1 \cdot y_2 \cdot z_3$.

2. Нека је $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ и нека су $u, v \in \mathbb{R}^n$ линеарно независни вектори. Ако је $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ инвертибилна матрица доказати да су тада вектори Au и Av линеарно независни.

Решење. Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ произвољни скалари такви да важи $\alpha Au + \beta Av = \mathbf{0}$[1]. Потребно је показати да је $\alpha = \beta = 0$. Одавде следи, на основу хомогености матрице A, да важи $A(\alpha u) + A(\beta v) = \mathbf{0}$. Сада, на основу адитвности, имамо да је $A(\alpha u + \beta v) = \mathbf{0}$. Остало је још да искористимо услов задатка да је матрица A инвертибилна. Овај услов нам говори да је матрица A, посматана као пресликавање, бијективна па самим тим и 1-1 пресликавање[2]. Одавде следи да мора бити $\alpha u + \beta v = \mathbf{0}$. Како су вектори u и v линеарно независни, на основу дефиниције линеарне независности, имамо да је $\alpha = \beta = 0$ што је и требало показати.

3. За које вредности $a \in \mathbb{R}$ скуп вектора

$$\mathcal{B}_a = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

представља базу[3] простора $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такве да важи $AB = I_n$. Тада важи $BA = I_n$. Доказати.

Решење. Можемо да закључимо најпре

$$AB = I_n \implies \dim \mathcal{R}(AB) = \dim \mathcal{R}(I_n) \overset{\mathsf{def}}{=} \dim \left\{ I_n x \mid x \in \mathbb{R}^n \right\} = \dim \left(\mathbb{R}^n\right) = n.$$

Како је $\mathcal{R}(AB)$ подпростор[4] коначно-димензионалног простора $\mathbb{R}^n$ и има исту димензију имамо да је $\mathcal{R}(AB) = \mathbb{R}^n$. Како је

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A) \subset \mathbb{R}^n \implies \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AB) = \mathbb{R}^n.$$

Докажимо да мора бити и $\mathcal{R}(B) = \mathbb{R}^n$. Уколико би било $\dim \mathcal{R}(B) < n \implies n = \dim \mathcal{R}(AB) < n$ јер је $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Дакле, добили смо да је $n < n$ што је контрадикција, те наша претпоставка није добра па мора бити (како је $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ подпростор) $\dim \mathcal{R}(B) = n$ а сада користећи опет да $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ подпростор, који има исту димензију као цео простор, имамо да је $\mathcal{R}(B) = \mathbb{R}^n$. Како је

$$B = BI = B(AB) = (BA)B \implies (I - BA)B = \mathbb{O}_n.$$

Докажимо да мора бити $I - BA = \mathbb{O}_n$. Нека је $y \in \mathbb{R}^n$ произвољно. Како је $\mathcal{R}(B) = \mathbb{R}^n$ постоји $x \in \mathbb{R}^n$такво да је

$$y = Bx \implies (I - BA)y = (I - BA)Bx = \Big(\underbrace{(I - BA)B}_{= \mathbb{O}_n}\Big)x = \mathbf{0}.$$

Како је y било произвољно из $\mathbb{R}^n$ имамо да је $I - BA = \mathbb{O}_n$ што је и требало показати.

[1] Са $\mathbf{0}_n$ ћемо означавати нулу (неутрал тј. неутрални елемент у односу на адитивну операцију +) векторских простора $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ (или само са $\mathbf{0}$, уколико је јасно која је димензија посматраног простора), односно n-торку $(\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n})$.

[2] Може се показати да је на скупу свих квадратних матрица истог формата, чији су елементи реални или комплексни бројеви, инвертибилност матрице еквивалентна са тим да је матрица 1-1 пресликавање или са тим да је матрица пресликавање на. Ако не иде, јавити се на консултације.

[3] Скуп представља базу векторског простора ако су вектори из тог скупа линеарно независни и уколико је тај скуп потпун. Скуп је потпун уколико се произвољан вектор векторског простора може приказати као нека линеарна комбинација вектора из тог скупа. На пример, у простору $\mathbb{R}^2$ скуп вектора $\{(1,0),(0,1)\}$ представља базни скуп јер се било који вектор $x \in \mathbb{R}^2$ може написати као $x = \alpha \cdot (1,0) + \beta \cdot (0,1)$ за неке скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Векторски простор може имати више различитих базних скупова. Доказује се да сви базни скупови имају једнак број елемената.

[4] Нека је $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Тада је $\mathcal{R}(A) \overset{\mathsf{def}}{=} \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^m\}$. Лако је показати да је овај скуп подпростор у $\mathbb{R}^n$. Овај скуп се назива и слика матрице A и један је од битнијих простора везаних за матрицу A, односно за опеатор у општем случају.

5. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такве да је матрица
$$I_n - AB$$
инвертибилна. Доказати да је тада и матрица
$$I_n - BA$$
инвертибилна.

Решење. Претпоставимо супротно, да матрица $I_n - BA$ није инвертибилна. То значи да постоји $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ такво да је $(I_n - BA)u = \mathbf{0}$. Ово је очигледно јер уколико хомоген систем има сингуларну матрицу система то значи да постоји његово нетривијално решење. Имамо да за вектор u важи $\mathbf{0} = I_n u - BAu = u - BAu$ односно $u = BAu$. Не може бити $Au = \mathbf{0}$ јер уколико би то био случај онда би имали да је $u = B(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ што је немогуће. Делујмо матрицом $I_n - AB$ на вектор Au. Имамо да важи
$$\big(I_n - AB\big)(Au) = I_n Au - ABAu = I_n Au - A\big(\underbrace{BAu}_{=u}\big) = Au - Au = \mathbf{0}.$$
Ово није могуће јер је матрица $I_n - AB$ по услову задатка инвертибилна те не може сликати ни један други вектор осим нула ветора у нулу вектор. Дакле, наша претпоставка је погрешна те закључујемо да је матрица $I_n - BA$ такође инвертибилна.

Напомена 1. Приметимо да важи
$$(I_n - BA)(I_n + \underbrace{(I_n - AB)^{-1}}_{\text{постоји по услову задатка}} A) = I_n \Longrightarrow (I - BA)^{-1} = I_n + (I - AB)^{-1}A.$$

6. (а) По дефиницији израчунати детерминанте
$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(б) Нека је
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Израчунати A^{-1} користећи формулу $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$.

(в) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Доказати неједнакост
$$\det\Big(I_n + A^2\Big) \geqslant 0.$$

Решење. (а) Наведимо најпре дефиницију детерминанте. Нека је дата матрица
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \ n \in \mathbb{N}.$$
Дефинишемо
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\operatorname{inv}(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$
где је $\mathcal{S}_n$ скуп свих пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ а $\operatorname{inv}(p)$ број инверзија који прави конкретна пермутација $p \in \mathcal{S}_n$. Број сабирака у суми на десној страни једнакости (1) је $n!$. Ради потпуности, напоменимо да су пермутације у ствари бијективне функције из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ у себе самог. Сада можемо израчунати D_1. У овом случају је $n = 2$ и $\mathcal{S}_2 = \left\{ \binom{1\ 2}{1\ 2}, \binom{1\ 2}{2\ 1} \right\}$. Ознака $\binom{1\ 2}{2\ 1}$ представља функцију односно пермутацију $q : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ која је дефинисана са $q(1) = 2$ и $q(2) = 1$. Инверзија се рачуна тако што гледамо сваки број у пермутацији од колико бројева је већи

који долазе после њега. Те све бројеве саберемо и добијамо број инверзија коју прави нека конкретна пермутација. Када су нам познати сви термини и како се они користе лако израчунавамо вредност детерминанте по дефиницији. За матрицу D_1 имамо

$$\det D_1 = (-1)^{\text{inv}(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} + (-1)^{\text{inv}(q)} a_{1q(1)} a_{2q(2)}, \tag{2}$$

где је $p = \binom{1\ 2}{1\ 2}$ и $q = \binom{1\ 2}{2\ 1}$ а $\text{inv}(p) = 0$ и $\text{inv}(q) = 1$. Имамо да једнакост (2) постаје

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Израчунајмо сада детерминанту D_2. У овом случају је $n = 3$ и

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=p_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{=p_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=p_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=p_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=p_5}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=p_6} \right\}.$$

Лако одређујемо и број инверзија за сваку пермутацију $p_i,\ i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Имамо да је $\text{inv}(p_1) = 0$, $\text{inv}(p_2) = 1$, $\text{inv}(p_3) = 1$, $\text{inv}(p_4) = 2$, $\text{inv}(p_5) = 2$ и $\text{inv}(p_6) = 3$. Сада, користећи дефиницију (1), израчунавамо лако да је $\det D_2 = 4$.
(б) На основу претходног дела под (а) имамо да је $\det A = 4 \neq 0$ те имамо да је матрица A инвертибилна, односно постоји $A^{-1} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Израчунавамо сада матрицу $\text{adj}A$, која је дата са

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T.$$

Напоменимо само да је правило (теорема!) по коме уписујемо елементе у матрицу $\left(\text{adj}A\right)^T$ то да на позицију (i,j) долази елемент:

$$(-1)^{i+j} \cdot (\text{"детерминанта која се добија избацивањем } i\text{-те врсте и } j\text{-те колоне"}).$$

Све детерминанте које се јављају у матрици $\text{adj}A$ израчунавамо помоћу дела под (а) односно корисетећи се изразом за детерминанту D_1 тако да добијамо да је

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -(-6) & -3 \\ -2 & -8 & -(-6) \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & -8 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{6}{4} & -\frac{8}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(в) Имамо да важи

$$I_n + A^2 = (I_n + i \cdot A)(I_n - i \cdot A).$$

Сада, користећи Коши-Бинеову теорему[5], добијамо да је

$$\det\left(I_n + A^2\right) = \det\Big(\big(I_n + i \cdot A\big)\big(I_n - i \cdot A\big)\Big) = \det\big(I_n + i \cdot A\big) \cdot \det\big(I_n - i \cdot A\big). \tag{3}$$

Дефинишимо операцију коњуговања матрица са $\overline{\left[a_{ij}\right]}_{i,j=\overline{1,n}} \overset{\text{def}}{=} \left[\overline{a_{ij}}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$. Како је матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имамо да је

$$\det\big(I_n - i \cdot A\big) = \det\big(\overline{I_n} - i \cdot \overline{A}\big) = \det\big(\overline{I_n + i \cdot A}\big). \tag{4}$$

Како операција коњуговања пролази кроз коначне збирове и производе бројева из скупа $\mathbb{C}$ добијамо, на основу дефиниције (1), да важи

$$\det\big(\overline{I_n + i \cdot A}\big) = \overline{\det\big(I_n + i \cdot A\big)}. \tag{5}$$

[5]Теорема Коши-Бинеа тврди да за квадратне матрице A и B истог формата са реалним или комплексним елементима важи $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Сада, из (3), (4) и (5) добијамо да је

$$\det\Big(I_n + A^2\Big) = \underbrace{\det\Big(I_n + i\cdot A\Big)\cdot\overline{\det\Big(I_n + i\cdot A\Big)}}_{\text{Овде користимо једнакост } (\forall x\in\mathbb{C})\ x\overline{x} = |x|^2} = \Big|\det\Big(I_n + i\cdot A\Big)\Big|^2 \geqslant 0,$$

што је и требало показати.

Напомена 2. Уколико пажљивије погледамо дефиницију (1), примећујемо да се за произвољну пермутацију $p \in \mathcal{S}_n$ њој одговарајући сабирак формира тако што се из сваке врсте и сваке колоне изабере (у зависности од p наравно) тачно један елемент. Овакво гледање на дефиницију детерминанте може знатно помоћи код израчунавања неких детерминанти.

7. Да ли постоји матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ тако да је

$$AA^T = \begin{bmatrix} 25 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\ ?$$

Решење. Претпоставимо да постоји матрица са траженим условима. Тада мора бити $\det A \in \mathbb{R}$ јер је по услову задатка матрица са реалним елементима. На основу Коши-Бинеове теореме имамо да је

$$\det\big(A\big)\cdot\det\big(A^T\big) = \det\big(AA^T\big) = \det\left(\begin{bmatrix} 25 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\right) = 25\cdot 1 - 6\cdot 6 = -11 < 0.$$

Како је $\det A = \det A^T$ (ово важи за сваку квадратну матрицу) имамо да је

$$\big(\det A\big)^2 = -11$$

што је немогуће јер је квадрат сваког реалног броја ненегативан. Дакле, како смо добили контрадикцију, претпоставка није могућа те следи да матрица са захтеваним својствима не постоји.

8. Нека је дат број $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ за који је $a^3 = 1$. Израчунати вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

Решење. Једначина $x^3 = 1$ има у скупу $\mathbb{C}$ тачно три различита решења. Једно је реално и то је број 1. Остала два су комплексна која нису реална и једно од тих решења је по услову задатка означено са a. Сада лако рачунамо (уз услов $a \neq 1$) да је

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = \cdots = a^2 + a - 2 = (a^2 + a + 1) - 3 = \frac{a^3 - 1}{a - 1} - 3 = 0 - 3 = -3.$$

9. Нека је $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ таква да важи $\mathrm{tr}A = 3$ и $\mathrm{tr}\big(A^2\big) = 5$. Доказати да је A регуларна матрица.

Решење. О инвертибилности матрице казује њена детерминанта, те покушајмо да је одредимо. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix},\ x, y, r, s \in \mathbb{C}.$$

Тада је

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + yr & xy + ys \\ rx + rs & ry + s^2 \end{bmatrix}.$$

На основу услова задатка имамо да је $x + s = 3$ и $(x^2 + yr) + (ry + s^2) = 5$. Када квадрирамо прву једнакост и укомбинујемо је са другом имамо да важи $5 - 2yr = 9 - 2xs$ односно $2xs - 2yr = 4$. Последња једнакост је еквивалентна са $xs - yr = 2$. Израз $xs - yr$ представља детерминанту матрице A. Дакле, $\det A = 2 \neq 0$ што је еквивалентно са тим да је матрица A регуларна.

10. Нека су

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

У скупу $\mathbb{R}^{3\times3}$ решити једначину

$$\left(AX^{-1}\right)^T = \left(B^T X^T\right)^{-1} + C^{-1}.$$

11. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такве да је матрица $A+B$ инвертибилна. Доказати једнакост

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

Решење. Имамо

$$(A+B)(A+B)^{-1}B = I_nB = B \implies A(A+B)^{-1}B + B(A+B)^{-1}B = B \tag{6}$$

$$B(A+B)^{-1}(A+B) = BI_n = B \implies B(A+B)^{-1}A + B(A+B)^{-1}B = B. \tag{7}$$

Одузимајући једнакости (6) и (7) имамо да је

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

12. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такве да важи

$$A + B + AB = \mathbb{O}_n.$$

Доказати да матрице A и B комутирају.

Решење. Како је $(A+I_n)(B+I_n) = \underbrace{AB+A+B}_{=A+B+AB=\mathbb{O}_n} + I_n = I_n$ имамо следећи низ импликација $(A+I_n)(B+I_n) = I_n \xrightarrow{\text{Задатак 4}} (B+I_n)(A+I_n) = I_n \implies BA+B+A+I_n = I_n \implies BA+B+A = \underbrace{\mathbb{O}_n = A+B+AB}_{\text{Ово је услов задатка}} \implies BA+B+A = A+B+AB \implies AB = BA.$

13. (а) Нека су дати бројеви $n, m \in \mathbb{N}$ и матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Доказати да важи једнакост

$$\operatorname{tr}\bigl(AB\bigr) = \operatorname{tr}\bigl(BA\bigr).$$

(б) Нека је $n \in \mathbb{N}$. Да ли постоје матрице $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ које задовољавају једнакост

$$AB - BA = I_n\,?$$

Решење. (а) Нека је $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1:n\\ j=1:m}}$, $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1:m\\ j=1:n}}$, $\mathbb{C}^{n\times n} \ni AB = [r_{ij}]_{\substack{i=1:n\\ j=1:n}}$ и $\mathbb{C}^{m\times m} \ni BA = [s_{ij}]_{\substack{i=1:m\\ j=1:m}}$. На основу дефиниција множења матрица имамо да је

$$\operatorname{tr}\bigl(AB\bigr) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} r_{ii} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right)}_{\text{Зашто смемо да заменимо места сумама?}} = \sum_{k=1}^{m} s_{kk} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \operatorname{tr}\bigl(BA\bigr).$$

(б) Матрице са захтеваним условима не постоје. Заиста, ако би постојале, на основу дела под (а) ће следити

$$0 = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I_n) = n.$$

Последње је немогуће јер је $n \geqslant 1$.

14. Нека је матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ таква да комутира са дијагоналном матрицом $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, за коју важи $d_i \neq d_j$ кад год је $i \neq j$. Доказати да је A дијагонална матрица.

15. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Да ли постоји матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ таква да важи

$$A^3 = I_n + A\ ?$$

Решење. Приметимо да за $n = 1$ проблем сводимо на питање да ли једначина $a^3 = 1 + a$ има реалних решења. Покушајмо да за свако $n \in \mathbb{N}$ проблем сведемо на испитивање да ли постоје реална решења ове једначине. Потражимо матрицу A у неком специјалном облику, на пример $A = a \cdot I_n,\ a \in \mathbb{R}$. Замењујући ову матрицу у полазну матричну једначину видимо да смо проблем свели заиста на испитивање природе решења једначине $a^3 = 1+a$, а ово је задатак онда из Математике 1. Подсетимо се[6] да полином трећег степена са реалним коефицијентима или има све три нуле које су реалне или има две комплексно коњуговане нуле и једну реалну нулу. Одавде следи постојање матрице са реалним елементима која је решење једначине $A^3 = I_n + A$.

1.2 Крамерова теорема и линеарни системи

16. Нека је дат систем $Ax = b$ где је A произвољна (не обавезно квадратна) матрица и нека је x_0 једно решење овог система. Означимо са $\mathcal{S}(A, b)$ скуп решења овог система и $\mathcal{S}(A, \mathbf{0})$ скуп решења хомогеног система. Доказати да важи једнакост

$$\mathcal{S}(A, b) = \Big\{x_0 + a \ \Big|\ a \in \mathcal{S}(A, \mathbf{0})\Big\}.$$

Решење. Задатак решавамо из два дела. Најпре показујемо да је

$$\mathcal{S}(A, b) \subseteq \Big\{x_0 + a \ \Big|\ a \in \mathcal{S}(A, \mathbf{0})\Big\}. \tag{8}$$

Нека је $x \in \mathcal{S}(A, b)$ произвиљно. На основу дефиниције скупа $\mathcal{S}(A, b)$ имамо да је $Ax = b$. Напишимо елемент x као $x = x_0 + (x - x_0)$. Да би $x \in \Big\{x_0 + a \ \Big|\ a \in \mathcal{S}(A, \mathbf{0})\Big\}$ потребно је да важи $A(x - x_0) = \mathbf{0}$. Из линеарности матрице A имамо да је $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = \mathbf{0}$, одакле закључујемо да важи релација (8). Докажимо сада да је

$$\mathcal{S}(A, b) \supseteq \Big\{x_0 + a \ \Big|\ a \in \mathcal{S}(A, \mathbf{0})\Big\}. \tag{9}$$

Због тога, бирамо $x \in \Big\{x_0 + a \ \Big|\ a \in \mathcal{S}(A, \mathbf{0})\Big\}$ произвољно. То значи да постоји $a \in \mathcal{S}(A, \mathbf{0})$ тако да је $x = x_0 + a$ (вектор a зависи од x те је правилније писати a_x али да не компликујемо). Сада, на основу адитивности матрице A, имамо

$$Ax = A(x_0 + a) = Ax_0 + Aa = b + \mathbf{0} = b.$$

Дакле, $x \in \mathcal{S}(A, b)$ те важи и релација (9). Сада, на основу (8), (9) и антисиментричности скуповне релације $\subseteq$ имамо тврђење задатка.

17. У зависности од $a \in \mathbb{R}$, користећи Крамерову теорему[7], решити систем једначина

$$\begin{aligned} a\cdot x + \quad y + \quad z &= 1\\ x + a\cdot y + \quad z &= a\\ x + \quad y + a\cdot z &= a^2. \end{aligned}$$

Решење. Израчунајмо најпре детерминанту система Δ. Имамо (можемо користити Сарусово правило јер је детерминанта трећег реда) да је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - 3a + a^3 = (a-1)^2(2+a).$$

Уколико је $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$ тада по Крамеровој теореми систем има јединствено решење и оно је дато формулама

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & a & 1\\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(2+a)} = \frac{-1 + a + a^2 - a^3}{(a-1)^2(2+a)} = \frac{-(1+a)(a-1)^2}{(a-1)^2(2+a)} = -\frac{1+a}{2+a},$$

[6] Ово је лако видети уколико приметимо да код сваком полинома $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ важи да уколико је $x_0 \in \mathbb{C}$ такво да је $p(x_0) = 0$ тада је и $p(\overline{x_0}) = 0$.

[7] Крамерова теорема тврди да линеарни системи чија је детерминанта различита од нуле имају јединствено решење. Заиста, из линеарности детерминанте система по колонама следи да уколико систем има решења она морају задовољавати $x_i \cdot \Delta = \Delta_i$ за свако $i = \overline{1, n}$ где је n димензија система. Можемо такође приметити следећу битну ствар за задатке. Ако постоји $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такво да је $\Delta_{i_0} \neq 0$ а $\Delta = 0$ тада систем нема решења. Уколико је $\Delta = 0$ и уколико је $\Delta_i = 0$ за свако $i = \overline{1, n}$ не можемо закључити да систем има бесконачно много решења. Заиста, уколико посматрамо систем $x + y + z = 1,\ x + y + z = 2,\ x + y + z = 3$ имамо да је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Са друге стране је очигледно да овај систем нема решења.

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & a^2 & a\end{vmatrix}}{(a-1)^2(2+a)}=\frac{1-2a+a^2}{(a-1)^2(2+a)}=\frac{(1-a)^2}{(a-1)^2(2+a)}=\frac{1}{2+a},$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & a\\ 1 & 1 & a^2\end{vmatrix}}{(a-1)^2(2+a)}=\frac{1-2a^2+a^4}{(a-1)^2(2+a)}=\frac{(1-a^2)^2}{(a-1)^2(2+a)}=\frac{(1+a)^2}{2+a}.$$

Дакле, решење система у случају $a\in\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$ је

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1+a}{2+a},\frac{1}{2+a},-\frac{(1+a)^2}{2+a}\right)\in\mathbb{R}^3.$$

Нека је сада $a=-2$. Заменом у систем добијамо

$$\begin{aligned} -2\cdot x+\quad y+\quad z&=1\\ x-2\cdot y+\quad z&=-2\\ x+\quad y-2\cdot z&=4.\end{aligned}$$

Сабирајући све једначине система добијамо $0=3$ одакле закључујемо да у овом случају систем нема решења јер сабирање једначина система можемо да урадимо уколико постоји барем једна тројка (x,y,z) која задовољава систем а онда у том случају добијамо контрадикцију из $0=3$. Нека је сада $a=1$. Добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+y+z&=1\\ x+y+z&=1.\end{aligned}$$

Очигледно је да овај систем има бесконачно много решења. Сва она су описана скупом

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y,1-x-y)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

18. За бројеве a, b, $c\in\mathbb{R}$ систем

$$\begin{aligned} b\cdot x+a\cdot y\qquad\quad &=c\\ c\cdot x\qquad\quad +a\cdot z&=b\\ c\cdot y+b\cdot z&=a.\end{aligned}$$

има јединствено решење. Доказати да је $abc\neq 0$ и решити систем.

Решење. По услову задатка овај систем има јединствено решење што је еквивалентно (по Крамеовој теореми) са тим да је детерминанта система различита од 0. Дакле (користећи на пример Сарусово правило) имамо

$$0\neq\begin{vmatrix} b & a & 0\\ c & 0 & a\\ 0 & c & b\end{vmatrix}=-2abc=\Delta,$$

што је еквивалентно са $abc\neq 0$. Решење овог система (које је јединствено) је дато са

$$(x,y,z)=\left(\frac{\begin{vmatrix} c & a & 0\\ b & 0 & a\\ a & c & b\end{vmatrix}}{-2abc},\frac{\begin{vmatrix} b & c & 0\\ c & b & a\\ 0 & a & b\end{vmatrix}}{-2abc},\frac{\begin{vmatrix} b & a & c\\ c & 0 & b\\ 0 & c & a\end{vmatrix}}{-2abc}\right)=\frac{1}{-2}\cdot\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{bc},\frac{b^2-a^2-c^2}{ac},\frac{c^2-a^2-b^2}{ab}\right).$$

19. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 2x+\ y+\ z+\ u&=1\\ x+2y+\ z+\ u&=1\\ x+\ y+2z+\ u&=1\\ x+\ y+\ z+2u&=1.\end{aligned}$$

Решење. Приметимо најпре да систем има доста карактеристичан облик. Можемо га решавати стандардним методама. Уколико искористимо карактеристичан облик система можемо скратити доста посао. Идеја је да саберемо све једначине. Уколико то урадимо добијамо $5x+5y+5z+5u=4$. Ово значи да уколико систем има решења тада сва решења морају задовољавати једнакост $x+y+z+u=\frac{4}{5}$. Искомбинујмо сада ову једнакост са једначинама система. Комбинација ове и прве једначине система даје $2x+\left(\frac{4}{5}-x\right)=1$. Одавде добијамо да мора бити $x=\frac{1}{5}$. Аналогно, добијамо да мора бити и $y=z=u=\frac{1}{5}$. Не заборавимо, уколико имамо импликацију (у нашем случају сабирање свих једначина) морамо проверити да ли је добијена могућност заиста и решење система (јер је тада свако решење система садржано у добијеном скупу решења али обрнутно не мора важити, што је јако битно). У овом случају је то лако, директном заменом. Дакле, овај систем има јединствено решење

$$(x,y,z,u)=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\in\mathbb{R}^4.$$

20. У зависности од параметра $a\in\mathbb{R}$ решити систем једначина

$$\begin{aligned} x_1+a\cdot x_2&=0\\ x_2+a^2\cdot x_3&=0\\ x_3+a^3\cdot x_4&=0\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ x_{2018}+a^{2018}\cdot x_{2019}&=0\\ x_{2019}+a^{2019}\cdot x_1&=0.\end{aligned}$$

Решење. Уколико је $a=0$ систем има јединствено решење $(x_1,\ldots,x_{2019})=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{2019}$ у шта се уверавамо директном заменом $a=0$. Нека је на даље $a\neq 0$. Приметимо да уколико постоји $j_0\in\{1,2,\ldots,2019\}$ тако да је $x_j=0$ то повлачи да је за свако $j\in\{1,2,\ldots,2019\}$ задовољено $x_j=0$. Дакле и у случају када је $a\neq 0$ имамо решење $(x_1,\ldots,x_{2019})=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{2019}$. Нека је на даље $x_j\neq 0$ за свако $j\in\{1,2,\ldots,2019\}$. Полазни систем је еквивалентан са системом

$$\begin{aligned} x_1&=-a\cdot x_2\\ x_2&=-a^2\cdot x_3\\ x_3&=-a^3\cdot x_4\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ x_{2018}&=-a^{2018}\cdot x_{2019}\\ x_{2019}&=-a^{2019}\cdot x_1.\end{aligned}\tag{10}$$

Множећи одговарајуће стране у систему (10) (то је у реду јер сада све различите од нуле) добијамо

$$x_1x_2\cdots x_{2019}=(-1)^{2019}\cdot a^{1+2+\ldots+2019}\cdot x_1x_2\cdots x_{2019}.\tag{11}$$

Након сређивања (краћење обе стране са $x_1x_2\cdots x_{2019}\neq 0$ и сабирање суме[8] $\sum_{j=1}^{2019} j$) имамо да је (11) еквивалентно са

$$1=(-1)\cdot a^{\frac{2019\cdot(2019+1)}{2}} \iff -1=a^{\overbrace{1010\cdot 2019}^{\text{паран број}}}.\tag{12}$$

Како $a\in\mathbb{R}$ следи да последња једнакост у (12) није могућа. Дакле, систем има јединствено решење $(x_1,\ldots,2019)=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{2019}$ без обзира на вредност параметра $a\in\mathbb{R}$.

21. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ x_2+x_3+x_4&=0\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ x_{99}+x_{100}+x_1&=0\\ x_{100}+x_1+x_2&=0.\end{aligned}\tag{13}$$

[8] Приметимо да са збир првих n природних броја може израчунати тако што уочимо да први и последњи сабирак, други и претпоследњи сабирак и тако редом увек имају константан збир. Сада остаје само да видимо колико таквих парова има.

22. Два играча наизменично уписују коефицијенте у празна поља система

$$\begin{aligned}\bigcirc \cdot x + \bigcirc \cdot y + \bigcirc \cdot z &= 0\\ \bigcirc \cdot x + \bigcirc \cdot y + \bigcirc \cdot z &= 0\\ \bigcirc \cdot x + \bigcirc \cdot y + \bigcirc \cdot z &= 0.\end{aligned}$$

Игра се завршава када сва поља буду попуњена. Доказати да први играч може обезбедити, без обзира на игру другог играча, да систем има бесконачно много решења[9].

Решење. Доказаћемо да први играч увек може да обезбеди да детерминанта система буде 0, одакле ће следити да систем има бесконачно много решења. Стратегија коју ће водити први играч је та да обезбеди да матрица система има пропорционалне врсте или колоне, одакле ће (на основу својстава детерминанти) следити да је детерминанта система једнака нули. У централно поље $(2,2)$ први играч уписује било који број. Уколико, на пример, други играч упише у поље $(1,3)$ број s тада први играч уписује у поље $(3,3)$ исти број s. Уколико пак, други играч упише на пример у поље $(2,1)$ број s тада први играч уписује у поље $(2,3)$ исти број $s, \ldots$. Победа следи. (Зашто?)

1.3 Степеновање матрица, Биномна формула и рекурентне једначине

23. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Доказати да матрице A и B комутирају ако и само ако важи Биномна формула

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^n B^{n-k}.$$

24. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ b & -2 & 0 \\ 0 & b & -2 \end{bmatrix}.$$

Користећи Њутнову биномну формулу израчунати A^n и B^n за свако $n \in \mathbb{N}$ при чему је $b \in \mathbb{R}$ параметар.

Решење. Најпре, да би применили Њутнову биномну формулу на неке две матрице оне морају да комутирају (зашто?). Због тога напишимо матрицу A као

$$A = I_2 + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ово радимо јер јединична матрица комутира са сваком другом квадратном матрицом истог формата. Друго је питање да ли ће матрица B имати лепе степене. У нашем случају ће имати лепе степене (угавном треба тражити те матрице у облику $A = B + \alpha \cdot I$ где број $\alpha \in \mathbb{R}$ треба погодно одабрати). Рачунамо степене матрице B у нади да уочимо правилност (а потом је и докажемо!). Имамо

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 30 \\ 80 & 40 \end{bmatrix} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = 10B.$$

Након овог корака је већ очигледно која је правилност али за сваки случај урадимо још један корак. Добијамо

$$B^3 = B^2 B = (10B)B = 10B^2 = 10^2 B.$$

Приметимо да се у овим операцијама користи само асоцијативност множења матрица. Као што је већ речено, наслућујемо да важи

$$B^n = 10^{n-1}B \text{ за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Докажимо ово математичком индукцијом. Базу смо већ урадили. Претпоставимо да тврђење важи за произвољан[10] $n \in \mathbb{N}$ и докажимо да важи и за $n+1$. Заиста

$$B^{n+1} = B^n B = 10^{n-1}BB = 10^{n-1}B^2 = 10^{n-1}10B = 10^n B,$$

[9] У овом задатку је у питању хомоген линеаран систем. Приметимо да хомогени системи увек имају тривијално решење, тј. нула вектор. Уколико је детерминанта овог система различита од нуле тада по теореми Крамера овај систем има јединствено решење које је тривијално. Ако је детерминанта хомогеног система једнака нули имамо (по Крамеровој теореми) да систем нема јединствено решење. Како није могућа ситуација да систем нема решења (јер је нула вектор решење) следи да систем има и нетривијално решење v. Тада је сваки вектор облика $\alpha \cdot v$, $\alpha \in \mathbb{R}$ нетривијално решење хомогеног система те систем мора имати бесконачно много решења. Јасно је да важи и обрнуто. Ово разматрање ћемо користити у задацима. Напоменимо такође битну ствар. Задатак 16 говори да линеаран систем који нема јединствено решење не може имати коначно много решења јер ако нема јединствено решења детерминанта тог система је 0 па хомоген систем има нетривијално решење те је скуп $\mathcal{S}(A,b)$ бесконачан јер је скуп $\mathcal{S}(A,\mathbf{0})$ бесконачан.

[10] Овде је јако битно нагласти да претпостављамо да тврђење важи за произвољан број $n \in \mathbb{N}$ јер у супротном систем закључивања математичком индукцијом не би функционисао.

што је и требало показати. Сада можемо лако применити Њутнову биномну формули јер матрице I_2 и B комутирају а уз то матрица B има лепе степене. Имамо

$$A^n = \big(I_2 + B\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Овде мало застанимо. Приметимо да сума креће од индекса $k = 0$. Због тога суму напишимо у следећем облику

$$A^n = \binom{n}{0} B^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Како је $B^0 = I_2$ и $\binom{n}{0} = 1$ имамо да је

$$A^n = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \big(10^{k-1} B\big) = I_2 + B \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 10^{k-1} = I_2 + \frac{1}{10} \cdot B \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 10^k, \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Како је

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 10^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k \right) - 1 = \big(10 + 1\big)^n - 1,$$

имамо да је

$$A^n = I_2 + \frac{1}{10} \cdot B \cdot (11^n - 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\big(11^n - 1\big) \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{6}{10}\big(11^n - 1\big) & \frac{3}{10}\big(11^n - 1\big) \\ \frac{8}{10}\big(11^n - 1\big) & 1 + \frac{4}{10}\big(11^n - 1\big) \end{bmatrix}.$$

Након скраћивања разломака имамо да је

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{5}\big(11^n - 1\big) & \frac{3}{10}\big(11^n - 1\big) \\ \frac{4}{5}\big(11^n - 1\big) & 1 + \frac{2}{5}\big(11^n - 1\big) \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

25. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Одредити све квадратне матрице $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ које комутирају са матрицом A а потом за свако $n \in \mathbb{N}$ израчунати M^n.

26. Нека су дате матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Методом рекурентних једначина одредити A^n и B^n за свако $n \in \mathbb{N}$.

27. (Март и Септембар 2021) Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Одредити бројеве $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$A^2 + \alpha A + \beta \mathcal{I}_3 = \mathcal{O}_3.$$

(б) За свако $n \in \mathbb{N}$ израчунати A^n.

Решење. Део под (а): Овај део задатка нам служи да бисмо решили део под (б). Директном заменом матрице A у једнакост $A^2 + \alpha A + \beta \mathcal{I}_3 = \mathcal{O}_3$ добијамо

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta + 9 & 2\alpha + 8 & 2\alpha + 8 \\ 2\alpha + 8 & \alpha + \beta + 9 & 2\alpha + 8 \\ 2\alpha + 8 & 2\alpha + 8 & \alpha + \beta + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies (\alpha, \beta) = (-4, -5).$$

Део под (б): Идеја је да за свако $n \in \mathbb{N}$ одредимо бројеве $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ који задовољавају једнакост $A^n = \alpha_n A + \beta_n \mathcal{I}_3$. За $n = 2$ већ имамо $\alpha_2 = 4$ и $\beta_2 = 5$. Пробајмо диференцним једначинама. Имамо да је

$$\alpha_{n+1}A+\beta_{n+1}\mathcal{I}_3 = A^{n+1} = AA^n = A(\alpha_n A+\beta_n\mathcal{I}_3) = \alpha_n A^2+\beta_n A = \alpha_n(4A+5\mathcal{I}_3)+\beta_n A = (4\alpha_n+\beta_n)A+5\alpha_n\mathcal{I}_3 \quad \text{за свако} \quad n \geqslant 2.$$

Решимо систем диференцних једначина

$$\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + \beta_n \quad \text{и} \quad \beta_{n+1} = 5\alpha_n, \quad n \geqslant 2. \tag{14}$$

Из друге једначине имамо да је $\beta_n = 5\alpha_{n-1}$ за свако $n \geqslant 3$ па када то заменимо у прву једначину добијамо $\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 5\alpha_{n-1}$ за свако $n \geqslant 3$, тј. $\alpha_{n+2} = 4\alpha_{n+1} + 5\alpha_n$ за свако $n \geqslant 2$. Карактеристична једначина добијене диференцне једначине је $\lambda^2-4\lambda-5 = 0$ а њена решења су $\lambda = -1$ и $\lambda = 5$ па је опште решење наче диференцне једначине описано са $\alpha_n = c_1\cdot(-1)^n+c_2\cdot 5^n$ за свако $n \geqslant 2$, при чему су c_1 и c_2 произвољне реалне константе (то значи да оваква диференцна једначина има бесконачно много решења, за сваки избор константи c_1 и c_2 по једно). Консанте c_1 и c_2 ћемо одредити из почетних услова (део под (а) овог задатка) јер је $\alpha_2 = 4$ и $\beta_2 = 5$. Имамо да је $4 = \alpha_2 = c_1 \cdot (-1)^2 + c_2 \cdot 5^2$ и $\alpha_3 = c_1 \cdot (-1)^3 + c_2 \cdot 5^3$. Да бисмо решили овај систем по c_1 и c_2 треба нам и вредност α_3. То добијамо из (14) када заменимо $n = 2$. Имамо $\alpha_3 = 4\alpha_2 + \beta_2 = 4 \cdot 4 + 5 = 21$. Остало је да се реши систем $4 = c_1 + 25c_2$ и $21 = -c_1 + 125c_2$ одакле је $(c_1, c_2) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ а самим тим и $\alpha_n = \frac{1}{6}\cdot\left((-1)^{n+1} + 5^n\right)$ за свако $n \geqslant 2$ па је из (14) коначно $\beta_{n+1} = 5\cdot\frac{1}{6}\cdot\left((-1)^{n+1} + 5^n\right) = \frac{5}{6}\left((-1)^{n+1} + 5^n\right)$ за свако $n \geqslant 2$ а ако заменимо $n = 1$ видимо да формула важи и тада тј. да је $\beta_2 = 5$ од чега смо и кренули да рачунамо. Дакле, важе једнакости

$$\alpha_n = \frac{1}{6}\cdot\left((-1)^{n+1} + 5^n\right) \quad \text{и} \quad \beta_n = \frac{5}{6}\cdot\left((-1)^n + 5^{n-1}\right) \quad \text{за свако} \quad n \geqslant 2.$$

Одавде је за све $n \geqslant 2$ испуњено

$$A^n = \frac{1}{6}\left(\left((-1)^{n+1}+5^n\right)\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix} + 5\left((-1)^n+5^{n-1}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5^n}{3}-\frac{2}{3}(-1)^{n+1} & \frac{1}{3}(-1)^{n+1}+\frac{5^n}{3} & \frac{1}{3}(-1)^{n+1}+\frac{5^n}{3} \\ \frac{5^n}{3}-\frac{1}{3}(-1)^n & \frac{2(-1)^n}{3}+\frac{5^n}{3} & \frac{5^n}{3}-\frac{1}{3}(-1)^n \\ \frac{5^n}{3}-\frac{1}{3}(-1)^n & \frac{5^n}{3}-\frac{1}{3}(-1)^n & \frac{2(-1)^n}{3}+\frac{5^n}{3} \end{bmatrix}.$$

28. (Септембар 2021) Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одредити све матрице $X \in \mathbb{C}^{3\times3}$ за које важи $X^2 = A$.

Решење. Претпоставимо да задатак има решења и нека је тражена матрица

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3}.$$

Наш задатак је да одредимо бројеве x_{ij} за свако $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Погрешно је одмах заменити ову матрицу у једнакост $X^2 = A$ и расписати јер се добија нелинеарни систем једначина који је тешко решив (пробајте...). Идеја је да најпре линеаризујемо проблем. Због тога, ако постоји матрица $X \in \mathbb{C}^{3\times3}$ која задовољава једнакост $X^2 = A$ тада важи

$$A \cdot X = X^2 \cdot X = X^3 = X \cdot X^2 = X \cdot A.$$

Заменимо матрицу X у једнакост $AX = XA$ и распишимо. Добијамо линеаран систем

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} x_{11}-2x_{21} & x_{12}-2x_{22} & x_{13}-2x_{23} \\ x_{21}-2x_{31} & x_{22}-2x_{32} & x_{23}-2x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}-2x_{11} & x_{13}-2x_{12} \\ x_{21} & x_{22}-2x_{21} & x_{23}-2x_{22} \\ x_{31} & x_{32}-2x_{31} & x_{33}-2x_{32} \end{bmatrix} = X \cdot A.$$

Након одузимања имамо да је

$$\begin{bmatrix} -2x_{21} & 2x_{11}-2x_{22} & 2x_{12}-2x_{23} \\ -2x_{31} & 2x_{21}-2x_{32} & 2x_{22}-2x_{33} \\ 0 & 2x_{31} & 2x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} \Longrightarrow X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{bmatrix}.$$

Дакле, за сада смо свели проблем на мањи број непознатих и одредили смо ближе како изгледају кандидати за решење (кандидати су горње троугаоне матрице). Сада облик матрице X који смо добили мењамо у једнакост

$X^2 = A$ (сада је то у реду јер имамо доста нула и нећемо добити тако незгодан систем наспрам оног који би добили да смо одмах заменили):

$$X^2 = A \iff \begin{bmatrix} x_{11}^2 - 1 & 2x_{11}x_{12} + 2 & 2x_{11}x_{13} + x_{12}^2 \\ 0 & x_{11}^2 - 1 & 2x_{11}x_{12} + 2 \\ 0 & 0 & x_{11}^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \in \left\{ \left(1, -1, -\frac{1}{2}\right), \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Директнном провером (овај корак лак али нужан јер смо у досадашењм закључивању имали импликације) добијамо

$$X^2 = A \iff X \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

29. Нека је вектор $x' \in \mathbb{R}^2$ добијен ротацијом вектора $x \in \mathbb{R}^2$ за угао φ у позитивном математичком смеру око координатног почетка. Одредити матрицу Rot[11] $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ тако да важи $x' = \mathrm{Rot} \cdot x$.

Решење. Нека су $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $x' = \left(x_1', x_2'\right) \in \mathbb{R}^2$ такви да је вектор x' добијен ротацијом вектора x око координатниг почетка за угао φ. Векторе x и x' можемо посматрати као комплексне бројеве $x = x_1 + ix_2$ и $x' = x_1' + ix_2'$. Познато је[12] да се множењем комплексног броја $x = x_1 + ix_2$ са бројем $\cos\varphi + i\sin\varphi$ добија број који је заротиран за угао φ у позитивном математичком смеру. Тада је

$$x' = x_1' + ix_2' = (x_1 + ix_2)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi) + i(x_2\cos\varphi + x_1\sin\varphi).$$

Изједначавањем реалних и имагинарних делова[13] добијамо да је

$$x_1' = x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \quad \text{и} \quad x_2' = x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi,$$

односно, лепше записано, имамо да је

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Rot}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

30. Нека је $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ фиксиран број. Да ли постоји матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тако да важи

$$A^{2019} = I_n \quad \text{и} \quad A, A^2, \dots, A^{2018} \neq I_n \ ?$$

Решење. Уколико је $n = 2$ тада је решење матрица ротације за угао $\varphi = \frac{2\pi}{2019}$, односно матрица

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{2019} & -\sin\frac{2\pi}{2019} \\ \sin\frac{2\pi}{2019} & \cos\frac{2\pi}{2019} \end{bmatrix}.$$

Заиста, како за било коју матрицу ротације (која одговара углу φ) важи

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

имамо да је уочена матрица A решење задатка у случају $n = 2$. Нека је сада $n > 2$. У овом случају је решење

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{2019} & -\sin\frac{2\pi}{2019} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{2019} & \cos\frac{2\pi}{2019} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

[11] Уколико желимо да неки вектор заротирамо за неки угао φ довољно је матрицу Rot помножити са тим вектором. Наравно, матрица Rot зависи од угла φ.

[12] Заиста, нека је потребно да комплексан број $z = a + ib = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ заротирамо за угао φ. Имамо да је $z\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\big((\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) + i(\sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha)\big) = |z|\cdot(\cos(\alpha+\varphi) + i\sin(\alpha+\varphi))$. Дакле, множећи број z са $\cos\varphi + i\sin\varphi$ имамо да се његов аргумент повећао за φ док је модуо остао исти, те је овај број добијен ротацијом броја z за уграо φ.

[13] Два комплексна броја су једнака ако и само ако су им једнаки реални и имагинарни делови, редом.

31. (Ротација простора $\mathbb{R}^3$) Нека је $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ротација. Доказати да је M ортогонална трансформација, тј. да важи $MM^T = I$.

32. Нека је $\Big\{T_i(x_i, y_i)\Big\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ низ тачака дефинисан са $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ и

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3}x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + \sqrt{3}y_n, \end{cases}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. У ком квадранту се налази тачка T_{2019}?

33. Нека је дат троугао $\triangle ABC$ у равни xOy и $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ инвертибилна матрица. Доказати да је

$$S(\triangle ABC) = \triangle S(A)S(B)S(C).$$

Решење. Тачка D припада троуглу $\triangle ABC$ ако и само је постоје бројеви $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ за које је $\alpha + \beta + \gamma = 1$ и $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Ово је познато тврђење и на основу њега завршавамо врло брзо задатак. Нека је D произвољна тачка троугла $\triangle ABC$. Тада важи поменута једнакост, коју ћемо помножити матрицом S (са леве јер је ово векторска једнакост (темена A, B и C су уређени парови реалних бројева)). Добијамо $S(D) = \alpha S(A) + \beta S(B) + \gamma S(C)$, где је $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ за које је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Како је матрица S инвертибилна имамо да тачке $S(A)$, $S(B)$ и $S(C)$ граде троугао јер су тачке (вектори) A, B и C такве да граде троугао (јер су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линеарно независни тј. вектори $\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{A}$ су линеарно независни а то управо значи да тачке $S(A)$, $S(B)$ и $S(C)$ граде троугао). Сада, по поменутом тврђењу имамо да је тачка $S(D)$ у троуглу $\triangle S(A)S(B)S(C)$ тј. показли смо $S\left(\triangle ABC\right) \subseteq \triangle S(A)S(B)S(C)$. Да важи и супротна инклузија имамо јер је матрица инвертибилна.

1.4 Теорема Кејли-Хамилтона

34. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Користећи теорему Кејли-Хамилтона[14] израчунати A^{-1}.

Решење. Нека је $\mathcal{P}_A$ карактеристични полином матрице A. На основу теореме Кејли-Хамилтона имамо да је $\mathcal{P}_A(A) = \mathbb{O}_3$. Израчунајмо сада карактеристични полином $\mathcal{P}_A$. Имамо да је

$$\mathcal{P}_A(x) \overset{\mathsf{def}}{=} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 9 & 2-x & 0 \\ 5 & 0 & 3-x \end{bmatrix}\right), \ x \in \mathbb{C}.$$

Користећи Сарусово правило (јер је матрица формата 3×3) или на неки други начин израчунавамо да је

$$\mathcal{P}_A(x) = -x^3 + 6x^2 + 8x + \underbrace{-41}_{= \det(A) \implies \exists A^{-1}}.$$

Комбинујући последње са $\mathcal{P}_A(A) = \mathbb{O}_3$ следи да је

$$-A^3 + 6A^2 + 8A - 41I_3 = \mathbb{O}_3 \implies I_3 = \frac{1}{41}\Big(-A^3 + 6A^2 + 8A\Big) = A \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{41}\Big(-A^2 + 6A + 8I_3\Big)\right)}_{\text{Десни инверз матрице } A}.$$

Одавде, по дефиницији, закључујемо да матрица A има десни инверз. Уколико матрицу A извучемо са десне стране или директним позивом на Задатак 4 имамо да је ова матрица и леви инверз матрице A те је матрица A инвертибилна (ово смо могли још да видимо и из слободног коефицијента у карактеристичном полиному $\mathcal{P}_A$, као што је назначено) и важи

$$A^{-1} = \frac{1}{41}\Big(-A^3 + 6A^2 + 8A\Big) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{41} & \frac{3}{41} & \frac{4}{41} \\ \frac{27}{41} & \frac{7}{41} & -\frac{18}{41} \\ \frac{10}{41} & -\frac{5}{41} & \frac{7}{41} \end{bmatrix}.$$

[14] Теорема Кејли-Хамилтона тврди да је свака матрица (у општем случају оператор) нула свког карактеристичног полинома. Напоменимо да доказ ове теореме није тривијалан као и да следеће разматрање није тачно: $\mathcal{P}(x) \overset{\mathsf{def}}{=} \det(A - xI) \implies \mathcal{P}(A) = \det(A - AI) = \det(A - A) = \det(\mathbb{O}) = 0$. Зашто?

35. Нека је $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ регуларна матрица. Доказати да постоји полином p такав да је $p(A) = A^{-1}$.

Решење. Овај задатак је уопштење Задатка 34. Како је матрица инвертибилна њена детерминанта је различита од нуле. Са друге стране, слободни коефицијент у карактеристичном полиному $\mathcal{P}_A(0)$ је једнак $\det(A)$. Нека је

$$\mathcal{P}_A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ x \in \mathbb{C}.$$

На основу теореме Кејли-Хамилтона имамо да је

$$\mathcal{P}_A(A) = \mathbb{O}_n \iff a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A_1 + \underbrace{a_0}_{=\det(A)\neq 0} I_n = \mathbb{O}_n.$$

Пребацимо слободни члан на десну страну и поделимо обе стране (можемо јер је матрица инвертибилна) скаларом $-\det(A) \neq 0$. Добијамо

$$-\frac{1}{\det(A)}\Big(a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A\Big) = I_n \iff -\frac{1}{\det(A)}\Big(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\Big)A = I_n.$$

Одавде закључујемо (формално, примена Задатка 4 или извлачењем матрице A и са леве стране, сада већ познато зашто) да је

$$A^{-1} = \underbrace{-\frac{1}{\det(A)}\Big(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\Big)}_{\Longrightarrow \text{ Тражени полином је } p(x) = -\frac{1}{\det(A)}\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1\right)}.$$

Тврђење је управо доказано.

36. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ такве да важи $A = AB - BA$. Доказати да је тада $A^2 = \mathbb{O}_2$.

Решење. Нека је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Тада имамо да је карактеристични полином дат са

$$\mathcal{P}_A(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} = \big(a_{11} - x\big)\big(a_{22} - x\big) - a_{21}a_{12} = x^2 - \underbrace{\big(a_{11} + a_{22}\big)}_{=\mathrm{tr}A} x + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}_{=\det A},\ x \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

На основу Кејли-Хамилтонове теореме имамо да је

$$\mathbb{O}_2 = \mathcal{P}_A(A) = A^2 - \mathrm{tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2$$

односно

$$A^2 = \mathrm{tr}A \cdot A - \det A \cdot I_2.$$

На основу Задатка 13, дела под (а), имамо да је $\mathrm{tr}\big(AB\big) = \mathrm{tr}(BA)$ те је

$$A^2 = -\det A \cdot I_2.$$

Цела ова прича до сада је била без употребе услова задатка. Искористимо услов задатака на два начина, множећи ову једнакост са матрицом A са леве и са десне стране. Добијамо две једнакости

$$A^2 = A^2 B - ABA \quad \text{и} \quad A^2 = ABA - BA^2,$$

Њиховим сабирањем имамо да је $2A^2 = A^2B - BA^2$ те смо сада у могућности да применимо једнакост $A^2 = -\det A \cdot I_2$. Добијамо

$$2A^2 = \Big(-\det A \cdot I_2\Big) \cdot B - B \cdot \Big(-\det A \cdot I_2\Big) = \mathbb{O}_2$$

те је и $A^2 = \mathbb{O}_2$ што је и требало показати.

37. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ такве да је $\big(AB\big)^2 = \mathbb{O}_2$. Доказати да је тада $\big(BA\big)^2 = \mathbb{O}_2$.

Решење. Применимо теорему Кејли-Хамилтона на матрицу AB. Имамо да важи

$$\underbrace{(AB)^2}_{=\mathbb{O}_2} - \underbrace{\mathrm{tr}(AB)}_{=\mathrm{tr}(BA)} \cdot AB + \underbrace{\det\,(AB)}_{=0} \cdot I_2 = \mathbb{O}_2 \implies \mathrm{tr}\big(BA\big) \cdot AB = \mathbb{O}_2 \implies \mathrm{tr}\big(BA\big) = 0 \vee AB = \mathbb{O}_2.$$

Сада применимо Кејли-Хамилтонову теорему на матрицу BA. Имамо

$$\big(BA\big)^2 - \mathrm{tr}\big(BA\big) \cdot BA + \underbrace{\det(BA)}_{=0} \cdot I_2 = \mathbb{O}_2 \implies \big(BA\big)^2 = \mathrm{tr}\big(BA\big) \cdot BA.$$

Уколико је $\mathrm{tr}\big(BA\big) = 0$ тада је одмах (због друге једнакости) $\big(BA\big)^2 = \mathbb{O}_2$. Ако је сада $AB = \mathbb{O}_2$ тада је $\mathrm{tr}\big(AB\big) = \mathrm{tr}\big(BA\big) = 0$ па из друге једнакости следи директно тврђење задатка.

38. Нека је $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ сингуларна матрица за коју важи $\mathrm{tr}A \neq -1$. Доказати једнакост

$$\left(I_2 + A\right)^{-1} = I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot A.$$

Да ли ова формула важи за сингуларне матрице формата већег од 2×2 чији траг није једнак -1 ?

Решење. Проверимо по дефиницији инверза ову једнакост. Имамо да је

$$\begin{aligned}\left(I_2 + A\right)\left(I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot A\right) &= I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot A + A - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot A^2 \\ &= I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot \left(A - (1+\mathrm{tr}A)A + A^2\right) \\ &= I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot \left(A^2 - \mathrm{tr}A \cdot A\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Применимо сада теорему Кејли-Хамилтона. Имамо да је

$$\mathbb{O}_2 = \mathcal{P}_A(A) = A^2 - \mathrm{tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2 \implies A^2 - \mathrm{tr}A \cdot A = -\underbrace{\det A}_{=\,0 \text{ јер је } A \text{ сингуларна}} \cdot I_2. \tag{17}$$

Сада, на основу (16) и последње једнакости у (17) је

$$\left(I_2 + A\right)\left(I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot A\right) = I_2 + \underbrace{\frac{\overbrace{\det A}^{=\,0 \text{ јер је } A \text{ сингуларна}}}{1+\mathrm{tr}A}}_{=\,\mathbb{O}_2} \cdot I_2 = I_2.$$

Аналогно можемо проверити да важи и једнакост

$$\left(I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot A\right)\left(I_2 + A\right) = I_2 \tag{18}$$

а можемо и директно искористити Задатак 4 те имамо једнакост (18). Сада, на основу (16), (18) и дефиниције инверза матрице имамо да је

$$\left(I_2 + A\right)^{-1} = I_2 - \frac{1}{1+\mathrm{tr}A} \cdot A,$$

што је и требало показати. Приметимо да услов задатка $\mathrm{tr}A \neq -1$ користимо само да бисмо могли да пишемо разломак $\frac{1}{1+\mathrm{tr}A}$. Другачије речено, не можемо да радимо са објектима који не постоје.

39. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Доказати да је

$$\det\left(AB - BA\right) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\left(AB - BA\right)^3\right).$$

1.5 Ранг матрице и теорема Кронекер-Капелија

40. За сваку од следећих матрица одредити ранг:

(а) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (б) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ (ц) $A_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$

(д) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (е) $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & \alpha & 6 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решење. (ц) Како је матрица A_3 квадратна, можемо израчунати детерминанту. Идеја је да користимо тврђење које каже да је квадратна матрица пуног ранга ако и само ако јој је детерминатна различита од 0 тј. ако и само ако је инвертибилна. Имамо да је $\det(A_3) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$. Дакле, када је $\cos 2\varphi \neq 0 \iff \varphi \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, имамо да је $\mathrm{rang}(A_3) = 2$. Нека је сада $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ за $k \in \mathbb{Z}$. Како је у овом случају детерминанта матрице A_3 једнака 0, ранг мора бити мањи од 2. Због тога што не могу истовремено и косинус и синус бити једнаки нули имамо да је

$\operatorname{rang}(A_3) = 1$.

(д) И у овом случају (јер је A_4 квадратна матрица) можемо користити детерминанте. Како је $\det(A_4) = -2+3\alpha-\alpha^3 = -(\alpha-1)^2(\alpha+2)$ за свако $\alpha \in \mathbb{C}$. За свако $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{1,-2\}$ је $\operatorname{rang}(A_4) = 3$. Нека је $\alpha = 1$. Тада је

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rang}(A_4) = 1.$$

На крају, нека је $\alpha = -2$. Тада је

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\cong}_{\substack{V_1+V_2\to V_3 \\ -V_1\to V_2 \\ -V_3\to V_1 \\ \frac{1}{3}V_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\cong}_{\substack{-K_2\to K_3 \\ V_2\to V_1 \\ -1\cdot V_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rang}(A_4) = 2.$$

41. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + \ \ y - \ \ \ 3z &= 1 \\ -2x + \ \ y + \ \ \ \ z &= 2 \\ -x + 2y + \ a\cdot z &= 3 \\ x + 4y + 4a\cdot z &= 1-2a. \end{aligned}$$

Решење. У овом задатку није могуће користити Крамерову теорему јер систем није квадратни. Због тога ћемо користити Кронекер-Капелијеву теорему[15]. Нека је матрица $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ матрица система и нека је $b \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ слободни вектор. Тада имамо

$$[A \mid b\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 4 & 4a & 1-2a \end{array}\right] \underbrace{\cong}_{\substack{-V_1\to V_4 \\ V_1\to V_3 \\ 2V_1\to V_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & a-3 & 4 \\ 0 & 3 & 4a+3 & -2a \end{array}\right] \underbrace{\cong}_{\substack{-V_3\to V_4 \\ V_2\to V_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+6 & -2a-4 \end{array}\right] \underbrace{\cong}_{-3V_3\to V_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a-4 \end{array}\right].$$

Како је матрица A доведена у Гаус-Жорданов степенасти облик разматрамо следеће случајеве из којих можемо директно видети колико износи ранг матрице. Уколико је $a \neq -2$ тада је $\operatorname{rang}A = 3$ и $\operatorname{rang}\widetilde{A} = 4$, те како је $3 < 4$ по теореми Кронекер-Капелија имамо да систем нема решења. Уколико је $a = -2$ тада имамо

$$[A \mid b\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Сада је $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\widetilde{A} = 2$, те по теореми Кронекер-Капелија имамо да систем има бесконачно много решења, где је број слободних променљивих једнак

$$\underbrace{3}_{\text{број променљивих}} - \operatorname{rang}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Изражавајући редом уназад решење, имамо да је $y = \frac{5}{3}z + 4$ и $x = \frac{4}{3}z - \frac{1}{3}$ односно решење система је потпуно описано скупом

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(\frac{4}{3}z - \frac{1}{3}, \frac{5}{3}z + \frac{4}{3}, z \right) \ \middle|\ z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

[15]Нека је матрица система $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ односно нека је дато m једначина и n непознатих и $\widetilde{A}$ проширена матрица система тј. матрица система којој је додат слободни вектор система као последња колона је проширена матрица. Кронекер-Капелијеву теорему користимо у случају да систем није квадратни. Ова теорема тврди да систем има решења ако и само ако је ранг матрице једнак рангу проширене матрице. Уколико је $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\widetilde{A} = k$ где је $k \in \{1, \ldots, \min\{m,n\}\}$ тада решење система има $n-k$ слободних променљивих.

42. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина

$$\begin{aligned} 2x - \ y \qquad + \ 28t &= 3 \\ -x \qquad + z + \ 16t &= 1 \\ 5x - 3y + z + a^2 \cdot t &= a. \end{aligned}$$

43. Нека су $a_1 = (-1,1,3,5)$, $a_2 = (1,2,3,4)$, $a_3 = (4,3,2,1)$ и $a_4 = (0,1,2,3)$ вектори из $\mathbb{R}^4$. Одредити максималан линеарно независан подскуп датог скупа вектора.

Решење. Поставимо ове векторе у матрицу тако да прва врста матрице буде вектор a_1, друга вектор a_2, трећа вектор a_3 и четврта вектор a_4. Означимо ову матрицу са A. Како је ранг матрице број линеарно независних врста односно колона[16] Наш проблем се своди на одређивање ранга матрице A. Када одредимо ранг, тај број ће нам казивати колико имамо линеарно независних вектора у датом скупу вектора. Поставља се питање како их и одредити. То се врло лако може видети из Гаус-Жорданове степенасте форме матрице A. Одредимо најпре ранг матрице A користећи само елементарне трансформације над врстама (да бисмо могли касније да поступком уназад реконструишемо који су тражени линеарно независни вектори). Добијамо следећи низ трансформација матрице A:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\cong}_{\substack{V_1 \to V_2 \\ 4V_1 \to V_3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 7 & 14 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\cong}_{\substack{-\frac{1}{2}V_2 \to V_4 \\ 4V_1 \to V_3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\cong}_{\frac{1}{3}V_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одавде лако заључујемо да је ранг матрице A једнак 2 и да су прве две врсте последње матрице тражени вектори[17]. Такође, напоменимо да последњи корак где смо поделили све елементе у другој врсти скаларом 2 није био нужан, јер смо и без тог корака могли да закључимо колико износи ранг матрице.

44. Одредити број линеарно независних вектора и линеал[18] скупа

$$\mathcal{S} = \Big\{(1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(6,-3,-4,5),(0,0,0,1)\Big\} \subset \mathbb{R}^4.$$

45. Нека су A и B матрице истог формата. Доказати неједнакост

$$\operatorname{rang}(A+B) \leqslant \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B).$$

46. Нека су дате матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$. Доказати да важи

$$\operatorname{rang}(AB) \leqslant \operatorname{rang}(A).$$

Уколико је B квадратна несингуларна матрица тада је

$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(A).$$

Доказати.

Решење. Докажимо прво први део тврђења. Показаћемо да је $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$ одакле ће следити да је

$$\dim \mathcal{R}(AB) \leqslant \dim \mathcal{R}(A) \iff \operatorname{rang}(AB) \leqslant \operatorname{rang}(A).$$

Нека је $y \in \mathcal{R}(AB)$ произвољно. То значи да постоји $x \in \mathbb{R}^r$ такво да је $(AB)x = y$. Како је множење матрица асоцијативно имамо да је последње еквивалентно са $A(Bx) = y$ одакле следи да $y \in \mathcal{R}(A)$. Дакле, како је y било произвољно из $\mathcal{R}(AB)$ имамо да је $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Докажимо сада други део тврђења. Како је сада B квадратна матрица таква да је дефинисан производ AB мора бити $m = r$. Примењујући први део тврђења који смо показали, имамо да је

$$\operatorname{rang}(A) = \underbrace{\operatorname{rang}\big((AB)B^{-1}\big) \leqslant \operatorname{rang}(AB)}_{\text{Овде користимо први део тврђења}} \leqslant \operatorname{rang}(A) \quad \underbrace{\implies \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(AB)}_{\text{Антисиметричност релације } \leqslant \text{ у } \mathbb{R}}.$$

[16] Може се показати да је беој линеарно независних врста сваке матрице једнак броју линеарно независних колона матрице. На основу овог, један начин за дефинисање ранга матрице је управо број линеарно независних врста.

[17] Приметимо да смо у овом задатку имали ситуацију у којој није било потребно да векторе множимо константама и их додајемо другим врстама него да смо само одузимали врсте и мењали редослед врсти тако да су чак два вектора остала иста на крају ове процедуре. Уколико бројеви нису наштеловани као у овом задатку на крају ћемо добити матрицу која је слична са полазном али неће имати у општем случају ни једану исту врсту. Тада је потребно спровести инверзни поступак и одредити који су то вектори из датог скупа вектора.

[18] Линеал скупа вектора реалног (уколико је комплексни, тада је све исто само се скалари узимају из поља $\mathbb{C}$) векторског простора $\mathbb{V}$ се дефинише као скуп свих линеарних комбинација вектора из тог скупа. Симболички, уколико је $S \subseteq \mathbb{V}$ тада је $\mathcal{L}(S) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot v_j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R},\ v_j \in \mathbb{V},\ j = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Наравно, $\mathcal{L}(S)$ није само скуп у векторском простору $\mathbb{V}$, него је и подпростор. Када скуп вектора чини подпростор?

Напомена 3. Може се показати да је ранг производа матрица (које не морају бити квадратне) мањи или једнак од ранга сваке матрице у том производу.

47. Нека је A квадратна матрица формата $n \times n$ која на позицији (i, j) има елемент $i + j$ за свако $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Одредити $\operatorname{rang}(A)$.

Решење. Уколико је $n = 1$ тада је $A = [2]_{1\times 1}$ те је $\operatorname{rang}(A) = 1$. Нека је сада $n > 1$. Тада је матрица A дата са

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Од i-те врсте одузмимо $(i-1)$-ву врсту за свако $i = \overline{n, 2}$. При овим трансформацијама се не мења ранг матрице A. Добијамо еквивалентну матрицу

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Сада, од i-те врсте одузмимо $(i-1)$-ву врсту за свако $i = \overline{n, 3}$. Добијамо еквивалентну матрицу

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Прве две врсте матрице A_2 су линеарно независне (када би биле зависне имали бисмо $1 \cdot 2 = 3$, што је нетачно) те је по дефиницији ранга[19] матрице $\operatorname{rang}(A_2) = 2$. Како се ранг матрице одржава при елементарним трансформацијама, имамо да је

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_1) = \operatorname{rang}(A_2) = 2.$$

1.6 Сопствене вредности и сопствени вектори матрица

48. Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ако постоји, одредити регуларну матрицу P и дијагоналну матрицу D, тако да важи

$$A = PDP^{-1}.$$

Решење. Одредимо најпре сопствене вредности матрице A. Потребно је наћи карактеристични полином $\mathcal{P}_A$ матрице A а потом одредити његове корене. Некон рачунања полинома $\mathcal{P}_A$ по дефиницији добијамо да је спектар[20] матрице A дат са $\sigma(A) = \{0, -1, 8\}$. Одредимо сопствене векторе који одговарају сопственој вредности $\lambda_1 = 0$. Решавамо линеаран систем $(A - 0 \cdot I_3)x_1 = \mathbf{0}_3 \iff Ax_1 = \mathbf{0}_3$. Када распишемо једначине, добијамо решење

$$\mathcal{N}(A - 0 \cdot I_3) = \Big\{(0, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{t \cdot (0, -1, 1) \;\Big|\; t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

[19] Исти коментар као и у Задатку 78, везан за дефиницију ранга матрице.

[20] Нека је $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Дефинишемо скуп $\sigma(A) \overset{\mathsf{def}}{=} \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det\left(A - \lambda \cdot I_n\right) = 0\Big\}$, који називамо спектар матрице A. Другачије речено, то је скуп свих комплексних бројева таквих да матрица $A - \lambda \cdot I_n$ није инвертибилна. Овај скуп је коначан јер израз $\det\left(A - \lambda \cdot I_n\right) = 0$ представља полиномску једначину степена n по λ која има n решења, рачунајући свако онолико пута колико износи њена вишеструкост.

За сопствени вектор x_1 који одговара сопственој вредности λ_1 можемо узети вектор $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Алгебарска вишеструкост сопствене вредности λ_1 је 1, док је геометријска вишеструкост сопствене вредности λ_1 такође једнака 1, јер је

$$\dim\left\{t\cdot(0,-1,1)\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}=1.$$

Аналогним поступком, решавајући систем $(A-\lambda_2 I_3)x_2=\mathbf{0}_3 \iff (A+I_3)x_2=\mathbf{0}_3$, добијамо решење

$$\mathcal{N}(A-1\cdot I_3)=\left\{(-t,t,t)\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\cdot(-1,1,1)\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}.$$

За сопствени вектор x_2, који одговара сопственој вредности λ_2, можемо одабрати $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Алгебарска вишеструкост сопствене вредности λ_2 је 1, док је геометријска вишеструкост сопствене вредности λ_1 такође једнака 1, јер је

$$\dim\left\{t\cdot(-1,1,1)\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}=1.$$

Аналогним поступком добијамо да је $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_3=8$. Алгебарска вишеструкост ове сопствене врендости је 1. Како је решење линеарног система које се добија за λ_3 дато са

$$\mathcal{N}(A-8\cdot I_3)=\left\{t\cdot(2,1,1)\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}\implies\dim\left\{t\cdot(2,1,1)\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}=1,$$

имамо да је геометријска вишеструкост сопствене вредности λ_3 једнака 1. Сада, имамо да је матрица A просте структуре[21] те се може дијагонализирати[22]. Вектор x_1 је прва, вектор x_2 друга и вектор x_3 трећа колона матрице P. Матрица D на позицији $(1,1)$ има елемент λ_1, на позицији $(2,2)$ елемент λ_2 и на позицији $(3,3)$ елемент λ_3. На осталим позицијама има нуле. Имамо да је

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} = \overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=P}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{=D=\mathrm{diag}(0,-1,8)}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{=P^{-1}}}^{\text{Декомпозиција матрице } A}.$$

49. Одредити $a\in\mathbb{R}$ тако да матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

има сопствену вредност једнаку нули. За тако одређени параметар a одредити остале сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.

50. У зависности од $a\in\mathbb{C}$ одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице

$$A=\begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

51. Нека је

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Одредити све матрице $B\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ за које важи $A=B^2$.

[21] Квадратна матрица је просте структуре уколико се за призвољну сопствену вредност матрице поклапају њена алгебарска и геометријска вишеструкост.

[22] Ова теорема тврди да се квадратна матрица може дијагонализовати ако и само ако је просте структуре. Још један еквивалент ове теореме тврди да се матрица може дијагонализовати ако и само ако су сопствени вектори линеарно независни. У задацима је оперативнији први еквивалент јер се директно види кроз поступак да ли је задовољен.

Решење. Претпоставмо да матрица B постоји и потражимо је у облику

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix},$$

где су $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{C}$. Одредимо најпре сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Карактеристични полином матрице A је дат са

$$\mathcal{P}_A(x) = \begin{bmatrix} 2-x & 2 \\ 2 & 2-x \end{bmatrix} = (2-x)^2 - 2\cdot 2 = x^2 - 4x = x(x-4),\ x \in \mathbb{C}.$$

Одавде следи да је $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 4\}$. Одредимо прво сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = 0$. Њега добијамо решавајући хомогени систем једначина

$$(A - \lambda_1 I_2)x_1 = \mathbf{0}_2 \iff \begin{bmatrix} 2-0 & 2 \\ 2 & 2-0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}}_{=x_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{0}_2}.$$

Одавде добијамо $2x_1' + 2x_2' = 0 \iff x_1' + x_2' = 0$. За вектор x_1 можемо узети $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Напоменимо да је алгебарска вишеструкост сопствене вредности λ_1 једнака 1 и да је геометријска вишеструкост сопствене вредности λ_1 једнака 1. Одредимо сада сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_2 = 4$. Овај сопствени вектор добијамо решавајући хомоген систем једначина

$$(A - \lambda_2 I_2)x_2 = \mathbf{0}_2 \iff \begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix}}_{=x_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{0}_2}.$$

Имамо да је $-2x_1'' + 2x_2'' = 0$ и $2x_1'' - 2x_2'' = 0$, одакле видимо да уствари имамо само једну једначину $x_1'' = x_2''$. Одаберимо за други сопствени вектор $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Приметимо да се и у овом случају добија сопствена вредност чија је алгебарска вишеструкост једнака геометријској вишестукости, односно једнака 1. Како се алгебарске вишеструкости сопствених вектора поклапају са њиховим геометријским вишеструкостима, имамо да је матрица A просте структуре па по Теореми о дијагонализацији имамо да се матрица A може дијагонализовати, тј. може се представити у облику $A = PDP^{-1}$, где је P инвертибилна матрица чије су колоне редом сопствени вектори матрице A односно $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ док је матрица

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Имамо да је

$$A = PDP^{-1} \implies D = P^{-1}AP = P^{-1}B^2P = P^{-1}B\underbrace{PP^{-1}}_{=I_n}BP = \left(P^{-1}BP\right)^2.$$

Уведимо ознаку $B' = P^{-1}BP$. Тада имамо $D = \left(B'\right)^2$. Из ове једнакости следи да матрица B' комутира са матрицом D. Заиста, множећи последњу једнакост са лева и са десна матрицом B' добијамо $B'D = (B')^3 = DB'$. Искористимо Задатак 14. То можемо јер је $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Имамо да мора и матрица B' да буде дијагонална. Ово је битан корак јер знатно смањујемо број непознатих. Такође, врло лако извршавамо операције са дијагоналном матрицом. Из тога што је $D = \left(B'\right)^2$ имамо да је

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix} = \left(B'\right)^2,$$

где је $B' = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, за неке $x, y \in \mathbb{C}$. Одавде добијамо да је $0 = x^2$ и $4 = y^2$. Дакле, једини кандидати за матрицу B' су матрице из скупа

$$\mathcal{B}' = \underbrace{\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}}_{\text{Уколико у овом скупу нема решења проблема } A = B^2 \text{ онда их уопште нема}}.$$

Како је $B = PB'P^{-1}$. Трансформацијом $B' \mapsto PB'P^{-1}$ сваке матрице из скупа $\mathcal{B}'$ добијамо све кандидате за матрицу B. Сада наступа само рачун, односно провера који кандидати су у ствари и решење.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{Кандидат за } B'} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}^{\text{Кандидат за } B}.$$

Када испитамо да ли је $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^2 = A$ добијамо да ова матрица јесте решење.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Кандидат за } B'} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Кандидат за } B}.$$

Када испитамо да ли је $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = A$ добијамо да је и ова матрица решење. Дакле, након провера смо добили решење

$$\boxed{\left\{B \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; A = B^2\right\} = \left\{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}.}$$

Задатак можемо решавати и применом Теореме Кејли-Хамилтона. Нека је $\sigma(B) = \{\mu_1, \mu_2\} \subset \mathbb{C}$. Тада за свако $\mu \in \sigma(B)$ важи $\mu^2 \in \sigma(A)$, што следи на основу Теореме о пресликавању спектра полиномом. Дакле, мора бити $\mu \in \{0, -2, 2\}$. Одавде следи да је $\sigma(B) = \{0, -2\}$ или $\sigma(B) = \{0, 2\}$. Нека је најпре $\sigma(B) = \{0, -2\}$. Тада је (на основу Задатка 54) $\det(B) = 0 \cdot (-2) = 0$ и $\operatorname{tr}(B) = 0 + (-2) = -2$ те на основу једнакости (15) имамо

$$\mathbb{O}_2 = \mathcal{P}_B(B) = \underbrace{B^2}_{=\,A} - \underbrace{(-2)}_{=\,\operatorname{tr}(B)} B + \underbrace{0}_{=\det(B)} I_2 \implies B = -\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Провером (зашто је потребна провера?) утврђујемо да је ова матрица заиста једно решење. Нека је сада $\sigma(B) = \{0, 2\}$. Опет, на основу Задатка 54 налазимо да је $\det(B) = 0 \cdot 2 = 0$ и $\operatorname{tr}(B) = 0 + 2 = 2$, те на основу једнакости (15) имамо

$$\mathbb{O}_2 = \mathcal{P}_B(B) = \underbrace{B^2}_{=\,A} - \underbrace{2}_{=\,\operatorname{tr}(B)} B + \underbrace{0}_{=\det(B)} I_2 \implies B = \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Провером добијамо да је и ова матрица решење нашег проблема. Дакле, опет смо добили

$$\boxed{\left\{B \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; A = B^2\right\} = \left\{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}.}$$

52. Нека матрица A има различите сопствене вредности. Доказати да су тада сопствени вектори линеарно независни.

53. Одредити минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решење. Након израчунавања добијамо да је $\mathcal{P}_A(x) = (x-2)^2(x-3),\ x \in \mathbb{C}$. Дакле, минимални полином је један од делиоца полинома $\mathcal{P}_A$. Проверавајући који делиоци анулирају матрицу A добијамо да је $m_A(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6,\ x \in \mathbb{C}$.

Напомена 4. Може се доказати да је скуп корена минималног полинома матрице A једнак скупу $\sigma(A)$, што олакшава рад приликом тражења минималног полинома матрице. Још једна олакшица која нам помаже у бржем налажењу минималног полинома је та што је минимални полином јединствен. Ово је лако показати. Заиста, претпоставимо да за матрицу A постоје два минимална полинома m_A и l_A. Нека су степени ових полинома једнаки $k \in \mathbb{N}$. Тада би полином $m_A - l_A$ био степена мањег од k (јер су минимални полиноми m_A и l_A по дефиницији монични[23]). Како је $(m_A - l_A)(A) = m_A(A) - l_A(A) = \mathbb{O} - \mathbb{O} = \mathbb{O}$, добијамо контрадикцију, јер смо нашли полином степена мањег од k, који анулира матрицу A.

54. Нека су $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ сопствене вредности матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Доказати

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{и} \quad \operatorname{tr}\big(A^k\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[23] Полином чији је водећи коефицијент једнак 1 називамо монични полином.

Решење. Нека је

$$\mathcal{P}_A(x) \overset{\text{def}}{=} \det(A - x\cdot I_n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j x^j}_{\overset{\text{def}}{=} L} = \underbrace{a_n \cdot \prod_{j=0}^{n}(x-\lambda_j)}_{\overset{\text{def}}{=} D}, \ x \in \mathbb{C},$$

карактеристични полином матрице A где су $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ нуле полинома $\mathcal{P}_A$ односно сопствене вредности матрице A и $a_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Лако се види да је $a_n = (-1)^n$. Такође, имамо да је $a_0 = \mathcal{P}_A(0) = \det(A)$. Слободни коефицијент a_0 у изразу D је једнак производу $a_n \cdot (-1)^n x_1 \cdots x_n$ и добија се када се из сваке заграде, због принципа множења "сваког са сваким" узме $-x_j$. Дакле, како је $L = D$, имамо да важи

$$\det(A) = a_0 = \underbrace{a_n}_{=(-1)^n}(-1)^n \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Докажимо сада други део тврђења за $k = 1$, односно да је

$$\operatorname{tr}\big(A\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Израз $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ представља суму корена полинома $\mathcal{P}_A$, односно овај израз можемо издвојити из израза који је коефицијент уз x^{n-1} у изразу D. Ово се види када множимо заграде по принципу "свака са сваком", тако да из $n-1$ заграда изаберемо x а из једне $-\lambda_j$. Из суме L имамо да је коефицијент уз x^{n-1} једнак a_{n-1}, те је

$$a_{n-1} = -\underbrace{a_n}_{=(-1)^n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \implies \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = (-1)^{n+1} a_{n-1}. \tag{19}$$

Дакле, проблем смо свели на повезивање коефицијента a_{n-1} уз x^{n-1} са елементима матрице A. Ово ћемо решити на основу дефиниције (1) детерминанте. Како је сваки сабирак (до на знак) у суми из дефиниције (1) формиран тако што је из сваке врсте и сваке колоне матрице $A - x \cdot I_n$ узет тачно један елемент, имамо да морамо узети барем $n-1$ елемената који садрже фактор x, да би уопште постигли степен $n-1$. То значи да морамо узети барем $n-1$ елемената са главне дијагонале матрице $A - x \cdot I_n$. То је једино могуће добити у сабирку који одговара јединичној пермутацији $p = id \in \mathcal{S}_n$. Тај сабирак је $(-1)^0 \prod_{j=1}^{n}(a_{jj} - x)$. Одавде лако видимо да је коефицијент a_{n-1} уз x^{n-1} једнак

$$(-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A).$$

Комбинујући ово са (19), имамо да је

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \underbrace{(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}}_{=1}\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A).$$

Нека је сада $k > 1$. Претпоставимо да су сопствени вектори матрице A линеарно независни. Тада се матрица A може дијагонализовати, тј. постоји инвертибилна матрица P и дијагонална матрица $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ тако да важи $A = PDP^{-1}$. На даље је посао лак. Имамо

$$\underbrace{A^k = PD^kP^{-1}}_{\text{Очигледно, доказ индукцијом}} \implies \operatorname{tr}(A^k) = \underbrace{\operatorname{tr}\Big(PD^kP^{-1}\Big) = \operatorname{tr}\Big(\operatorname{diag}\big(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\big)\Big)}_{\text{Примена Задатка 13 под (а), јер је } PP^{-1} = I_n} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k.$$

Ово је био доказ у специјалном случају када је матрица A таква да има линеарно независне сопствене векторе, тј. да се може дијагонализовати. У супротном, ова прича пада у воду. Доказ у општем случају, када матрица A није дијагонализабилна, нећемо радити јер захтева неке мало сложеније технике.

55. Нека је A квадратна матрица формата 2×2.

(а) Уколико матрица A има две паралелне[24] колоне и $\operatorname{tr}(A) = 5$, одредити $\operatorname{tr}(A^2)$.

(б) Уколико је $\det(A) = 5$ и ако су сопствене вредности матрице A природни бројеви, одредити $\operatorname{tr}(A)$.

[24] Други начин да кажемо да су колоне линеарно зависне.

Решење. Нека је A матрица формата 2×2 и нека је $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} \subseteq \mathbb{C}$.

(а) Како, по услову задатка, матрица A има две паралелене (другачије речено, линеарно зависне) колоне имамо да је $\det(A) = 0$. На основу Задатка 54 можемо писати

$$0 = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \implies \underbrace{\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 \implies \Big((\lambda_1 = 5 \wedge \lambda_2 = 0) \vee (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 5)\Big)}_{\text{Јер је по услову задатка } \operatorname{tr}(A) = 5}.$$

Са друге стране, опет уз помоћ Задатка 54, следи да је

$$\operatorname{tr}\big(A^2\big) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 5^2 + 0^2 = 0^2 + 5^2 = 25.$$

(б) Како је сада (из услова задатка) познато да је $\sigma(A) \subseteq \mathbb{N}$ и $\det(A) = 5$, користећи Задатак 54, добијамо да је

$$\underbrace{5 = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \implies \Big((\lambda_1 = 5 \wedge \lambda_2 = 1) \vee (\lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 5)\Big)}_{\text{Када је } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N} \text{ тада су } 5 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 \text{ једине могућности}} \implies \operatorname{tr}(A) = 5 + 1 = 1 + 5 = 6.$$

56. У скупу $\mathbb{C}^{2\times 2}$ решити матричну једначину

$$X^3 - 3X^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решење. Нека је $D = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. Тада је $\sigma(D) = \{-4, 0\}$, одакле следи да је $\operatorname{card}\big(\sigma(X)\big) = 2$. Зашто? На основу теореме о пресликавању спектра полиномом и кардиналности скупа $\sigma(X)$ имамо да за свако $\lambda \in \sigma(X)$ важи

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \quad \wedge \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 = -4.$$

Последњи услов је еквивалентан са

$$(\lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 3) \quad \wedge \quad (\lambda = -1 \ \vee \ \lambda = 2).$$

Шта смо до сада урадили? Закључили смо да уколико наша матрична једначина има решења тада мора бити

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \big\{(0, -1),\ (0, 2),\ (3, -1),\ (3, 2)\big\}, \tag{20}$$

где је $\sigma(X) = \{\lambda_1, \lambda_2\} \subseteq \mathbb{C}$. Идеја је да применимо Кејли-Хамилтонову теорему. На основу Задатка 15 имамо да је

$$X^2 - \operatorname{tr}(X) \cdot X + \det(X) \cdot I_2 = \mathbb{O}_2. \tag{21}$$

Анализирајмо случајеве из (20). Уколико је $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, -1)$, на основу Задатка 54 имамо да је $\operatorname{tr}(X) = -1$ и $\det(X) = 0$, те је на основу (21) задовољено $X^2 + X = \mathbb{O}_2$. Заменом у полазној једначини добијамо да је једна матрица кандидат за решење једначине дата са $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Директном провером утврђујемо да ова матрица и јесте решење наше једначине. Уколико је $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 2)$, аналогно закључујемо да је $\operatorname{tr}(X) = 2$ и $\det(X) = 0$, те опет на основу (21) закључујемо да је $X^2 - 2X = \mathbb{O}_2$. Заменом у полазној једначини добијамо још једну матрицу која је кандидат за решење матричне једначине. Та матрица је $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Провером утврђујемо да је и ова матрица решење полазне једначине. Уколико је $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, -1)$ тада је $\operatorname{tr}(X) = 2$ и $\det(X) = -3$, те је на основу (21) задовољено $X^2 - 2X - 3I_2 = \mathbb{O}_2$. Множећи ову једнакост са X и комбинујући са полазном једначином добијамо $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Провером утврђујемо да је и ова матрица решење полазне једначине. У последњем случају, када је $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, 2)$, сличном анализом долазимо и провером утврђујемо још једно решење једначине $X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$. Дакле, сва решења једначине у скупу $\mathbb{C}^{2\times 2}$ су

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right\}.$$

Напомена 5. Директно решавање овог задатка пребацује пробем на решавање нелинеарног система који је тешко решив (а можда чак и не решив) аналитички.

57. Нека је $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ и матрица $A = \left[\, i \,\right]_{i,j=1,\ldots,n}$. Одредити корене карактеристичног полинома матрице A.

Решење. На основу облика матрице A закључујемо да је њен ранг једнак 1. Дакле, матрица A није инвертибилна те $0 \in \sigma(A)$. Како је ранг матрице A једнак 1 то значи да је $1 = \dim \mathcal{R}(A)$. Одавде следи да постоји $k \in \mathbb{C}$, такво да за свако $x \in \mathbb{C}^n$ важи $Ax = k \cdot x$. Закључујемо да је $\sigma(A) = \{0, k\}$. Дакле, потребно је још одредити колико износи k. На основу Задатка 54 имамо да је $k = 0 + k = \operatorname{tr}(A) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Дакле, $\sigma(A) = \left\{0, \frac{1}{2}n(n+1)\right\}$, што је и скуп корена каракетеристичног полинома матрице A.

Напомена 6. Уколико квадратна матрица (формата већег од 1×1) има ранг 1, онда она може имати највише једну сопствену вредност различиту од 0. Зашто?

58. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ сингуларна матрица. Доказати да постоји $\varepsilon > 0$ тако да је матрица $A - \varepsilon \cdot I_n$ регуларна.

Решење. Како је A сингуларна матрица то је еквивалентно са тим да је $0 \in \sigma(A)$. Уколико је 0 једина[25] сопствена вредност имамо да свако $\varepsilon \neq 0$ не припада скупу $\sigma(A)$, осносно да су све матрице $A - \varepsilon \cdot I_n$ инвертибилне. Претпоставимо сада да је $\sigma(A) \neq \{0\}$ и нека је

$$\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\} \subseteq \mathbb{C},\ n > 1 \quad \text{и означимо } m = \min_{j\in\{1,\ldots,n-1\}} |\lambda_j| \in [0, +\infty).$$

Нека је $j_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ такво да је $m = |\lambda_{j_0}|$ и $\varepsilon \in (0, m)$ произвољан број. Имамо да је

$$\det(A - \varepsilon \cdot I_n) \neq 0 \implies A - \varepsilon \cdot I_n \quad \text{је инвертибилна матрица.}$$

Заиста, уколико би за неко $\varepsilon \in (0, m)$ матрица $A - \varepsilon \cdot I_n$ била сингуларна имали бисмо

$$\det(A - \varepsilon \cdot I_n) = 0 \implies \varepsilon \in \sigma(A), \quad \text{што је контрадикција са избором броја } m.$$

59. Нека су A и B реалне матрице формата $n \times n$. Доказати да је

$$\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA).$$

Решење. Докажимо прво тражену једнакост у случају када је матрица A инвертибилна. Имамо да је

$$\det(I_n + AB) = \underbrace{\det\left(A(I_n - BA)A^{-1}\right) = \det(I_n + BA)}_{\text{Овде користимо Коши-Бинеову теорему}}.$$

Дефинишимо полином

$$P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(I_n + A_tB) - \det(I_n + BA_t), \quad \text{где је } A_t = A - t \cdot I_n, \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

За свако $t \notin \sigma(A)$ важи да је матрица A_t инвертибилна. Заиста, уколико би за неко $t_0 \notin \sigma(A)$ матрица A_{t_0} била сингуларна имали бисмо да

$$\det\left(A_{t_0} - t_0 \cdot I_n\right) = 0 \implies t_0 \in \sigma(A).$$

Како је скуп $\sigma(A)$ коначан (јер матрица формата $n \times n$ има n сопствених вредности) имамо да полином P има бесконачно много нула, те је[26]

$$(\forall t \in \mathbb{C}) \quad P(t) = 0 \implies P(0) = 0 \iff \det(I_n + AB) = \det(I_n + BA).$$

60. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност матрице A. Доказати да је и $\overline{\lambda}$ сопствена вредност матрице A.

Решење. У овом задатку је од суштинске важности да је матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, тј. да има елементе из поља реалних бројева да бисмо могли да искористимо особину $A = \overline{A}$ (подсетимо се, операција коњуговања на скупу матрица је

[25] Приметимо да из $\sigma(A) = \{0\}$ не следи да је $A = \mathbb{O}$. Заиста, не-нула матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ је таква да важи $\sigma(A) = \{0\}$. Уколико желимо пример за матрицу произвољног формата, узмимо матрицу која има све нуле осим у горњем десном углу, на пример.

[26] Овде смо корситили чињеницу (теорему) да сваки некнстантан полином степена $n \in \mathbb{N}$ има n нула у скупу $\mathbb{C}$. Како полином P има више од $\deg P$ нула, имамо да мора бити $P \equiv 0$.

дефинисана на природан начин тако што коњугујемо сваки елемент матрице). Нека је $\lambda \in \sigma(A)$ произвољно. Имамо низ еквиваленција

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0 &\iff \det\left(\overline{A} - \overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{I_n}\right) = 0 && \left(A = \overline{A} \text{ и } I_n = \overline{I_n} \text{ јер } A, I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}\right)\\
&\iff \det\left(\overline{A - \overline{\lambda} \cdot I_n}\right) = 0 && (\text{операција коњуговања је линеарна у } \mathbb{C})\\
&\iff \overline{\det\left(A - \overline{\lambda} \cdot I_n\right)} = 0 && (\text{операција коњуговања је линеарна у } \mathbb{C})\\
&\iff \det\left(A - \overline{\lambda} \cdot I_n\right) = 0 && \left(\text{јер важи } (\forall z \in \mathbb{C})\ z = 0 \iff \overline{z} = 0\right)\\
&\iff \overline{\lambda} \in \sigma(A) && (\text{по дефиницији спектра матрице})
\end{aligned}$$

61. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Доказати да матрице A и A^T имају исте сопствене вредности.

Решење. Доказаћемо да матрице A и A^T имају исте карактеристичне полиноме. Одавде ће следити да ови полиноми имају једнаке корене а то ће давати $\sigma(A) = \sigma(A^T)$. Нека су $\mathcal{P}_A$ и $\mathcal{P}_{A^T}$ карактеристични полиноми матрица A и A^T, редом и нека је $x \in \mathbb{C}$ произвољно. Имамо да је

$$\mathcal{P}_{A^T}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det\left(A^T - x \cdot I_n\right) = \det\left(A^T - x \cdot I_n^T\right) = \det\left(\left(A - x \cdot I_n\right)^T\right) = \det(A - x \cdot I_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_A(x).$$

Како је x било произвољно, имамо на основу дефиниције једнакости две функције, да је $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_{A^T}$. Тврђење следи.

Напомена 7. Матрица A у Задатаку 61 је била реална, тј. њени елементи су били из скупа реланих бројева. Да је матрица била комплексна исти би био закључак, тј. важило би $\sigma(A) = \sigma(A^T)$. Да ли важи и $\sigma(A) = \sigma(A^*)$? Како је (на основу (1))

$$\det\left((A - x \cdot I_n)^*\right) = \left(\overline{(A - x \cdot I_n)^T}\right) = \overline{\det\left((A - x \cdot I_n)^T\right)} = \overline{\det\left(A - x \cdot I_n\right)},$$

добијамо да $\lambda \in \sigma(A^*) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(A)$, тј. спектар матрице A^* чине коњуговани бројеви спектра матрице A.

Напомена 8. Напоменимо да нам Задатак 61 даје само једнакост $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_{A^T}$. Овај задатак не говори ништа о једнакости $\mathcal{N}(A - \lambda I_n) = \mathcal{N}\left(A^T - \lambda I_n\right)$, где је $\lambda \in \sigma(A)$. Оповргнимо примером последњу једнакост. Нека је $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Тада је, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{3, -2\}$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_1 је $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ док је сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_2 вектор $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. На основу Задатка 61 имамо да је и $\sigma\left(A^T\right) = \{3, -2\}$ али је сопствени вектор v_1' који одговара сопственој вредности $\lambda_1' = 3$ матрице A^T једнак $v_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ док је сопствени вектор v_1' који одговара сопственој вредности $\lambda_1' = 3$ матрице A^T једнак $v_1' = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Могу се конструисати примери и за веће формате матрица A.

62. Нека је x сопствени вектор који одговара једнострукој сопственој вредности λ матрице A. Уколико матрица B комутира са A, доказати да је тада x сопствени вектор и за матрицу B.

63. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Доказати да је карактеристични полином матрице AB једнак карактеристичном полиному матрице BA.

Решење. Нека су $\mathcal{P}_{AB}$ и $\mathcal{P}_{BA}$ карактеристични полиноми матрица AB и BA, редом. Претпоставимо најпре, да је матрица A инвертибилна и нека је $x \in \mathbb{C}$ произвољан број. Имамо да је

$$\mathcal{P}_{AB}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\det(AB - x \cdot I_n) = \det\left(A^{-1}\left(AB - x \cdot I_n\right)A\right)}_{\text{Овде смо користили Коши-Бинеову теорему}} = \det(BA - x \cdot I_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{BA}(x).$$

Како је x било произвољно, на основу дефиниције једнакости функција, имамо да је $\mathcal{P}_{AB} = \mathcal{P}_{BA}$. Претпоставимо сада да матрица A није инвертибилна и покушајмо да на неки начин искористимо оно што смо управо показали. Сетимо се Задатка 58, који тврди да од сингуларне матрице можемо направити јако блиску матрицу. Појам блискости ће бити јасан на крају доказа. Како показујемо једнакост две функције, нека је $x \in \mathbb{C}$ опет произвољно. Сингуларној матрици A, придрузимо регуларну матрицу $A_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} A - \varepsilon \cdot I_n$, где је $\varepsilon \in (0, m)$ и m минимум скупа модула сопствених вредности матрице A. На основу Задатка 58 имамо да је за свако $\varepsilon \in (0, m)$ матрица A_ε регуларна и на њу применимо претходно доказано. Имамо да је

$$\mathcal{P}_{A_\varepsilon B} = \mathcal{P}_{BA_\varepsilon} \iff \det(A_\varepsilon B - x \cdot I_n) = \det(BA_\varepsilon - x \cdot I_n).$$

Фиксирајмо на кратко x (које је произвољно). Како су све функције које се јављају у претходном изразу непрекидне можемо прећи у претходној једнакости на гранични процес када $\varepsilon \to 0$. Користећи то што је $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon = A$ (овај лимес представља помињану блискост) имамо да је

$$(\forall x \in \mathbb{C}) \quad \det(AB - x \cdot I_n) = \det(BA - x \cdot I_n) \implies \mathcal{P}_{AB} = \mathcal{P}_{BA}.$$

Напомена 9. Уколико зелимо претходном задатку да будемо прецизнији, приметимо да не можемо одабрати увек $\varepsilon \in (0, m)$, где је m минимум скупа модула не-нула сопствених вредности. То је случај уколико је $\sigma(A) = \{0\}$. У том случају матрицу A_ε дефинишемо за свако $\varepsilon > 0$ јер је тада A_ε инвертибилна матрица. Цело решење на даље је идентично.

64. Да ли постоји матрица $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ таква да важи

$$\operatorname{tr}(A) = 0 \quad \text{и} \quad A^2 + A^T = I_3 \ ?$$

Решење. Претпоставимо да матрица A са траженим својствима постоји и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ сопствене вредности матрице A. По теореми о пресликавању спектра[27] полиномом имамо да су $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_2^2 \in \mathbb{C}$ сопствене вредности матрице A^2. Такође, важи да је

$$A^T = I_3 - A^2 \implies A = \left(I_3 - A^2\right)^T = I_3 - \left(A^2\right)^T = I_3 - \left(A^T\right)^2 = I_3 - \left(I_3 - A^2\right)^2 \implies A^4 - 2A^2 + A = \mathbb{O}_3.$$

Како је $p(x) = x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)(x^2+x-1),\ x \in \mathbb{C}$ имамо да за свако $\lambda \in \sigma(A)$ важи

$$\{0\} = \sigma\big(\mathbb{O}_3\big) = p\big(A\big) = \big\{\lambda \in \sigma(A) \bigm| p(\lambda) = 0\big\} \implies \sigma\big(A\big) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subseteq \left\{0, 1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

На основу услова задатка следи да је

$$\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}\big(I_3 - A^T\big) = \operatorname{tr}\big(I_3\big) - \operatorname{tr}\big(A^T\big) = 3 - 0 = 3.$$

Из $\operatorname{tr}(A) = 0$ закључујемо да су једине могућности за сопствене вредности матрице A уређене тројке

$$\big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\big) = \big(0, 0, 0\big) \quad \text{и} \quad \big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\big) = \left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

У првом случају је

$$\big(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\big) = \big(0^2, 0^2, 0^2\big) \implies 3 = \operatorname{tr}\big(A^2\big) = 0 \text{ што је контрадикција.}$$

У другом случају је

$$\big(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\big) = \left(1^2, \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \implies 3 = \operatorname{tr}(A^2) = 4 \text{ што је контрадикција.}$$

Дакле, наша претпоставка да матрица A са захтеваним својстима постоји је погрешна.

Напомена 10. Да смо којим случајем добили да важе једнакости (на оним местима у претходном задатку где се јављају контрадикције) не бисмо имали никакав закључак!

65. Нека је A квадратна матрица. Доказати еквиваленцију

$$(\exists k \in \mathbb{N})\ A^k = \mathbb{O} \iff \sigma(A) = \{0\}.$$

[27] Теорема о пресликавању спектра полиномом тврди да је $\sigma(p(A)) = \big\{p(x) \bigm| x \in \sigma(A)\big\} \overset{\text{def}}{:=} p(\sigma(A))$ за сваки полином p. Ово тврђење је лако показати. Заиста, нека је $\lambda \in \sigma(A)$ произвољно, $x \neq 0$ њој одговарајући сопствени вектор и $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ полином. Тада је $p(A)(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j \lambda = \ldots = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right) x = p(\lambda)x$ те је $p(\lambda)$ сопствена вредност матрице $p(A)$ и чак шта више, добили смо да је сопствени x вектор који одговара сопственој вредности λ остао исти. Овиме је показано да је $p(\sigma(A)) \subseteq \sigma(p(A))$. Докажимо сада и обрнуту инклузију. Нека је $\mu \in \sigma(p(A))$ произвољно. Потребно је наћи неко $\lambda \in \sigma(A)$ тако да је $\mu = p(\lambda)$. Како је $\mu \in \sigma(p(A))$ следи да постоји $x \neq 0$ вектор тако да јеп $p(A)x = \mu x$. Пребацимо све на леву страну једнакости, односно уочимо полином $r(x) = p(x) - \mu$ и нека се он раставља као $r(x) = a \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ за неке $a, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Сада је $r(A) = p(A) - \mu \cdot I_n = a \cdot (A - x_1 \cdot I_n)(A - x_2 \cdot I_n) \cdots (A - x_n \cdot I_n)$. Како је $\mu \in \sigma(p(A))$ следи да матрица $r(A)$ не може бити инвертибилна те постоји $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ тако да матрица $A - x_{i_0} I$ није инвертибилна. У супротном би за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ матрице $A - x_i I$ биле инвертибилне те би и $r(A)$ била инвертибилна, што је нетачно. Дакле, како матрица $A - x_{i_0} I$ није инвертибилна имамо да је $x_{i_0} \in \sigma(A)$ а како је $r(x_{i_0}) = 0$ имамо да је $p(x_{i_0}) = \mu$. Дакле, показали смо да је и $\sigma(p(A)) \subseteq p(\sigma(A))$. Тврђење следи.

Решење. Нека је матрица A таква да је за неко $k \in \mathbb{N}$ задовољено $A^k = \mathbb{O}$. Увек важи $\sigma(A) \neq \varnothing$. Нека је $\lambda \in \sigma(A)$ произвољно. По тереми о пресликавању спректра полиномом, имамо да мора бити $\lambda^k = 0 \implies \lambda = 0 \implies \sigma(A) = \{0\}$. Нека је сада $\sigma(A) = \{0\}$ и покажимо да постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да је $A^k = \mathbb{O}$. На основу теореме Кејли-Хамилтона важи да је $\mathcal{P}_A(A) = \mathbb{O}$. Са друге стране, како је $\sigma(A) = \{0\}$ имамо да је $\mathcal{P}_A(x) = (-1)^n x^n,\ x \in \mathbb{C}$, где је $n \in \mathbb{N}$ димензија матрице A. Дакле, тражено k је управо број n. Тврђење следи.

Напомена 11. Природно је након овог задатка поставити следеће питање. Када је нилпотентна матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ једнака нула матрици? Са A^* ћемо означавати матрицу $\left(\overline{A}\right)^T$. Докажимо да уколико имамо нилпотентну матрицу A која је и нормална[28] да тада A мора бити нула матрица. Како је по претпоставци матрица A нилпотентна имамо да постоји $k \in \mathbb{N}$ тако да је $A^k = \mathbb{O}_n$. Можемо сматрати, без губљења општости, да је k најмањи такав природан број. Докажимо да мора бити $k = 1$. Претпоставимо да је $k > 1$. Означимо $B = A^{k-1}$, где је $k-1 \in \mathbb{N}$ јер је по претпоставци $k > 1$. Како је A нормална тада и B мора бити нормална. Нека је $x \in \mathbb{C}^n$ произвољан вектор. Покажимо да ће тада бити $\|Bx\| = 0$, одакле ће следити да је $Bx = \mathbf{0}_n$ те ће бити $A^{k-1} = B = \mathbb{O}_n$, што представља контрадикцију са тим да је k најмањи природан број за који важи $A^k = \mathbb{O}_n$, те ће бити $k = 1$ одакле ће следити да је A нула матрица. Имамо

$$\|Bx\|^2 = (Bx)^* Bx = x^*(B^*B)x. \tag{22}$$

Дакле, да завршимо доказ довољно је показати да је $B^*B = \mathbb{O}_n$, због (22). За свако $x \in \mathbb{C}^n$ је задовољено

$$\begin{aligned}\|B^*Bx\|^2 &= (B^*Bx)^*(B^*Bx) \quad &&(\text{Норма у } \mathbb{C}^n)\\ &= x^*B^*(BB^*)Bx &&(\text{Правило обрнутог редоследа и асоцијативност})\\ &= x^*B^*(B^*B)Bx &&(\text{Матрица } B \text{ је нормална})\\ &= x^*(B^*)^2B^2x &&(\text{Асоцијативност}).\end{aligned} \tag{23}$$

Како је $B^2 = \left(A^{k-1}\right)^2 = A^{2k-2}$ и $2k-2 \geqslant k$ јер је $k > 1$ имамо да је $B^2 = \mathbb{O}_n$, те се (23) своди на $\|B^*Bx\| = 0 \implies B^*Bx = \mathbf{0}_n \implies B^*B = \mathbb{O}_n$. Закључак следи.

66. Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ различите сопствене вредности симетричне матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и нека су $u, v \in \mathbb{C}^{n\times n}\backslash\{\mathbf{0}\}$ сопствени вектори који одговарају сопственим вредностима α и β, редом. Доказати да су вектори u и v међусобно нормалани[29].

Решење. Нека су $u, v \in \mathbb{C}^{n\times n}\backslash\{\mathbf{0}\}$ сопствени вектори који одговарају сопственим вредностима $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, редом. Показхимо најпре да мора бити $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. На основу тога што је $Au = \alpha u$, користећи симетричност матрице A и правило обрнутог редоследа[30], имамо да је

$$\overline{Au} = \overline{\alpha u} \iff \overline{A}\overline{u} = \overline{\alpha}\cdot\overline{u} \iff \overline{u}^T A^T = \overline{\alpha}\cdot\overline{u}^T \iff \overline{u}^T A = \overline{\alpha}\cdot\overline{u}^T \implies \overline{u}^T A u = \overline{\alpha}\cdot\overline{u}^T u = \overline{\alpha}\|u\|^2.$$

Са друге стране имамо

$$Au = \alpha u \implies \overline{u}^T A u = \alpha\overline{u}^T u = \alpha\|u\|^2.$$

Дакле, показали смо да је $\overline{u}^T Au = \alpha\|u\|^2$ као и $\overline{u}^T Au = \overline{\alpha}\|u\|^2$ те важи и $\alpha\|u\|^2 = \overline{\alpha}\|u\|^2$. Како је $u \neq \mathbf{0}$ имамо да је и $\|u\| \neq 0$ те је $\alpha = \overline{\alpha} \iff \alpha \in \mathbb{R}$. Идентично се показује да $\beta \in \mathbb{R}$. Сада имамо низ једнакости

$$\begin{aligned}\alpha(\overline{u}^T v) &= \\ (\alpha\overline{u}^T)v &= \quad (\text{јер је } \alpha \in \mathbb{R} \iff \alpha = \overline{\alpha}) =\\ (\overline{\alpha\cdot u})^T v &= \quad (\text{јер је } u \text{ сопствени вектор која одговара сопственој вредности } \alpha) =\\ (\overline{Au})^T v &= \quad (\text{да је } \overline{Au} = \overline{A}\cdot\overline{u} \text{ се види ако распишемо једначине}) =\\ (\overline{A}\overline{u})^T v &= \quad (\text{јер је } A \text{ матрица са реалним елементима}) =\\ (A\overline{u})^T v &= \quad (\text{правило обрнутог редоследа и асоцијативност множења матрица}) =\\ \overline{u}^T(A^T v) &= \quad (\text{јер је } A \text{ симетрична матрица}) =\\ \overline{u}^T(Av) &= \quad (v \text{ је сопствени вектор који одговара сопственој вредности } \beta) =\\ \overline{u}^T(\beta v) &= \\ \beta(\overline{u}^T v). &\end{aligned}$$

Дакле, показали смо да је $(\alpha - \beta)u^T v = 0$. Како је $\alpha - \beta \neq 0$ следи да мора бити $u^T v = 0$. Одавде, по дефиницији нормалности, имамо да су вектори u и v нормални.

[28] Матрица A је нормална ако је $A^*A = AA^*$.

[29] Нормални, односно ортогонални вектори су синоними. По дефиницији, вектори $u, v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ су ортогонални уколико је $u^T v = [0]_{1\times 1}$, односно уколико је скаларни производ вектора u и v број 0. Уколико имамо комплексан векторски простор (над пољем $\mathbb{C}$) скаларни производ вектора u и v дефинишемо као $\overline{u}^T v$, односно ако је $\overline{u}^T v = [0]_{1\times 1}$ кажемо да су ови вектори ортогонални. Приметимо да нормалност можемо да разматрамо у било ком унитарном простору (векторски простор са дефинисаним скаларним производом). Помоћу скаларног производа изучавамо геометрију конкретног унитарног простора на коме је дефинисан тај скаларни производ. Понекад ћемо користити и ознаку $\perp$.

[30] Правило обрнутог редоследа је у ствари теорема која каже да кад год су A и B (у општем случају комплексне) матрице такве да је дефинисан производ AB важи $(AB)^T = B^T A^T$. Слично томе, уколико су матрице A и B инвертибилне (дакле квадратне) важи $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Напомена 12. Нека је $\mathcal{X} = (X, +, \cdot, \mathbb{F})$ векторски простор, где је $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Дефинишемо функцију $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ за коју кажемо да је норма, уколико важе следеће особине:

(1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(2) $\|x\| \geqslant 0$, за свако $x \in X$ (не-негативност норме);

(3) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, за свако $\lambda \in \mathbb{F}$ и свако $x \in X$ (хомогеност норме);

(4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, за свако $x, y \in X$ (неједнакост троугла);

Уређен пар $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ називамо нормиран простор.

1.7 Детерминанте вишег реда

67. Нека је A квадратна матрица која на споредној[31] дијагонали има све јединице а ван споредне дијагонале све нуле. Одредити $\det(A)$ и A^{-1}.

Решење. Одредимо прво $\det(A)$. То можемо урадити на више начина. Одредимо најпре детерминанту по дефиницији (1) . Јасно да је једини не нула сабирак у дефиницији (1) онај који одговара пермутацији $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S}_n$. Број инверзија које гради ова пермутација једнак је $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{1}{2}n(n+1)$. На основу дефиниције (1) имамо да је $\det(A) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{n} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$. Приметимо да смо $\det(A)$ могли да израчунамо мењајући места врстама (колонама), користећи својство да детерминанта мења знак уколико заменимо места било којим двема врстама. Други део задатка је прост. По дефиницији множења матрица и по дефицнији инверзне матрице, добијамо да је $A^{-1} = A$.

Напомена 13. Може се доказати општије тврђење, које даје вредност детерминанте уколико су испод (или изнад) споредне дијагонале све нуле. Нека су испод споредне дијагонале матрице $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1,\ldots,n}$ све нуле и нека је $p \in \mathcal{S}_n$ произвољна пермутација, различита од $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S}_n$. То значи да је барем један од бројева $a_{1p(1)}$, $a_{1p(1)}, \ldots, a_{n-1,p(n-1)}$ и $a_{np(n)}$ једнак нули, те је сабирак који одговара овој пермутацији у дефиницји (1) једнак нули. То значи да се цео израз из дефиниције (1) своди на сабирак који одговара пермутацији $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S}_n$, односно

$$\det(A) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_{n,1} a_{n-1,2} \cdots a_{1,n}.$$

68. Нека је $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Израчунати детерминанту

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & 2 & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & 3 & \ldots & a & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & n-2 & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & n-1 & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

Решење. Имамо да је

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ n & 2 & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & 3 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & n-2 & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & n-1 & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}_{n \times n} + \underbrace{\begin{vmatrix} n & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & 2 & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & 3 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & n-2 & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & n-1 & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}_{n \times n}}_{=0 \text{ јер је } V_1 = V_n}.$$

[31] Споредну дијагоналу матрице $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1,\ldots n}$ чине елементи са позиција $(n,1), (n-1,2), \ldots, (2, n-1)$ и $(1, n)$.

Поновимо овај корак, али примењујући га на другу врсту. Имамо

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n & 3 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-2 & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}_{n\times n} + \underbrace{\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-2 & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}_{n\times n}}_{=0 \text{ јер је } V_2 = V_n}.$$

У последњем кораку имамо да је

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}_{n\times n} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1-n & n & n & \dots & n & n & n \\ n & 2-n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & 3-n & \dots & a & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}_{n\times n}}_{=0 \text{ јер је } V_{n-1} = V_n}.$$

Дакле, добили смо да је

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}_{n\times n} = (1-n)\cdot(2-n)\cdots(-2)\cdot(-1)\cdot n = (-1)^{n-1}n!, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Ова формула важи и ако је $n = 1$ (наравно, уколико D_1 дефинишемо да има вредност 1). Напоменимо да смо од својстава детерминанте у овом поступку користили да је детерминанта адитивна функција својих врста. Такође, ако су изнад главне дијагонале све нуле тада је вредност детерминанте једнака производу елемената на главној дијагонали, што је такође употребљено у задатку.

69. Нека је $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ и $a, b \in \mathbb{C}$. Израчунати детерминанту

$$D_n = \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a & a & a \\ a & b & a & \dots & a & a & a \\ a & a & b & \dots & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b & a & a \\ a & a & a & \dots & a & b & a \\ a & a & a & \dots & a & a & b \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Решење. Додајмо i-ту колону за свако $i \in \{1, \dots, n-1\}$ последњој. Добијамо

$$D_n = \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a & a & (n-1)\cdot a + b \\ a & b & a & \dots & a & a & (n-1)\cdot a + b \\ a & a & b & \dots & a & a & (n-1)\cdot a + b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b & a & (n-1)\cdot a + b \\ a & a & a & \dots & a & b & (n-1)\cdot a + b \\ a & a & a & \dots & a & a & (n-1)\cdot a + b \end{vmatrix}_{n\times n} = \Big((n-1)\cdot a + b\Big)\cdot \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a & a & 1 \\ a & b & a & \dots & a & a & 1 \\ a & a & b & \dots & a & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b & a & 1 \\ a & a & a & \dots & a & b & 1 \\ a & a & a & \dots & a & a & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Уколико од i-те врсте за свако $i \in \{1, \dots, n-1\}$ одузмемо n-ту врсту, добијамо

$$D_n = \Big((n-1)\cdot a + b\Big) \cdot \begin{vmatrix} b-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b-a & 0 \\ a & a & a & \dots & a & a & 1 \end{vmatrix}_{n\times n} = \Big((n-1)\cdot a + b\Big)\cdot (b-a)^{n-1}.$$

Напоменимо да смо последњу једнакост добили тако што смо помножили све елементе на главној дијагонали детерминанте, јер се изнад главне дијагонале налазе све нуле.

70. Нека је $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ и $a, b \in \mathbb{C}$. Израчунати детерминанту

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

71. Нека је $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ и $x, y \in \mathbb{C}$. Израчунати детерминанту

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Решење. Уколико применимо развој по последњој колони детерминанте D_n ($n \geqslant 2$ јер тада детерминанте заиста и изгледају онако као што ће бити добијено), имамо

$$D_n = y\cdot(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & y \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + x\cdot(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

Прва детерминанта изнад главне дијагонале има све нуле, те је њена врендост y^{n-1}. Друга детерминанта изнад главне дијагонале има све нуле, те је њена вредност x^{n-1}. Одавде, закључујемо да је

$$D_n = y\cdot(-1)^{n+1}y^{n-1} + x\cdot(-1)^{n+n}x^{n-1} = (-1)^{n+1}y^n + x^n, \quad \forall n \geqslant 2.$$

72. Нека је $n > 1$ природан број. Методом рекурентних једначина, израчунати детерминанту

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Решење. Развијмо детерминанту по првој колони. Имамо да је

$$D_n = 5\cdot(-1)^{1+1}D_{n-1} + 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}. \tag{24}$$

Примењујући сада развој по првој врсти последње детерминанте из (24) имамо да је

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = 3\cdot(-1)^{1+1}D_{n-2}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) добијамо да је

$$D_n = 5\cdot D_{n-1} - 6\cdot D_{n-2}, \quad n \geqslant 3. \tag{26}$$

Карактеристична једначина диференцне једначине (26) је

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = 3.$$

Решења диференцне једначине (26) су описана као

$$D_n = c_1\cdot 2^n + c_2\cdot 3^n, \quad n \geqslant 3,$$

где су c_1 и c_2 реалне константе које треба одредити. То радимо тако што рачунамо директно D_2 и D_3 (не можемо користити D_1 јер је по услову задатка $n > 1$). Имамо да је

$$19 = 5\cdot 5 - 2\cdot 3 = D_2 = C_1\cdot 2^2 + c_2\cdot 3^2 = 4c_1 + 9c_2, \tag{27}$$

$$65 = D_3 = C_1\cdot 2^3 + c_2\cdot 3^3 = 8c_1 + 27c_2, \tag{28}$$

Решавајући линеаран систем (27) и (28) добијамо да је $c_1 = -2$ и $c_2 = 3$. Коначно, имамо да је

$$D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Напомена 14. Приметимо да смо могли да развијамо полазну детерминанту и последњу детерминату из (24) по последњој колони. У том случају се добијају коефицијенти диференцне једначине као функције од n (јер се јављају чиниоци облика $(-1)^{n+1}$), па је теже решити такву једначину.

Напомена 15. Приметимо да би систем (27) и (28) имао исто решење да смо посматрали почетне услове D_1 и D_2. У услову задатка је стајало $n > 1$ те смо морали да посматрамо D_2 и D_3, што је теже. За $n = 1$ се не види структура детерминанте те је зато дат услов $n > 1$. Уколико би дефинисали $D_1 = |5|_{1\times 1} = 5$, формула коју смо добили као решење задатка би била тачна и у случају $n = 1$. То није увек случај.

73. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A = \left[i^2 + j^2 \right]_{i,j=1:n}$. Израчунати $\det(A)$.

Решење. Уколико је $n = 1$ тада је $A = \left[\ 1^2 + 1^2\ \right]_{1\times 1} \implies \det(A) = 2$. Уколико је $n = 2$ тада је

$$A = \begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \implies \det(A) = 2\cdot 8 - 5\cdot 5 = -9.$$

Нека је на даље $n \geqslant 3$. Од послдење колоне одузмимо претпоследњу и од претпоследње ону која је до ње са леве стране. Добијамо да матрица A има две пропорционалне колоне, те је $\det(A) = 0$. Приметимо да је било нужно испитати случајеве $n = 1$ и $n = 2$ јер у тим случајевима не можемо урадити оно што је урађено у случају када је $n \geqslant 3$.

74. Нека је $n > 1$ природан број. У зависности од $a, b \in \mathbb{R}$ израчунати

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Решење. Развијмо детерминанту D_n по првој колони. Имамо да је

$$D_n = (a+b)(-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}}_{=D_{n-1}} +$$

$$+1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

Уколико последњу детерминанту развијемо по првој врсти, добијамо рекурентну једначину

$$D_n - (a+b)\cdot D_{n-1} + ab\cdot D_{n-2}, \qquad n \geqslant 4. \tag{29}$$

Карактеристична једначина рекурентне једначине (29) је

$$\lambda^2 - (a+b)\cdot\lambda + ab = 0 \iff \lambda = a \vee \lambda = b.$$

Размотримо најпре случај када је $a \neq b$. Опште решење диференцне једначине (29) је описано као

$$D_n = c_1\cdot a^n + c_2\cdot b^n, \quad n \geqslant 2, \tag{30}$$

где су c_1 и c_2 реалне константе које треба одредити. На основу система једначина $a+b = D_1 = c_1\cdot a + c_2\cdot b$ и

$$a^2+ab+b^2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = D_2 = c_1\cdot a^2 + c_2\cdot b^2,$$

заменом у (30) налазимо да је

$$D_n = \frac{1}{a-b}\Big(a^{n+1} - b^{n+1}\Big), \quad \forall n \geqslant 2.$$

Уколико је $a = b$, тада опште решење једначине (29) тражимо у облику

$$D_n = \big(c_1 + c_2\cdot n\big)\cdot a^n, \quad \forall n \geqslant 2,$$

где су c_1 и c_2 реалне константе које треба одредити. Опет, користећи вредности детерминаната D_2 и D_3 које директно израчунавамо, добијамо да је $c_1 = c_2 = 1$ те је

$$D_n = \big(1+n\big)\cdot a^n, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Коначно, имамо

$$D_n = \begin{cases} \frac{1}{a-b}\Big(a^{n+1} - b^{n+1}\Big), & \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \quad \text{ако је } a \neq b, \\ \big(1+n\big)\cdot a^n, & \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \quad \text{ако је } a = b. \end{cases}$$

Напомена 16. Приметимо да смо користили и вредност D_1. Ово је корисно али мало неправилно јер су све детерминанте дефинисане за $n \geqslant 2$. Наравно, овако је рачун јендоставнији. Може се проверити да се исто добија ако се користе вредности D_2 и D_3.

75. Нека је $n \in \mathbb{N}$. У скупу $\mathbb{C}$ решити једначину

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x-(n-3) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x-(n-2) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & x-(n-1) \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Решење. Решимо задатак на два начина. Први начин ће бити директно израчунавање детерминанте. Од i-те колоне одузмимо прву колону, где је $i \in \Big\{2, \dots, n, n+1\Big\}$. Добијамо детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x-(n-2) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-(n-1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x-n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

која има једнаку вредност као полазна детерминанта. Како смо добили детерминанту која изнад главне дијагонале има све нуле, имамо да је њена вредност

$$1 \cdot \Big(x-1\Big) \cdot \Big(x-2\Big) \cdots \Big(x-(n-2)\Big) \cdot \Big(x-(n-1)\Big) \cdot \Big(x-n\Big).$$

Дакле, полазна једначина је еквивалентна са

$$0 = 1 \cdot \Big(x-1\Big) \cdot \Big(x-2\Big) \cdots \Big(x-(n-2)\Big) \cdot \Big(x-(n-1)\Big) \cdot \Big(x-n\Big) \iff x \in \Big\{1, 2, \dots, n\Big\}.$$

Решимо задатак сада на други начин. Приметимо да ова детерминанта представља полином по x, степена највише n са водећим коефицијентом 1. Означимо овај полином са P. Полином P се раставља као

$$P(x) = 1 \cdot (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n), \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{C}.$$

Дакле, наша једначина има скуп решења $\Big\{a_1, \dots, a_n\Big\}$, која требамо одредити. Приметимо да уколико заменимо уместо x у детерминанту $x = 1$ (односно $P(1)$) добијамо да су прва и друга врста једнаке, одакле следи да је вредност детерминанте једнака 0 односно да је $x = 1$ решење једначине. Слично томе, имамо да су и бројеви $2, 3, \dots, n-1$ и n решења једначине. Како смо наши n решења закључујемо (јер једначина има највише n решења у $\mathbb{C}$) да су то сва решења у скупу $\mathbb{C}$, односно $\Big\{a_1, \dots, a_n\Big\} = \Big\{1, 2, \dots, n-1, n\Big\}$.

76. Нека је $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. У зависности од $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ израчунати детерминанту

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b & b \\ c & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & 0 & 0 & \dots & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Решење. Уколико је $d = 0$ имамо да је $D_n = 0$ за свако $n \geqslant 3$. Нека је на даље $d \neq 0$. Развијмо ову детерминанту по последњој врсти. Имамо да је

$$D_n = c \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} b & b & \dots & b & b & b \\ d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + d \cdot (-1)^{n+n} \cdot \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b & b \\ c & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & 0 & 0 & \dots & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

Друга детерминанта представља управо D_{n-1}. Уколико прву детерминанту развијемо по последњој колони, добијамо рекурентну везу

$$D_n = d \cdot (-1)^{n+n} D_{n-1} - c \cdot (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdot d^{n-2}, \quad n \geqslant 3,$$

односно, након срећивања

$$D_n = d \cdot D_{n-1} - bc \cdot d^{n-2}, \quad n \geqslant 3. \tag{31}$$

Приметимо да је $n \geqslant 3$ јер је тада могуће извршити поменута развијања (матрица D_1 није дефинисана). Дакле, проблем смо свели на решавање диференцне (рекурентне) једначине (31). Једначина (31) је нехомогена. Ову једначину можемо решити сукцесивном заменом у себе саму. Примењујући ову идеју, добијамо да је

$$D_n = d^{n-2}\Bigg(\underbrace{D_2}_{=\,ad\,-\,bc} - (n-2)bc \Bigg) = d^{n-2}\Big(ad - (n-1) \cdot bc\Big), \quad n \geqslant 2. \tag{32}$$

Напомена 17. Једнакост (31) важи за $n \geqslant 3$. Како она описује матрице $D_2, D_3, \ldots$, имамо да једнакост (32) важи за $n \geqslant 2$. Приметимо да у овом задатку, уколико D_1 дефинишемо као $D_1 = |a|_{1\times 1} = a$, формула (32) неће важити за $n = 1$.

77. Нека је

$$D = \begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix}.$$

Доказати да је $D \neq 0$.

Решење. Писматрати остатак при дељењу наведене детерминанте са 7. Добија се да је $D \equiv_7 -1$.

1.8 Разни задаци

78. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Бројеви од 1 до n^2 су поређани у матрицу формата $n \times n$. Колико може да износи најмањи а колико може да износи највећи ранг ове матрице?

Решење. Ако је $n = 1$ тада је матрица формата 1×1 и дата је са $[1]_{1\times 1}$ те јој је ранг 1. Нека је сада $n > 1$.

Решимо прво део задатка који се односи на максимални ранг. Идеја је показати да можемо формирати такву матрицу, уписујући бројеве од 1 до n^2 (без понављања), чија је детерминанта различита од 0, одакле ће следити да јој је ранг баш $n \in \mathbb{N}$. Како уписујемо у матрицу бројеве из скупа $\mathbb{N}$ имамо да вредност детерминанте припрада скупу $\mathbb{Z}$ без обзира на распоред бројева, што се лако види из дефиниције (1) детерминанте. Уколико би неким распоредом бројева по матрици постигли да детерминанта буде непаран цео број имаћемо да је она онда различита од 0 што је еквивалентно са тим да је ранг матрице баш n. Због тога поставимо по главној дијагонали матрице непарне бројеве произвољно. Ово је могуће да се уради јер непарних бројева од 1 до n^2 има више од n колико износи број поља на главној дијагонали. Поставимо сада испод главне дијагонале у свако поље паран број. И ово је могуће урадити јер парних бројева од 1 до n^2 има више од $\frac{n^2-n}{2}$. Заиста, уколико је n парно, парних бројева од 1 до n^2 има $\frac{n^2}{2} > \frac{n^2-n}{2}$. Уколико је n непаран број, онда парних бројева од 1 до n^2 има $\frac{n^2-1}{2} > \frac{n^2-n}{2}$. Означимо овако формирану матрицу са A и нека је $id : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ дефинисана са $id = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S}_n$ јединична пермутација. По дефиницији (1) докажимо да је

$$\mathbb{Z} \ni \overbrace{\det A \equiv_2 1}^{\text{Ово показујемо}} \qquad \underbrace{\Longrightarrow \det A \neq 0}_{\text{Јер нула не може бити непаран број}} \qquad \Longrightarrow \operatorname{rang} A = n.$$

Имамо

$$\det A \overset{\text{def}}{=} \sum_{p \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\operatorname{inv}(p)} \prod_{j=1}^{n} a_{jp(j)} = \overbrace{\underbrace{\sum_{p \in \mathcal{S}_n \setminus \{id\}} (-1)^{\operatorname{inv}(p)} \prod_{j=1}^{n} a_{jp(j)}}_{\text{Овај број мора бити паран}} + \underbrace{\prod_{j=1}^{n} a_j \underbrace{p(j)}_{=\,j,\ p\,=\,id}}_{\text{Овај број је непаран}}}^{\text{Све заједно је напаран број}} \Longrightarrow \det A \neq 0.$$

Дакле, максимални ранг износи n и он се постиже распоредом бројева од 1 до n^2 на описани начин по матрици (ово није једини распоред бројева од 1 до n^2 по матрици за који се постиже ранг n).

Докажимо да ранг матрице мора бити > 1 ма како уписали бројеве од 1 до n^2 (не може бити 0 јер је ранг неке матрице 0 ако и само ако је та матрица нула матрица, а наша то није те је ранг $\geqslant 1$ а ми доказујемо да мора бити > 1). Претпоставимо супротно, да је ранг матрице (за неки распоред бројева од 1 до n^2) једнак баш 1. То би значило да се у матрици налазе два иста елемента што је контрадикција. Зашто?

Конструишимо сада матрицу ранга 2 уписујући бројеве од 1 до n^2. Уочимо матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2n+1 & n+2 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-2)n+1 & (n-2)n+2 & \dots & (n-2)n+n \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & (n-1)n+n \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Доказаћемо да је $\operatorname{rang}(A) = 2$. Уколико одузмемо од i-те врсте $(i-1)$-ву врсту за $i = \overline{n,2}$ добијамо сличну матрицу

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Сада поновимо поступак, тј. одузмемо од i-те врсте $(i-1)$-ву врсту за $i = \overline{n,3}$. Добијамо сличну матрицу матрици A_1, која је дата са

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Јасно је да последња матрица има ранг 2. Како се код елементарних трансформација ранг одржава, имамо

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_1) = \operatorname{rang}(A_2) = 2.$$

Заиста, уколико би прва и друга врста биле линеарно зависне имали бисмо

$$\big(\exists k \in \mathbb{R}\big) \quad (1,2,\dots,n) = k \cdot \underbrace{(n,n,\dots,n)}_{n \text{ координата}} \implies k\cdot n = 1 \quad \text{и} \quad k \cdot n = 2 \implies 1 = 2,$$

што је контрадикција са претпоставком да су прва и друга врста линеарно зависне. Дакле, прва и друга врста су линеарно независне, те је заиста ранг једнак 2, на основу дефиниције[32] ранга матрице.

79. Нека је $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ и $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Доказати једнакост[33]

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} = \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).$$

Решење. Означимо

$$\mathcal{W}(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}, \quad x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}.$$

[32] Боље речено, на основу једне од еквивалентних дефиниција ранга матрице. У овом случају је то дефиниција да је ранг матрице број линеарно независних врста, односно број линеарно независних колона матрице. Поновимо још једном, доказује се да су ова два броја једнака те је коректно увести овакву дефиницију.

[33] Детерминанта из овог задатка се назива Вандермондова детерминанта. Ова детерминанта се врло често среће у математици и применама и многи проблеми се своде на проблем у коме фигурише ова детерминанта. Носи назив по француском математичару Александру Вандермонду (1735-1796).

Уколико постоје различити $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ такви да је $x_i = x_j$ тада је $\mathcal{W}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, јер имамо две исте врсте у детерминанти, па тврђење у том случају важи. Нека је сада $x_i \neq x_j$ кад год је $i \neq j$. Формирајмо полином P_{n+1} са

$$P_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & x_n^{n+1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{vmatrix}_{(n+2)\times(n+2)} = \mathcal{W}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x), \ x \in \mathbb{C}. \tag{33}$$

Имамо да је $\deg P_{n+1} \leqslant n+1$ и да су нуле овог полинома бројеви $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ те се полином P_{n+1} раставља као

$$P_{n+1}(x) = c_{n+1} \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \ c_{n+1} = \text{const}, \ x \in \mathbb{C}. \tag{34}$$

Константа c_{n+1} се добија као коефицијент уз x^{n+1} полинома P_{n+1}. На основу развоја детерминанте по последњој врсти имамо да је $c_{n+1} = \mathcal{W}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ те на основу (34) имамо

$$P_{n+1}(x) = \mathcal{W}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \ x \in \mathbb{C}. \tag{35}$$

Користећи (33) и (35), добијамо рекурентну релацију

$$\mathcal{W}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n)\mathcal{W}(x_0, x_1, \ldots, x_n). \tag{36}$$

На основу (36), индуктивно добијамо да је

$$\mathcal{W}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

Приметимо да смо користили у последњем кораку једнакост (формално, ово је база индукције)

$$\mathcal{W}(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}_{2\times 2} = x_1 - x_0.$$

80. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ има на главној дијагонали све нуле а на осталим местима строго позитивне елементе. Колико најмање може да износи ранг матрице A?

81. Доказати идентитет

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & 0 & \ldots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & 0 & \ldots & 0 & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & 0 & \ldots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix}_{2n\times 2n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

82. Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да је вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n-1 \\ 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 3 \\ n-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

једнака квадрату целог броја.

Решење. Означимо детерминанту са D_n. Уколико је $n = 3$ имамо да је детерминанта једнака

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 8 = 16 = 4^2.$$

За $n = 4$, након израчунавања имамо да је $D_4 = 25 = 5^2$. Нека је на даље $n > 4$. Посматрајмо све колоне осим прве и последње. Како је $n > 4$, ових колона има барем 3. Из њих је могуће изабрати највише два не нула елемента. То значи, да трећи изабрани елемет мора бити обавезно једнак нули. Дакле, на основу дефиниције детерминанте (1) закључујемо да је вредност детерминанте $D_n = 0 = 0^2$ за $n > 4$. Тврђење је показано.

83. Да ли постоји матрица $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ таква да за неке $k, n \in \mathbb{N}$ важи

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A^n = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}?$$

Решење. Докажимо да не постоји матрица $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ таква да за неке $k, n \in \mathbb{N}$ важи услов задатка. Претпоставимо супротно, да таква матрица постоји. Прво, из $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ следи да је $\det A \in \mathbb{C}$. На основу Коши-Бинеове теореме имамо да је

$$\big(\det A\big)^k = \det\big(A^k\big) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = -2.$$

Одавде имамо да је $\big|\det A\big|^k = 2$ те закључујемо да је $\big|\det A\big| > 1$ јер уколико би било $\big|\det A\big| \leqslant 1$ имали би да је $\big|\det A\big|^k \leqslant 1$ што је нетачно. Аналогно, добијамо да је $\big|\det A\big|^n = 4$. Како је $\big|\det A\big|^k = 2$ имамо да је $\big|\det A\big|^{2k} = 4$ те тада важи

$$\big|\det A\big|^{2k} = \big|\det A\big|^n.$$

Сада, на основу особина експоненцијалне функције (основа је позитивна, користимо да је експоненцијална фунцкија $1-1$) имамо да мора бити $n = 2k$. Остаје да проверимо да ли је ово могуће (уколико добијемо да је ово могуће немамо закључак да овакве матрице постоје!). Приступамо провери. Важи

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = A^n = A^{2k} = \big(A^k\big)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

што је очигледно нетачно. Приметимо да смо у претходном реду користили само асоцијативност множења матрица. Дакле, наша претпоставка да постоји матрица A са траженим својствима је погрешна, те закључујемо да таква матрица не постоји.

Напомена 18. Приметимо да матрице $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ комутирају. Да су ове матрице такве да међусобно не комутирају имали бисмо директно закључак да бројеви k и n не постоје. Зашто?

84. Нека су $A \in \mathbb{C}^{4\times 2}$ и $B \in \mathbb{C}^{2\times 4}$ такве да важи

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одредити матрицу BA.

Решење. Идеја је да користимо блокове у матрицама A, B и AB и преко њих дођемо до матрице BA. Тада је матрица AB дате преко својих блокова као

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & -I_2 \\ \hline -I_2 & I_2 \end{array}\right].$$

Нека је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 2}.$$

Представимо ову матрицу преко својих блокова формата 2×2 као $A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right]$ где је $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ и $A_2 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$. Исто тако, представимо матрицу

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 4}$$

преко својих блокова формата 2×2 као $B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \end{array}\right]$ где су матрице B_1 и B_2 дате са $B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ и $B_2 = \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$. Сада имамо да је

$$I_2 = A_1B_1,\ -I_2 = A_1B_2,\ -I_2 = A_2B_1,\ I_2 = A_2B_2.$$

Са друге стране имамо да је

$$BA = B_1A_1 + B_2A_2.$$

Како је $I_2 = A_1B_1$ и $I_2 = A_2B_2$, користећи Задатак 4 добијамо да важи $B_1A_1 = B_2A_2 = I_2$ те је

$$BA = 2I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

85. Нека су $A \in \mathbb{C}^{3\times 2}$ и $B \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ такве да важи

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Одредити матрицу BA.

Решење. Матрица BA постоји (дефинисан је овај производ, тј. можемо да помножимо матрице A и B) јер је $A \in \mathbb{C}^{3\times 2}$ и $B \in \mathbb{C}^{2\times 3}$. Очигледно је $BA \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Применимо теорему Кејли-Хамилтона на ову матрицу. Имамо да је

$$\mathbb{O}_2 = \mathcal{P}_{BA}(BA) = (BA)^2 - \operatorname{tr}(BA)\cdot BA + \det(BA)\cdot I_2 \tag{37}$$

На основу Задатка 13 под (а) имамо да је $\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) = 8 + 5 + 5 = 18$. Одавде, једнакост (37) постаје

$$\mathbb{O}_2 = \mathcal{P}_{BA}(BA) = (BA)^2 - 18\cdot BA + \det(BA)\cdot I_2 \iff (BA)^2 = 18\cdot BA - \det(BA)\cdot I_2. \tag{38}$$

Дакле, из (38) видимо да је потребно испитати степене од BA. Уколико израчунамо $(AB)^2$ добијамо $(AB)^2 = 9AB$. Одавде, користећи асоцијативност множења матрица, добијамо

$$(BA)^3 = B(AB)(AB)A = B(AB)^2A = B(9AB)A = 9(BA)(BA) = 9(BA)^2. \tag{39}$$

Уколико је BA инвертибилна, тј. ако је $\det(BA) \neq 0$ тада директно из (39) добијамо да је

$$BA = 9I_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ако је BA сингуларна матрица тј. уколико је $\det(BA) = 0$ имамо да је $(BA)^2 = 18\cdot BA$, што следи из (38). Одавде имамо (множењем обе стране последње једнакости са BA) да је

$$\underbrace{(BA)^3}_{=9(BA)^2,\ \text{из (39)}} = 18 \underbrace{(BA)^2}_{=18\cdot BA}.$$

Дакле, за сада имамо $9(BA)^2 = 18^2\cdot BA$ одакле следи (користећи опет $(BA)^2 = 18\cdot BA$) да је

$$9\cdot 18\cdot BA = 18^2\cdot BA \implies BA = \mathbb{O}_2 \implies (AB)^2 = A\underbrace{(BA)}_{=\mathbb{O}_2}B = \mathbb{O}_2$$

што очигледно није тачно. Дакле, не може бити $\det(AB) = 0$ те из претходно показаног закључујемо да је $BA = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ јер матрица BA постоји а ми смо добили да је $9I_2$ једини кандидат.

86. Нека су $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и нека је $AC = CA$. Доказати да важи

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB).$$

87. Нека је A реална, ортогонална[34] матрица формата $n \times n$, где је n непаран број и нека је $\det(A) \geqslant 0$. Доказати да $1 \in \sigma(A)$. Да ли тврђење важи када је n паран број?

Решење. Како је A реална, ортогонална матрица, по дефиницији имамо да је $AA^T = I_n$, где је $n > 1$ димензија матрице. Из тога што је $n \equiv_2 1$ имамо да је карактеристични полином матрице A са реалним коефицијентима (јер је матрица A реална) и евентуалне комплексне нуле се јављају у коњуговано-комплексним паровима, те имамо непаран број реалних нула. Имамо

$$1 = \det I_n = \underbrace{\det(AA^T) = \det(A)\cdot\det(A^T)}_{\text{Коши-Бинеова теорема}} \overbrace{= (\det(A))^2}^{\text{Јер је } \det A = \det(A^T)} \underbrace{\implies \det(A) = 1}_{\text{Јер } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ и } \det A \geqslant 0}.$$

[34] За реалну, квадратну матрицу A кажемо да је ортогонална уколико је $AA^T = I$. На основу Задатка 4 можемо закључити да је код ортогоналних матрица и $A^TA = I$.

Докажимо да је за свако $\lambda \in \sigma(A)$ задовољено $|\lambda| = 1$. Нека је x сопствени вектор, који одговара сопственој вредности λ. Имамо

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \overline{(Ax)}^T(Ax) && \text{(коњуговање у скаларном производу се јавља јер } \lambda \in \mathbb{C}\text{)} \\
&= \overline{x}^T(AA^T)x && (\overline{A} = A \text{ јер је } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ и јер је по услову задатка } AA^T = I_n) \\
&= \overline{x}^T x && \text{(јер скаларни производ индукује норму на } \mathbb{C}^{n\times n}\text{)} \\
&= \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Сада, имамо да је

$$\overbrace{|\lambda|\cdot\|x\| = \|\lambda x\|}^{\text{Хомогеност норме}} = \|Ax\| = \|x\| \quad \underbrace{\implies |\lambda| = 1}_{x \neq 0 \implies \|x\| \neq 0}.$$

Дакле, заиста је $|\lambda| = 1$. Како се комплексне сопствене вредности јављају у паровима (још једном, ово смемо да тврдимо јер је матрица са реланим елементима, те је карактеристични полином са коефицијентима из скупа $\mathbb{R}$) а имају јединични модуо, имамо да један пар у производу даје 1. Користећи последње запажање и Задатак 54 имамо да се реалне сопствене врендости (које су једнаке $+1$ или -1) јављају на непарном броју места, те барем једна мора бити баш једнака 1, тј. $1 \in \sigma(A)$. Тврђење не важи уколико је $n \equiv_2 0$. Контрапример, матрица $-I_2$. Заиста, имамо да је $\det(-I_2) = (-1)\cdot(-1) - 0\cdot 0 = 1 \geqslant 0$ и $(-I_2)(-I_2)^T = I_2$ али је $\sigma(-I_2) = \{-1\}$ па $1 \notin \sigma(I_2)$.

88. Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такве да је $A^2 + B^2 = AB$. Уколико је $AB - BA$ инвертибилна матрица, доказати да $3 \mid n$.

Решење. Нека је $S := A + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)B$. Како су A и B матрице чији су елементи реални бројеви имамо да је $A = \overline{A}$ и $B = \overline{B}$. Нека је $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Број ω је јединичног модула, тј. $|\omega| = 1$. На основу тога што операција коњуговања пролази кроз збир, имамо да је

$$\begin{aligned}
S\overline{S} &= (A + \omega B)\,\overline{(A + \omega B)} \\
&= (A + \omega B)(\underbrace{\overline{A}}_{=A} + \overline{\omega}\underbrace{\overline{B}}_{=B}) \\
&= A^2 + \overline{\omega}AB + \omega BA + \underbrace{\omega\overline{\omega}}_{=|\omega|^2=1}B^2 \\
&= \underbrace{(A^2 + B^2)}_{=AB} + \overline{\omega}AB + \omega BA \\
&= \underbrace{(1 + \overline{\omega})}_{=1+\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\omega}\cdot AB + \omega BA \\
&= \omega(BA - AB).
\end{aligned} \tag{40}$$

На основу Коши-Бинеове теореме ћемо показати да је број $\det(S\overline{S})$ реалан. Заиста, на основу (40) добијамо

$$\underbrace{\det(S\overline{S}) = \det(S)\cdot\det(\overline{S})}_{\text{Коши-Бинеова теорема}} = \det(S)\cdot\overline{\det(S)} = |\det(S)|^2 \implies \det(S\overline{S}) \in \mathbb{R}. \tag{41}$$

Напоменимо само, пре него што наставимо даље, да смо у (41) користили и то да је $\det(\overline{S}) = \overline{\det(S)}$. Ово својство је последица Дефиниције 1 као и тога да операција коњуговања пролази кроз коначне збирове и производе[35]. Са друге стране, опет из (40) и основних особина детерминанте следи

$$\mathbb{R} \ni \det(S\overline{S}) = \det\big(\omega(BA - AB)\big) = \omega^n \cdot \underbrace{\det(BA - AB)}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \text{(услов задатка)}} \implies \omega^n \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

Како смо у (42) добили да је $\omega^n \in \mathbb{R}$ лако закључујемо да $3 \mid n$. Заиста, на основу Моаврове формуле имамамо да је

$$\mathbb{R} \ni \omega^n = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3} \implies \sin\frac{2n\pi}{3} = 0.$$

Овде је практично крај јер $\sin\frac{2n\pi}{3} = 0$ повлачи да је $\frac{2n\pi}{3} = k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$ те је $3 \mid 2n \implies 3 \mid n$ јер $3 \nmid 2$.

[35] Исто смо радили и у (5).

89. Нека је $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $\lambda \in \sigma(A)$. Доказати да је геометријски ред сопствене вредности λ мањи или једнак од алгебарског реда сопствене вредности λ.

Решење. Како је $\lambda \in \sigma(A) \implies k := \dim \mathcal{N}(A-\lambda\cdot I_n) > 0$ и нека је $(e_1, \dots, e_k)$ стандардна[36] база простора $\mathcal{N}(A-\lambda\cdot I_n) \subset \mathbb{C}^n$. Претпоставимо најпре да је $n = \dim(\mathbb{C}^n) > k$. Одавде имамо да је за свако $1 \leqslant i \leqslant k$ задовољено

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{i-1} 0\cdot e_j + \lambda\cdot e_i + \sum_{j=i+1}^{n} 0\cdot e_j,$$

те је

$$A = \begin{bmatrix} \lambda\cdot I_k & C \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} & B \end{bmatrix}_{n\times n},$$

за неке $B \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$ и $C \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$. Одавде имамо да је

$$\mathcal{P}_A(x) \overset{\mathsf{def}}{=} \det(A - x\cdot I_n) = \begin{vmatrix} (\lambda - x)\cdot I_k & C \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} & B - x\cdot I_{n-k} \end{vmatrix}_{n\times n}, \ x \in \mathbb{C}.$$

Узастопним развијањем по првој колони k пута, имамо да је

$$\mathcal{P}_A(x) = (\lambda - x)^k \cdot \det(B - x\cdot I_{n-k}), \ x \in \mathbb{C}.$$

Одавде следи да је алгебарски ред сопствене вредности λ барем k, те имамо тврђење задатка. Претпоставимо сада да је $k = n$. У овом случају је

$$A = \lambda\cdot I_n \implies \mathcal{P}_A(x) = \underbrace{(\lambda - x)^k = (\lambda - x)^n}_{\text{јер је } k = n \text{ у овом случају}}, \ x \in \mathbb{C}.$$

Одавде имамо тражени закључак, при чему се алгебарски и геометријски ред сопствене вредности λ поклапају.

90. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ таква да важи

$$3A^3 = A^2 + A + I_n.$$

Доказати да матрица

$$\lim_{k\to+\infty} A^k$$

постоји и да је идемпотент[37].

91. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ таква да важи $A^3 = I_n + A$. Доказати да је тада $\det(A) > 0$.

Решење. По теореми о пресликавању спектра полиномом имамо да за свако $\lambda \in \sigma(A)$ важи $\lambda^3 = 1 + \lambda$. Ова једначина има или сва три реална решења или једно реално а два комплексно-коњугована решења. Лако се проверава да ова једначина има једно реално, позитивно решење. Ово можемо урадити анализом функције $f(x) = x^3 - x - 1, \ x \in \mathbb{R}$. Одавде следи да су остала два корена ове једначине комплексно-коњугована. Њихове вишеструкости морају бити исте[38]. Ово не значи да матрица A имати сва три броја за соптвену вредност, него да су сопствене вредности налазе међу тим бројевима, наравно рачунајући сваку са својом вишеструкости[39]. Нека је λ_1 позитивна, реална сопствена вредност матрице A вишеструкости $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и нека су λ_2 и λ_3 комплексно-коњуговане сопствене вредности матрице A вишеструкости $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. На основу Задатка 54 имамо да је

$$\det(A) = \lambda_1^r \lambda_2^s \lambda_3^s = \underbrace{\lambda_1^r (\lambda_2\lambda_3)^s = \lambda_1^r \left(\lambda_2 \overline{\lambda_2}\right)^s}_{\text{Јер је } \lambda_2 = \overline{\lambda_2}} = \underbrace{\lambda_1^r}_{>0} \underbrace{\left|\lambda_2\right|^{2s}}_{>0} > 0. \tag{43}$$

---

[36]Стандардна база простора $\mathbb{R}^n$ је $\Big\{\overset{\overset{\mathsf{def}}{:=} e_1}{\overbrace{(\underbrace{1,\dots,0}_{n})}}, \dots, \overset{\overset{\mathsf{def}}{:=} e_i}{\overbrace{(\underbrace{0,\dots,1}_{i},\dots 0)}}, \dots, \overset{\overset{\mathsf{def}}{:=} e_n}{\overbrace{(\underbrace{0,\dots,1}_{n})}}\Big\}$, при чему линеарне комбинације формирамо тако што скаларе бирамо из скупа $\mathbb{R}$. Уколико имамо простор $\mathbb{C}^n$, стандардна база је иста као и у реалном случају, али линеарне комбинације формирамо тако што скаларе узимамо из скупа $\mathbb{C}$.

[37]Квадртна матрица B је идемпотент ако је $B^2 = B$.

[38]Појаснимо мало детаљније зашто вишеструкости комплексне нуле и њој одговарајуће коњуговане нуле морају бити исте, код полинома са реалним коефицијентима. Нека је $z \in \mathbb{C}$ такво да је $p(z) = 0$ за неки полином p са реалним коефицијентима и нека је вишеструкост ове нуле $m \in \mathbb{N}$. Како је p полином са реалним коефицијентима следи да је и $p(\overline{z}) = 0$. Одавде имамо да је вишеструкост нуле $\overline{z}$ најмање m. Заиста, како $(x-z)^m$ дели $p(x)$ тада и $(x-\overline{z})^m$ дели $p(x)$, јер је p полином са реалним коефицјентима. Уколико би вишеструкост нуле $\overline{z}$ била $k > m$ тада би вишеструкост нуле $\overline{(\overline{z})} = z$ била најмање k. Ово је немогуће јер јер вишеструкост нуле z једнака $m < k$. Дакле вишеструкости нула z и $\overline{z}$ су једнаке. Приметмо да је у овом разматрању променљива x била реална, да би важило $x = \overline{x}$. Уколико се два полинома поклапају на скупу $\mathbb{R}$ морају се поклапати и на скупу $\mathbb{C}$. Заиста, њихова разлика има бесконачно много нула, одакле следи да разлика мора бити нула полином (ово важи и за полиноме са коефицијентима из скупа $\mathbb{C}$).

[39]Уколико неки од ових бројева није сопствена вредност матрице A сматраћемо да је њена вишеструкост нула и онда се у једнакости (43) ти бројеви формално неће јављати. Наравно, не могу вишеструкости свих бројева бити једнаки истовремено јер би то значило да матрица A нема сопствених вредности, односно да карактеристични полином $\mathcal{P}_A$ нема ни једну нулу, што је немогуће на основу Основне теореме алгебре која тврди да сваки полином има барем једну нулу у скупу $\mathbb{C}$.

Напомена 19. Напоменимо да скуп реалних матрица које задовољавају $A^3 = I_n + A$ није празан. Ово смо показали у Задатку 15. Битно је да скуп матрица које задовољавају услов задатка буде непразан, јер из празне дефиниције следи било шта.

92. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ таква да је

$$A^T = -A.$$

Доказати неједнакост

$$\operatorname{tr}\big(A^2\big) \leqslant 0.$$

Када у овој неједнакости важи знак једнакости?

Решење. Нека је $\varnothing \neq \sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{C}$. На основу Задатка 54 имамо да је

$$\operatorname{tr}\big(A^2\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \tag{44}$$

Нека је $\lambda \in \sigma(A)$ и испитајмо каквог облика све може да буде λ, што ће нам после рећи како изгледа сума $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^2$. Нека је $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}_n\}$ произвољан сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ, тј. $Ax = \lambda x$. Израчунајмо скаларни производ вектора Ax са самим собом на два начина. Имамо да је

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \overline{(Ax)}^T(Ax) && \text{(коњуговање у скаларном производу се јавља јер } \lambda \in \mathbb{C})\\
&= \overline{x}^T A(A^T x) && \text{(правило обрнутог редоследа и } \overline{A} = A \text{ јер је } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ и асоцијативност)}\\
&= -\overline{x}^T A(Ax) && \text{(јер је } A^T = -A)\\
&= -\lambda \overline{x}^T Ax && \text{(јер је } Ax = \lambda x)\\
&= -\lambda^2 \overline{x}^T x && \text{(опет, јер је } Ax = \lambda x)\\
&= -\lambda^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Са друге стране је

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \overline{(Ax)}^T(Ax) && \text{(коњуговање у скаларном производу се јавља јер } \lambda \in \mathbb{C})\\
&= \overline{(\lambda x)}^T(\lambda x) && \text{(јер је } Ax = \lambda x)\\
&= \lambda\overline{\lambda}\overline{x}x\\
&= \lambda\overline{\lambda}\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Дакле, показали смо две ствари. Прва је $\|Ax\|^2 = -\lambda^2\|x\|^2$ а друга је $\|Ax\|^2 = \lambda\overline{\lambda}\|x\|^2$. Одавде закључујемо да је

$$-\lambda^2\|x\|^2 = \lambda\overline{\lambda}\|x\|^2 \implies \big(-\lambda^2 - \lambda\overline{\lambda}\big)\underbrace{\|x\|^2}_{\neq 0 \text{ јер је } x \neq \mathbf{0}_n} = 0 \implies -\lambda^2 - \lambda\overline{\lambda} = 0 \implies \lambda = 0 \ \vee \ \lambda + \overline{\lambda} = 0.$$

Сопствена вредност $\lambda \in \sigma(A)$ је била произвољна те последње закључивање нам каже да су све све сопствене вредности матрице A једнаке 0 или им је реални део једнак 0. Дакле, за свако $j \in \{1, \ldots, n\}$ имамо да је $\lambda_j = i \cdot \underbrace{\operatorname{Im}(\lambda_j)}_{\in \mathbb{R}}$.

Одавде, на основу (44), имамо да је

$$\operatorname{tr}\big(A^2\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \big(i \cdot \operatorname{Im}(\lambda_j)\big)^2 = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{i^2}^{=-1} \cdot \big(\operatorname{Im}(\lambda_j)\big)^2 = -\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\big(\operatorname{Im}(\lambda_j)\big)^2}_{\geqslant 0 \text{ јер } \operatorname{Im}(\lambda_j) \in \mathbb{R}} \leqslant 0. \tag{45}$$

Овиме је тражена једнакост показана. Да бисмо одговорили на питање када у овој неједнакости важи знак једнакости довољно је погледати (45). Одавде, и на основу тога што је за свако $\lambda \in \sigma(A)$ испуњено $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, имамо да је

$$\operatorname{tr}\big(A^2\big) = 0 \iff \Big(\forall j \in \{1, \ldots, n\}\Big)\ \operatorname{Im}(\lambda_j) = 0 \iff \underbrace{\sigma(A) = \{0\} \iff A \text{ је нилпотентна матрица}}_{\text{Ово је Задатак 65}}.$$

Напомена 20. Приметимо да смо неједнакост $\operatorname{tr}\big(A^2\big) \leqslant 0$ могли да докажемо и на следећи начин. Имамо

$$A^T = -A \implies -AA^T = A^2 \implies \operatorname{tr}\big(A^2\big) = -\operatorname{tr}\big(AA^T\big).$$

Матрица AA^T је реална и симетрична, те на основу решења Задатка 66 има све реалне сопствене вредности. Покажимо да су све оне не-негативне. Нека је $\lambda \in \sigma\big(AA^T\big)$ произвољно и $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}_n\}$ било који сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ. Тада је

$$AA^T x = \lambda x \implies \underbrace{x^T AA^T x}_{=\underbrace{(A^T x)^T A^T x = \|Ax\|^2}_{\text{Јер } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}_n\} \text{ и } A \in \mathbb{R}^{n\times n}} \geqslant 0} = \underbrace{\lambda x^T x = \lambda \|x\|^2}_{\text{Јер је } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}_n\}} \implies \lambda \geqslant 0 \tag{46}$$

Дакле, у (46) смо показали да су све сопствене вредности матрице $A^T A$ не-негативне, тј. да су све матрице $-AA^T = A^2$ у скупу $(-\infty, 0]$ тј. $\operatorname{tr}\big(A^2\big) \leqslant 0$. Једнакост у овој неједнакости важи ако и само ако су све сопствене вредности матрице AA^T једнаке 0, тј. ако и само ако је $\sigma\big(AA^T\big) = \{0\}$ односно ако и само ако је $\sigma\big(\underbrace{-AA^T}_{=A^2}\big) = \{0\}$, што се лако види из (46). Последње је еквивалентно, као и у првом решењу на основу Задатка 65, са тим да је матрица A^2 нилпотентна.

93. (Пројекција на линеал) Нека су дати линеарно независни вектори $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ и нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$ матрица чије су колоне ови вектори. Доказати да је пројектор на $\operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_r\}$ дат са

$$P_{\operatorname{lin}\{a_1,\ldots,a_r\}} = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Решење. Нека је $x \in \mathbb{R}^n$ произвољно. Постоји јединствен вектор $y \in \operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_r\}$ такав да је

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_r\}) = \|x - y\|.$$

По дефиницији је $P_{\operatorname{lin}\{a_1,\ldots,a_r\}}(x) = y$. Вектор $x - y$ је ортогоналан на $\operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_r\}$ (зашто?). То значи да је вектор $x-y$ ортогоналан на простор колона матрице A (ознака за простор колона је $\mathcal{R}(A)$) а одатле је $A^T(x-y) = 0$ (зашто?). Како је $y \in \mathcal{R}(A)$ следи да је $y = A(x_0)$ за неки вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ одакле[40] је

$$A^T x = A^T A(x_0) \implies x_0 = (A^T A)^{-1} A^T x \implies y = A(x_0) = A(A^T A)^{-1} A^T x$$

тј. добили смо да је

$$P_{\operatorname{lin}\{a_1,\ldots,a_r\}} = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

94. Нека је $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Доказати да је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

инвертибилна и одредити A^{-1}.

Решење. Природно је посматрати заједно са матрицом A и матрицу B, која је дефинисана са

$$B \overset{\text{def}}{:=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

односно, матрицу чији су елементи сви једнаки 1, јер је тада $B - I_n = A$. Лако је видети да је $B^2 = nB$. Идеја је да урадимо овај задатак по дефиницији, тј. потражимо инверз матрице A у облику $sB - I_n$, где је $s \in \mathbb{R}$ константа коју ћемо покушати да наштелујемо тако да важи $A(sB - I_n) = I_n$. Имамо да је

$$\underbrace{(B - I_n)}_{=A}(sB - I_n) = s\underbrace{B^2}_{=nB} - B - sB + I_n = \underbrace{\big(ns - (s+1)\big)}_{\text{желимо да је ово једнако } 0} B + I_n. \tag{47}$$

[40] Нека су колоне матрице A линеарно незвисне (нпр. као у овом задатку). Тада је (квадратна) матрица $A^T A$ инвертибилна. Заиста, нека је $A^T Ax = 0$ за неко $x \in \mathbb{R}^n$. Тада је $x^T A^T Ax = 0 \implies \|Ax\|^2 = 0 \implies Ax = 0$. Како смо добили да је $Ax = 0$ можемо да закључимо да мора бити $x = 0$ јер би у противном колоне матрице A биле линеарно зависне. Дакле, имамо импликацију $A^T Ax = 0 \implies x = 0$ одакле закључујемо да је $\mathcal{N}(A^T A) = \{0\}$ што је довољно за инвертибилност матрице $A^T A$.

Ако у (47) наметнемо услов $ns-(s+1)=0 \iff s = \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\text{постоји јер је } n>1}$ имамо да се (47) своди на $A(\underbrace{s}_{=\frac{1}{n-1}}B-I_n)=I_n$, те је матрица $\frac{1}{n-1}B-I_n$ десни инверз за A. Ако се позовемо сада на Задатак 4, имамо да је матрица $\frac{1}{n-1}B-I_n$ и леви инверз за A, те је

$$A^{-1}=\frac{1}{n-1}B-I_n=\begin{bmatrix} \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

95. Нека је $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ матрица за коју важи $A^2=A$. Доказати да је

$$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rang}(A).$$

Решење. Нека је $r=\operatorname{rang}(A)$ и $A=FG$ *full-rank* факторизација[41] матрице A где су $F\in\mathbb{C}_r^{n\times r}$ и $G\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$. Матрица GF је формата $r\times r$ и важи $\operatorname{rang}(GF)\geqslant r$ (видети Напомену 3) јер је

$$\operatorname{rang}(GF)\geqslant\operatorname{rang}(F(GF)G)=\operatorname{rang}((FG)(FG))=\operatorname{rang}(A^2)=\operatorname{rang}(A)=r$$

те како је $GF\in\mathbb{C}^{r\times r}$ мора бити $\operatorname{rang}(GF)=r$, што нам казује да је GF инвертибилна матрица. Имамо да је

$$\underbrace{FGFG=FG}_{A^2=A \text{ и } A=FG} \implies FGF\underbrace{G(F(GF)^{-1})}_{=I_r}=F\underbrace{G(F(GF)^{-1})}_{=I_r} \implies \underbrace{((GF)^{-1}G)F}_{=I_r}GF=\underbrace{((GF)^{-1}G)F}_{=I_r}.$$

Дакле, показали смо да је $GF=I_r$. На основу Задатка 13 имамо да је

$$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(FG)=\operatorname{tr}(GF)=\operatorname{tr}(I_r)=r=\operatorname{rang}(A), \text{ што је и требало показати.}$$

Напомена 21. Квадратне матрице које су једнаке свом квадрату називају се идемпотенти. Приметимо да из $GF=I_r$ следи да је A идемпотент (ознаке су исте као и решењу Задатка 95). Заиста, користећи асоцијативност множења матрица лако добијамо

$$A^2=(FG)(FG)=F\overbrace{(GF)}^{=I_r}G=FG=A.$$

Идемпотентне матрице имају још пуно лепих особина. На пример, уколико је A идемпотент тада је и $I-A$ идемпотент. Лако може да се покаже $x\in\mathcal{R}(A) \iff x=Ax$, $\mathcal{N}(A)=\mathcal{R}(I-A)$, $\sigma(A)\subseteq\{0,1\}$ као и многе друге особине. Може се показати да за идемпотентну матрицу не мора да важи $A^*=A$. Заиста, пример једне такве матрице је $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ што се директно проверава, тј. идемпотент не мора да буде симетричан.

96. Нека је $n>1$, $a\neq 0$ и нека је дата матрица

$$A_a=\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1+a \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Одредити A_a^{-1}.

[41] Свака матрица $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$ се може написати у облику $A=FG$ где су $F\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$ и $G\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$. Ово се лако може показати. Заиста, уколико матрицу F изаберемо као матрицу чије су колоне састављене од базних вектора простора $\mathcal{R}(A)$ имамо да је $F\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$ те је матрица $G\in\mathbb{C}^{r\times n}$ јединствено одређена. Ово следи из тога што је свака колона матрице A јединствена линеарна комбинација колона матрице F. Да је ранг матрице G једнак баш r следи из $r=\operatorname{rang}(A)\leqslant\operatorname{rang}(G)\leqslant\min\{r,n\}\leqslant r$ (користили смо Напомену 3). Напоменимо да *full-rank* факторизација није јединствена, што следи из тога што база простора $\mathcal{R}(A)$ није јединствена. Наравно, матрица G зависи само од одабира базе у простору $\mathcal{R}(A)$, односно од матрице F.

97. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је дефинисана са

$$f(x) = \det\big(x \cdot A + I_n\big).$$

Доказати да је

$$f'(0) = \operatorname{tr}(A).$$

Решење. Искористимо Јакобијеву формулу[42] за диференцирање функционалне детерминанте. Нека је $A = \big[\, a_{ij} \,\big]_{i,j=1,\ldots,n}$ и $x \in \mathbb{R}$ произвољно. Имамо да је

$$
\begin{aligned}
f'(x) = &\\
+ &\begin{vmatrix}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(a_{11}x+1\Big) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{12}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{13}x & \ldots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{1,n-2}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{1,n-1}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{1n}x\\
a_{21}x & a_{22}x+1 & a_{23}x & \ldots & a_{2,n-2}x & a_{2,n-1}x & a_{2n}x\\
a_{31}x & a_{32}x & a_{33}x+1 & \ldots & a_{3,n-2}x & a_{3,n-1}x & a_{3n}x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n-2,1}x & a_{n-2,2}x & a_{n-2,3}x & \ldots & a_{n-2,n-2}x+1 & a_{n-2,n-1}x & a_{n-2,n}x\\
a_{n-1,1}x & a_{n-1,2}x & a_{n-1,3}x & \ldots & a_{n-1,n-2}x & a_{n-1,n-1}x+1 & a_{n-1,n}x\\
a_{n1}x & a_{n2}x & a_{n3}x & \ldots & a_{n,n-2}x & a_{n,n-1}x & a_{nn}x+1
\end{vmatrix}_{n\times n}\\
+ &\begin{vmatrix}
a_{11}x+1 & a_{12}x & a_{13}x & \ldots & a_{1,n-2}x & a_{1,n-1}x & a_{1n}x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{21}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(a_{22}x+1\Big) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{23}x & \ldots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{2,n-2}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{2,n-1}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{2n}x\\
a_{31}x & a_{32}x & a_{33}x+1 & \ldots & a_{3,n-2}x & a_{3,n-1}x & a_{3n}x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n-2,1}x & a_{n-2,2}x & a_{n-2,3}x & \ldots & a_{n-2,n-2}x+1 & a_{n-2,n-1}x & a_{n-2,n}x\\
a_{n-1,1}x & a_{n-1,2}x & a_{n-1,3}x & \ldots & a_{n-1,n-2}x & a_{n-1,n-1}x+1 & a_{n-1,n}x\\
a_{n1}x & a_{n2}x & a_{n3}x & \ldots & a_{n,n-2}x & a_{n,n-1}x & a_{nn}x+1
\end{vmatrix}_{n\times n}\\
+ &\cdots +\\
+ &\begin{vmatrix}
a_{11}x+1 & a_{12}x & a_{13}x & \ldots & a_{1,n-2}x & a_{1,n-1}x & a_{1n}x\\
a_{21}x & a_{22}x+1 & a_{23}x & \ldots & a_{2,n-2}x & a_{2,n-1}x & a_{2,n}x\\
a_{31}x & a_{32}x & a_{33}x+1 & \ldots & a_{3,n-2}x & a_{3,n-1}x & a_{3,n}x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n-2,1}x & a_{n-2,2}x & a_{n-2,3}x & \ldots & a_{n-2,n-2}x+1 & a_{n-2,n-1}x & a_{n-2,n}x\\
a_{n-1,1}x & a_{n-1,2}x & a_{n-1,3}x & \ldots & a_{n-1,n-2}x & a_{n-1,n-1}x+1 & a_{n-1,n}x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{n1}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{n2}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{n3}x & \ldots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{n,n-2}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{n,n-1}x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(a_{nn}x+1\Big)
\end{vmatrix}_{n\times n}\\
= &\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n}\\
a_{21}x & a_{22}x+1 & a_{23}x & \ldots & a_{2,n-2}x & a_{2,n-1}x & a_{2,n}x\\
a_{31}x & a_{32}x & a_{33}x+1 & \ldots & a_{3,n-2}x & a_{3,n-1}x & a_{3n}x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n-2,1}x & a_{n-2,2}x & a_{n-2,3}x & \ldots & a_{n-2,n-2}x+1 & a_{n-2,n-1}x & a_{n-2,n}x\\
a_{n-1,1}x & a_{n-1,2}x & a_{n-1,3}x & \ldots & a_{n-1,n-2}x & a_{n-1,n-1}x+1 & a_{n-1,n}x\\
a_{n1}x & a_{n2}x & a_{n3}x & \ldots & a_{n,n-2}x & a_{n,n-1}x & a_{nn}x+1
\end{vmatrix}_{n\times n}\\
+ &\begin{vmatrix}
a_{11}x+1 & a_{12}x & a_{13}x & \ldots & a_{1,n-2}x & a_{1,n-1}x & a_{1n}x\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n}\\
a_{31}x & a_{32}x & a_{33}x+1 & \ldots & a_{3,n-2}x & a_{3,n-1}x & a_{3n}x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n-2,1}x & a_{n-2,2}x & a_{n-2,3}x & \ldots & a_{n-2,n-2}x+1 & a_{n-2,n-1}x & a_{n-2,n}x\\
a_{11}x & a_{11}x & a_{11}x & \ldots & a_{11}x & a_{n-1,n-1}x+1 & a_{11}x\\
a_{n1}x & a_{n2}x & a_{n3}x & \ldots & a_{n,n-2}x & a_{n,n-1}x & a_{nn}x+1
\end{vmatrix}_{n\times n}\\
+ &\cdots +\\
+ &\begin{vmatrix}
a_{11}x+1 & a_{12}x & a_{13}x & \ldots & a_{1,n-2}x & a_{1,n-1}x & a_{1n}x\\
a_{21}x & a_{22}x+1 & a_{23}x & \ldots & a_{2,n-2}x & a_{2,n-1}x & a_{2n}x\\
a_{31}x & a_{32}x & a_{33}x+1 & \ldots & a_{3,n-2}x & a_{3,n-1}x & a_{3n}x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n-2,1}x & a_{n-2,2}x & a_{n-2,3}x & \ldots & a_{n-2,n-2}x+1 & a_{n-2,n-1}x & a_{n-2,n}x\\
a_{n-1,1}x & a_{n-1,2}x & a_{n-1,3}x & \ldots & a_{n-1,n-2}x & a_{n-1,n-1}x+1 & a_{n-1,n}x\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix}_{n\times n}.
\end{aligned}
$$

[42] Ово формула говори о томе како се диференцира детерминанта чији су елементи диференцијабилне функције. Наиме, извод функционалне детерминанте је једнак збиру n полазних детерминанти, али је у i-тој детерминанти i-та врста замењена изводом сваког елемента i-те врсте полазне детерминанте.

Како је x било произвољно, заменом $x = 0$ добијамо да је

$$f'(0) =$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$+\cdots+$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n} = \overbrace{a_{11} \cdot \underbrace{1\cdots 1}_{n-1} + a_{22} \cdot \underbrace{1\cdots 1}_{n-1} + \cdots + a_{nn} \cdot \underbrace{1\cdots 1}_{n-1}}^{=\mathrm{tr}(A)}.$$

Приметимо да смо у последњем кораку развијали детерминанте по врстама. Задатак смо могли да решавамо и на следећи начин. Функција f је полином степена највише n. Уколико у дефиницији детерминанте (1) покушамо да нађемо сабирке који садрже само умножак x^1 видимо да морамо одабрати само елементе са главне дијагонале (јединична пермутација) и то је сабирак $(a_{11}x + 1)\cdots(a_{nn}x + 1)$, те видимо да чинилац уз x једнак $a_{11} + \cdots + a_{nn}$ те је $f'(0) = \mathrm{tr}(A)$.

2 АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У $\mathbb{R}^3$

2.1 Скаларни, векторски и мешовити производ вектора

98. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одредити угао између вектора $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$, где је E средиште ивице C_1D_1 а F средиште ивице A_1D_1.

99. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одредити угао између вектора $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{NC}$, где је M средиште ивице A_1B_1 а N тежиште квадрата $\square ABB_1A_1$.

100. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказати да су равни троуглова $\triangle BCA_1$ и $\triangle B_1C_1D$ међусобно нормалне.

101. Доказати да се висине троугла секу у једној тачки.

102. Нека је H ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Изразити вектор $\overrightarrow{CH}$ као линеарну комбинацију вектора $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Решење. Нека је $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$. Потребно је наћи реалне бројеве α и β такве да је $\overrightarrow{CH} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$. Како је $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{b}$ имамо да је

$$\underbrace{\overrightarrow{AH}}_{=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{a}} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \implies \left(\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \implies \left(\alpha - 1\right) \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \beta \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 = \overrightarrow{0}. \tag{48}$$

Симетрично, користећи притом да је $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$, добијамо

$$\left(\beta - 1\right) \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \alpha \cdot \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 = \overrightarrow{0}. \tag{49}$$

Из (154) и (5.1) формирамо систем једначина

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot \alpha + \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \cdot \beta = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}, \\ \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \alpha + \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot \beta = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}, \end{cases}$$

где су непознате $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Детерминанта овог система је

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \\ \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \end{vmatrix} = \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \cdot \left(\cos^2 \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) - 1\right).$$

Уколико би било $\Delta = 0$, због $\left\|\overrightarrow{a}\right\| \neq 0$ и $\left\|\overrightarrow{b}\right\| \neq 0$, имали бисмо

$$\cos^2 \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 1 \implies \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0 \ \vee \ \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \pi,$$

што је немогуће, јер вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ граде троугао $\triangle ABC$. Дакле, имамо да је $\Delta \neq 0$ те по Крамеровој теореми закључујемо да систем има јединствено реално решење по α и β. Решења система су дата формулама

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \end{vmatrix}}{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2} = \frac{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \cdot \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2},$$

$$\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \\ \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \end{vmatrix}}{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2} = \frac{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2}.$$

Коначно, имамо да је

$$\overrightarrow{CH} = \underbrace{\left[\frac{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \cdot \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2}\right]}_{\text{Овај израз је скалар } \alpha} \cdot \overrightarrow{a} + \underbrace{\left[\frac{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2}\right]}_{\text{Овај израз је скалар } \beta} \cdot \overrightarrow{b}.$$

103. (Грамова детерминанта) За дате векторе $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ нека је

$$\Gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} \end{vmatrix}.$$

Доказати једнакост

$$\Gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right|.$$

Решење. Нека је матрица $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ таква да јој је прва врста вектор $\overrightarrow{a}$, друга вектор $\overrightarrow{b}$ а трећа вектор $\overrightarrow{c}$. На основу дефиниције множења матрица и уз употребу Коши-Бинеове теореме имамо да је

$$\Gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \det(XX^T) = \det(X) \cdot \det(X^T) = (\det(X))^2 = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]^2 \implies \Gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right|.$$

104. Над странама тетраедра, са спољашње стране, конструисани су вектори такви да је свакој страни додељен вектор нормалан на њу интензитета једнаким површини те стране. Доказати да је збир тих вектора $\overrightarrow{0}$.

105. Нека је дата тачка $M(5, -1, 2)$. Нека су M_1, M_2 и M_3 пројекције тачке M на координатне равни. Одредити површину троугла $\triangle M_1M_2M_3$ и запремину тетраедра $MM_1M_2M_3$.

106. Нека су вектори $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ такви да важи

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}.$$

Доказати да су вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарни. Да ли важи обрнуто?

Решење. Помножимо једнакост из услова задатка скаларно са вектором $\overrightarrow{a}$. На основу својстава скаларног производа и дефиниције мешовитог производа имамо

$$\underbrace{\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]}_{=0} + \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right] + \underbrace{\left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}\right]}_{=0} = 0 \underbrace{\implies \text{вектори } \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b} \text{ и } \overrightarrow{c} \text{ су компланарни.}}_{\text{јер је запремина паралелопипеда над } \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b} \text{ и } \overrightarrow{c} \text{ једнака } 0}$$

Обрат не важи. Можемо лако конструисати пример, уколико векторе $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ поставимо тако да полазе из заједничке тачке, односно да имају исти почетак, буду сви међусобно различити и да сви припадају истој равни.

107. Доказати да ни за која три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ не могу истовремено да важе неједнакости

$$\sqrt{3} \cdot \|\overrightarrow{a}\| < \|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\|, \quad \sqrt{3} \cdot \|\overrightarrow{b}\| < \|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\| \quad \text{и} \quad \sqrt{3} \cdot \|\overrightarrow{c}\| < \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|.$$

Решење. Претпоставимо супротно, да постоје вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ тако да важе све три неједнакости из услова задатка. Ове три неједнакости су еквивалентне са квадрираним неједнакостима, јер су у питању све ненегативни бројеви. Дакле, имамо

$$3 \cdot \|\overrightarrow{a}\|^2 < \|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\|^2, \quad 3 \cdot \|\overrightarrow{b}\|^2 < \|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\|^2 \quad \text{и} \quad 3 \cdot \|\overrightarrow{c}\|^2 < \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2.$$

За било који вектор $\overrightarrow{x}$ важи $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}$. Одатле, имамо да су последње три неједнакости еквивалентне са

$$3 \cdot \overrightarrow{a}^2 < \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)^2, \quad 3 \cdot \overrightarrow{b}^2 < \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right)^2 \quad \text{и} \quad 3 \cdot \overrightarrow{c}^2 < \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2.$$

На основу особина скаларног производа (којих тачно?), имамо да су последње три неједнакости еквивалентне са

$$3 \cdot \overrightarrow{a}^2 < \overrightarrow{b}^2 - 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c}^2, \quad 3 \cdot \overrightarrow{b}^2 < \overrightarrow{c}^2 - 2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}^2 \quad \text{и} \quad 3 \cdot \overrightarrow{c}^2 < \overrightarrow{a}^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}^2.$$

Сабирањем последње три неједнакости, добијамо

$$\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} < 0 \iff \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)^2 < 0 \iff \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\|^2 < 0.$$

Дакле, добили смо контрадикцију јер квадрат реалног броја не може бити мањи од 0. Следи да је претпоставка о постојању вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ погрешна. Тврђење следи.

2.2 Растојања, једначина праве, равни и сфере у $\mathbb{R}^3$

108. Одредити вредност параметра $m \in \mathbb{R}$ тако да праве

$$(p): \begin{cases} 2x - y = 9, \\ x - y - z = 4 \end{cases} \qquad \text{и} \quad (q): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-4}{2}$$

буду међусобно (а) паралелне; (б) нормалне.

Решење. Вектор праве q директно читамо из облика у ком је дата права q. Означимо овај вектор са v_q. Дакле, $v_q = (-2, m, 2)$. Вектор праве p не можемо директно очитати из облика у ком је задата, јер је задата као пресек две равни. Приметимо да је вектор који је нормалан и на вектор нормале равни $2x - y = 9$ и на вектор нормале равни $x - y - z = 4$ управо вектор праве p. Означимо овај вектор са v_p и израчунајмо v_p као векторски производ вектора нормала ове две равни. Имамо да је

$$v_p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot i + 2 \cdot j - 1 \cdot k = (1, 2, -1).$$

(а) Имамо

$$v_p \parallel v_q \iff (\exists k \in \mathbb{R}) \ v_q = k \cdot v_p \implies k = -2 \implies m = 2 \cdot (-2) = -4.$$

(б) Имамо

$$v_p \perp v_q \iff v_p \cdot v_q = 0 \iff 1 \cdot (-2) + 2 \cdot m + (-1) \cdot 2 = 0 \iff m = 2.$$

Дакле, за вредност $m = 2$ вектори правих p и q су међусобно нормални. Остаје да се проверимо да ли се за $m = 2$ ове праве секу. Одаберимо било коју тачку A са праве p и било коју тачку B са праве q и формирајмо вектор v чији је почетак тачка A а врх тачка B. Тада се праве p и q секу ако и само ако је $[v_p, v_q, v] = 0$. На даље је само рачун. Нека је на пример $A = (0, -9, 5)$ и $B = (1, -3, 4)$. Тада је

$$v = \Big(1 - 0, -3 - (-9), 4 - 5\Big) = (1, 6, -1) \implies [v_p, v_q, v] = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0}_{\text{Прва и трећа колона су линеарно зависне}}.$$

Дакле, како је $[v_p, v_q, v] = 0$, следи да се ове праве секу у једној тачки.

Напомена 22. Права p није дата у симетричном облику као права q, него је дата као пресек две равни. Уколико желимо да пређемо из овог облика у симетрични облик треба да одаберемо једну променљиву нпр. x да буде слободна променљива јер имамо две једначине а три променљиве. Тада остале две променљиве изражавамо преко x. Конкретно, у овом примеру бисмо имали $y = 2x - 9$ и $z = x - y - 4 = x - (2x - 9) - 4 = -x + 5$, где је $x \in \mathbb{R}$ произвољно. Дакле, параметарска једначина праве p је

$$(p): \begin{cases} x = t, \\ y = 2t - 9, \\ z = -t + 5, \end{cases}$$

где је $t \in \mathbb{R}$. Одавде лако прелазимо у симетрични облик једначине праве p. Добијамо

$$(p): \frac{x-0}{0} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-5}{-1}.$$

На крају, напоменимо само да $\frac{x-0}{0}$ не представља дељење нулом, него ознаку.

109. Одредити тачку B која је симетрична тачки $A(0, -4, -7)$ у односу на праву

$$(p): \begin{cases} x + 3y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Решење. Одредимо најпре пресечну тачку праве p и нормале n на праву p, кроз тачку A. Пређимо најпре на симетрични облик једначине праве p, јер је тај облик оперативнији за практична израчунавања. Имамо да је

$$(p): \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-8}{-7}.$$

Нека је $T(t, -5t+5, -7t+8)$ тачка са праве p, таква да је $AT \perp p$. Одредимо t такво да ово важи. Налазимо да је

$$\overrightarrow{AT} = \Big(t-0, -5t+5-(-4), -7t+8-(-7)\Big) = (t, -5t+9, -7t+15).$$

Из $\overrightarrow{AT} \cdot (1, -5, -7) = 0 \implies t = 2$. Дакле, $T = (2, -1, 1)$. Нека је S тражена тачка. Како је S средиште дужи AB имамо да је

$$T = \frac{1}{2}(B+S) \implies 2T - B = S \implies S = (4, -6, -5).$$

110. Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да се праве

$$(p): \ \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$$

и

$$(q): \ \frac{x-a}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$$

секу.

111. Нека је дата раван $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ и тачка $M(x_0, y_0, z_0)$. Доказати да је

$$d(M, \alpha) = \frac{\big|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\big|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Напомена 23. Ова формула представља врло практичано средство у задацима. Ознака $d(M, \alpha)$ је стандардно Еуклидово растојање скупова $\{M\}$ и α. Уопштено, уколико је (X, d) метрички простор и уколико су $\varnothing \neq A, B \subseteq X$, тада дефинишемо

$$d(A, B) \overset{\text{def}}{=} \inf\Big\{d(a, b) \ \Big| \ a \in A, \, b \in B\Big\}. \tag{50}$$

Очигледно, ако је $A \cap B \neq \varnothing$ тада је $d(A, B) = 0$. Приметимо да из $d(A, B) = 0$ не следи да је $A \cap B \neq \varnothing$. Заиста, ако је $X = \mathbb{R}$, d стандардно Еуклидово растојање у $\mathbb{R}$, $A = (-1, 0)$ и $B = (0, 1)$, тада је $d(A, B) = 0$ али и $A \cap B = \varnothing$.

112. Дате су праве

$$(p): \ \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1} \quad \text{и} \quad (q): \ \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Доказати да су праве p и q мимоилазне, одредити њихову заједничку нормалу и међусобно растојање.

113. Доказати да се праве

$$(\ell_1): \ \begin{cases} x - y - z - 7 = 0, \\ 3x - 4y - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad (\ell_2): \ \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

секу и одредити једначину равни која их садржи.

Решење. Вектор правца праве ℓ_1 је

$$p_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{= \cdots =}_{\text{краћи рачун}} (4, 3, 1), \tag{51}$$

јер је права ℓ_1 дата као пресек две равни па је због тога њихова пресечна права паралелна са векторским производом (дакле вектором) вектора нормала на обе равни. Због истог разлога је вектор правца праве ℓ_2 дат са

$$p_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{= \cdots =}_{\text{краћи рачун}} (1, -1, -1). \tag{52}$$

Одаберимо било коју тачку P_1 са праве ℓ_1 и било коју тачку P_2 са праве ℓ_2. Потребан и довољан услов да се праве ℓ_1 и ℓ_2 секу је да је мешовити производ вектора p_1, p_2 и $\overrightarrow{P_1P_2}$ једнак нули (јер је наравно $p_1 \neq p_2$). На пример, узмимо са праве ℓ_1 тачку $P_1(0, -\frac{11}{4}, -\frac{17}{4})$ и са праве ℓ_2 тачку $P_2(0, -1, -3)$. Један метод за одабир ових тачака (а да није набадање) је да најпре решимо системе (њихово решење ће зависити од једног параметра јер је пресек две равни права линија) а потом одабиром конкретне вредности за параметар добијамо тачку са одговарајуће праве. Имамо да је $\overrightarrow{P_1P_2} = \left(0, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$. Након ове дискусије је све лако. Из (51) и (52) добијамо

$$[p_1, p_2, \overrightarrow{P_1P_2}] = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} \underbrace{= \cdots =}_{\text{краћи рачун}} 0. \tag{53}$$

Дакле, на основу свега наведеног (53) нам сведочи о томе да се праве ℓ_1 и ℓ_2 секу. Познато је да две праве које се секу одређују раван (ово је теорема али довољно интуитивна за наше потребе). Тражену раван добијамо тако што формирамо вектор нормалне на ову раван као векторски производ вектора p_1 и p_2 а потом искористимо чињеницу да та раван пролази кроз нпр. тачку P_2. Имамо да је вектор нормале дат са

$$n = p_1 \times p_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underbrace{= \cdots =}_{\text{краћи рачун}} (2, 5, -7). \tag{54}$$

Дакле, користећи (54) и тачку P_2 добијамо да је једначина тражене равни дата са

$$(\alpha): \; -2(x-0) + 5(y+1) - 7(z+3) = 0 \iff -2x + 5y - 7z - 16 = 0.$$

114. Одредити једначину равни која садржи праву

$$(l): \; \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$$

и нормална је на раван

$$(\alpha): \; 2x - 4y + z + 5 = 0.$$

115. (Јунски рок 2020) Одредити тачку P на равни $3x - 6y + 4z = 12$ тако да је збир растојања тачке P до координатних равни најмањи.

Решење. Потребно је наћи минимум израза $|x|+|y|+|z|$ под условом $3x-6y+4z = 12$. Ако из ове једначине изразимо једно слово (рецимо z) добијамо функцију $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисану са

$$f(x, y) = |x| + |y| + \left|\frac{12 - 3x + 6y}{4}\right|$$

па ћемо одређивати $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y)$ (када нађемо одговарајућу тачку (x, y) имамо одмах и $z = \frac{12-3x+6y}{4}$). Приметимо да за оне $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ за које је $x \neq 0$ и $y \neq 0$ и $\frac{12-3x+6y}{4} \neq 0$ постоје парицијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ али су они различити од нуле (јер у свим случајевима у прва два сабирка уз x и y стоји 1 или -1 а у трећем сабирку уз x и y стоји број који је по апсолутној вредности строго мањи од 1). То значи да у овим тачкама немамо кандидата за екстремне вредности функције f. Дакле, једини кандидати се налазе за $x = 0$ или $y = 0$ или $\frac{12-3x+6y}{4} = 0$ а одатле у сва три случаја добијамо функцију једне променљиве. Заиста, ако је $x = 0$ онда је потребно одредити

$$\min_{y\in\mathbb{R}} \left(|y| + \left|\frac{12+6y}{4}\right|\right)$$

ако је $y = 0$ онда је потребно одредити

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \left(|x| + \left|\frac{12-3x}{4}\right|\right)$$

а ако је $\frac{12-3x+6y}{4} = 0$ онда је потребно наћи

$$\min_{12-3x+6y=0} (|x| + |y|)$$

односно

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \left(|x| + \left|\frac{3x-12}{6}\right|\right).$$

Лако се рачуна (Математика 1) да је за $y = -2$ испуњено

$$\min_{y\in\mathbb{R}} \left(|y| + \left|\frac{12-6y}{4}\right|\right) = 2.$$

Аналогно добијамо да је за $x = 0$ испуњено

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \left(|x| + \left|\frac{12-3x}{4}\right|\right) = 3$$

и да је за $x=0$ испуњено

$$\min_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|+\left|\frac{3x-12}{6}\right|\right)=2.$$

Одавде добијемо да је коначно решење $\min\{2,3,2\}=2$ и да се постиже се у тачки $(0,-2,0)$. Напоменимо само још да је овако закључивање оправдано јер знамо да функција f и постиже минимум на $\mathbb{R}^2$ што видимо из ненегативности и непрекидности функције f као и из тога што је $\lim\limits_{|x|+|y|\to+\infty} f(x,y)=+\infty$ (формално се позивамо на Задатак 160 али то није било потребно радити на испиту).

116. Одредити угао између равни која садржи тачке $M_1(0,0,0)$, $M_2(2,-2,0)$ и $M_3(2,2,2)$ и Oxy равни.

Решење. Вектор нормале на Oxy раван $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$. Одредимо сада вектор нормале на раван одређену тачкама M_1, M_2 и M_3. Означимо тражени вектор са $\overrightarrow{n_2}$. Њега добијамо као

$$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=-4\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}+8\overrightarrow{j}=(-4,-4,8).$$

Користећи скаларни производ добијамо да је

$$\sqrt{96}=\underbrace{\|\overrightarrow{n_1}\|}_{=\sqrt{0^2+0^2+1^2}}\cdot\overbrace{\|\overrightarrow{n_2}\|}^{=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+8^2}}\cdot\cos\Big(\measuredangle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\Big)=\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\cdot(-4)+0\cdot(-4)+1\cdot 8=8.$$

Одавде следи да је $\cos\Big(\measuredangle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\Big)=\frac{8}{\sqrt{96}}\implies\measuredangle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\arccos\frac{8}{\sqrt{96}}$.

Напомена 24. Приметимо да у овом задатку није било потребно израчунати једначине равни, него само њихове векторе нормала. Једначина Oxy равни је $z=0$ док је једначина равни коју одређују тачке M_1, M_2 и M_3 дата да

$$(-4)\cdot(x-0)+(-4)\cdot(y-0)+8\cdot(z-0)=0\iff -4x-4y+8z=0\iff x+y-2z=0.$$

Код одређивања једначине равни коју одређују тачке M_1, M_2 и M_3 смо користили да је њен вектор нормале $\overrightarrow{n_2}=(-4,-4,8)$ и да пролази кроз тачку M_1. За тачку M_1 смо се определили јер најмање оптерећује израчунавања (све координате су нуле). Да смо узели нпр. тачку M_2 и вектор нормале $\overrightarrow{n_2}=(-4,-4,8)$ добили бисмо исту раван. Заиста, имали бисмо

$$(-4)\cdot(x-2)+(-4)\cdot\big(y-(-2)\big)+8\cdot(z-0)=0\iff x+y-2z=0.$$

Такође, у овом задатку смо користили оба начина за израчунавање скаларног производа. У општем случају, угао између два вектора (који могу да буду и дужине веће од 3) рачунамо по формули

$$\cos\Big(\measuredangle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\Big)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\cdot\|\overrightarrow{n_2}\|}.$$

Дакле, преко ове формуле се и дефинише геометрија простора димензије веће од 3.

117. На правој

$$(\ell):\begin{cases}x-y+z+2=0,\\ 2x-2y+3=0,\end{cases}$$

одредити тачке A и B које су од тачке $C\left(-1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ на растојању $\sqrt{6}$. Израчунати површину троугла $\triangle ABC$.

Решење. У оперативнијом облику, права ℓ је дата са

$$(\ell):\begin{cases}x=x,\\ y=x+\frac{3}{2},\\ z=-\frac{1}{2},\end{cases}$$

и овај облик се добија директним решавањем система којим је дата права ℓ. Како имамо две једначине и три непознате бирамо једну промењљиву (ми смо изабрали да то буде x) која ће бити слободни параметар из скупа $\mathbb{R}$. Одредитимо све тачке са праве ℓ које су на растојању $\sqrt{6}$ од тачке C. Добијамо

$$d\left(\left(x,x+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),\underbrace{\left(-1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}_{=C}\right)=\sqrt{6}\iff\sqrt{(x-(-1))^2+\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$$

$$\iff x(x+2)=0.$$

$$\iff x\in\{-2,0\}.$$

Када је $x=-2$ добијамо тачку $A\left(-2,-2+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)=A\left(-2,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\in\ell$ а када је $x=0$ добијамо тачку $B\left(0,0+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)=B\left(0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\in\ell$. Израчунаћемо сада површину троугла $\triangle ABC$ јер смо добили координате тачака A, B и C. Најпре налазимо да је

$$\overrightarrow{CA}=\left(-1-(-2),\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right),\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=(1,1,2),$$

$$\overrightarrow{CB}=\left(-1-0,\frac{1}{2}-\frac{3}{2},\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=(-1,-1,2).$$

Одавде добијамо да је

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\|=\frac{1}{2}\left\|\overbrace{\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}}^{\text{ово је вектор}}\right\|=\|4\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}+(-2)\overrightarrow{k}\|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6.$$

118. Одредити вредности реалних бројева a и b тако да систем једначина

$$\begin{cases}x+y+z=a,\\ x^2+y^2+z^2=b^2,\end{cases}$$

има јединствено решење у скупу $\mathbb{R}$. У којим случајевима систем нема решења?

Решење. Геометријски гледано, прва једначина система представља раван а друга сферу. Центар сфере је тачка $(0,0,0)$ док је њен полупречник $|b|$. Уколико је растојање равни од сфере једнако $|b|$ систем има јединствено реално решење. Користећи Задатак 111 налазимо да је центар сфере $(0,0,0)$ удаљен од равни за

$$\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0-a|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{3}}$$

Дакле, систем има јединствено реално решење ако и само ако је

$$\frac{|a|}{\sqrt{3}}=|b|\iff |a|=\sqrt{3}\cdot|b|.$$

Систем нема реалних решења ако и само ако је $|b|<\frac{|a|}{\sqrt{3}}\iff\sqrt{3}\cdot|b|<|a|$.

Напомена 25. Напоменимо да овакво резоновање не говори ништа о евентуалним комплексним решењима система него само о реалним решењима система.

119. Израчунати површину равне фигуре која је ограничена пресечном кривом равни $x+y+z=1$ и површи

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1.$$

Решење. Нека се површ $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1$ зове S а раван $x+y+z=0$ нека је π. Израз $x^2+y^2+z^2$ представља квадрат растојања тачке $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ од тачке $(0,0,0)$. Показаћемо да је овај број константан за сваку тачку $(x,y,z)\in S\cap\pi$. Дакле, нека је $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ за свако $(x,y,z)\in S\cap\pi$. Узмимо $(x,y,z)\in S\cap\pi$ произвољно. Имамо да је $d^2(x,y,z)-xy-yz-zx=1$ јер је $(x,y,z)\in S$. Са друге стране знамо да важи и $x+y+z=0$ јер је и $(x,y,z)\in\pi$. Одавде је и $0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ тј. добили смо да је $0=d^2(x,y,z)+2(d^2(x,y,z)-1)$ на $S\cap\pi$. Следи да је $3d^2(x,y,z)=2$ тј. $d(x,y,z)=\sqrt{\frac{2}{3}}$ на $S\cap\pi$.

Одавде не следи одмах да је $S\cap\pi$ кружница полупречника $\sqrt{\frac{2}{3}}$ већ део кружнице полупречника $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Докажимо да је $S\cap\pi$ цела кружница и то управо она дата као пресек сфере $x^2+y^2+z^2=\frac{2}{3}$ и равни π. Потребно је показати да свака тачка која задовољава истовремено једначине $x^2+y^2+z^2=\frac{2}{3}$ и $x+y+z=0$ припада $S\cap\pi$. Довољно је показати да свака таква тачка припада S јер једначина $x+y+z=0$ казује да $(x,y,z)\in\pi$. Дакле, слично као малопре, из $x+y+z=0$ следи да је $0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ па је $0=\frac{2}{3}+2(xy+yz+zx)$ јер $(x,y,z)\in S$. Одавде је $xy+yz+zx=-\frac{1}{3}$ а одавде је $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)=\frac{2}{3}-(-\frac{1}{3})=1$. Овиме смо показали да је $S\cap\pi$ кружница полупречника $\sqrt{\frac{2}{3}}$ па је одговарајућа површина једнака $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot\pi=\frac{2\pi}{3}$.

120. Одредити једначину сфере уписане у тетраедар чија су темена тачке $A(1,2,3)$, $B(-2,8,9)$, $C(5,0,7)$ и $D(3,4,2)$.

121. Одредити једначине равни које садрже праву

$$(l): \ \frac{x}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{-2}$$

и додирују сферу

$$(S): \ (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

122. (Септембар 2021) Одредити једначину равни која садржи тачку $M(0,1,1)$ и која по изводници додирује ваљак чија је оса права

$$(p): \quad \frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-2}{-2}$$

и полупречник основе $R = 3$.

Решење. Тражена раван α која садржи тачку M дата је са $A(x-0)+B(y-1)+C(z-1)=0$, при чему су A, B, C реалне константе које треба одредити (важи $(A,B,C) \neq (0,0,0)$ да би имали раван). Како је вектор нормале равни α $n = (A,B,C)$ ортогоналан на p имамо да је $n \cdot p = A \cdot 5 + B \cdot 6 + C \cdot (-2) = 0$. Узмимо било коју тачку са праве p (на пример, тачку $(2,-2,2)$). Ова тачка је удаљена од равни α за 3 па је

$$3 = \frac{|A \cdot (2-0) + B \cdot (-2-1) + C \cdot (2-1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \iff (2A-3B+C)^2 = 9(A^2+B^2+C^2).$$

Како је $5A+6B-2C=0$, заменом у последњој једначини добијамо (након краћег рачуна) $A^2 - 2C^2 + AC = 0$. Ако је $C = 0$ то води у $A = 0$ а онда све то води у $B = 0$, што не може јер је $(A,B,C) \neq (0,0,0)$. Дакле, $C \neq 0$ па можемо да сматрамо да је $C = 1$ (то се види ако се вратимо на почетак и поделимо једначину равни $A(x-0)+B(y-1)+C(z-1)=0$ са $C \neq 0$ и константе $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ опет означимо са A и B да не бисмо уводили нова слова). Дакле, када је $C = 1$ имамо да је $A^2-2+A=0$ одакле решавајући квадратну једначину добијамо две могућности за број A. То су бројеви $A_1 = -2$ и $A_2 = 1$ па су решења $(A_1,B_1) = (-2,2)$ и $(A_2,B_2) = (1,-\frac{1}{2})$ а самим тим су тражене равни $(-2)(x-0)+2(y-1)+1(z-1)=0$ и $1(x-0)-\frac{1}{2}(y-1)+(z-1)=0$ тј. $-2x+2y+z-3=0$ и $x-\frac{1}{2}y+z-\frac{1}{2}=0$.

123. (Фебруар 2020) Нека је дата тачка $A(1,0,0)$, права

$$(p): \quad \frac{x}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{5}$$

и раван

$$(\pi): \quad 2x - y + 2z + 2 = 0.$$

На правој p одредити тачку P која је са исте страни равни π као и тачка A и чије је растојање од равни π једнако 9.

Решење. Узмимо произвољну тачку P са праве p. Она има координате $P(7t, -3t+2, 5t)$ где је $t \in \mathbb{R}$ произвољно. Из услова $d(P,\pi) = 9$ добијамо

$$\frac{|2 \cdot (7t) - (-3t+2) + 2 \cdot (5t) + 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 9 \iff |27t| = 27 \iff t = 1 \quad \text{или} \quad t = -1.$$

Овиме смо добили две тачке $P_1(7,-1,5)$ и $P_2(-7,5,-5)$. Потребно је одабрати ону од тачака P_1 и P_2 која је са исте стране равни π као и тачка A. Нека је $f(x,y,z) = 2x-y+2z+2$ за $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Тада је $f(A) = 2 > 0$, $f(P_1) = 27 > 0$ и $f(P_2) = -27 < 0$. Дакле, тачке A и P_1 су са исте стране равни π па је тражена тачка P_1.

124. (Септембарски рок 2021) Нека је дата права

$$(p): \ \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{6}.$$

Одредити једначину површи која се добија ротацијом праве p око осе Ox.

Решење. Пресек тражене површи са равни $x = \alpha$, за свако фиксирано $\alpha \in \mathbb{R}$ је кружница (јер је у питању ротациона површ). Та кружница је паралелна yOz равни па је њена једначина $y^2+z^2=\beta^2$, при чему је $\beta \geqslant 0$ (јер је то полупречник кружнице). Елиминишимо параметре α и β. Како је $x = 3t+2$, $y = -2t$ и $z = 6t$ добијамо да је $(-2t)^2 + (6t)^2 = \beta^2 \implies 40t^2 = \beta^2$. Са друге стране је $\alpha = x = 3t+2 \implies t^2 = \frac{(\alpha-2)^2}{3^2}$ па је $\frac{\beta^2}{40} = \frac{(\alpha-2)^2}{3}$ а одатле је $\frac{y^2+z^2}{40} = \frac{(x-2)^2}{9}$ што добијамо ако искористимо услов да је $y^2+z^2=\beta^2$ и $x = \alpha$. Да је свака тачка са добијене површи заиста тачка наше ротационе површи је очигледно.

125. Одредити једначину површи која се добија ротацијом елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, $a > c$ око Ox осе.

126. Нека су дате праве

$$(\ell_1): \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad (\ell_2): \ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Одредити једначину површи која се добија ротацијом праве ℓ_2 око праве ℓ_1.

2.3 Разни задаци

У задацима који следе циљ је применити скаларни и векторски производ на планиметријске[43] проблеме и методе Аналитичке геометрије у простору на стереометријске[44] проблеме. Ако приликом решавања уводимо координатни систем, од изузетне важности је како поставимо координатни систем.

127. Дат је троугао $\triangle ABC$. Доказати да за произвољну тачку O тог троугла важи

$$P_a \cdot \overrightarrow{OA} + P_b \cdot \overrightarrow{OB} + P_c \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0},$$

где су P_a, P_b и P_c редом површине троуглова $\triangle BOC$, $\triangle COA$ и $\triangle AOB$. Да ли тврђење важи за произвољну тачку равни коју одређује троугао $\triangle ABC$ и која не припада ниједној од правих које одређују странице троугла $\triangle ABC$?

Решење. Означимо

$$\overrightarrow{L} = P_a \cdot \overrightarrow{OA} + P_b \cdot \overrightarrow{OB} + P_c \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Уколико последњу једнакост помножимо векторски са $\overrightarrow{OA}$, користећи својства векторског производа, добијамо

$$\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{OA} = P_a \cdot \underbrace{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA}}_{=\overrightarrow{0}} + P_b \cdot \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} + P_c \cdot \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} \implies \overrightarrow{L} \times \overrightarrow{OA} = P_b \cdot \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} + P_c \cdot \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}.$$

Доказаћемо да је $P_b \cdot \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} + P_c \cdot \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$. Како је

$$\left\| P_b \cdot \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} \right\| = P_b \cdot \left\| \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} \right\| = 2P_bP_c \quad \text{и} \quad \left\| P_c \cdot \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} \right\| = P_c \cdot \left\| \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} \right\| = 2P_bP_c.$$

Дакле, вектори $P_b \cdot \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA}$ и $P_c \cdot \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}$ су истог интензитета али супротних смерова. То доказује да је њихов збир једнак $\overrightarrow{0}$, те је и $\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$. На потпуно исти начин се показује да је $\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$. Дакле, последње две једнакости нам говоре о томе да је вектор $\overrightarrow{L}$ колинеаран са векторима $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Како су вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ линеарно независни имамо да мора бити $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{0}$. Тврђење је управо показано. Одговор на питање из задатка је негативан. Шта више, није тешко показати да за сваку тачку која не припада троуглу $\triangle ABC$ важи $\overrightarrow{L} \neq \overrightarrow{0}$.

128. Нека су E, F и G средишта страница BC, CD и DA конвексног четвороугла $\square ABCD$, редом и нека је T тежиште троугла $\triangle EFG$. Ако су површине троуглова $\triangle ATD$ и $\triangle BTC$ једнаке, доказати да је $\square ABCD$ трапез.

129. Доказати да се из средишта висине правилне, тростране, једнакоивичне пирамиде свака ивица види под правим углом.

130. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија ивица има дужину $a = 1$. Ако су M и N средишта ивица CD и CC_1 редом, наћи растојање између правих AN и BM.

131. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија ивица има дужину a. Нека су тачке N и P средишта ивица AB и BC, редом. Одредити површину пресека коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са равни која садржи тачке D_1, N и P.

132. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија ивица има дужину $a = 6$. Израчунати дужину одсечка дијагонале AC_1 који је одређен нормалним пројекцијама темена коцке на њу.

133. Дате су две једнаке коцке, тако да је једна постављена преко друге тако да формирају квадар. Уочимо пирамиду чији је врх средиште горње коцке а основа основа доње коцке. Одредити који део запремине пирамиде је у горњој коцки у односу на запремину читаве пирамиде.

134. У тространој пирамиди сви углови бочних страна при врху пирамиде су прави. Доказати да су врх пирамиде, тежиште основе и центар сфере описане око пирамиде колинеарне тачке.

[43] Планиметрија је део геометрије који се бави својствима геометријских фигура у равни.
[44] Стереометрија је део геометије који се бави својствима геометријких објеката у простору.

Решење. Нека је координатни систем постављен тако да се координатни почетак поклапа са врхом $V(0,0,0)$ пирамиде а бочне ивице са координатним осама, чији су крајеви тачке $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ и $C(0,0,c)$, $a,b,c>0$. Тежиште T троугла $\triangle ABC$ има координате

$$T=\left(\frac{a+0+0}{3},\frac{0+b+0}{3},\frac{0+0+c}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot(a,b,c).$$

Одредимо координате центра $S(s_1,s_2,s_3)$ описане сфере. Тачка S је јединствено одређена условом да је једнако удаљена од тачака V, A, B и C. Језиком алгебре, имамо једнакости

$$d(S,A)=d(S,B)=d(S,C)=d(S,V) \iff$$

$$(s_1-a)^2+(s_2-0)^2+(s_3-0)^2=(s_1-0)^2+(s_2-b)^2+(s_3-0)^2=(s_1-0)^2+(s_2-0)^2+(s_3-c)^2=s_1^2+s_2^2+s_3^2.$$

Комбинујући сваку од прве три једначине са четвртом, добијамо решење система

$$S=(s_1,s_2,s_3)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(a,b,c).$$

Дакле, $\overrightarrow{VT}=\frac{1}{3}\cdot(a,b,c)$ и $\overrightarrow{VS}=\frac{1}{2}\cdot(a,b,c)$ те је $\overrightarrow{VT}\parallel\overrightarrow{VS}$, што је еквивалентно са тим да су V, S и T колинеарне тачке.

3 СКУПОВИ, ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ И НЕПРЕКИДНОСТ У $\mathbb{R}^n$

3.1 Структура скупова и низови у $\mathbb{R}^n$

135. Доказати да сваки ограничен низ тачака у $\mathbb{R}^n$ садржи конвергентан подниз.

Напомена 26. Тврђење из овог задатка се назива Болцано-Вајерштрасова теорема.

136. Нека су дати $a, b \in \mathbb{R}$ за које важи $a < b$ и нека је

$$S \subseteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a < x < b\right\}$$

затворен скуп. Доказати да је пројекција скупа S на y-осу такође затворен скуп.

Решење. Означимо пројекцију скупа S на y-осу са P (дакле, P је скуп) и нека је $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ произвољан конвергентан низ. Докажимо да $y := \lim\limits_{n\to+\infty} y_n \in P$, што ће нам дати затвореност скупа P. Како је сваки елемент y_n добијен пројекцијом неког уређеног пара на y-осу, имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $a < x_n < b$ тако да се уређен пар (x_n, y_n) пројектује у y_n. Овиме смо дефинисали низ уређених парова $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ који се налази затвореном скупу S. Низ $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ је ограничен, јер је за свако $n \in \mathbb{N}$ испуњено $a < x_n < b$. Дакле, на основу Задатка 135 постоји конвергентан подниз $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ низа $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Нека је $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$. Због затворености скупа S имамо да мора бити $x \in S$. Низ $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{+\infty}$ је конвергентан (јер су сада оба координатна низа конвергентна) и цео се налази у скупу S. Због затворености скупа S имамо да $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) = (x, y) \in S$. Овиме је задатак решен.

137. Нека су $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ затворени, дисјунктни скупови од којих је барем један ограничен. Доказати да постоји $r > 0$ тако да је $d(x, y) \geqslant r$ за свако $x \in A$ и свако $y \in B$.

Решење. Нека је A ограничен. Претпоставимо супротно, да такав број r не постоји. То значи да када задамо било који позитиван број, морају постојати тачке из скупова A и B редом, тако да су на растојању мањем од задатог позитивног броја. Заиста, уколико то не би био случај имали бисмо да је задат позитиван број управо број r а ово није могуће, имајући у виду нашу претпоставку. Симболички, имамо

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left(\exists x_n \in A\right)\left(\exists y_n \in B\right)\; d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}. \tag{55}$$

Овиме смо дефинисали низове $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који припадају скуповима A и B, редом. Како је скуп A ограничен, на основу Задатка 56, следи да постоји конвергентан подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, чија је граница у A. Означимо ову граничну вредност са a и покажимо да је $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} = a$. Заиста, из неједнакости троугла следује

$$0 \leqslant d(y_{n_k}, a) \leqslant \underbrace{d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, a)}_{\text{Овде користимо (55) јер је } d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{n_k}} \text{ и ово важи за свако } k \in \mathbb{N}.$$

Прелазећи у последњим неједнакостима на граничну вредност када $k \to +\infty$, добијамо да је $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} = a$. Како је низ $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ садржан у затвореном скупу B следи да $a \in B$. Добили смо контрадикцију јер $a \in A$ и $a \in B$ што је супротно услову задатка да је $A \cap B = \varnothing$. Тврђење следи.

138. Ако је растојање тачке $x \in \mathbb{R}^n$ од затвореног скупа $A \subseteq \mathbb{R}^n$ једнако r, тада постоји тачка $y \in A$ тако да је $d(x, y) = r$.

Решење. На основу услова задатка, имамо да је $d(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{a\in A} d(x, a) = r$. По дефиницији инфимума имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $y_n \in A$ тако да је

$$d(x, y_n) < r + \frac{1}{n}. \tag{56}$$

Заиста, уколико то не би било тачно, следило би да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је за свако $a \in A$ задовољено $d(x,a) \geqslant r + \frac{1}{n_0} \implies d(x,A) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{a\in A} d(x,a) \geqslant r + \dfrac{1}{n_0} > r$ па би то значило да смо нашли доњу границу која је већа од највеће доње границе. Дакле, сада имамо дефинисан низ тачака $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ скупа A. Овај низ тачака је ограничен јер је

$$y_n \in \mathcal{K}\left(x, r + \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathcal{K}(x, r+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

На основу Задатка 135 постоји конвергентан подниз $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који је конвергентан. Означимо његову границу са $y \in \mathbb{R}^n$. Како је скуп A затворен можемо закључити да $y \in A$. Докажимо да је y тражена тачка, тј. да је $d(x,y) = r$. Процењујућии растојање $d(x,y)$ користећи неједнакост троугла и неједнакост (56), добијамо

$$d(x,y) \leqslant d(x, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) < \left(r + \frac{1}{n_k}\right) + d(y_{n_k}, y).$$

Прелазећи на граничну вредност када $k \to +\infty$ у последњој неједнакости и користећи то да је $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y$ као и $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{n_k} = 0$ добијамо да је $d(x,y) \leqslant r$. Како је и $d(x,y) \geqslant d(x,A) = r$, те на основу антисиметричности релације $\leqslant$ у скупу $\mathbb{R}$ добијамо да је $d(x,y) = r$. Тврђење следи.

Напомена 27. У прошлом задатку, тј. у његовом решењу смо користили следеће природне ознаке. Нека је $a \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Дефинишемо куглу (сферу) са центром у a полупречника r са $\mathcal{K}(a,r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}$. Случно томе се дефинише и затворена кугла (лопта) са $\mathcal{K}[a,r] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \leqslant r\}$. Лако се може показати да је скуп $\mathcal{K}(a,r)$ отворен а да је скуп $\mathcal{K}[a,r]$ затворен. Аналогно се дефинишу ови скупови и у произвољном метричком простору.

Дефиниција 1. Нека је $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$. За свако $\eta > 0$ дефинишемо

$$A_\eta \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,A) \leqslant \eta\}.$$

139. Ако је $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ затворен и ограничен скуп, тада је такав и скуп A_η из Дефиниције 1. Доказати.

Дефиниција 2. Скуп $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан ако и само ако сваки низ тачака скупа A садржи конвергентан подниз, чија је гранична вредност садржана у A.

140. Скуп $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан ако и само ако је затворен и ограничен $\mathbb{R}^n$. Доказати.

Решење. ($\implies$:) Нека је скуп $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ компактан. Претпоставимо да није ограничен. То значи да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји тачка $x_n \in A$ таква да је $d(x_n, \mathbf{0}_n) \geqslant n$. Управо смо формирали низ тачака $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у компактом скупу A, те на основу Дефиниције 2 можемо издвојити конвергентан подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ чија је граница у A. Сваки подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи бесконачно далекој тачки те последње није могуће. Дакле, добили смо контрадикцију са претпоставком да A није ограничен. Докажимо да је A затворен скуп. Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ тачака скупа A који има граничну вредност $a \in \mathbb{N}$. Уколико покажемо да $a \in A$ имаћемо закључак о затворености скупа A. Опет, на основу Дефиниције 2 можемо издвојити конвергентан подниз $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, чија је граница у A. Али како је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан ка a закључујемо да и сваки подниз па и $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ да конвергира ка a, односно $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Одавде следи да $a \in A$, те је A затворен скуп.
($\impliedby$:) Нека је сада $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ затворен и ограничен у $\mathbb{R}^n$ и нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ тачака скупа A. Како је сада A ограничен скуп у $\mathbb{R}^n$, на основу Задатка 135, имамо да постоји конвергентан подниз $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа тачака $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са границом $a \in \mathbb{R}^n$. Како је A затворен мора бити $a \in A$. Дакле, нашли смо конвергентан подниз произвољно узетог низа тачака скупа A, чија је граница у A те на основу Дефиниције 140 закључујемо да је A компактан скуп.

141. Нека је $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$. Нека је низ $\left\{(a_n, b_n, c_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ дефинисан са

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2} \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказати да је низ $\left\{(a_n, b_n, c_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ конвергентан и одредити $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n, b_n, c_n)$.

3.2 Граничне вредности функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

142. Доказати да следеће граничне вредности не постоје:

(1)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2};$$
(2)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4};$$
(3)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y};$$
(4)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$$
(5)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} xy;$$
(6)
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to \infty}} x^y.$$

143. Одредити следеће граничне вредности:

(1)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2};$$
(2)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2};$$
(3)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2};$$
(4)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2};$$
(5)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2};$$
(6)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)};$$
(7)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2};$$
(8)
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to -\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$$
(9)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x\neq y}} \frac{e^{x^2-y^2}-1}{x-y}.$$

144. Нека је $m \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$. Доказати да је

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0\\ \cdots\\ x_m\to 0}} \frac{x_1x_2\cdots x_m}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2} = 0.$$

Да ли постоји гранична вредност у случају $m = 2$?

Решење. Нека је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тада је

$$\|x\|^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2 \implies \frac{1}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2} \leqslant \frac{1}{\|x\|^2}.$$

Одавде имамо да је

$$\left|\frac{x_1x_2\cdots x_m}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}\right| \leqslant \underbrace{\frac{|x_1||x_2|\cdots|x_m|}{\|x\|^2} \leqslant \frac{\|x\|^m}{\|x\|^2}}_{\text{Јер је } (\forall i\in\{1,\ldots,n\})\ |x_i|\leqslant\|x\|} = \|x\|^{m-2}. \tag{57}$$

Приметимо да је $m-2 \in \mathbb{N}$, јер је $m > 2$ на основу услова задатка те је функција $\|x\| \mapsto \|x\|^{m-2}$ монотоно растућа на $(0, +\infty)$ па можемо лако вршити ограничења у (57). Нека је $\varepsilon > 0$ произвољан број. На основу (57), уколико изаберемо $\delta \overset{\text{def}}{:=} \varepsilon^{\frac{1}{m-2}} > 0$, на основу дефиниције граничне вредности закључујемо да је

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0\\ \cdots\\ x_m\to 0}} \frac{x_1x_2\cdots x_m}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2} = 0.$$

Уколико је $m = 2$, гранична вредност не постоји, на основу Задатка 142, под (1).

145. Доказати да за свако $t \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\big|\sin t - t\big| \leqslant \frac{1}{6}\big|t\big|^3.$$

Користећи ову неједнакост, доказати да је

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1.$$

146. Доказати да функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ако је } 0<y<x^2,\\ 0, & \text{у осталим тачкама,}\end{cases}$$

нема граничну вредност у тачки $(0,0)$, али да има једнаке граничне вредности по свим правцима кроз ту тачку.

147. Доказати да функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ако је } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ако је } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

нема граничну вредност у тачки $(0,0)$, али да има једнаке граничне вредности по свим правцима кроз ту тачку.

148. Нека је $a_{n,m}=\frac{\sin n}{m}$ за свако $(n,m)\in\mathbb{N}^2$. Доказати да постоји $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{n,m}$ али и да је

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{m\to\infty}a_{n,m}\Big)\neq\lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty}a_{n,m}\Big).$$

Решење. Како је функција sin ограничена имамо да је $\lim\limits_{m\to\infty}a_{n,m}=0 \implies \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\lim\limits_{m\to\infty}a_{n,m}\Big)=0$. Како не постоји[45] $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$, тада не постоји и $\lim\limits_{m\to\infty}\Big(\lim\limits_{n\to\infty}a_{n,m}\Big)$ јер низ $\Big(\lim\limits_{n\to\infty}a_{n,m}\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ није ни дефинисан. Нека је $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ произвољно. Тада важи неједнакост $0\leqslant\Big|\underbrace{\frac{\sin n}{m}}_{\overset{\text{def}}{=}a_{n,m}}\Big|\leqslant\frac{1}{m}\to 0$ када $m\to\infty$. Дакле, имамо да је[46] $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}a_{n,m}=0$.

Напомена 28. Између поновљених граничних вредности и двоструких граничних вредности не мора да постоји никаква веза. Препоручујемо да студенти прочитају одговарајуће примере са предавања. Делимичан одговор који даје везу између поновљених и двоструких граничних вредности даје Задатак 163, када су у питању функције.

3.3 Непрекидне и равномерно непрекидне функције $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Канторова теорема.

149. Нека је дата непрекидна функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Да ли постоје непрекидне функције f, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ такве да за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ важи

$$f(x,y)=g(x,y)\sin(x+y)+h(x,y)\cos(x+y)\,?$$

Решење. На први поглед ово изгледа као доста компликовано питање. Али уопште није тако. Како овде треба да размишљамо? Идеално би било када бисмо могли да постигнемо да се изгубе изрази $\sin(x+y)$ и $\cos(x+y)$ вештим одабиром функција g и h (дакле, показујемо да овакве функције постоје). Функције sin и cos су повезане основним

[45] Зашто не постоји гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$? Ово је део Математике 1, али ако то до сада није познато онда је право време сада да то обновимо. Нека је $x_n=\sin n$, $y_n=\cos n$, $n\in\mathbb{N}$. Претпоставимо да је $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=x\in\mathbb{R}$. Како је за свако $n\in\mathbb{N}$ испуњено $x_{n+1}=\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\sin 1\cos n=x_n\cos 1+y_n\sin 1$ и $\sin 1\neq 0$ закључујемо да постоји и $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\in\mathbb{R}$. Означимо ову граничну врендост са $y\in\mathbb{R}$. За свако $n\in\mathbb{N}$ важи $y_{n+1}=\cos(n+1)=\cos n\cos 1-\sin n\sin 1=y_n\cos 1-x_n\sin 1$. Дакле, добили смо да је за свако $n\in\mathbb{N}$ испуњено

$$\begin{cases}x_{n+1}=x_n\cos 1+y_n\sin 1\\ y_{n+1}=y_n\cos 1-x_n\sin 1.\end{cases}\tag{58}$$

Како смо обезбедили постојање одговарајућих граничних вредности, преласком у (58) на граничну вредност када $n\to\infty$ добијамо систем

$$\begin{cases}x=x\cos 1+y\sin 1\\ y=y\cos 1-x\sin 1.\end{cases}\iff\begin{cases}(-1+\cos 1)x+y\sin 1=0\\ -x\sin 1+(-1+\cos 1)y=0.\end{cases}\tag{59}$$

Детерминантна система (59) је једнака $(-1+\cos 1)^2+\sin^2 1=2(1-\cos 1)\neq 0$, одакле следи да систем (59) има јединствено решење $(x,y)=(0,0)$. Дакле, низови $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергирају ка 0 те и низови $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергирају ка 0. То значи да низ $\big(\underbrace{\sin^2 n+\cos^2 n}_{=1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ не конвергира ка 1, што је контрадикција. Дакле, претпоставка да постоји гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ је погрешна.

[46] Да ли је овај закључак на основу неке теореме или на основу дефиниције граничне вредности?

тригонометријским идентитетом[47]. Ово је довољно за одговор на постављено питање. Наиме, када све ово уклопимо у једну целину закључујемо да су функције $g(x,y) :\overset{\mathsf{def}}{=} f(x,y)\sin(x+y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ и $h(x,y) :\overset{\mathsf{def}}{=} f(x,y)\cos(x+y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ решење нашег задатка. Заиста, онде су непрекидне[48] и за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ важи

$$\underbrace{g(x,y)}_{=\,f(x,y)\sin(x+y)}\sin(x+y)+\underbrace{h(x,y)}_{=\,f(x,y)\cos(x+y)}\cos(x+y)=f(x,y)\underbrace{\left(\sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)\right)}_{=\,1,\text{ основни триг. идентитет}}=f(x,y).$$

150. Одредити тачке прекида функције $f(x,y)=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

151. Испитати равномерну непрекидност функције $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисане са

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},$$

на скупу $\mathbb{R}^2$.

Решење. Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Имамо да је

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-f(a,b)| &\overset{\mathsf{def}}{=} \left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right| \\
&= \frac{\left|(x^2-a^2)+(y^2-b^2)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\leqslant \frac{|x-a|\cdot|x+a|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{|y-b|\cdot|y+b|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\leqslant \frac{|x-a|\cdot(|x|+|a|)}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{|y-b|\cdot(|y|+|b|)}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\leqslant \frac{|x-a|\cdot(|x|+|a|)}{|x|+|a|}+\frac{|y-b|\cdot(|y|+|b|)}{|y|+|b|} \\
&= |x-a|+|y-b| \\
&= d\big((x,y),(a,b)\big),\quad \forall (x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.
\end{aligned}\tag{60}$$

Напоменимо да је прелаз из другог у трећи и из трећег у четврти ред у (60) оправдан на основу неједнакости троугла, док је прелаз из четвртог у пети ред оправдан јер је $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant|x|$ и $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|a|$ те је $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|x|+|a|$, па узимањем реципрочних вредности и окретањем знака добијамо оно што нам треба. Аналогно и за други сабирак вршимо ограничења. Дакле, показали смо да неједнакост $|f(x,y)-f(a,b)|\leqslant|x-a|+|y-b|$ важи за свако $(x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Али, не морамо искључити уређен пар $(0,0)$, тј. директном провером видимо да поменута неједнакост важи за свако $(x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. На основу свега изложеног закључујемо да из $|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|y-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ следи $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$, тј. на основу дефиниције смо показали да је f равномерно непрекидна на $\mathbb{R}^2$. У овом задатку је δ из дефиниције равномерне непрекидности било једнако баш ε.

Напомена 29. Да ли равномерна непрекидност зависи од тога како меримо растојање у $\mathbb{R}^2$? Приметимо да је метрика d била (популарно названа) такси метрика. Да смо бирали било коју другу метрику закључак не би морао да буде исти! Појаснимо ово мало. На пример, да је d било Еуклидово растојање, тада ће функција f бити равномерно непрекидна. Заиста, за било која два уређена пара која се налазе у правоугаонику $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x-a|<\frac{\varepsilon}{2},\ |y-b|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ би важило да су на растојању (Еуклидовом) мањем од $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ а одатле ће следити, на основу оног што смо показали (за такси метрику), да су растојања (овде се растојања мере као апсолутна разлика јер $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$) између вредности функције f у тим уређеним паровима мања од ε. Једноставно речено, у сваки правоугаоник се може уписати круг. Исто тако можемо размишљати у обрнутом смеру, тј. да смо равнимерну непрекидност показали по Еуклидовом растојању, имали бисмо равномерну непрекидност и уколико изаберемо такси метрику. Једноставно речено, у сваки круг се може уписати правоугаоник.

Нека су $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Тада дефинишемо следеће метрике (а потом се показује да су заиста метрике) које се највише користе:

$$d_2(x,y)\overset{\mathsf{def}}{=}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},\quad \text{(Еуклидова метрика);}$$

[47] Основни тригонометријски идентитет је формула $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ која важи за свако $x\in\mathbb{R}^2$. Ово је у ствари обична примена Питагорине теореме. Зашто?

[48] Непрекидност функција g и h следи из непрекидности функције f и функција $(x,y)\mapsto\sin(x+y)$, $(x,y)\mapsto\cos(x+y)$, јер је производ непрекидних функција непрекидна функција. Наравно, овде је употребљено и то да је композиција непрекидних функција непрекидна функција, јер су функције $(x,y)\mapsto\sin(x+y)$ и $(x,y)\mapsto\cos(x+y)$ добијене композицијом функција sin са $(x,y)\mapsto x+y$ и cos са $(x,y)\mapsto x+y$, редом. Остаје само да се објасни зашто је функција $(x,y)\mapsto x+y$ непрекидна. Ово је садржај Задатка 162, под (а). За испит није потребно доказивати да је функција $(x,y)\mapsto x+y$ непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

$$d_\infty(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i - y_i|, \quad \text{(Максимум метрика)};$$

$$d_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \text{(Такси метрика)};$$

Уколико покажимо (равномерну) непрекидност по некој од ових метрика имаћемо и по осталим и то следи на основу већ изложених геометријских разматрања.

Постоје метрике (уопштено, на произвољним метричким просторима али ми ћемо радити највише са простором $\mathbb{R}^n$) тако да су све функције из $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ равномерно непрекидне. Пример једне такве метрике је дискретна метрика[49] која је дефинисана са $d(x,y) = 0$ ако је $x = y$ и $d(x,y) = 1$ ако је $x \neq y$. Заиста, за произвољно $\varepsilon > 0$ довољно је одабрати $\delta = \frac{1}{2}$ јер из $d(x,y) < \frac{1}{2}$ следи да је $x = y$ па је самим тим и $f(x) = f(y)$, одакле имамо да је $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$.

152. Нека је $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ при чему је d дискретна метрика. Доказати да је f равномерно непрекидна на X.

Решење. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Одаберимо $\delta = \frac{1}{2}$. Тада услов $d(x,y) < \frac{1}{2} = \delta$ није испуњен кад год је $x \neq y$ па важи импликација (из нетачног следи било шта је тачно). А ако је $x = y$ тада је на левој страни $0 = d(x,y) < \frac{1}{2} = \delta$ а важи и десна страна $0 = |f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$. Дакле, f је равномерно непрекдина на X у односу на d.

153. Испитати равномерну непрекидност следећих функција на њиховим природним[50] доменима:

(а)
$$f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1 - x^2 - y^2};$$

(б)
$$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}.$$

Да ли је функција f из дела под (а) овог задатка равномерно непрекидна на скупу

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{2019}\right\}?$$

154. Показати да скуп тачака прекида функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, која је дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & \text{ако је } y \neq 0, \\ 0, & \text{ако је } y = 0, \end{cases}$$

није затворен.

Решење. Најпре, по дефиницији функције f закључујемо да је она непрекидна на скупу $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ (зашто?). Испитајмо шта се дешава на x-оси. Најпре, уочимо да је $|f(x,y)| = \left|x\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x|$ за свако (x,y) ван x-осе. Како је вредност функције f на x-оси једнака 0 имамо да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, одакле следи да је f непрекидна у тачки $(x,y) = (0,0)$ (зашто?). Испитајмо шта се дешава у осталим тачкама x-осе. Нека је $(x_0, 0)$ произвољно одабрано, при чему је $x_0 \neq 0$. Покажимо да је функција f у овој тачки прекидна. Уочимо низ тачака $\left\{\left(\frac{n}{n+1}x_0, \frac{2}{\pi(1+4n)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Овај низ конвергира ка тачки $(x_0, 0)$ али је

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{n}{n+1}x_0, \underbrace{\frac{2}{\pi(1+4n)}}_{\neq 0}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}x_0 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}_{=\sin\frac{\pi}{2} = 1}\right) = x_0 \neq \underbrace{f(x_0,0)}_{\stackrel{\text{def}}{=} 0}.$$

Дакле, у свим тачкама $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$ функција f има прекид (није непрекидна а дефинисана је у тој тачки). Дакле, скуп тачака је којима функција f има прекид је цела x-оса без координатног почетка. Овај скуп није затворен (зашто?).

[49] Нека читалац провери да је овиме заиста дефинисана метрика.

[50] Функција је задата уколико је познат њен домен, кодомен и правило f. На пример, функције $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ нису једнаке функције јер су им различити домени иако је правило по коме сликају исто (кодомен обе функције је скуп $\mathbb{R}$). Под природним доменом функције сматраћемо највећи (у смислу подскупа) скуп на коме је увек дефинисан израз којим је задато правило по коме пресликавамо.

Дефиниција 3. Функција $f(x,y)$ је непрекидна по x на $\mathbb{R}$, ако је непрекидна на $\mathbb{R}$ за сваку фиксирану вредност $y \in \mathbb{R}$ по промењљивој x, посматрана као функција једне промењљиве. Аналогно се дефинише непрекидност по y.

155. Показати да је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ако је } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ако је } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

непрекидна и по x и по y али да није непрекидна по (x,y).

156. Нека је непрекидна функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таква да за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ важи једнакост $f(x,y) = f(x^2,y^4)$. Доказати да је функција f константна на $\mathbb{R}^2$.

Решење. Најпре, можемо умањити наш посао и посматрати функцију f само на скупу (тј. у првом квадранту) $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ јер за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ важи[51] $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y)$. Нека је $(a,b) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$ произвољно. Имамо да је $f(a,b) = f\left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2, \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^4\right) = f\left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{4}}\right)$. Уколико поновимо овај корак добијамо да је $f\left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{4}}\right) = f\left(a^{\frac{1}{2^2}}, b^{\frac{1}{4^2}}\right)$. Након n корака имамо да је $f(a,b) = f\left(a^{\frac{1}{2^n}}, b^{\frac{1}{4^n}}\right)$, тј. за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $f(a,b) = f\left(a^{\frac{1}{2^n}}, b^{\frac{1}{4^n}}\right)$. Преласком на граничну вредност када $n \to +\infty$ у последњој једнакости и користећи непрекидност функције f као и познату[52] граничну вредност, добијамо да је

$$f(a,b) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f\left(a^{\frac{1}{2^n}}, b^{\frac{1}{4^n}}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{2^n}}, b^{\frac{1}{4^n}}\right)\right)}_{\text{Овде користимо непрекидност функције } f} = \underbrace{f((1,1))}_{\text{Константа}}. \tag{61}$$

Како је $(a,b) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$ произвољно одабрано и како важи (61) имамо да је f ко-нстантна на $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$, па због нашег запажања са почетка решења закључујемо да је f константа и на $\mathbb{R}^2$, тј. за свако $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ важи $f(a,b) = f(1,1)$.

3.4 Разни задаци

157. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таква да за сваки квадрат $\square ABCD$ из $\mathbb{R}^2$ важи

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0.$$

Доказати да је функција f непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

Решење. Покушајмо да одредимо које све вредности може узети функција f. Нека је $S(x,y) \in \mathbb{R}^2$ произвољна тачка у равни. Имајући у глави услов задатка формирајмо произвољан квадрат $\square ABCD$ тако да је тачка (x,y) његов центар. Са M, N, P и Q означимо пројекције тачке S на странице AB, BC, CD и DA редом. На основу сулова задатка имамо

$$f(A) + f(M) + f(S) + f(Q) = 0, \tag{62}$$

$$f(M) + f(B) + f(N) + f(S) = 0, \tag{63}$$

$$f(N) + f(C) + f(P) + f(S) = 0, \tag{64}$$

$$f(P) + f(D) + f(Q) + f(S) = 0. \tag{65}$$

Уколико саберемо једнакости (62), (63), (64) и (66) и искористимо чињеницу да су четво-роуглови $AMSQ$, $MBNS$, $NCPS$ и $PDQS$ квадрати, добијамо

$$4f(S) = 0 \implies f(S) = 0. \tag{66}$$

Дакле, из (66) закључујемо да је за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ вредност функције f једнака 0 јер је тачка $S(x,y)$ била произвољно одабрана. Одавде закључујемо да је f непрекидна на $\mathbb{R}^2$ јер је свака константна функција непрекидна.

---

[51] Ово је у ствари својство парности функција које смо имали у једнодимензионалном случају. Геометријски, график овакве функције је симетричан у односу на равни $x = 0$ и $y = 0$.

[52] Из Математике 1 је позната и често употребљавана гранична вредност $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1$, која важи за свако $x > 0$. У овом задатку имамо граничну вредност $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{x}$ на обе координате. Наравно, ова гранична вредност је једнака 1, што следи на основу тврђења које из конвергенције низа ка некој тачки гарантује конвергенцију и сваког његовог подниза ка тој истој тачки.

158. Нека је $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрекидна по обе[53] променљиве. Уколико је f монотона по једној променљивој, тада је f непрекидна на $\mathbb{R}^2$. Доказати.

159. Нека је $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрекидна функција за коју постоји $M \in \mathbb{R}$ тако да је скуп

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant M\big\} \quad \text{непразан и ограничен у } \mathbb{R}^n.$$

Доказати да постоји $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тако да је $f(x_0) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

Решење. Нека је $S \overset{\text{def}}{:=} \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant M\big\}$. Скуп S је затворен у $\mathbb{R}^n$. Заиста, нека је $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ низ из S такав да постоји $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a \in \mathbb{R}^n$. Покажимо да $a \in S$. Како за свако $k \in \mathbb{N}$ важи $a_k \in S$ имамо $f(a_k) \leqslant M$. На основу непрекидности функције f на $\mathbb{R}^n$ и како је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ следи да је f непрекидна на S. Добијамо да је

$$f(a) = \underbrace{f\Big(\lim_{k\to+\infty} a_k\Big) = \lim_{k\to+\infty} f(a_k)}_{\text{Овде користимо непрекидност функције } f} \leqslant M \implies a \in S.$$

Сада искористимо услов задатка који каже да је S ограничен у $\mathbb{R}^n$. На основу тога и затворености, користећи Задатак 140, имамо да је S компактан скуп. Опет, на основу непрекидности функције f на компакту S по Вајерштрасовој теореми закључујемо да f достиже своју најмању вредност на S. Дакле, постоји $x_0 \in S$ тако да је $f(x_0) = \min\limits_{x\in S} f(x)$. Имамо

$$\big(\forall\ x \in \mathbb{R}^n \backslash S\big)\ f(x) > M \implies f(x_0) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$

Задатак је управо решен.

160. Нека је $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ затворен скуп и $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрекидна функција са својством да за сваки низ тачака $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ скупа $\mathcal{D}$ важи импликација

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = +\infty \implies \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty.$$

Доказати да постоји $x_0 \in \mathcal{D}$ тако да је $f(x_0) = \min\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$.

Решење. Уколико је скуп $\mathcal{D}$ ограничен тада не постоји ни један низ са својством $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$ али то нам није ни важно јер је у том случају скуп $\mathcal{D}$ компактан као затворен и ограничен (Задатак (140)) па по теореми Вајерштраса функција f достиже најмању вредност на $\mathcal{D}$ јер је непрекидна (достиже и највећу вредност на $\mathcal{D}$ али то није сада важно). Нека је на даље скуп $\mathcal{D}$ неограничен и $x_0 \in \mathcal{D}$ произвољно. Постоји број $\underbrace{M = M(x_0)}_{M \text{ зависи од } x_0} > 0$ такав да је за свако $x \in \mathcal{D}$ са својством $\|x\| > M$ задовољено $f(x) > 1 + f(x_0)$. Заиста, уколико ово не би било тачно тада би за свако $k \in \mathbb{N}$ постојала тачка $x_k \in \mathcal{D}$ таква да је $\|x_k\| > M$ и $f(x_k) \leqslant 1 + f(x_0)$. Овиме смо дефинисали низ тачака $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ скупа $\mathcal{D}$ за који је $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k\| = +\infty$ али не важи $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty$ јер је низ $\big(f(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничен одозго бројем $1 + f(x_0)$. Сада смо се уверили у ову чињеницу те можемо наставити даље. Нека је $S \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D} \cap K[\mathbf{0}_n, M]$. Ако би било $x_0 \notin S$ тада би било $\|x_0\| > M \implies f(x_0) > 1 + f(x_0) \implies 0 > 1$, што је очигледно контрадикција. Дакле, мора бити $x_0 \in S$. Како је f непрекидна а скуп S компактан као пресек затворених скупова од којих је један ограничен имамо да f достиже минимум у $\mathcal{D}$. Означимо $f(x^*) = \min\limits_{x\in S} f(x)$. Одавде специјално следи да је $f(x^*) \leqslant f(x_0)$. Покажимо да је x^* тражена тачка. За свако $x \in \mathcal{D}\backslash S$ имамо да је $\|x\| > M$ те је $f(x) > 1 + f(x_0) > f(x_0) \geqslant f(x^*)$. Одавде следи да је x^* тачка у којој функција достиже најмању вредност на скупу $\mathcal{D}$.

161. Нека је $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ и d метрика на $\mathbb{R}^n$. Доказати да је функција $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x) = d(x, A),\ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

равномерно непрекидна на $\mathbb{R}^n$.

162. Доказати:

(а) Операција сабирања бројева $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је равномерно непрекидна функција на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(б) Операција множења бројева $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је непрекидна али није равномерно непрекидна функција на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

[53] У смислу Дефиниције 3.

Решење. (а) Нека је $\varepsilon > 0$ произвојан број и $f(x,y) = x + y$ за $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Другачије речено, f је управо операција сабирања $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нека су (a,b), $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Користећи неједнакост троугла за бројеве добијамо

$$\Big|f(a,b) - f(u,v)\Big| = \Big|(a+b) - (u+v)\Big| = \Big|(a-u) + (b-v)\Big| \leqslant \Big|a-u\Big| + \Big|b-v\Big|. \tag{67}$$

Одаберемо $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Дакле, уколико (a,b) и (u,v) припадају отвореном правоугаонику чије су странице паралелне координатним осама и имају дужине δ_1 и δ_2, из (67) имамо да је

$$\Big|f(a,b) - f(u,v)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Одавде закључујемо да је операција сабирања равномерно непрекидна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(б) Нека је $g(x,y) = x \cdot y$ за $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Другачије речено, g је управо операција множења $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Изаберимо $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ произвољно. Нека је најпре $b \neq 0$. На основу неједнакости троугла за бројеве и добро познатог трика имамо

$$\Big|g(x,y) - g(a,b)\Big| = \Big|xy - ab\Big| = \Big|(xy - xb) + (xb - ab)\Big| \leqslant |x|\big|y-b\big| + |b|\big|x-a\big|. \tag{68}$$

Посматрајмо све $x \in \mathbb{R}$ који задовољавају $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$. Одавде добијамо да је $|x| \leqslant |a| + \frac{\varepsilon}{2|b|}$. Нека је $M = |a| + \frac{\varepsilon}{2|b|} > 0$ и посматрајмо све $y \in \mathbb{R}$ који задовољавају $|y-b| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Из (68) имамо

$$\Big|g(x,y) - g(a,b)\Big| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ако је $b = 0$ тада је $ab = 0$ те уколико је $|x-a| < \varepsilon$ можемо узети да је $|y| < \frac{1}{|a|+\varepsilon} \cdot \varepsilon$. На основу дефиниције непрекидности закључујемо да је g непрекидна у произвољној тачки $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Одавде закључујемо да је операција множења непрекидна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Покажимо да операција множења није равномерно непрекидна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Дефинишимо низове $A_n = \big(n + \frac{1}{n}, n\big)$ и $B_n = (n,n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Имамо да је

$$\underbrace{d(A_n, B_n) = \sqrt{\left(\left(n + \frac{1}{n}\right) - n\right)^2 + (n-n)^2}}_{\text{Овде је употребљено Еуклидово растојање у } \mathbb{R}^2} = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

али $\big|g(A_n) - g(B_n)\big| = 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Уколико изаберемо $\varepsilon_0 \in (0,1)$, увек можемо наћи тачке A_{n_0} и B_{n_0} за неко $n_0 \in \mathbb{N}$ које су на растојању мањем од било ког позитивног броја али растојање њихових слика неће бити мање од ε_0. Дакле, операција множења није равномерно непрекидна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

163. Нека је функција $(x,y) \mapsto f(x,y)$ дефинисана у неком правоугаонику $P\big((x_0,y_0); \delta_1, \delta_2\big)$ и нека постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$. Уколико за свако $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2) \backslash \{y_0\}$ постоји гранична вредност $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$, доказати да тада постоји и поновљена гранична вредност

$$\lim_{y \to y_0} \Big(\lim_{x \to x_0} f(x,y)\Big),$$

и да важи једнакост

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \Big(\lim_{x \to x_0} f(x,y)\Big).$$

4 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН У $\mathbb{R}^n$

4.1 Диференцијабилност функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

164. Испитати диференцијабилност функције $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ у тачки $(0, 0)$.

165. Доказати да функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{ако је } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ако је } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

није диференцијабилна у $(0, 0)$ али да има оба парцијална извода и да је непрекидна у тој тачки.

Решење. Покажимо најпре непрекидност функције f у тачки $(0, 0)$. Потребно је показати да је

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = f(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Последње питање је урађено у Задатку 143 у делу под (1). Одредимо сада парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Ово радимо по дефиницији.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{f(x,0)}^{=\frac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2}=0 \text{ јер је } x\neq 0} - \overbrace{f(0,0)}^{\stackrel{\text{def}}{=}0}}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\overbrace{f(0,y)}^{=\frac{0^2\cdot y}{0^2+y^2}=0 \text{ јер је } y\neq 0} - \overbrace{f(0,0)}^{\stackrel{\text{def}}{=}0}}{x} = 0.$$

Покажимо сада да функција f није диференцијабилна у тачки $(0, 0)$. Уколико би била диференцијабилна, на основу дефиниције диференцијабилности, добијамо

$$\overbrace{\underbrace{f(0+h,0+k)}_{=\frac{h^2k}{h^2+k^2} \text{ јер је } (h,k)\neq(0,0)} - \underbrace{f(0,0)}_{\text{јер је } f(0,0)\stackrel{\text{def}}{=}0}}^{\text{Прираштај функције } f \text{ у тачки } (0,0)} = \overbrace{\underbrace{L_1}_{\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0}\cdot h + \underbrace{L_2}_{\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0}\cdot k}^{\text{Диференцијал } \mathbf{d}f\left(0,0\right)(h,k)} + o\Big(\|(h,k)\|\Big), \ (h,k)\to(0,0). \tag{69}$$

Дакле, последња једнакост се своди на

$$\frac{h^2k}{h^2+k^2} = o\Big(\|(h,k)\|\Big),\ (h,k)\to(0,0) \iff \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\left(\frac{h^2k}{h^2+k^2}\right)}{\|(h,k)\|} = 0 \iff \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\frac{h^2k}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Последња гранична вредност не постоји, што се лако показује па не може бити тачна наша претпоставка да је функција f диференцијабилна у тачки $(0, 0)$. Задатак је управо решен.

Напомена 30. Овај задатак је јако битан. Показује да постоје функције које имају све прве парцијалне изводе у некој тачки и да су чак непрекидне у тој тачки али да одатле намамо закључак да је функција диференцијабилна у тој тачки. Довољан услов диференцијабилности у тачки даје теорема која каже да је функција диференцијабилна у некој тачки ако има дефинисане све прве парцијалне у некој околини посматране тачке који су у тој тачки непрекдини. Напоменимо само да смо у овом задатку користили и теорему која тврди да уколико је нека функција диференцијабилна у некој тачки да су тада бројеви L_1 и L_2 из израза (69) управо једнаки парцијалним изводима у тачки где се претпоставља диференцијабилност. Задатак 166 показује јако битну ствар, да не смемо изоставити из поменуте теореме претпоставку о дефинисаности првих парцијалних извода у некој околини посматране тачке.

166. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x\cdot y \neq 0 \\ 0, & \text{ако је } x\cdot y = 0. \end{cases}$$

Испитати непрекидност и диференцијабилност ове функције.

Решење. Функција f је диференцијабилна у свим тачкама $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y) \mid x = 0 \ \lor \ y = 0\}$ јер је тај скуп отворен а функција f константна на њему. Самим тим је функција f на овом скупу непрекидна. Остаје питање шта се дешава у тачкама координатних оса. Нека је $x \in \mathbb{R}$ произвољно. Имамо да је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,0)+t\overbrace{(1,0)}^{=e_1}\big) - \overbrace{f(x,0)}^{=0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f(x+t,0)}^{=0}}{t} = 0,$$

$$x \neq 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,0)+t(0,1)\big) - \overbrace{f(x,0)}^{=0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f(x,t)}^{=1 \text{ јер је } x,t\neq 0}}{t} = \overbrace{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}}^{\text{Не постоји}} .$$

Аналогно, за произвољно $y \in \mathbb{R}$ добијамо да је $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ и да за $y \neq 0$ парцијални извод $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ не постоји. Испитајмо да ли су парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрекидни у $(0,0)$. Парцијални извод $\frac{\partial f}{\partial x}$ је дефинисан у свим тачкама равни $\mathbb{R}^2$ осим у тачкама које су на y-оси, не рачунајући $y = 0$. У тим тачкама има вредност 0, те тривијално следи непрекидност у $(0,0)$. Аналогно се показује непрекидност парцијалног извода $\frac{\partial f}{\partial y}$ у $(0,0)$. Покажимо сада да функција f није диференцијабилна у $(0,0)$. Уколико би била диференцијабилна, тада би f била непрекидна у $(0,0)$. Како је $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$ следи да не постоји гранична вредност $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, што је контрадикција са тим да је f непрекидна у $(0,0)$.

167. Да ли постоји функција $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таква да је за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ задовољено

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2x\,?$$

Решење. На основу услова задатка имамо

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = y \implies \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) = 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{70}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2x \implies \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) = 2,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{71}$$

односно да су парцијални изводи $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ константни на $\mathbb{R}^2$, те су и непрекдини на $\mathbb{R}^2$. Добро је познато да из непрекидности мешовитих парцијалних извода следи њихова једнакост. Ова теорема[54] даје контрадикцију јер ова два мешовита парцијална извода не могу бити једнака јер је $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = 2$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$ за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, на основу (70) и (71).

168. Одредити мешовите парцијалне изводе другог реда (ако постоје) функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{ако је } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0, \\ 0, & \text{ако је } x = 0 \text{ или } y = 0. \end{cases}$$

169. Нека је $f(x) = \|x\|,\ x \in \mathbb{R}^n$ и $a \in \mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$. Да ли постоји $f'_a(\mathbf{0})$?

Решење. Уколико би постојао $f'_a(\mathbf{0})$ тада би било

$$f'_a(\mathbf{0}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{0}+ta) - f(\mathbf{0})}{t} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\|ta\|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|\|a\|}{t}}_{\text{Хомогеност норме}} = \|a\| \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}.$$

Последња гранична вредност не постоји. Дакле, не постоји $f'_a(\mathbf{0})$.

170. Одредити извод функције $f(x,y) = x^2 + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ у тачки $(2,1)$ у правцу вектора $\overrightarrow{a} = (1,1)$.

[54] Претпоставке теореме су дефинисаност мешовитих парцијалних извода у некој околини посматране тачке и њихова непрекидност у тој тачки. У овом задатку су претпоставке ове теореме испуњене за сваку тачку из $\mathbb{R}^2$, те имамо једнакост мешовитих парцијалних извода на целом $\mathbb{R}^2$.

Решење. Овај задатак можемо решити на два начина. Први начин је на основу дефиниције парцијалног извода по неком правцу. Поступајући на овај начин имамо

$$f'_{\overrightarrow{a}}(2,1) \overset{\mathsf{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f\big((2,1)+t\,\overbrace{(1,1)}^{=\overrightarrow{a}}\big)-f(2,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{f(2+t,1+t)}^{=2t^2+6t+5}-\overbrace{f(2,1)}^{=2^2+1^2=5}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2t^2+6t}{t} = 6.$$

Поступимо сада на други начин, тако што ћемо користити теорему која каже да уколико је функција диференцијабилна у некој тачки да је тада извод те функције по правцу једнак скаларном производу градијента и вектора правца у посматраној тачки. Језиком математике, имамо

$$f'_{\overrightarrow{a}}(2,1) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right)}_{=\nabla f(2,1)} \cdot \underbrace{(1,1)}_{=\overrightarrow{a}} = \Big(\underbrace{2x\Big|_{(x,y)=(2,1)}}_{=2\cdot 2=4}, \underbrace{2y\Big|_{(x,y)=(2,1)}}_{=2\cdot 1=2}\Big)\cdot(1,1) = 4\cdot 1+2\cdot 1 = 6.$$

171. Доказати да функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ако је } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ако је } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

није диференцијабилна у $(0,0)$ али да има извод у правцу ма ког вектора у тој тачки. По ком правцу се функција f најбрже мења, посматрано из тачке $(0,0)$?

172. Нека је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ако је } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ако је } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Доказати неједнакост

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

За коју класу функција можемо тврдити да има једнаке мешовите изводе?

173. Нека је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y)=\begin{cases}xy, & \text{ако је } |y|\leqslant|x|,\\ -xy, & \text{ако је } |y|>|x|.\end{cases}$$

Доказати неједнакост

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

Решење. Функција f је диференцијабилна на скупу $\mathbb{R}^2$ осим можда у тачкама правих $y=x$ и $y=-x$, где треба проверити какво је стање. За свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ са својством $|y|<|x|$ важи $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1$. Такође, за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ са својством $|y|>|x|$ важи $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-1$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-1$. Израчунајмо $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, уколико постоји. Имамо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\overset{\mathsf{def}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}. \tag{72}$$

Потребно је израчунати, уколико постоје, вредности $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, где је $x\neq 0$ јер се израз $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ налази у граничној вредности (72) у којој $x\to 0$. Имамо

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\overset{\mathsf{def}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-\overbrace{f(x,0)}^{=0}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)}{y}. \tag{73}$$

Како је $x\neq 0$ фиксирано а $y\to 0$ у граничној вредности (73), имамо да је $f(x,y)=xy$ те се (73) своди на $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$. Даље, имамо

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\overset{\mathsf{def}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\overbrace{f(0,y)}^{=0}-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{y}=0. \tag{74}$$

Сада, на основу (73) и (74), заменом у (72) добијамо да је $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. Израчунајмо $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, уколико постоји. Имамо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}. \tag{75}$$

Потребно је израчунати, уколико постоје, вредности $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, где је $y \neq 0$ јер се израз $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ налази у граничној вредности (75) у којој $y \to 0$. Имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,y)}^{=0}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y)}{y}. \tag{76}$$

Како је $y \neq 0$ фиксирано а $x \to 0$ у граничној вредности (76), имамо да је $f(x,y) = -xy$ те се (76) своди на $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$. Даље, имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{f(x,0)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{x} = 0. \tag{77}$$

Сада, на основу (76) и (77), заменом у (75) добијамо да је $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. Дакле, показали смо да је

$$1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Напомена 31. Објаснимо који услови теореме која даје довољне услове о једнакости мешовитих парцијалних извода нису задовољени, што је проузроковало њихову неједнакост. Тачка у којој смо разматрали вредности мешовитих парцијалиних извода је $(0,0)$. На основу тереме, за једнакост мешовитих извода је довољно да функција f има мешовите изводе у некој околини тачке $(0,0)$ и да су у $(0,0)$ непрекидни. Испитајмо прво где су дефинисани мешовити парцијални изводи функције f. У решењу претходног задатка смо то урадили, осим у тачкама правих $y = x$ и $y = -x$. Проверимо шта се дешава у тачкама ових правих. Нека је $a > 0$ и посматрамо тачку (a,a). Испитајмо да ли постоји парцијални извод $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a)$. Добијамо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+x,a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,a)}{x}.$$

Испитајмо да ли постоје парцијални изводи из бројиоца последњег разломка. Уколико један од ова два не постоји, мешовити извод $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a)$ неће постојати. Заиста, имамо

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{f(a,a+y) - \overbrace{f(a,a)}^{=a \cdot a = a^2}}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(a,a+y) - a^2}{y}.$$

Последња гранична вредност не постоји јер не постоји њена десна гранична вредност. Слично се могу испитати и остали случајеви, односно тачке $(-a,a)$, $(-a,-a)$ и $(a,-a)$. Дакле, мешовити парцијални изводи $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ постоје (дефинисани су) у свим тачкама скупа $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,x) \mid x \neq 0\}$. То значи да не можемо наћи ниједну околину тачке $(0,0)$ тако да су у тој околини дефинисани парцијални изводи $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$. То је прва претпоставка теореме која даје довољне услове за једнакост мешовитих парцијалних извода. Други услов те теореме је непрекидност парцијалних извода у посматраној тачки, у нашем случају у тачки $(0,0)$. Очигледно је да су ови парцијални изводи прекидни у $(0,0)$. Дакле, ниједан од услова теореме о довољним условима за једнакост мешовитих парцијалних извода нису задовољени.

174. Доказати да за функцију

$$u(x,y) = |x| + |y| - \big||x| - |y|\big|, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

постоје оба парцијална извода $u'_x(0,0)$ и $u'_y(0,0)$ али да функција u није диференцијабилна у тој тачки.

Решење. По дефиницији рачунамо

$$u'_x(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{u(x,0)}^{=0} - \overbrace{u(0,0)}^{=0}}{x} = 0 \quad \text{и} \quad u'_y(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\overbrace{u(0,y)}^{=0} - \overbrace{u(0,0)}^{=0}}{y} = 0.$$

Уколико би функција u була диференцијабилна у $(0,0)$, на основу дефиниције диференцијабилности функција, добијамо

$$\underbrace{u(h,k) - u(0,0)}_{\text{Прираштај функције } u \text{ у } (0,0)} = \underbrace{u'_x(0,0)}_{=0} \cdot h + \underbrace{u'_y(0,0)}_{=0} \cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right), \quad (h,k) \to (0,0). \tag{78}$$

Једнакост (78) је на основу дефиниције симбола мало o еквивалентна са

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(h,k)-u(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \implies \lim_{h\to 0} \frac{u(h,h)-u(0,0)}{\sqrt{h^2+h^2}} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{2|h|}{\sqrt{2}|h|} = 0.$$

Последње очигледно није тачно, те је наша претпоставка о диференцијабилности функције u у тачки $(0,0)$ погрешна. Дакле, функција u није диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

175. Доказати да је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ако је } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ако је } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

диференцијабилна у $\mathbb{R}^2$ и да су парцијални изводи првог реда функције f прекидне функције у $(0,0)$.

176. Испитати диференцијабилност функције $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која је дефинисана са

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{ако је } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ако је } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

177. (Март 2021) Нека функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задовољава неједнакост

$$|f(x,y)| \leqslant x^2+y^2 \quad \text{за свако} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Доказати да је функција f диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

Решење. На основу услова задатка имамо да је

$$|f(0,0)| \leqslant 0^2+0^2 = 0 \implies f(0,0) = 0.$$

Функција f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако и само ако је

$$\overbrace{f(h,k) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}}^{\text{Прираштај функције } f \text{ у } (0,0)} = \overbrace{\underbrace{L_1}_{=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}} \cdot h + \underbrace{L_2}_{=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}} \cdot k}^{\text{Линеарни део прираштаја функције } f \text{ у } (0,0)} + o\Big(\|(h,k)\|\Big), \ (h,k) \to (0,0).$$

Последњи ред је еквивалентан са

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(h,k) - \big(L_1\cdot h + L_2 \cdot k\big)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{79}$$

Показаћемо да је $L_1 = 0 = L_2$ те ће одатле лако следити тачност граничне вредности (79). Заиста, имамо да је

$$L_1 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} \overbrace{=}^{?} 0.$$

Да би образложили последњу једнакост применимо неједнакост из услова задатка. За свако $x \neq 0$ добијамо

$$0 \leqslant \left|\frac{f(x,0)}{x} - 0\right| = \left|\frac{f(x,0)}{x}\right| = \frac{|f(x,0)|}{|x|} \leqslant \frac{|x^2+0^2|}{|x|} = \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \implies \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x,0)}{x} - 0\right| \leqslant \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Одавде је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x} = 0 \implies L_1 = 0$. Аналогно се показује да је и $L_2 = 0$. Гранична вредност (79) се своди на

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Последење је тачно јер је

$$\left|\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{за свако} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\},$$

те уколико је $\varepsilon > 0$ произвољно, за свако (x,y) које припада кругу $\Big\{(x,y) \ : \ x^2+y^2 < \overbrace{\varepsilon^2}^{=\delta}\Big\}$ важи $\left|\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0\right| < \varepsilon$. Дакле, f је диференцијабилна у $(0,0)$.

178. Нека је дата функција $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ са следећим особинама:

(1) f је диференцијабилна на $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(2) f је непрекидна у $(0,\dots,0)$.

(3) Важи једнакост $\displaystyle\lim_{a\to(0,\dots,0)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ за свако $i \in \{1,\dots,n\}$.

Доказати да је f диференцијабилна у $(0,\dots,0)$.

179. Трансформисати израз

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

увођењем поларних координата.

Решење. Нека је $x = x(r,\phi) = r\cos\phi$ и $y = y(r,\phi) = r\sin\phi$ где је $r > 0$ и $\phi \in [0, 2\pi)$. На основу правила за диференцирање сложене функције имамо

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\phi + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\phi, \tag{80}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = -r\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\sin\phi + r\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\phi. \tag{81}$$

Једнакости (80) и (81) можемо посматрати као линеаран систем од две једначине, где су непознате $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Детерминанта овог система је

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r > 0.$$

На основу Крамерове теореме овај систем има јединствено решење које је дато са

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \sin\phi \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} & r\cos\phi \end{vmatrix}}{r} = \frac{\frac{\partial z}{\partial r}\cdot r\cos\phi - \frac{\partial z}{\partial \phi}\cdot\sin\phi}{r}, \tag{82}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\phi & \frac{\partial z}{\partial r} \\ -r\sin\phi & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}}{r} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \phi}\cdot\cos\phi + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot r\sin\phi}{r}. \tag{83}$$

Замењујући једнакости (82) и (83) у полазни израз, након краћег рачуна, добијамо

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \underbrace{=\cdots=}_{\text{краћи рачун}} \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2.$$

4.2 Диференцијал и геометрија

180. Одредити једначине тангентне равни и нормале површи хиперболичког параболоида $z = x^2 - y^2$ у тачки $(2,1,3)$.

Решење. Вектор нормале n тангентне равни t у тачки $(2,1,3)$ је

$$n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial x}(2,1), -1\right) = \left(2x\Big|_{x=2}, -2y, -1\Big|_{y=1}\right) = (4,-2,-1).$$

Како тангентна раван пролази кроз тачку $(2,1,3)$ добијамо да је једначина тражене равни t дата са

$$(t):\ 4\cdot(x-2) + (-2)\cdot(y-1) + (-1)\cdot(z-3) = 0 \iff 4x - 2y - z - 3 = 0.$$

181. Да ли површ $z = \sqrt{x^2+y^2}$ има тангентну раван у тачки $(0,0)$?

Решење. Површ дата једначином је конус, са теменом у тачки $(0,0,0)$, чија је оса z-оса а једна изводница је права која пролази кроз $(0,0,0)$ и са равни xOy гради угао од $45°$. У тачки $(0,0)$ функција $z = z(x,y)$ нема парцијалне изводе те није диференцијабилна. Заиста, имамо да је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{z(x,0)-z(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+0^2}-\sqrt{0^2+0^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Последња гранична вредност не постоји јер су различите лева и десна гранична вредност. Аналогно се показује да не постоји $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Ова чињеница није гаранција да не постоји тангентна раван у посматраној тачки. Докажимо по дефиницији да не постоји тангентна раван у тачки $(0,0)$. Претпоставимо да тангента раван постоји. Уколико посматрамо тачку M која тежи тачки $(0,0,0)$ по изводници која је нормална на тангентну раван, тада је угао између тангентне равни и вектора $\overrightarrow{OM}$ константан, па не тежи нули.

Напомена 32. Једначина $x^2 + y^2 = 1$ представља кружницу са центром у $(0,0)$ и полупречника 1. У тачки $(1,0)$ постоји тангента која је дата једначином $x = 1$ али крива коју представља кружница није диференцијабилна у $(1,0)$ (посматрамо само горњу полукружницу, на пример). Лако можемо конструисати и пример за површ, посматрајући сферу.

182. Одредити једначине тангентне равни површи $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ која је паралелна са равни $x - y + 2z = 0$.

Решење. Нека је $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Дакле, површ из задатка је имплицитно задата једначном $F(x,y,z) = 0$. Нека је (a,b,c) тачка додира тангентне равни t и површи $F(x,y,z) = 0$. Вектор нормале на површ у тачки (a,b,c) је одређен као

$$n = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\right) = \left(2x\Big|_{x=a}, 2\cdot 2y\Big|_{y=b}, 2z\Big|_{z=c}\right) = (2a, 4b, 2c) = 2(a, 2b, c).$$

Дакле, једначина тангентне равни на површ $F(x,y,z) = 0$ у тачки (a,b,c) је дата са

$$(t):\ 2a(x-a) + 4b(y-b) + 2c(z-c) = 0 \iff ax + 2by + cz - a^2 - 2b^2 - c^2 = 0.$$

Како је тангентна раван t паралелна са равни $x - y + 2z = 0$ тада вектори нормале ове две равни морају бити колинеарни (линеарно зависни). Језиком алгебре речено, мора важити

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-1} = \frac{c}{2} = k \implies (a,b,c) = \left(k, -\frac{k}{2}, 2k\right) \text{ за неко } k \in \mathbb{R}.$$

Како тачка (a,b,c) припада површи $F(x,y,z) = 0$ мора важити $F(a,b,c) = 0$ односно

$$F\left(k, -\frac{k}{2}, 2k\right) = 0 \iff k^2 + 2\left(-\frac{k}{2}\right)^2 + (2k)^2 = 0 \iff k = \sqrt{\frac{2}{11}} \ \vee \ k = -\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Одавде добијамо

$$(a,b,c) = \left(\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, 2\cdot\sqrt{\frac{2}{11}}\right) \quad \vee \quad (a,b,c) = \left(-\sqrt{\frac{2}{11}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, -2\cdot\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

Како знамо тачку кроз коју пролази тангентна раван t и њен вектор нормале лако формирамо њену једначину. Због тога што имамо две тачке додира имамо и два решења нашег задатка, односно две једначине

$$x - y + 2z + \sqrt{\frac{2}{11}} = 0 \quad \vee \quad x - y + 2z - \sqrt{\frac{2}{11}} = 0.$$

183. Доказати да тангентна раван површи $xyz = 1$, у свакој тачки те површи образује са координатним равнима тетраедар константне запремине.

Решење. Нека је (a,b,c) произвољна тачка са дате површи. На основу дефиниције површи имамо да је $abc = 1$. Такође, мора бити $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$ јер би у противном било $0 = 1$. Дакле, дата једначина површи је еквивалентна са $z = z(x,y) = \frac{1}{xy}$, $x \neq 0, y \neq 0$. Поставимо тангентну раван t у тачки (a,b,c) на дату површ. Како је функција $z = z(x,y)$ диференцијабилна у тој тачки тада је вектор нормале n тангентне равни у (a,b,c) на дату површ дат са

$$n = \left(\frac{\partial z(a,b)}{\partial x}, \frac{\partial z(a,b)}{\partial x}, -1\right) = \left(-\frac{1}{a^2b}, -\frac{1}{ab^2}, -1\right) \implies (t):\ -\frac{1}{a^2b}(x-a) - \frac{1}{ab^2}(y-b) - (z-c) = 0.$$

Множећи обе стране са $a^2b^2 \neq 0$ добијамо да је

$$(t):\ -b(x-a)-a(y-b)-a^2b^2(z-c)=0 \iff -bx-ay+2ab-a^2b^2z+a^2b^2c=0.$$

Из једначине равни t, заменом $x=0$ и $y=0$ добијамо тачку $C(0,0,\frac{2}{ab}+c)$ која је пресек са $z-$осом. Исто тако, заменом $x=0$ и $z=0$ добијамо тачку $B(0,2b+ab^2c,0)$ која је пресек равни t са $y-$осом а заменом $y=0$ и $z=0$ добијамо тачку $A(2a+a^2bc,0,0)$ која је пресек равни t са $x-$осом. Дакле, $OABC$ је пирамида за чију основу можемо узети троугао $\triangle OAB$ а за врх тачку C. Ако овако посматрамо, висина ове пирамиде је дуж OC. Запремину V пирамиде $OABC$ сада рачунамо лако, као

$$V = \underbrace{\frac{1}{3}P_{\triangle OAB}\cdot|OC|}_{\text{формула за запремину пирамиде}} = \frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|}_{\triangle OAB \text{ је правоугли}}\cdot|OC| =$$

$$= \frac{1}{6}\underbrace{\left|a\Big(\overbrace{2+\underbrace{abc}_{=1}}^{=3}\Big)\right|\cdot\left|b\Big(\overbrace{2+\underbrace{abc}_{=1}}^{=3}\Big)\right|}_{=9|ab|}\cdot\left|\frac{2}{ab}+c\right| = \frac{3}{2}\underbrace{\Big|2+\underbrace{abc}_{=1}\Big|}_{=\text{const.}} = \frac{9}{2}.$$

Дакле, V је константан број $\Big($једнак је броју $\frac{9}{2}\Big)$, те је задатак управо решен.

184. (Септембар 2021) Нека је дата површ

$$(\mathcal{P}):\ 4x^2-y^2-4z=0$$

и крива $\mathcal{K}$ која представља скуп тачкака на површи $\mathcal{P}$ у којима тангентне равни пролазе кроз тачку $(0,2,0)$. Одредити параметарске једначине криве $\mathcal{K}$ и испитати да ли је крива $\mathcal{K}$ равна.

Решење. Нека је $F(x,y,z)=x^2-y^2-4z$ и нека је $(x,y,z)\in\mathcal{K}$ и (X,Y,Z) произвољна тачка кроз коју пролази тангентна раван на површ $\mathcal{P}$ у тачки (x,y,z). Тада је

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}_{=8x}(X-x)+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}_{=-2y}(Y-y)+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}_{=-4}(Z-z)=0.$$

Користећи услов да ова раван пролази кроз тачку $(X,Y,Z)=(0,2,0)$ добијамо једначину $-4x^2-2y+y^2+2z=0$. Дакле, произвољна тачка са тражене криве $\mathcal{K}$ задовољава једначину површи $\mathcal{P}$ (јер се крива налази на тој површи) и једначину коју смо управо добили. Даље, онда произвољна тачка тражене криве $\mathcal{K}$ задовољава и једнацину која се добија из једначина $4x^2-y^2-4z=0$ и $-4x^2-2y+y^2+2z=0$ њиховим сабирањем, тј. задовољава једначину $y=-z$.

Шта смо до сада урадили? Пошли смо од произвољне тачке криве $\mathcal{K}$ и добили смо да она мора задовољити једначину $y=-z$. Одавде одмах имамо закључак да је крива $\mathcal{K}$ равна јер се налази на равни $y=-z$. Одредимо шта су њене параметарске једначине. Ако заменимо $y=-z$ у једначину површи $\mathcal{P}$ добијамо једначину $4x^2-y^2+4y=0$ односно $1=\left(\frac{y-2}{2}\right)^2-x^2$. Дакле, произвољна тачка криве $\mathcal{K}$ мора задовољавати и ову једначину (то још не значи да је свака тачка са ове једначине тражена тј. да је на кривој $\mathcal{K}$ него да мора да се налази на њој). Нека је $x=\operatorname{sh}t$ за било које $t\in\mathbb{R}$ (сетимо се да је ова функција строго растућа и да узима вредности из целог скупа $\mathbb{R}$ када се параметар t шета кроз $\mathbb{R}$). Тада је $\frac{y-2}{2}=\operatorname{ch}t$ (јер је за свако реално t испуњено $\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$). Дакле, имамо да је $x(t)=\operatorname{sh}t$, $y(t)=2+2\operatorname{ch}t$ и $z(t)=-2-2\operatorname{ch}t$. Да ли је за свако $t\in\mathbb{R}$ тачка $(x(t),y(t),z(t))\in\mathcal{K}$? То је једино остало да се провери а то је сада већ директан рачун. Испоставља се да јесте (и то није морало да се ради на испиту).

4.3 Векторске функције $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

185. Пресликавање је линеарно ако и само ако су све координатне функције тог пресликавања линеарне. Доказати.

186. Нека је пресликавање $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ дефинисано са

$$f(x,y)=\big(x-y,2x+y,x-3y\big).$$

Показати да је ово пресликавање линеарно, одредити његову матрицу у односу на стандардне базе простора $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ и норму $\|f\|$ која је индукована Еуклидовом векторском нормом.

Решење. Линеарност пресликавања f следи на основу Задатка 185 јер су све координатне функције пресликавања f линеарне. Такође, линеарност пресликавања f се може лако утврдити и директно помоћу дефиниције. Матрица A_f линеарног пресликавања f је дата са

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

Приметимо да матрица A_f репрезентује оператор f и обратно, да оператор f репрезентује матрицу A_f. За сваки вектор $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ важи $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A_f \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, при чему поистовећујемо векторе колоне и уређене парове. Норму линеарног пресликавања f дефинишемо као

$$\|f\| \stackrel{\mathsf{def}}{=} \max_{\|(x,y)\|=1} \Big\| \underbrace{f(x,y)}_{\text{Ово је вектор}} \Big\| = \max\Big\{ f(x,y) \;\Big|\; \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{Еуклидова норма } \|(x,y)\|} = 1 \Big\}, \tag{84}$$

при чему ћемо норме вектора рачунати као Еуклидове норме. Јасно је да вредност норме пресликавања зависи од тога за коју векторску норму се определимо. Рачунање вредности $\|f\|$ директно по дефиницији, због (84), води у налажење условног максимума функције више променљивих о чему ће бити речи касније. Може се показати да уколико користимо Еуклидову норму код вектора да је одговарајућа односно индукована норма пресликавања једнака

$$\|f\| = \sqrt{\rho\left(A_f^T A_f\right)}, \quad \text{где је } \rho \text{ спектрални полупречник.}^{55}$$

Приметимо да је $A^T A$ реална, симетрична (самим тим и квадратна) матрица те по решењу Задатка 66 имамо да су све сопствене вредности матрице $A^T A$ реалне. Одредимо матрицу $A^T A$. Имамо

$$A_f^T A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3}^T = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underbrace{\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(17+\sqrt{41}\right) \;\wedge\; \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(17-\sqrt{41}\right)}_{\text{Сопствене вредности матрице } A_f^T A_f}.$$

Одавде налазимо да је

$$\|f\| = \sqrt{\rho\left(A_f^T A_f\right)} = \sqrt{\max\left\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\right\}} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(17+\sqrt{41}\right)}.$$

Напомена 33. Појаснимо мало детаљније у ком су односу норме матрица и норме вектора. Кренимо од дефиниције. Нека је A квадратна матрица. Дефинишемо

$$\|A\| \stackrel{\mathsf{def}}{=} \max_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{85}$$

Максимум из дефиниције (84) се достиже јер је скуп $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ компактан а функција $x \mapsto \|Ax\|$ непрекидна. Када изаберемо неку конкретну векторску норму, матрична норма која је дефинисана са (85) директно зависи од тог избора. У том случају кажемо да је матрична норма индукована одговарајућом векторском нормом. Приметимо да из (85) директно следи да је $\|I_n\| = 1$. Као што је речено у решењу Задатка 186, директно рачунање на основу дефиниције (85) води у налажење условног максимума, те нам је циљ да избегнемо тај поступак. Наведимо, без доказа, како рачунамо матричне норме уколико изаберемо неку конкретну векторску норму. Нека је $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Тада је $\|x\|_1 \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, а може се показати да је одговарајућа индукована матрична норма дата са

$$\|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Уколико је $\|x\|_\infty \stackrel{\mathsf{def}}{=} \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |x_j|$, може се показати да је одговарајућа индукована матрична норма дата са

$$\|A\|_\infty = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|.$$

Уколико норму вектора x рачунамо као Еуклидову норму, тада је поступак рачунања одговарајуће индуковане матричне норме (која се назива спектрална норма) објашњен у решењу Задатка 186. Индуковане матричне норме

[55] Нека је A произвољна квадратна матрица. Спректрални полупречник матрице A се дефинише као $\rho(A) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \max\left\{|\lambda_i(A)| \;:\; i \in \{1,\ldots,n\}\right\}$, где су λ_i сопствене вредности матрице A. Напоменимо да спектрални полупречник није норма на скупу свих квадратних матрица (видети Напомену 12 у којој је дата дефиниција норме на векторском простору). На пример, не мора бити задовољена ни прва аксиома из Напомене (дефиниције) 12. Заиста, довољено је узети било коју ненула нилпотентну матрицу јер ће њен спектрални радијус бити једнак нули (видети Задатак 65). Пример једне такве матрице је $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. За вежбу наћи (ако постоје) одговарајуће контрапримере за остале аксиоме из дефиниције норме.

имају многе лепе особине. На пример, за сваке две квадратна матрице A и B истог формата важи $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$. Такође, за сваки вектор x важи $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$. Напоменмо на крају да матричну норму можемо дефинисати и независно од било које векторске норме али онда немамо гаранцију да ће постојати нека векторска норма која је индукује. На пример, уколико за матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n > 1$, дефинишемо

$$\|A\|_F \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2} \quad \text{(Фробенијусова норма)}$$

тада неће постојати векторска норма која је индукује. Заиста, уколико би постојала таква векторска норма тада би морало да буде $\|I_n\|_F = 1$, што није случај јер је $\|I_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ због претпоставке $n > 1$. За Фробенијусову норму, између осталог, важи и неједнакост $\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_F \cdot \|x\|_2$ за сваки вектор $x \in \mathbb{C}^n$ као и неједнакост $\|AB\|_F \leqslant \|A\|_F \cdot \|B\|_F$ за сваке две квадратне матрице A и B истог формата. Фобенијусова норма је директно уопштење Еуклидове норме над векторима, уколико све врсте матрице поређамо у један вектор и много је лакша да се израчуна него спектрална норма, те се она често користи у конкретним израчунавањима, посебно ако су матрице великих формата. Спектрална $\|\cdot\|_2$ норма и Фробенијусова норма $\|\cdot\|_F$ су повезане неједнакостима

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\cdot\|A\|_2, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{86}$$

Може се показати да је спектрални полупречник било које (квадратне) матрице мањи или једнак од било које њене норме, тј. за сваку матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и сваку матричну норму $\|\cdot\|$ важи неједнакост $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

187. Нека је пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дефинисано са

$$f(x, y) = \big(x^2 - y, 2x + y\big).$$

Доказати да је f диференцијабилно у произвољној тачки и одредити $f'(1, -2)$. Уколико је $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са

$$g(x, y) = \big(x^3 - y, x + y, -2x + y^2\big),$$

одредити $\mathbf{d}\Big(g \circ f\Big)(2, 1)$.

Решење. Нека је $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ произвољна тачка. Покушајмо да одредимо матрицу

$$L = L(a, b) = \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix}}_{\text{Ова матрица ће бити извод векторске функције}} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

за коју важи

$$\left\| \underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b)}_{\text{Прираштај функције } f \text{ у } (a,b)} - \underbrace{L(a, b)\cdot\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}_{\text{Линеаризовани део функције } f \text{ у } (a,b)} \right\| = o\Big(\|(h, k)\|\Big), \quad (h, k) \to (0, 0). \tag{87}$$

Посматрајмо по координатама шта се дешава у последњем реду. Имамо да је

$$\left\|\begin{bmatrix} (a+h)^2 - (b+k) \\ 2(a+h) + (b+k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2 - b \\ 2a + b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1\cdot h + l_2\cdot k \\ l_3\cdot h + l_4\cdot k \end{bmatrix}\right\| = o\Big(\|(h, k)\|\Big), \quad (h, k) \to (0, 0). \tag{88}$$

Ово је еквивалентно са тим да су обе координатне функције диференцијабилне у (a, b), те је

$$l_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)\bigg|_{(x,y)=(a,b)} = 2a, \qquad l_2 = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)\bigg|_{(x,y)=(a,b)} = -1,$$

$$l_3 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)\bigg|_{(x,y)=(a,b)} = 2, \qquad l_4 = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)\bigg|_{(x,y)=(a,b)} = 1.$$

Дакле, за сада смо показали да уколико је f диференцијабилна у (a, b) да је тада диферецнијал једнак

$$\underbrace{\mathbf{d}f\Big(a, b\Big)}_{\text{Функција}}\underbrace{(h, k)}_{\text{Аргумент}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2a & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{= L(a,b)}\cdot\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

За овако оређену матрицу $L(a,b)$ остаје да проверимо само да ли важи (87) односно (88). Имамо да је сада (88) еквивалентно са

$$\left\| \begin{bmatrix} h^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_F = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{(h^2)^2+0^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{89}$$

Тачност последење граничне вредности у (89) следи из неједнакости

$$\left|\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \underbrace{\frac{h^2}{h^2+k^2}}_{\leqslant 1 \text{ за свако } (h,k)\neq(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} \leqslant \sqrt{h^2+k^2} \to 0, \quad (h,k)\to(0,0).$$

Овиме смо уједно прошли кроз линију доказа теореме која каже да је векторска функција диференцијабилна у тачки ако и само ако су њене координантне функције диференцијабилне у тој тачки. На даље ћемо ову теорему користити као критеријум диференцијабилности векторске функције. Сада лако рачунамо $f'(1,-2)$. Ова вредност је у ствари матрица (познатија под именом Јакобијева матрица)

$$f'(1,-2) = L(1,-2) = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да би израчунали $\mathbf{d}\left(g\circ f\right)(2,1)$ користимо формулу за извод сложене векторске функције. Наравно, композиција $g\circ f$ је диференцијабилна у прозивољној тачки јер су f и g диференцијабилне функције у произвољној тачки. Израчунали смо већ $\mathbf{d}f(x,y)$. Одредимо сада Јакобијеву матрицу пресликавања g. Како је $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ имамо да је Јакобијева матрица формата 3×2. Нека је $g=(g_1,g_2,g_3):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$. Израчунавањем добијамо

$$\mathbf{d}g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2y \end{bmatrix}_{3\times 2} \Longrightarrow \mathbf{d}g(2,1) = \begin{bmatrix} 3\cdot 2^2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 2\cdot 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

Применом поменуте формуле добијамо

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\left(g\circ f\right)(2,1) &= \mathbf{d}g(f(2,1))\cdot \mathbf{d}f(2,1) \\ &= \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 46 & -13 \\ 10 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}. \end{aligned}$$

Напомена 34. На основу овог задатка можемо уочити заниимљиву градацију, Извод функција једне променљиве са реалним вредностима у тачки је број. Извод функција више промењљивих са реалним вредностима у тачки је вектор (градијент) док је извод векторских функција у тачки матрица. Приметимо да је формула за извод сложене функције задржала исти облик.

188. Нека је $f(x)=(\sin x,\cos x)$, $x\in[0,2\pi]$. Доказати да не постоји $\xi\in[0,2\pi]$ тако да је

$$f(2\pi)-f(0) = 2\pi\cdot f'(\xi).$$

Решење. Претпоставимо супротно, да постоји број $\xi\in[0,2\pi]$ такав да је

$$\underbrace{f(2\pi)}_{\text{вектор из } \mathbb{R}^2} - \underbrace{f(0)}_{\text{вектор из } \mathbb{R}^2} = 2\pi\cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\text{матрица из } \mathbb{R}^{2\times 1}}. \tag{90}$$

Из тога што су све координатне функције пресликавања f диференцијабилне имамо да је f диференцијабилно пресликавање[56] тј. да постоји $f'(\xi)$. Како је $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$ тада је $f'(\xi)$ матрица формата 2×1 и дата је са

$$f'(\xi) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\mathbf{d}\sin x}{\mathbf{d}x}\right|_{x=\xi} \\ \left.\frac{\mathbf{d}\cos x}{\mathbf{d}x}\right|_{x=\xi} \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} \cos\xi \\ -\sin\xi \end{bmatrix}_{2\times 1}. \tag{91}$$

[56]Ово је теорема која важи у оба смера, тј. даје потребне и довољне услове за диференцијабилност векторске функције.

Сада, на основу (90), (91) и дефиниције пресликавања f, добијамо

$$\begin{bmatrix}\sin 2\pi\\ \cos 2\pi\end{bmatrix}_{2\times 1} - \begin{bmatrix}\sin 0\\ \cos 0\end{bmatrix}_{2\times 1} = 2\pi\begin{bmatrix}\cos\xi\\ -\sin\xi\end{bmatrix}_{2\times 1} \iff 0 = 2\pi\cos\xi \quad\wedge\quad 0 = -2\pi\sin\xi \iff \cos\xi = \sin\xi = 0,$$

што представља контрадикцију. Дакле, наша претпоставка је погрешна те имамо тврђење задатка.

Напомена 35. Овај задатак говори о томе да не важи директно уопштење теореме о средњој вредности која важи за реалне функције једне и више реалних променљивих са реалним вредностима.

4.4 Екстремне вредности функција $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

189. Нека је $f = f(x,y)$ непрекидна функција на компактном скупу A и диференцијабилна на скупу $\operatorname{int}(A)$. Уколико је f константна функција на $A\backslash\operatorname{int}(A)$ тада постоји $(x_0,y_0)\in\operatorname{int}(A)$ тако да је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Доказати.

Решење. Уколико функција достиже најмању и највећу вредност на неком скупу, тада су све остале вредности те функције на том скупу између најмање и највеће вредности. Функција f је непрекидна, скуп A компактан те на основу теореме Вајерштраса функција f достиже најамњу и највећу вредност на A. Дакле, постоје тачке $(x_m,y_m)\in A$ и $(x_M,y_M)\in A$ тако да је

$$f(x_m,y_m) = \min_{(x,y)\in A} f(x,y) \quad \text{и} \quad f(x_M,y_M) = \max_{(x,y)\in A} f(x,y).$$

Уколико обе тачке (x_m,y_m) и (x_M,y_M) припадају скупу $A\backslash\operatorname{int}(A)$ (рубу[57] скупа A) тада је $f(x_m,y_m) = f(x_M,y_M)$ јер функција f узима константне вредности, по услову задатка, на рубу скупа A. Одавде следи да су и све остале вредности на скупу A једнаке, јер је највећа вредност функције f на A једнака најмањој вредности функције f на A. Дакле, управо смо показали да је функција f константна на скупу A, те за тачку (x_0,y_0) можемо узети било коју тачку из скупа $\operatorname{int}(A)$ јер су оба парцијална извода (који постоје по претпоставци задатка) на $\operatorname{int}(A)$ једнака 0. Размотримо сада други случај, када се најмања и највећа вредност не постижу истовремено на рубу скупа A. То значи да је барем једна од тачака (x_m,y_m) и (x_M,y_M) у унутрашњости скупа A (односно у скупу $\operatorname{int}(A)$). Нека је то тачка (x_m,y_m). Како је функција f, по претпоставци задатка, диференцијабилна на скупу $\operatorname{int}(A)$ то значи да постоје оба парцијална извода, а како је тачка (x_m,y_m) тачка минимума мора бити

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Доказ је идентичан и у случају да је тачка (x_M,y_M) у $\operatorname{int}(A)$. Тврђење је управо доказано.

Напомена 36. Тврђење из овог задатка важи и у општем случају за функције од $n\in\mathbb{N}$ променљивих. Уколико пожљивије погледамо, ово тврђење за $n=1$ представља Ролову теорему, која је учена у Математици 1. Уколико студент у овом тренутку не зна барем исказ Ролове теореме препоручујемо му да то сада обнови. Приметимо још да смо у решењу овог задатка користили чињеницу да уколико је тачка у унутрашњости неког скупа, таква да у тој тачки функција имам локални екстремум и ако је функција диференцијабилна у тој тачки онда сви парцијални изводи у тој тачки морају бити јендаки нули. Ова теорема представља аналогну вишедимензионалну верзију Фермаове теореме која је такође учена у Математици 1. Њен доказ је врло једноставан и своди се на употребу Фермаове теореме за једнодимензионалне функције, тако што фиксирамо све променљиве осим једне и користимо очигледну чињеницу да уколико у некој тачки функција више променљивих има локалну екстремну вредност онда по свакој правој кроз ту тачки има локалну екстремну вредност. Нека студент сам размотри детаље.

190. Нека је функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ таква да у тачки (x_0,y_0) има локални минимум по свакој правој која пролази кроз ту тачку. Да ли у тачки $(x_0.y_0)$ функција f мора имати локални минимум?

Решење. Одговор је да не мора. Када размишљамо о којој функцији би могла да буде реч треба да имамо у виду оно што је већ научено, односно да имамо у виду које су нам функције били контрапримери за одређене ствари. Задатак 146 је говорио да постоји функција која је непрекдина по свакој правој кроз неку тачку али да није непрекидна у тој тачки. Покушајмо искористити функцију из овог задатка или неку њену модификацију да бисмо решили овај

[57] Нека је $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}^n$. Руб скупа A дефинишемо као $r(A)\overset{\mathsf{def}}{=}\operatorname{cl}(A)\cap\operatorname{cl}(A^C)$. Може се показати да је $r(A)=A\backslash\operatorname{int}(A)$, уколико је A затворен скуп. Уколико је A отворен скуп, ова једнакост не мора бити тачна. Заиста, уколико је d стандардно Еуклидово растојање на $\mathbb{R}$, тада је $(0,1)$ отворен скуп. Имамо да је $r\big((0,1)\big)\overset{\mathsf{def}}{=}\operatorname{cl}\big((0,1)\big)\cap\operatorname{cl}\big((0,1)^C\big)=[0,1]\cap\big((-\infty,0]\cup[1,\infty)\big)=\{0,1\}$ али је $(0,1)\backslash\operatorname{int}(0,1)=(0,1)\backslash(0,1)=\varnothing$. Руб скупа се аналогно дефинише и у случају произвољног метричког простора.

задатак. Посматрамо тачку $(0,0)$ и функцију f из Задатка 146. Јасно је да овај покушај није решење. Битно својство коју има функција f и тачка $(0,0)$ је то да свака права, сем $x-$осе, која пролази кроз $(0,0)$ садржи оба скупа на који је подељен домен функције f. Ово својство управо носи идеју која решава наш задатак. Дефинишимо функцију $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ са

$$g(x,y)=\begin{cases}-1, & \text{ако је } y=x^2 \text{ и } x\neq 0,\\ 0, & \text{ако је } (x,y)=(0,0),\\ +1, & \text{у осталим тачкама.}\end{cases}$$

Тачка $(0,0)$ је строги локални минимум функције g по свакој правој која пролази кроз њу али у било којој околини тачке $(0,0)$ можемо наћи тачке у којима функција g узима и позитивне и негативне вредности. Како је $g(0,0)\overset{\text{def}}{=}0$ следи да тачка $(x,y)=(0,0)$ није тачка локалног минимума функције g.

191. Одредити екстремне вредности (уколико постоје) функције $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Решење. Функција z је дефинисана за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Кандидате за локалне екстремне вредности налзаимо међу решењима система $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=0$ али и међу тачкама у којима функција нема барем један од ова два парцијална извода. На основу Задатка 181 функција z има оба парцијлна извода за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. За свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ важи

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \text{и}\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{92}$$

На основу (92) формирамо нелинеарни систем $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=0$. Овај систем нема решења у скупу $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (једино решење је $(0,0)$). Дакле, једина тачка у којој можемо имати потенцијални локални екстремум је тачка у којој је нарушена диференцијабилност функције z а то је тачка $(0,0)$. Испитајмо шта се дешава у овој тачки. Имамо да је $z(0,0)\overset{\text{def}}{=}1$ те покажимо да је у овој тачки постигнут строги глобални минимум функције z односно да је за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ испуњено $z(x,y)<1$. Последње је очигледно испуњено јер је $1-\sqrt{x^2+y^2}<1$ за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Дакле, показали смо

$$1\overset{\text{def}}{=}z(0,0)=\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}z(x,y).$$

192. Доказати да је $(-2,-2)$ стационарна тачка функције $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x,y)=(x-y)^2+(y+2)^3.$$

Да ли у тачки $(-2,-2)$ функција f има локалне екстремне вредности?

Решење. Функција f је дефинисана и диференцијабилна у целој $\mathbb{R}^2$ равни, те су једине стационарне тачке решења система $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ а то је управо тачка $(-2,-2)$ у којој је $f(-2,-2)\overset{\text{def}}{=}0$. Уколико покажемо да у свакој околини тачке $(-2,-2)$ можемо наћи тачку која f има вредност мању од 0 и тачку у којој f има вредност већу од 0 на основу дефиниције локалног екстремума ће следити да у тачки $(-2,-2)$ немамо локални екстремум функције f. Како се у дефиницији функције f јавља сабирак $(x-y)^2$ сасвим је природно најпре да покушамо са правом $y=x$. Посматрајмо какве вредности функције f узима на овој правој. Имамо да је

$$f(x,x)\overset{\text{def}}{=}(x-x)^2+(x+2)^3=(x+2)^3.$$

Дакле, за $x>-2$ је $f(x,x)>0$ а за $x<-2$ је $f(x,x)<0$. Свака околина тачке $(-2,2)$ садржи обе полуправе које крећу из $(-2,-2)$ и леже на правој $y=x$ те на основу извршене анализе знака функција f на овој правој закључујемо да у $(-2,-2)$ немамо локалних екстремих вредности.

Напомена 37. Приметимо да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-2)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,-2)\right)^2=0.$$

Када у стационарној тачки функција нема екстремну вредност могуће је да израз из претходног реда има само негативну вредност или вредност нула. Зашто?

193. Уколико постоји, одредити глобални минимум функције $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинисане са

$$f(x,y)=x^4+6\cdot x^2y^2+y^4-\frac{9}{4}\cdot x-\frac{7}{4}\cdot y.$$

Решење. Приметимо најпре да за сваки низ тачака $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ важи[58]

$$\lim_{n\to+\infty} \|(x_n, y_n)\| = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = +\infty. \tag{93}$$

Како је f непрекидна на затвореном скупу $\mathbb{R}^2$ можемо на основу (93) и Задатка 160 закљу-чити да функција f има минимум на $\mathbb{R}^2$. На основу тога што је f и диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$ следи да се тачке у којима f постиже своју најмању вредност налазе међу решењима нелинеарног система једначина

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 + 12xy^2 - \frac{9}{4} = 0 \\ 4y^3 + 12x^2y - \frac{7}{4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 + 3xy^2 - \frac{9}{16} = 0 \\ y^3 + 3x^2y - \frac{7}{16} = 0. \end{cases} \tag{94}$$

Сабирањем и одузимањем једначина из последњег система у (94) добијамо (импликацијом!) систем

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3 = 1 \\ x^3 + 3xy^2 - 3x^2y - y^3 = \frac{2}{16} \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^3 = 1 \\ (x-y)^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases} \iff (x,y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right). \tag{95}$$

Дакле, тачка $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ је једино (евентуално) решење система (94). Како смо показали да функција f има најмању вредност на $\mathbb{R}^2$ директно закључујемо да се најмања вредност функције f мора постићи у тачки $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ (и само у њој), те је $f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \overbrace{\overset{\text{def}}{=} \ldots =}^{\text{краћи рачун}} -\frac{51}{32}$.

Напомена 38. За испит није толико битна формалност око позивања на Задатак 160 него је битна интуитивна представа шта се овде у ствари дешава. Наиме, сабирци x^4 и y^4 у изразу којим је дефинисана функција f су доминантни и теже ка $+\infty$ без обзира на то ка којој бесконачности тежи x, тј, y, те цела функција f тежи ка $+\infty$. Једном речју, важи $\lim_{|x|+|y|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$. На даље цело решење иде исто. Битна је и чињеница да није потребно да се провери карактер стационарне тачке $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ јер је то једина стационарна тачка, док понашање функције f у бесконачности нам описује $\lim_{|x|+|y|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$. Код оваквог начина закључивања видимо аналогију са ситуацијама које се јављају у испитивању екстремних вредности функција једне реалне променљиве, што је рађено у Математици 1.

194. Одредити најмању и највећу вредност функције $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y^2 - 2y.$$

Решење. Функција f је непрекидна на квадрату $\overbrace{[-1,1]^2}^{\text{компактан скуп}}$, те по теореми Вајерштраса достиже на њему највећу и најмању вредност. Одредимо прво стационарне тачке. Оне се налазе међу решењима система $\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 + 4xy = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = 2x^2 + 4y - 2 = 0$. Решења овог система су тачке $N\big(0, \frac{1}{2}\big)$ и $M\big(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\big)$. Овиме смо одредили потенцијалне кандидате за локалне екстремне вредности унутар квадрата $[-1,1]^2$. Посматрајмо сада шта се дешава на рубу квадрата. Када је $x = -1$ тада је $f(-1,y) = 2y^2 - 1$, где је $y \in [-1,1]$. Ова функција је квадратна по y и постиже најмању вредност за $y = 0$, односно добијамо тачку $K_1(-1,0)$ али морамо укључити и рубне тачке, односно темена $A(-1,-1)$ и $D(-1,1)$ квадрата $[-1,1]^2$. Дакле, на правој $x = -1$ имамо три тачке које су кандидати за екстремне вредности функције f. Уколико је $x = 1$, аналогним поступком, добијамо још три нове тачке које су кандидати. То су $B(1,-1)$, $C(1,1)$ и $K_2\big(1,0\big)$. Када је $y = -1$ само треба укључити тачку $K_3(0,-1)$ јер су темена A и B квадрата $[-1,1]^2$ већ укључена. Остаје права $y = 1$ и на њој само једна нова тачка кандидат $K_4(0,1)$ јер су темена C и D већ укључена. Дакле, на целом квадрату $[-1,1]^2$ кандидати за екстремне вредности функције f су тачке A, B, C, D, N, M, K_1, K_2, K_3, K_4. Могуће је да у некој од наведених тачака функција f нема локалну екстремну вредност али нам то није битно уколико тражимо апсолутни максимум и минимум. Уколико израчунамо колико износи вредност функције у свим овим тачкама и одаберемо највећу и најмању од њих одредили смо највећу и најмању вредност функције f на $[0,1]^2$ и тачке у којима се она постиже[59]. Након краћег рачуна добијамо

$$-1 = f\big(\underbrace{(-1,0)}_{=K_1}\big) = \min_{(x,y)\in[-1,1]^2} f(x,y) \quad \text{и} \quad 4 = f\big(\underbrace{(0,-1)}_{=K_3}\big) = \max_{(x,y)\in[-1,1]^2} f(x,y).$$

Напомена 39. Анализирајући решење овог задатка можемо доћи до општег поступка за одређивање најмање и највеће вредности непрекидних функција на компактним скуповима. Битно је напоменути да скуп на коме тражимо

[58] Ово је интуитивно јасно али можемо и мало формалније да то појаснимо. Уколико је $\lim_{n\to+\infty} \|(x_n, y_n)\| = +\infty$ следи да је $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$ или $\lim_{n\to+\infty} |y_n| = +\infty$. Одавде имамо да је $\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} f(|x_n|, |y_n|) = +\infty$.

[59] Зашто тачке које нису локални екстремуми не могу покварити овакав метод тражења апсолутног минимума и максимума? Студент треба да зна барем интуитивно објашњење. Ради разумевања, размотрити најпре случај када тражимо најмању и највећу вредност функције једне реалне променљиве на сегменту.

екстремне вредности неки од облика који су погодни за кретање дуж његовог руба, као што су правоугаоник, круг, троугао. Када се крећемо по рубу, проблем сводимо као у овом задатку на налажење екстремних вредности функција које имају мањи број променљивих. У овом задатку функција f је имала две променљиве, те смо проблем сводили на функције једне променљиве, што је углавном и случај те је битно да смо поступак за решавање ових проблема са функцијама једне променљиве добро научили у Математици 1. Уколико то није случај, сада је право време.

195. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y) = -x^2y \cdot (x + y - 2).$$

Испитати локалне екстремне вредности функције f на $\mathbb{R}^2$ и одредити најмању и највећу вредност ове функције на троуглу чија темена имају координате $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ и $C(0, 2)$.

Решење. Одредимо најпре локалне екстремне вредности функције f на $\mathbb{R}^2$. Све тачке домена $\mathbb{R}^2$ су унутрашње. Како имамо и да је функција f диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$ закључујемо да се кандидати за екстремне вредности налазе само међу решењима нелинеарног система

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -xy \cdot (-4 + 3x + 2y) = 0, \\ -x^2 \cdot (-2 + x + 2y) = 0. \end{cases} \tag{96}$$

Решимо пажљиво систем (96), тако да не испустимо неко решење. Најпре, за свако $y \in \mathbb{R}$ тачка $(0, y)$ је решење система (96). Уколико је $y = 0$ тада је прва једначина система (96) задовољена увек а друга даје $x = 0$ и $x = 2$. Дакле, добијамо и решења $\overbrace{(0, 0)}^{\text{већ добијено}}$ и $\overbrace{(2, 0)}^{= B}$. Нека је сада $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тада се систем (96) своди на

$$\begin{cases} -4 + 3x + 2y = 0, \\ -2 + x + 2y = 0. \end{cases} \iff (x, y) = \overbrace{\left(1, \frac{1}{2}\right)}^{\overset{\text{def}}{:=} M}. \tag{97}$$

Да резимирамо, након ове анализе имамо да су станионарне тачке функције f, тј. кандидати за локалне екстремне вредности тачке скупа

$$\left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\} \cup \{(2, 0)\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \tag{98}$$

Испитајмо карактер сваке тачке скупа (98). У ту сврху рачунамо изразе

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y(-2 + 3x + y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{99}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2 = -16x^2 + 24x^3 - 9x^4 + 24x^2y - 12x^3y - 12x^2y^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{100}$$

Рачунамо вредност израза из (99) и (100) у тачкама скупа (98).

У тачки M, израз (99) има вредност $-\frac{3}{2}$ а израз (100) има вредност 2. Одавде, закључујемо да је M тачка строгог локалног максимума функције f.

Пређимо сада на тачку B. Израз (100) има вредност -16 у овој тачки. То значи да у овој тачки немамо локалних екстремних вредности.

На крају овог дела задатка, испитајмо тачку $(0, y_0)$, где је $y_0 \in \mathbb{R}$ произвољно. Вредност израза (100) једнака је 0 у овој тачки, те се овде мора извршити додатна анализа. Уколико је $y_0 = 0$ тада морамо анализирати прираштај функције f у $(0, 0)$. За то је довољно посматрати вредности функције f на правој $y = x$ јер је тада $f(x, x) = -2x^3(x-1)$, одакле се види да ова функција мења знак при проласку кроз тачку $(0, 0)$ по овој правој. Закључујемо да у овој тачки немамо локалну екстремну вредност. Уколико је $y_0 = 2$ тада је $f(x, 2) = -2x^3$, те при проласку кроз тачку $(0, y_0)$ по правој $y = y_0$ функција f мења знак. Ово значи да не можемо наћи околину тачке $(0, 2)$ у којој функција f има вредности константног знака, те у овој тачки немамо локалних екстремних вредности. Нека је сада $y_0 \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. То значи да је за довољно мало x по апсолутној вредности израз $-x^2y \cdot (x + y - 2)$ негативан, те је тачка $(0, y_0)$ тачка локланог максимума, али не строгог. Аналогним закључивање, уколико је $y_0 \in (0, 2)$ закључујемо да је за довољно мало x по апсолутној вредности израз $-x^2y \cdot (x+y-2)$ позитиван те је у овом случају тачка $(0, y_0)$ локалног максимума, али не строгог.

Пређимо сада на други део задатка. Како је $\triangle ABC$ компактан скуп а функција f непрекидина на њему, на основу

Вајерштрасове теореме закључујемо да функција f постиже највећу и најмању вредност на $\triangle ABC$. Како је вредност функције f на рубу троугла $\triangle ABC$ једнака 0 а у унутрашњости троугла имамо само једну локалну екстремну вредност, закључујемо да ће та екстремна вредност бити максимална вредност функције f на троуглу $\triangle ABC$ јер функција у M има позитивну вредност. Минимум се не може постићи у унутрашњости троугла $\triangle ABC$ (зашто?), те се минимум постиже у свакој тачки на рубу троугла $\triangle ABC$ јер у свим тим тачкама функција f има вредност 0.

Напомена 40. Уколико нам је познато да тачке локалних минимума (или максимума) неке функције леже на једној правој, онда ти локални минимуми никако не могу бити строги локални минимуми. Зашто?

196. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x,y)=x^3+x^2y+y^2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

а затим одредити најмању и највећу вредност (уколико постоје) функције f на скупу

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\leqslant y\leqslant \frac{1-x^2}{2},\ y\geqslant 0\right\}.$$

197. Одредити тачке локалних екстремума функције $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ дефинисане са

$$f(x,y,z)=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2.$$

Решење. Функција је дефинисана на $\mathbb{R}^3$, те су све тачке домена унутрашње. Дакле, кандидати за екстремне вредности се налазе само међу решењима (јер је f диференцијабилна на $\mathbb{R}^3$) нелинеарног система

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=4x-y+2z=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-x-1+3y^2=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2x+2z=0.\end{array}\right. \tag{101}$$

Решења система (101) система су тачке $M_1\left(\frac13,\frac23,-\frac13\right)$ и $M_2\left(-\frac14,-\frac12,\frac14\right)$. Формирајмо Хесијанову матрицу, тј. други диференцијал $\mathbf{d}^2f(x,y,z)$. Наравно, ова матрица ће бити симетрична јер су мешовити парцијални изводи непрекидни у свакој тачки из $\mathbb{R}^2$. Имамо

$$\mathbf{d}^2f(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1&2\\-1&6y&0\\2&0&2\end{bmatrix}. \tag{102}$$

Матрице квадратних форми у тачкама M_1 и M_2 су на основу (102) једнаке

$$\mathbf{d}^2f(M_1)=\begin{bmatrix}4&-1&2\\-1&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad \mathbf{d}^2f(M_2)=\begin{bmatrix}4&-1&2\\-1&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}. \tag{103}$$

Дефинитност матрица $\mathbf{d}^2f(M_1)$ и $\mathbf{d}^2f(M_2)$ из (103) испитујемо помоћу Силвестеровог критеријума. Главни минори матрице $\mathbf{d}^2f(M_1)$ су 4, $\begin{vmatrix}4&-1\\-1&4\end{vmatrix}=15$ и $\begin{vmatrix}4&-1&2\\-1&4&0\\2&0&2\end{vmatrix}\underbrace{=\cdots=}_{\text{крађи рачун}}14$ те је ова матрица позитивно дефинитна. На основу теореме која даје довољне услове за егзистенцију локалних екстремних вредности добијамо да је тачка M_1 тачка строгог локалног минимума. Главни минори матрице $\mathbf{d}^2f(M_2)$ су 4, $\begin{vmatrix}4&-1\\-1&3\end{vmatrix}=-13$ и $\begin{vmatrix}4&-1&2\\-1&3&0\\2&0&2\end{vmatrix}\underbrace{=\cdots=}_{\text{крађи рачун}}-14$. На основу Силвестеровог критеријума заључујемо да матрица $\mathbf{d}^2f(M_2)$ није ни позитивно ни негативно дефинитна али одавде не можемо одмах да закључимо да квадратна форма матрице $\mathbf{d}^2f(M_2)$ мења знак јер може да се деси да буде позитивно или негативно семи дефинитна. Због тога морамо формирати квадратну форму ове матрице и на директни начин испитати њен знак. Квадратна форма матрице $\mathbf{d}^2f(M_2)$ је дата са

$$\underbrace{\mathbf{d}^2f(M_2)}_{\text{Функција}}\underbrace{(h,k,l)}_{\text{Аргумент}}=\overbrace{[h\ k\ l]\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}4&-1&2\\-1&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}}_{=\mathbf{d}^2f(M_2)}\cdot\begin{bmatrix}h\\k\\l\end{bmatrix}}^{\text{Ово све је реалан број}},\qquad (h,k,l)\neq(0,0,0). \tag{104}$$

Да би показали да квадратна форма матрице $\mathbf{d}^2 f(M_2)$ мења знак потребно је наћи два не нула вектора на којима функција $\mathbf{d}^2 f(M_2)$ има различит знак. На основу (104) имамо да је $\underbrace{\mathbf{d}^2 f(M_2)}_{\text{функција}} \underbrace{(h,0,0)}_{\text{аргумент}} = 4h^2 > 0$ јер је $h \neq 0$ као и $\underbrace{\mathbf{d}^2 f(M_2)}_{\text{функција}} \underbrace{(0,k,0)}_{\text{аргумент}} = -3k^2 < 0$ јер је $k \neq 0$. Дакле, показали смо да квадратна форма матрице $\mathbf{d}^2 f(M_2)$ мења знак, те по теореми о довољним условима за егзистенцију локалних екстремних вредности закључујемо да у тачки M_2 функција f нема локалних екстремних вредности. Функција f нема глобални минимум јер је $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,x,x) = -\infty$.

198. Одредити локалне екстремне вредности, највећу и најмању вредност (уколико постоје) функције

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$$

на правоугаонику $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

199. Испитати да ли функција

$$f(x,y) = 3x^4 + x^2 y + 2y^2 + y^4, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

има локалну екстремну вредност у $(0,0)$.

Решење. Други диференцијал функције f у тачки $(0,0)$ је

$$\underbrace{\mathbf{d}^2 f\big((0,0)\big)}_{\text{Функција}} \underbrace{(h,k)}_{\text{Аргумент}} = [h \ k] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = [h \ k] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = 4k^2 \geqslant 0. \tag{105}$$

Дакле, други диференцијал је не-негативна функција у тачки $(0,0)$ али како постоји не-нула вектор (h,k) за који је $\mathbf{d}^2 f\big((0,0)\big)(h,k) = 0$ (ово се види из (105), нпр. узмимо вектор $(1,0)$), те не можемо донети никакав закључак о егзистенцији локалне екстремне вредности у $(0,0)$. Имамо да је $f(0,0) = 0$. Покажимо да је за свако $(x,y) \neq (0,0)$ испуњено $f(x,y) > 0$, одакле ће следити да је $(0,0)$ строга локални минимум али и глобални минимум функције f на $\mathbb{R}^2$. Заиста, имамо да је

$$f(x,y) = 2x^4 + \left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \cdot y^2 + y^4, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{106}$$

На основу (106) закључујемо да је за свако $(x,y) \neq (0,0)$ испуњено $f(x,y) > 0$ те закључак следи.

200. Одредити екстремне вредности функције

$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Решење. Функција f је дефинисана на целој $\mathbb{R}^2$ равни, те су све тачке њеног домена унутрашње. Како је f и диференцијабилна на $\mathbb{R}^3$ имамо да се тачке кандидати за локалне екстремне вредности налазе само међу решењима нелинеарног система

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \cdot e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ 2y \cdot e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0. \end{cases} \tag{107}$$

Након краћења са $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ у (107) добијамо такође нелинеарни систем

$$\begin{cases} 2x - 2x(x^2+y^2) = 0 \\ 2y - 2y(x^2+y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x\big(1 - (x^2+y^2)\big) = 0 \\ 2y\big(1 - (x^2+y^2)\big) = 0. \end{cases} \tag{108}$$

Из последњег система у (108) видимо да се решења система (107) (па и оба система у (108), јер су сви екевивалентни) дата са

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big| \ (x,y) = (0,0) \ \vee \ x^2 + y^2 = 1\big\}.$$

Тачка $(0,0)$ је глобални минимум функције f јер је $f(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} (0^2+0^2) \cdot e^{-(0^2+0^2)} = 0$ а за сваку другу тачку $(x,y) \neq (0,0)$ је $f(x,y) > 0$. Испитајмо сада шта се дешава у тачкама скупа $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big| \ x^2 + y^2 = 1\big\}$. За свако $a \in \mathbb{R}$ важи неједнакост $e^a \geqslant 1 + a$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = 0$. Испитујемо да ли је за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ задовољено

$$(x^2+y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \leqslant e^{-1} \iff x^2 + y^2 \leqslant e^{(x^2+y^2)-1} \tag{109}$$

Последња неједнакост у (109) је тачна за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ јер је

$$\underbrace{e^{(x^2+y^2)-1} \geqslant 1 + \big((x^2+y^2) - 1\big)}_{\text{Овде примењујемо неједнакост } e^a \geqslant 1+a} = x^2 + y^2. \tag{110}$$

Једнакост у (110) важи ако и само ако је $x^2 + y^2 = 1$. Дакле, све тачке са ове кружнице су глобални максимуми функције f, али нису строги. Зашто?

Напомена 41. Испитивање тачака кружнице $x^2+y^2=1$, што смо у прошлом задатку решили помоћу неједнакости $e^x \geqslant 1+x$, можемо урадити и на други начин тако што ћемо прећи на поларне координате $x = r\cos\phi$ и $y = r\sin\phi$, где је $r \geqslant 0$ и $\phi \in [0, 2\pi]$. Тада се функција f своди на функцију једне променљиве $g(r) = r^2e^{-r^2}$, $r \geqslant 0$. Тада је само у $r=1$ задовољено $g'(1)=0$ а како је и $g''(1) = -\frac{4}{e} < 0$ то је у тачки $r=1$ функције g строги локални максимум. Како је $g(0)=0$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r) = 0$ следи да је у $r=1$ строги глобални максмум функције g. Ово значи да је и у тачкама $x^2+y^2=1$ глобални максимум функције f јер смо показали да је за свако $r \geqslant 0$ које је $r \neq 1$ задовољено $r^2e^{-r^2} < e^{-1}$, те уколико узмемо произвољну тачку (x, y) за коју важи $x^2+y^2 \neq 1$ и представимо је у облику $x = r\cos\phi$ и $y = r\sin\phi$ за неке $r \geqslant 0$ и $\phi \in [0, 2\pi]$ тада је $r^2 = x^2+y^2$, те заменом у последњој неједнакости следи изречено тврђење. Битно је рећи да у тачкама кружнице $x^2+y^2=1$ функције f нема строги глобални максимум (док функција g у $r=1$ има строги глобални максимум). Зашто? Занимљиво је следеће питање, односно аналогија. Да ли се ротацијом графика функције g око ординатне осе добија површ коју гради функција f?

201. Одредити највећу вредност (уколико постоји) функције $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x, y, z) = \frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Решење. Уколико користимо парцијалне изводе добијају се јако непријатни нелинеарни системи. Нека студент покуша да се избори са њима а ми ћемо показати један трик помоћу кога на врло елегентан начин решавамо овај проблем. Нека је $u = (x, y, z)$, $v = (1, 2, 3)$ и $\varphi_u \in [0, \pi]$ угао између ова два вектора (овај угао зависи само од вектора u, те је зато ознака φ_u). Тада је

$$f(x, y, z) = \frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\overbrace{u \cdot v}^{\text{скаларни производ}}}{\|u\|} = \frac{\|u\| \quad \overbrace{\|v\|}^{=\sqrt{1^2+2^2+3^2}} \quad \cdot \cos\varphi_u}{\|u\|} = \sqrt{14}\cdot\cos\varphi_u. \tag{111}$$

Дакле, израз $f(x, y, z)$ достиже највећу вредност ако и само ако је $\cos\varphi_u = 1$, што је еквивалентно са $\varphi_u = 0 \,\vee\, \varphi_u = \pi$. Другим речима, максимална вредност функције f се постиже када су вектори u и v паралелни (колинеарни), тј. у свакој тачки скупа $\{k\cdot(1, 2, 3) \mid k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$. Показали смо да је $\max\limits_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}} f(x, y, z) = \sqrt{14}$, чиме је задатак завршен.

Напомена 42. Нека студент користећи (111) нађе тачке у којима функција f постиже најмању вредност и колико она износи.

202. Одредити највећу и најмању вредност функције

$$f(x, y) = x^2+y^2+12x-16y$$

под условом $x^2+y^2 \leqslant 25$.

Решење. Овај задатак формално припада задацима са условним екстремумом функција али ми ћемо покушати да пренебрегнемо ову потешкоћу. Одредимо најпре стационарне тачке у целој $\mathbb{R}^2$ равни. Решавањем система $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ добијамо тачку $(x, y) = (-6, 8)$, али ова тачка нам није од интереса јер је $(-6)^2+8^2 > 25$. Дакле, функција f нема стационарних тачака унутар круга $x^2+y^2 < 25$ (отворен скуп!). Како је f непрекидна а $x^2+y^2 \leqslant 25$ компактан скуп, по теореми Вајерштраса функција f постиже максимум и минимум на том кругу али не у његовој унутрашњости јер посматрани систем нема решења унутар круга. То значи да се максимум и мунимум функције f постиже на рубу овог круга, тј. у некој од тачака кружнице $x^2+y^2=25$. Облик функције и скуп на коме тражимо екстремне вредности су погодни за увођење поларних координата, тј. $x = 5\cos\varphi$ и $y = 5\sin\varphi$, где је $\varphi \in \mathbb{R}$. Овим сменама проблем сводимо на налажење екстремних вредности функције

$$g(\varphi) = 25 + 5\cdot(12\cos\varphi - 16\sin\varphi),\ \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Довољно је посматрати само израз $12\cos\varphi - 16\sin\varphi$ на скупу $\mathbb{R}$. Као у Математици 1, изједначавањем извода са нулом добијамо

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\varphi}(12\cos\varphi - 16\sin\varphi) = 0 \iff -3\sin\varphi = 4\cos\varphi \iff -3\cdot\frac{y}{5} = 4\cdot\frac{x}{5} \iff 4x = -3y.$$

Комбинујући $4x = -3y$ са $x^2+y^2=25$ добијамо тачке $(-3, 4)$ и $(3, -4)$. Ове тачке су једини кандидати за екстремне вредности на траженом скупу. Као што смо већ напоменули, Вајерштрасова теорема нам каже да се постиже и минимум и максимум на посматраном скупу. Дакле, једна од ове две тачке је тачка у којој се постиже минимум а друга је тачка у којој се постиже максимум на датом скупу. Имамо да је $f(-3, 4) \overset{\mathsf{def}}{=} (-3)^2+4^2+12\cdot(-3)-16\cdot4 = -75$ и $f(3, -4) \overset{\mathsf{def}}{=} 3^2+(-4)^2+12\cdot3-16\cdot(-4) = 125$, те је у тачки $(-3, 4)$ постигнут минимум на посматраном скупу а у тачки

$(3,-4)$ максимум. Овиме је задатак решен. Решимо сада задатак на други начин, тј. користећи само елементарне неједнакости. Одредимо најпре најмању вредност на посматраном скупу. Додајмо и одузмимо x^2+y^2. Тада је за свако (x,y) за које важи $x^2+y^2 \leqslant 25$ задовољено

$$f(x,y) = 2x^2+2y^2+12x-16y-(x^2+y^2) = \underbrace{2(x+3)^2}_{\geqslant 0} -18 + \underbrace{2(y-4)^2}_{\geqslant 0} \underbrace{-(x^2+y^2)}_{\geqslant -25} -32 \geqslant -75. \tag{112}$$

Знак једнакости се постиже ако и само ако је у (112) увек испуњен знак $=$ уместо знака $\geqslant$, односно ако и само ако је $x+3=0$ и $y-4=0$ и $x^2+y^2=25$, што је еквивалентно са $(x,y)=(-3,4)$. Дакле, у овој тачки се постиже најмања вредност функције на посматраном скупу. Одредимо сада максималну вредност, користећи најмању вредност. Имамо да је за свако (x,y) за које важи $x^2+y^2 \leqslant 25$ задовољено

$$f(x,y)+f(-x,-y) = 2x^2+2y^2 \leqslant 25 \implies f(x,y) \leqslant 2\cdot 25 \underbrace{-f(-x,-y)}_{\leqslant -(-75)=75} \leqslant 125. \tag{113}$$

Да би се постигла вредност 125 у (113) имамо да је то могуће ако и само ако је $x^2+y^2=25$ и $(-x,-y)=\big(-(-3),-4\big)=(3,-4)$. Задатак је решен и на други начин.

Напомена 43. Овом задатку ћемо се вратити мало касније и решићемо га методом за налажење условних екстремних вредности функција више промењљивих.

4.5 Условне екстремне вредности функција $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

203. Одредити растојање праве $x-y-2=0$ од параболе $y=x^2$.

204. Решити Задатак 202 користећи Лагранжеве множиоце.

Решење. Као што смо у решењу Задатка 202 закључили, тражимо најмању и највећу вредност функције f под условом $x^2+y^2=25$. Формирамо функцију Лагранжа

$$F(x,y;\lambda) = x^2+y^2+12x-16y+\lambda\cdot(x^2+y^2-25).$$

Одавде лако налазаимо да је $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y;\lambda) = 2x+12+2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y;\lambda)=2y-16+2\lambda y$ и $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y;\lambda)=x^2+y^2-25$ те имамо да је

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y;\lambda)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y;\lambda)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y;\lambda)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+6+\lambda x=0 \\ y-8+\lambda y=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \iff (x,y,\lambda)\in\big\{(-3,4,1),(3,-4,-3)\big\}. \tag{114}$$

Појаснимо, пре него што наставимо даље, како смо решили нелинеарни систем из (114). Прва једначина је еквивалентна са $\lambda(x+1)=-6$ а друга са $\lambda(y+1)=8$. Како је $\lambda\neq 0$, $x\neq -1$ и $y\neq -1$ (зашто?) добијамо да је $\frac{x+1}{y+1}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$. Одавде лако изражавамо $x=-\frac{3}{4}(y+1)-1$ и заменом у трећој једначини из (114) добијамо квадратну једначину. На даље је посао лак. Наставимо сада са решавањем задатка. Како смо добили две тачке за решење система (114), а знамо да функција f под условом $x^2+y^2=25$ постиже и максимум и минимум, следи да једна од ових тачака мора бити тачка у којој се постиже максимум а друга тачка мора бити тачка у којој се постиже минимум. Како је $f(-3,4)=-75<125=f(3,-4)$ следи да је

$$-75 = \min_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2=25\}} f(x,y) = f(-3,4) \quad \text{и} \quad 125 = \max_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2=25\}} f(x,y) = f(3,-4).$$

205. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$f(x,y,z) = x+y+z^2$$

при условима

$$z-x=1 \quad \text{и} \quad y-xz=1.$$

206. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$f(x,y,z) = xy + yz$$

при условима

$$x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

207. (Септембарски рок 2020) У елипсу $x^2 + 4y^2 = 36$ уписати правоугаоник максималне површине.

208. (Септембарски рок 2020) Нека је у елипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

уписан троугао површине P. Доказати неједнакост

$$P \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot ab.$$

209. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x,\ y > 0$. Доказати неједнакост

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n + y^n}{2}.$$

Када у овој неједнакости важи знак једнакости?

210. (Септембар 2021) Нека је дато тело $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$ и функција $f : D \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x,y,z) = x + y + z \quad \text{за свако} \quad (x,y,z) \in D.$$

Одредити

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) \quad \text{и} \quad \max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z).$$

Решење. Пре свега, функција f је непрекдина а тело D компактно (јер је затворено и ограничено) па постоје $\min\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)$ и $\max\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)$ и постижу се на D на основу Вајерштрасове теореме. Како је $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \neq 0$ за свако $(x,y,z) \in \mathrm{int}(D)$ добијамо да функција нема екстремних вредности у унутрашњости тела D. Како се минимум и максимум постижу (малопре смо рекли зашто) имамо да се то дешава на рубу тела D.

Погледајмо прво шта се дешава на параболоиду $z = x^2 + y^2$. То значи да треба одредити екстремне вредности функције f под условом $z = x^2 + y^2$ а тај проблем се своди на одређивање екстремних вредности функције $g(x,y) = x + y + x^2 + y^2$ без услова. Систем $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$ је еквивалентан систему $1 + 2x = 0$ и $1 + 2y = 0$ тј. имамо $(x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и лако видимо да $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in \partial D$ (са ∂D је означен руб скупа D тј. његова граница). Ова тачка је један кандидат. Приметимо да је $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Погледајмо шта се дешава на другом делу руба тела D тј. када је $z = 1$ и $x^2 + y^2 < 1$. То се своди на уводну напомену јер је $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \neq 0$ за свако $(x,y,z) \in \mathrm{int}(D)$ а под условима $z = 1$ и $x^2 + y^2 < 1$ имамо $(x,y,1) \in \mathrm{int}(D)$.

Остаје само да се види шта се дешава на делу руба који је дефинисан са $z = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$ (кружница полупречника 1 у равни $z = 1$ са центром у тачки $(0,0,1)$). Потребно је одредити екстремне вредности функције $h(x,y) = x + y + 1$ под условом $x^2 + y^2 = 1$. Формирамо помоћну функцију $F(x,y;\lambda) = h(x,y) + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$ за $(x,y;\lambda) \in \mathbb{R}^{2+1}$. Систем $\frac{\partial F(x,y;\lambda)}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y;\lambda)}{\partial y} = \frac{\partial F(x,y;\lambda)}{\partial \lambda} = 0$ је еквивалентан систему $1 + 2\lambda x = 0$ и $1 + 2\lambda y = 0$ и $x^2 + y^2 = 1$ а одатле (ако прво приметимо да је $\lambda \neq 0$) добијамо да је $x = -\frac{1}{2\lambda} = y$ па је $\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Одавде је $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ или $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ па имамо још два кандидата $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ при чему је $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1$ и $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$.

Како се минимум и максимум у D постижу довољно је од свих кандидата узети оног који даје најмању вредност функцији f и то ће бити минимум. Исто тако и за максимум. Одавде је $\min\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = -\dfrac{1}{2}$ и постиже се у тачки $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \partial D$ док је $\max\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 1 + \sqrt{2}$ и постиже се у тачки $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \in \partial D$.

211. Нека је $f : (0, +\infty)^3 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y, z) = (x + y + z) \cdot e^{-(x+2y+3z)}.$$

Одредити

$$\inf_{\substack{x>0\\y>0\\z>0}} f(x, y, z) \quad \text{и} \quad \sup_{\substack{x>0\\y>0\\z>0}} f(x, y, z).$$

212. Нека је дат скуп

$$\Delta = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y + z \leqslant 1\right\}$$

и функција $f : \Delta \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

Одредити тачке у којима се постиже

$$\min_{(x,y,z)\in\Delta} f(x, y, z) \quad \text{и} \quad \max_{(x,y,z)\in\Delta} f(x, y, z).$$

213. Уколико постоји, одредити најмању вредност функције $f : (0, +\infty)^3 \to \mathbb{R}$, дефинисане са

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y},$$

под ограничењем $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решење. Овај задатак ћемо решити на елементаран начин, користећи неједнакости. Како су x, y и z позитивни бројеви, можемо применити неједнакост између аритметичке и геометријске средине. Нека је $(x, y, z) \in (0, +\infty)^3$ произвољно. Тада је

$$\begin{aligned}
\big[f(x, y, z)\big]^2 &= \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right) + 2\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{zx}{y}\right) + 2\left(\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)\\
&= \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \underbrace{2y^2 + 2x^2 + 2z^2}_{= 2\cdot 1 = 2 \text{ из услова задатка}}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}\right) + \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}\right) + \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}\right)\right] + 2\\
&\geqslant \frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}\cdot\frac{y^2z^2}{x^2}} + 2\cdot\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}} + 2\cdot\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}\right] + 2\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{2y^2 + 2x^2 + 2z^2}_{= 2 \text{ из услова задатка}}\right) + 2\\
&= 1 + 2\\
&= 3
\end{aligned} \tag{115}$$

Дакле, из (115) и из тога што је $f(x, y, z) > 0$ за свако $(x, y, z) \in (0, +\infty)^3$ закључујемо да је $f(x, y, z) \geqslant \sqrt{3}$ за свако $(x, y, z) \in (0, +\infty)^3$. Одавде још не можемо закључити да је испуњено $\min\limits_{(x,y,z)\in(0,+\infty)^3} f(x, y, z) = \sqrt{3}$, али ако пронађемо неку тачку из $\mathbb{R}^3$ у којој функција f има вредност $\sqrt{3}$ онда закључујемо да је $\min\limits_{(x,y,z)\in(0,+\infty)^3} f(x, y, z) = \sqrt{3}$. Не само једну тачку, него све тачке (евентуалне) у којима функција f постиже вредност $\sqrt{3}$ можемо наћи уколико погледамо пажљиво (115), односно уколико уместо знака $\geqslant$ ставимо знак $=$ у неједнакости из (115). Једнакост у неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи ако и само ако су сви бројеви који учествују у њој једнаки. Одавде, имамо услов

$$\frac{x^2y^2}{z^2} = \frac{y^2z^2}{x^2} = \frac{x^2z^2}{y^2} \implies x = y = z \implies x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ јер је } x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{116}$$

Дакле, из (116), закључујемо да је

$$\min_{(x,y,z)\in(0,+\infty)^3} f(x, y, z) = \sqrt{3} \text{ и да се постиже само у тачки } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in (0, +\infty)^3.$$

4.6 Разни задаци

214. Ако је функција $(x,y)\mapsto f(x,y)$ непрекидна по промењивој x при сваком фиксираном y и ако има ограничен парцијални извод по y онда је f непрекдина по (x,y). Доказати.

Решење. Нека је (x_0,y_0) произвољно и $\varepsilon>0$. Покажимо да је f непрекидна у тој тачки. За свако (x,y), на основу неједнакости троугла, имамо да је

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=\Big|\big(f(x,y)-f(x,y_0)\big)+\big(f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\big)\Big|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|.$$

Нека је $\delta_1=\frac{\varepsilon}{2M}$. Како је f непрекидна по x при сваком фиксираном y имамо да постоји $\delta_1>0$ такво да је $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ кад год је $|x-x_0|<\delta_1$. На основу услова задатка, постоји $M>0$ тако да је за свако (x,y) задовољено $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant M$. Користећи Лагранжеву теорему о средњој вредности функција једне променљиве имамо да је

$$f(x,y)-f(x,y_0)=\underbrace{\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}}_{\xi\in(y_0,y)}\cdot(y-y_0)\implies\Big|f(x,y)-f(x,y_0)\Big|=\left|\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}\right|\cdot|y-y_0|\leqslant M|y-y_0|.$$

Изаберимо $\delta_2=\frac{\varepsilon}{2M}$. Дакле, уколико $(x,y)\in P\big((x_0,y_0);\delta_1,\delta_2\big)$ тада је $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Управо смо показали да је f непрекидна у (x_0,y_0).

215. Нека је функција $(x,y)\mapsto f(x,y)$ дефинисана у некој околини тачке $(0,0)$, при чему важи $f(0,0)=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$. Потребан и довољан услов услов за диференцијабилност функције f у $(0,0)$ је

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x\cdot f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y\cdot f(x,y)}{x^2+y^2}=0.$$

Доказати.

216. Нека је $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ функција која има парцијалне изводе било ког реда у произвољној тачки из $\mathbb{R}^2$. Да ли f мора бити непрекидна на $\mathbb{R}^2$?

217. Нека функција $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ има непрекидне прве працијалне изводе у свакој тачки из $\mathbb{R}^2$ и нека постоје $a,\,b\in\mathbb{R}$ тако да је испуњено

$$h(x,y)=a\cdot\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)+b\cdot\frac{\partial h}{\partial y}(x,y),\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Уколико постоји $M>0$ тако да је за свако $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ задовољено $\big|h(x,y)\big|\leqslant M$, тада је h идентички једнака 0 на $\mathbb{R}^2$. Доказати.

Решење. Нека је $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$ произвољно. Дефинишимо функцију[60] $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ са $l(t)=(a_0,b_0)+t(a,b)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Због тога што је $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ и $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ можемо формирати функцију $\big(h\circ l\big)(t)=h\big(l(t)\big)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Користећи *chain rule* добијамо да је за свако $t\in\mathbb{R}$ задовољено

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\big(h\circ l\big)(t)=\underbrace{\overbrace{\nabla h\big(l(t)\big)}^{\in\mathbb{R}^{1\times2}}\cdot\overbrace{l'(t)}^{\in\mathbb{R}^{2\times1}}}_{\text{скаларни производ}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}\big(l(t)\big) & \frac{\partial h}{\partial y}\big(l(t)\big)\end{bmatrix}_{1\times2}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}_{2\times1}\overset{\mathsf{def}}{=}a\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\big(l(t)\big)+b\cdot\frac{\partial h}{\partial y}\big(l(t)\big)\overset{\mathsf{def}}{=}\big(h\circ l\big)(t).\tag{117}$$

Дакле, (117) нам говори да је извод функције $h\circ l$ управо $h\circ l$ у свакој тачки $t\in\mathbb{R}$. То значи да је[61]

$$\big(h\circ l\big)(t)=C\cdot e^t,\ \forall t\in\mathbb{R}\implies\underbrace{M\geqslant\Big|\big(h\circ l\big)(t)\Big|}_{\text{услов задатка}}=\underbrace{|C|\cdot e^t\implies C=0}_{\text{због }\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty}\implies\big(h\circ l\big)(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}.\tag{118}$$

Специјално, ако ставимо у (118) да је $t=0$ (ово можемо да урадимо јер је (118) испуњено за свако $t\in\mathbb{R}$) добијамо $0=\big(h\circ l\big)(t)\overset{\mathsf{def}}{=}h\big(l(0)\big)\overset{\mathsf{def}}{=}h(a_0,b_0)$. Како је $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$ произвољно одабрано имамо тврђење задатка.

[60] Вредности ове функције у ствари представљају праву у равни кроз тачку (a_0,b_0) са вектором правца (a,b).

[61] Ми смо у ствари проблем свели на диференцијалну једначину $y'=y$. Као што је познато, ово је најједноставнија диференцијална једначина која раздваја променљиве. Заиста, имамо

$$y'=y\iff\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t}=y\iff\frac{\mathbf{d}y}{y}=\mathbf{d}t\implies\int\frac{\mathbf{d}y}{y}=\int\mathbf{d}t\implies\ln|y|=t+C_1,\ C_1\in\mathbb{R}\implies y=e^{t+C_1}=\underbrace{\pm e^{C_1}}_{=\,\text{const}}e^t=C\cdot e^t.$$

Напомена 44. Занимљиво је видети где се у решењу овог задатка користи услов да су први парцијални изводи функције h на $\mathbb{R}^2$ непрекидни. За *chain rule* нам је потребна диференцијабилност обе функције које учествују у композицији. Како су први парцијални изводи функције h дефинисани и непрекидни у целој $\mathbb{R}^2$ равни имамо да је функција h диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$. Како је и функција l диференцијабилна закључујемо да можемо користити *chain rule* у било којој тачки. Колико је битна диференцијабилност илуструје следећи пример. Функција $f(x, y) = \sqrt[4]{xy}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ није диференцијабилна у $(0, 0)$, што се лако показује на основу дефиниције али је $f'_x(0, 0) = 0$ и $f'_y(0, 0) = 0$. Функције $x = x(t) = t^2$ и $y = y(t) = t^2$, где је $t \in \mathbb{R}$, су диференцијабилне у свакој тачки али композиција $f(x(t), y(t)) = |t|$ није диференцијабилна у $t = 0$.

218. Нека је дата функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ која има непрекдине прве парцијалне изводе у свакој тачки из $\mathbb{R}^2$. Уколико важи

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

тада је f идентички једнака константи на $\mathbb{R}^2$. Доказати.

Решење. Нека је $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ произвољна тачка. Формирајмо Кошијев проблем

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{119}$$

Из прве једнакости у (119), користећи *chain rule*, имамо

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \underbrace{y'(x)}_{= f(x, y(x))} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{120}$$

Једнакост (120) нам говори да је $y'(x) = \text{const.}$ за свако $x \in \mathbb{R}$, што значи да је $y = y(x)$ права линија, која пролази кроз (x_0, y_0). Њена једначина је дата са

$$y(x) - y_0 = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{коефицијент правца због (119)}} \cdot (x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{121}$$

Уколико би постојала нека тачка $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ таква да је $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ и $f(x_1, y_1)$, тада би се права (121) секла са правом

$$y(x) - y_0 = \underbrace{f(x_1, y_1)}_{\text{коефицијент правца праве}} \cdot (x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{122}$$

јер су коефицијенти њихових праваца различити, тј. због $f(x_0, y) \neq f(x_1, y_1)$. Означимо са $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ пресек правих (121) и (122). Закључујемо да Кошијев проблем

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = b, \end{cases} \tag{123}$$

има два различита решења која пролазе кроз тачку (a, b), што је немогуће на основу теореме о егзистенцији и јединствености решења диференцијалне једначине.

Напомена 45. Приметимо да из непрекидности првих парцијалних озвода функције f на $\mathbb{R}^2$ следи да је функција f диференцијабилна на $\mathbb{R}$, што омогућава примену *chain rule*, на основу Напомене после Задатка 217. Такође, услов задатка користимо и код егзистенције и јединствености Кошијевих проблема (119) и (123). Уколико је студент заборавио теорему о егзистенцији и јединствености решења Кошијевог проблема, сада је право време да се ова теорема обнови.

219. Нека је $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ област[62] и $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да је за свако $x \in \mathcal{D}$ задовољено $\nabla f(x) = \mathbf{0}_n$. Доказати да функција f има константну вредност на $\mathcal{D}$.

Решење. Идеја за решење овог задатка је јако проста. Када је неки парцијални извод функције једнак нули у свакој тачки то значи да је промена функције по тој променљивој (остале променљиве фиксирамо) једнака нули. Изложићемо, ради разумевања, скицу решења а касније и формално решење. Уколико посматрамо функцију од две промељиве, одаберимо произвољне тачке $(a, b), (u, v) \in \mathcal{D}$. Циљ нам је да докажемо да је $f(a, b) = f(u, v)$, одакле ће на основу произвољности ових тачака следити константност функције f на $\mathcal{D}$. Најпре имамо $f(a, b) = f(u, b)$

[62] Скуп $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ је област ако је отворен и повезан. Скуп X је повезан ако не постоје непразни, отворени скупови A и B такви да је $X = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$. Ово је дефиниција повезаног скупа и у произвољном метричком простору.

јер је промена функције f по првој променљивој једнака нули. Даље, имамо да је $f(u,b) = f(u,v)$ јер је промена функције f по другој променљивој једнака нули. Дакле, $f(a,b) = f(u,v)$, те је f константна функција. Јасно је да смо се оваквим кретањем померили из тачке (a,b) у тачку (u,v) полигоналном линијом која је прво паралелна са једном а потом са другом координатном осом. Да ли можемо ово увек да урадимо? Можемо, уколико је област $\mathcal{D}$ конвексна[63]. Сада креће формално решење. Јасно је да тврђење важи (на основу изложеног) за конвексне области $\mathcal{D}$ и произвољну функцију f од n променљивих. Покушајмо сада да пренебрегнемо и конвексност и да пређемо на произвољну област. Дакле, нека је сада $\mathcal{D}$ област и $a \in \mathcal{D}$ произвољан вектор. Како је $\mathcal{D}$ отворен скуп, имамо да постоји кугла $\mathcal{K}(a,r),\ r > 0$, таква да је $\mathcal{K}(a,r) \subset \mathcal{D}$. Кугла је конвексан скуп, те према ономе што смо показали за конвексне области, закључујемо да је f константа на $\mathcal{K}(a,r)$. Циљ нам је да покажемо да је $f(\mathcal{D})$ једноелементан скуп. Нека је $b \in f(\mathcal{D})$ произвољан број. Једноелементан скуп $\{b\}$ је затворен а f непрекидна функција (јер је по условy задатка диференцијабилна) те је и $f^{-1}(\{b\})$ затворен скуп. Са друге стране скуп $f^{-1}(\{b\})$ мора бити и отворен. Заиста, нека је $a \in f^{-1}(\{b\})$ произвољно. Како $a \in f^{-1}(\{b\})$ следи да је $f(a) \overset{\mathsf{def}}{=} b$. Рекли смо да постоји кугла око вектора a у којој функција f има константну вредност те се свака тачка из те кугле слика функцијом f у исти број као и тачка a, односно у b. Овиме смо показали да је скуп $f^{-1}(\{b\})$ отворен. Дакле, скуп $f^{-1}(\{b\})$ је и отворен и затворен[64] и налази се у повезаном скупу $\mathcal{D}$. Одавде следи да је $f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$ или $f^{-1}(\{b\}) = \mathcal{D}$. Једнакост $f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$ није могућа јер смо одабрали на почетку $b \in f(\mathcal{D})$, одакле следи да је нужно $f^{-1}(\{b\}) = \mathcal{D} \iff f(\mathcal{D}) = \{b\}$. Последње је еквивалентно са тим да је f константна функција на $\mathcal{D}$.

Напомена 46. У овом задатку смо користили пуно једноставних тврђења. На пример, да је скуп $\{b\}$ затворен у односу на Еуклидову (рецимо) метрику на $\mathbb{R}^n$. Дакле, памтимо фразу: "Тачка је затворена." Даље, користили смо да је инверзна слика затвореног скупа (тачка је затворена) непрекидном функцијом затворен скуп. Обновити одговарајуће доказе (који су јако једноставни) ових тврђења. Задржаћемо се на чињеници да су једини *clopen* скупови у повезаном скупу $\mathcal{D}$ управо $\varnothing$ и $\mathcal{D}$. Претпоставимо да постоји неки *clopen* скуп $\varnothing \neq A \neq \mathcal{D}$ (специјално, A је отворен). Тада је скуп A^C такође *clopen* (специјално, A^C је отворен) те је $\mathcal{D} = A \cup A^C$. Ово значи да смо повезан скуп $\mathcal{D}$ представили као унију два непразна, међусобно дисјунктна отворена скупа. Ово није могуће на основу дефиниције повезаног скупа. Тврђење из овог задатка важи и у општијем случају, за векторске функције. Обновити ово тврђење са предавања. На крају, напоменимо да претпоставку да је $\mathcal{D}$ повезан скуп не можемо изоставити. Заиста, нека су D_1 и D_2 отворени, дисјунктни скупови и нека f има различите константне вредности на D_1 и D_2. Тада је јасно да је $\nabla f(x) = \mathbf{0}$ за свако $x \in D_1 \cup D_2$, али f није константна на $D_1 \cup D_2$.

220. Нека је $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрекидна функција са дефинисаним првим парцијалним изводима на $\mathbb{R}^2$. Нека је за свако (x,y) које задовољава $x^2 + y^2 \leqslant 1$ испуњено $|f(x,y)| \leqslant 1$. Тада постоји (x_0,y_0) у унутрашњости јединичног круга за које важи

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2 \leqslant 16.$$

Доказати.

Решење. Дефинишимо функцију $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ са

$$g(x,y) \overset{\mathsf{def}}{=} f(x,y) + 2 \cdot (x^2 + y^2).$$

Овако дефинисана функција g има оба парцијална извода у свакој тачки из $\mathbb{R}^2$. За свако (x,y) које задовољава $x^2 + y^2 = 1$ важи

$$g(x,y) = \underbrace{f(x,y)}_{\geqslant -1} + 2 \cdot \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=1} \geqslant 1. \tag{124}$$

Имамо да је и $g(0,0) \leqslant 1$. На основу Вајерштрасове теореме функција g постиже најмању вредност на кругу $x^2+y^2 \leqslant 1$. Нека се то дешава у тачки (x_m,y_m). Уколико је $x_m^2 + y_m^2 = 1$ имамо да, на основу (124) и $g(0,0) \leqslant 1$, је g константна на $x^2 + y^2 \leqslant 1$, те тврђење тривијално важи. Претпоставимо зато да се тачка (x_m,y_m) налази унутар јединичне кружнице, тј. да је $x_m^2 + y_m^2 < 1$. Одавде закључујемо да је

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_m,y_m) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_m,y_m) = 0. \tag{125}$$

На основу дефиниције функције g имамо да је (125) еквивалентно са

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_m,y_m) + 4x_m = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_m,y_m) + 4y_m = 0. \tag{126}$$

Из (126) следи да је

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_m,y_m)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_m,y_m)\right]^2 = \big| -4 \cdot x_m\big|^2 + \big| -4 \cdot y_m\big|^2 = 16 \cdot \Big(\underbrace{|x_m|^2 + |y_m|^2}_{<1}\Big) < 16.$$

Дакле, тражена тачка (x_0,y_0) је управо (x_m,y_m).

[63] Конвексност је појам који се уводи још у основној школи.

[64] За скупове који су истовремено отворени и затворени у енглеској литератури постоји једноставна кованица, *clopen*.

221. Нека је $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ област и $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ таква да је $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ за свако $(x, y) \in \mathcal{D}$. Да ли постоји функција g таква да је $g(x) = f(x, y)$ за свако $(x, y) \in \mathcal{D}$?

Решење. Интуитивно, можемо посумњати да ово тврђење важи. Али, ствари стоје друга-чије. Покажимо да ово тврђење не мора да важи. Дефинишимо скупове $D_1 = (-2, 0) \times (-2, 2)$, $D_2 = [0, 2) \times (1, 2)$ и $D_3 = [0, 2) \times (-2, -1)$ и ставимо $\mathcal{D} = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Скуп $\mathcal{D}$ је отворен и повезан те је област. Дефинишимо сада функцију $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ са

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x^2, & \text{ако је } (x, y) \in D_1 \cup D_2, \\ -x^2, & \text{ако је } (x, y) \in D_3. \end{cases} \tag{127}$$

Овако дефинисана функција f је таква да важи $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ за свако $(x, y) \in \mathcal{D}$. Уколико би постојала функција g, тада би било

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}, y\right) \text{ за свако } y \text{ за које је } \left(\frac{3}{2}, y\right) \in \mathcal{D} \implies f\left(\underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\in \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}}\right) = f\left(\underbrace{\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)}_{\in \mathcal{D}_3 \subset \mathcal{D}}\right). \tag{128}$$

Управо смо добили контрадикцију са (128) јер је $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \neq -\frac{9}{4} = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ на основу (127).

222. Нека је $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексна област и $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Уколико су сви први парцијални изводи ограничени на $\mathcal{D}$ тада је f равномерно непрекидна на $\mathcal{D}$. Доказати.

Решење. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу услова задатка постоји $M > 0$ тако да је

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t_1, \ldots, t_n)\right| \leqslant M, \quad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{D}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{129}$$

Нека су $(x_1, \ldots, x_n)$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}$. Покушајмо да ограничимо израз $\left|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\right|$. Како је област $\mathcal{D}$ конвексна, цела дуж која спаја тачке $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(a_1, \ldots, a_n)$ припада области $\mathcal{D}$ те можемо применити Лагранжеву теорему[65] о средњој вредности за функције више реалних промењљивих. На основу ове теореме постоји $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ која припада дужи одређеној тачкама $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(a_1, \ldots, a_n)$ тако да је испуњено

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot (x_i - a_i). \tag{130}$$

На основу (129), (130) и неједнакости троугла закључујемо да је

$$\left|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right|}_{\leqslant M} \cdot \left|x_i - a_i\right| \leqslant M \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i - a_i\right|}_{\text{Ово је такси метрика}}. \tag{131}$$

На даље је лако. На основу (131) закључујемо да можемо одабрати $\delta_i = \frac{\varepsilon}{n \cdot M}$ за било које $i \in \{1, \ldots, n\}$. Дакле, из (131), кад год су $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(a_1, \ldots, a_n)$ такве тачке да је $|x_i - a_i| < \delta_i$ за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ тада је

$$\left|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\right| < M \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\varepsilon}{n \cdot M} + \cdots + \frac{\varepsilon}{n \cdot M}}_{n \text{ сабирака}}\Bigg) = M \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{n \cdot M} = \varepsilon. \tag{132}$$

Из (132) закључујемо да је f равномерно непрекидна на $\mathcal{D}$, на основу дефиниције равномерне непрекидности. Тврђење следи.

223. Нека је $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ реална, симетрична и позитивно дефинитна матрица и нека је функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i x_j,$$

где су a, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ константе. Доказати да постоји $x^* \in \mathbb{R}^n$ тако да је $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

[65] За примену ове теореме нам је потребна непрекидност функције f на затвореној дужи која спаја тачке $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(a_1, \ldots, a_n)$ као и диференцијабилност на отвореној дужи која спаја те исте тачке. Приметимо да су услови остали исти као у једнодимензионалном случају, али је сада додата и конвексност. Препоручујемо студентима да обнове Лагранжеву теорему са предавања и Лагранжеву теорему за функције једне реалне промењљиве. Да ли Лагранжева теорема важи и за векторске функције? Са тим у вези, занимљив је Задатак 188.

224. Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп и $a_{ij} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ непрекидне функције за свако $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. За $x \in \mathcal{A}$ нека је Φ_x квадратна форма са матрицом $[a_{ij}]_{i,j=1}^n$. Ако је за неко $a \in \mathcal{A}$ квадратна форма Φ_a позитивно дефинитна тада постоји $r > 0$ тако да је за свако $x \in \mathcal{K}(a, r)$ квадратна форма Φ_x позитивно дефинитна. Доказати.

Решење. Нека су $A_i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ функције са реалним вредностима, које су дефинисане са

$$A_i(x) \overset{\mathsf{def}}{=} \det\Big(\underbrace{\text{"}i\text{-ти главни минор у тачки } x\text{"}}_{\text{Ово је матрица}}\Big), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{133}$$

На основу (133) закључујемо да су A_i непрекидне функције за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ на скупу $\mathcal{A}$. Како је форма Φ_a позитивно дефинитна, на основу критеријума Силвестера, закључујемо да су бројеви $A_1(a)$, $A_2(a)$,..., $A_n(a)$ позитивни. Из непрекидности функција A_i имамо да за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ постоји $r_i > 0$ тако да је $A_i(x) > 0$ за свако $x \in \mathcal{K}(a, r_i)$. Одаберимо $r \overset{\mathsf{def}}{=} \min\{r_1, \ldots, r_n\} \implies r > 0$. Дакле, како је $r > 0$ можемо формирати куглу $\mathcal{K}(a, r)$. Тада је за свако $x \in \mathcal{K}(a, r)$ и за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ испуњено $A_i(x) > 0$, те је опет на основу критеријума Силвестера форма Φ_x позитивно дефинитна на $\mathcal{K}(a, r)$, што је и требало показати.

Напомена 47. Критеријум Силвестера смо користили у оба смера, јер је то теорема која даје потребне и довољне услове за позитивну дефинитност (теорема је облика акко). Отвореност скупа $\mathcal{A}$ је употребљена код егзистенције позитивних бројева r_i тј. кугли $\mathcal{K}(a, r_i)$.

225. Одредити најмању ведност (уколико постоји) функције $f : (0, +\infty)^3 \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(a, b, c) = \sqrt{\frac{3a + 2b + 1c}{1a + 2b + 3c}} + \sqrt{\frac{3b + 2c + 1a}{1b + 2c + 3a}} + \sqrt{\frac{3c + 2a + 1b}{1c + 2a + 3b}}.$$

Решење. У овом задатку је јасно да изводе не можемо да користимо јер би се добили врло гломазни изрази. Не можемо ни да тврдимо да најмања вредност непрекидне функције f на скупу $\big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; a > 0, b > 0, c > 0\big\}$ постоји јер овај скуп није компактан (јер није затворен и неограничен је, а за компактност нам је потребна затвореност и ограниченост скупа, по Задатку 140). Због велике симетрије ових израза покушајмо да применимо неку неједнакост. За свако $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ је

$$f(a, b, c) = \frac{3a + 2b + 1c}{\sqrt{1a + 2b + 3c}\sqrt{3a + 2b + 1c}} + \frac{3b + 2c + 1a}{\sqrt{1b + 2c + 3a}\sqrt{3b + 2c + 1a}} + \frac{3c + 2a + 1b}{\sqrt{1c + 2a + 3b}\sqrt{3c + 2a + 1b}}. \tag{134}$$

Како су бројеви a, b и c позитивни можемо применити неједнакост између аритметичке и геометријске средине на сваки именилац у три разломка који се јављају у претходном изразу. Добијамо

$$0 < \sqrt{1a + 2b + 3c}\sqrt{3a + 2b + 1c} \leqslant \frac{(1a + 2b + 3c) + (3a + 2b + 1c)}{2} = \frac{4a + 4b + 4c}{2} = 2a + 2b + 2c, \tag{135}$$

$$0 < \sqrt{1b + 2c + 3a}\sqrt{3b + 2c + 1a} \leqslant \frac{(1b + 2c + 3a) + (3b + 2c + 1a)}{2} = \frac{4a + 4b + 4c}{2} = 2a + 2b + 2c, \tag{136}$$

$$0 < \sqrt{1c + 2a + 3b}\sqrt{3c + 2a + 1b} \leqslant \frac{(1a + 2b + 3c) + (3a + 2b + 1c)}{2} = \frac{4a + 4b + 4c}{2} = 2a + 2b + 2c. \tag{137}$$

На основу (135), (136) и (137) добијамо да је

$$\frac{1}{\sqrt{1a + 2b + 3c}\sqrt{3a + 2b + 1c}} \geqslant \frac{1}{2a + 2b + 2c} \implies \frac{3a + 2b + 1c}{\sqrt{1a + 2b + 3c}\sqrt{3a + 2b + 1c}} \geqslant \frac{3a + 2b + 1c}{2a + 2b + 2c}, \tag{138}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1b + 2c + 3a}\sqrt{3b + 2c + 1a}} \geqslant \frac{1}{2a + 2b + 2c} \implies \frac{3b + 2c + 1a}{\sqrt{1b + 2c + 3a}\sqrt{3b + 2c + 1a}} \geqslant \frac{3b + 2c + 1a}{2a + 2b + 2c}, \tag{139}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1c + 2a + 3b}\sqrt{3c + 2a + 1b}} \geqslant \frac{1}{2a + 2b + 2c} \implies \frac{3c + 2a + 1b}{\sqrt{1a + 2b + 3c}\sqrt{3a + 2b + 1c}} \geqslant \frac{3c + 2a + 1b}{2a + 2b + 2c}. \tag{140}$$

Сабирајући (138), (139) и (140) и користећи (134) добијамо да је за свако $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ задовољено

$$f(a, b, c) \geqslant \frac{3a + 2b + 1c}{2a + 2b + 2c} + \frac{3b + 2c + 1a}{2a + 2b + 2c} + \frac{3c + 2a + 1b}{2a + 2b + 2c} = \frac{6a + 6b + 6c}{2a + 2b + 2c} = 3.$$

Дакле, функција f не може имати мању вредност од 3. Уколико би пронашли барем једну уређењу тројку (a_0, b_0, c_0) позитивних бројева која задовољава $f(a_0, b_0, c_0) = 3$ одатле би следило да је $\min\limits_{\substack{a>0\\b>0\\c>0}} f(a, b, c) = 3$. Закључак сада лако следи из $f(1, 1, 1) \overset{\mathsf{def}}{=} \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} = 3$.

Напомена 48. Уколико желимо да утврдимо у којим све тачкама домена функције f односно скупа $\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid a>0, b>0, c>0\}$ функција f достиже минимум потребно је видети где смо све вршили ограничења. Минимум се постиже ако и само ако у изразима где смо извршили ограничења са знаком $\geqslant$ важи знак $=$. То су изрази (135), (136) и (137). Познато је да у неједнакости између аритметичке и геометријске средине (и осталих средина) знак једнакости важи ако и само ако су бројеви који учествују у средини једнаки. Дакле, функција f постиже минимум на скупу $\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid a>0, b>0, c>0\}$ ако и само ако је $\sqrt{1a+2b+3c}=\sqrt{3a+2b+1c}$ (из (135)) и $\sqrt{1b+2c+3a}=\sqrt{3b+2c+1a}$ (из (136)) и $\sqrt{1c+2a+3b}=\sqrt{3a+2b+1c}$ (из (137)). Последње три једнакости су еквивалентне (квадрирамо све три...) са $a=b=c$. Дакле, функција f постиже најмању вредност само у тачкама скупа $\{(a,a,a)\in\mathbb{R}^3 \mid a>0\}$.

226. Одредити најмању вредност (уколико постоји) функције $f:(0,+\infty)^3\to\mathbb{R}$ дефинисане са

$$f(a,b,c)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Решење. Једноставно је посумњати да треба увести смене $x=b+c$, $y=c+a$ и $z=a+b$. Сада изразимо слова a, b и c преко x, y и z. Ово је најлакше урадити уколико саберемо све три једнакости, тј. $x+y+z=2a+\underbrace{2b+2c}_{=2x} \implies a=\frac{y+z-x}{2}$. Аналогно, $b=\frac{x+z-y}{2}$ и $c=\frac{x+y-z}{2}$. Нека су $a>0$, $b>0$ и $c>0$ произвољни. Сада следи блага рачуница

$$\begin{aligned}\overbrace{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}^{=f(a,b,c)}&=\frac{\left(\frac{y+z-x}{2}\right)}{x}+\frac{\left(\frac{x+z-y}{2}\right)}{y}+\frac{\left(\frac{x+y-z}{2}\right)}{z}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)}_{\geqslant 2}+\underbrace{\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)}_{\geqslant 2}+\underbrace{\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)}_{\geqslant 2}-3\right]\geqslant\frac{3}{2}.\end{aligned}\tag{141}$$

Напоменимо да смо користили да за свако $t>0$ важи $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$. Једнакост у претходној неједнакости важи ако и само ако је $t=1$. Ово се тривијално показује, уколико обе стране сведемо на квадрат бинома, множећи обе стране са t. Заиста,

$$\underbrace{t+\frac{1}{t}\geqslant 2 \iff t^2+1\geqslant 2t}_{\text{Јер је } t>0} \iff \underbrace{(t-1)^2\geqslant 0}_{\text{Једнакост важи акко је } t=1}.$$

Дакле, функција f је ограничена одоздо бројем $\frac{3}{2}$ на скупу $\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid a,b,c>0\}$. Функција f и постиже вредност $\frac{3}{2}$ ако и само ако у последњем реду из (141) важи знак $=$ уместо $\geqslant$, односно ако и само ако је

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2 \quad\text{и}\quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}=2 \quad\text{и}\quad \frac{x}{z}+\frac{z}{x}=2 \iff \frac{y}{x}=1 \quad\text{и}\quad \frac{y}{z}=1 \quad\text{и}\quad \frac{x}{z}=1 \iff x=y=z.$$

Једнакости $x=y=z$ су еквивалентне са $b+c=c+a=a+b \iff a=b=c$. Дакле, доказали смо да је

$$\frac{3}{2}=\min_{\substack{a>0\\b>0\\c>0}} f(a,b,c) \text{ и достиже се само на скупу } \{(a,a,a)\in\mathbb{R}^3 \mid a>0\}.$$

227. Од свих троуглова описаних око датог круга одредити онај који има најмању површину.

228. Доказати да је

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x+y}{1-x+y}\right)-x+xy-\frac{\pi}{4}}{x^2+y^2}=0.$$

5 ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН У $\mathbb{R}^n$

5.1 Вишеструки интеграли

229. Израчунати интеграле

$$\iint\limits_{\substack{\frac{1}{x}\leqslant y\\ y\leqslant \frac{5}{2}-x}} xy\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y \quad \text{и} \quad \iiint\limits_{\substack{x,\,y,\,z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1}} z\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

230. Израчунати координате тежишта:

(а) четвртине елипсе са полуосама a и b; (б) полулопте полупречника R.

231. Одредити координате тежишта фигуре

$$\Phi = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\leqslant y\leqslant |x|+3,\ y\leqslant 4\}.$$

232. Израчунати површину и запремину сфере полупречника R.

Решење. Једначина сфере полупречника R је $x^2+y^2+z^2=R^2$. Израчунајмо најпре њену површину. Прво, морамо прећи на експлицитни облик и у ту сврху посматрајмо полусферу, која се налази изнад xOy равни, дату једначином $z=z(x,y)=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Површина сфере је сада дата формулом

$$P = 2\cdot \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y. \tag{142}$$

Израчунајмо сада парцијалне изводе који се јављају у (142). Имамо

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad x^2+y^2<R^2. \tag{143}$$

Заменом парцијалних извода $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ из (143) у (142) и сређујући изразе добијамо

$$P = 2\cdot \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = 2R\cdot \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y. \tag{144}$$

Облик подинтегралне функције у (145) нас асоцира да треба увести поларне коорднате. Дакле, уводимо смене $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, где је $r\in(0,R)$ и $\varphi\in[0,2\pi)$. Јакобијан ове трансформације износи $\mathcal{J}=r>0$, те (145) постаје

$$P = 2R\cdot\int_0^R\int_0^{2\pi} |\mathcal{J}|\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\,\mathbf{d}r\,\mathbf{d}\varphi = 2R\cdot\int_0^{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,\mathbf{d}r\right)}_{\text{ово је број}}\mathbf{d}\varphi = 2R\cdot\underbrace{\int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,\mathbf{d}r}_{=\,R,\ \text{Математика 1}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\varphi}_{=\,2\pi} = 4R^2\pi. \tag{145}$$

Дакле, добили смо добро познату формулу $P=4R^2\pi$ за површину лопте (сфере, кугле) полупречника R, која се јавља још у основној школи. Израчунајмо сада запремину V сфере полупречника R, која је дата интегралном репрезентацијом

$$V = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z. \tag{146}$$

Облик области по којој се врши интеграција у (146) нас директно асоцира да треба увести сферну смену. Зашто? Па област интеграције је сфера. Због тога су координате (нацртати слику, ове формуле и границе за промењиве се виде одатле) дате са $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$ и $z = r\cos\theta$, где је $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [0, \pi)$. Јакобијан ове трансформације је $\mathcal{J} = -r^2\sin\theta \neq 0$. Сада примењујемо поновљену интеграцију на (146) и добијамо

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\mathcal{J}|\,\mathbf{d}r\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\theta \\
&= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \underbrace{r^2\sin\theta}_{=|\mathcal{J}|}\,\mathbf{d}\theta \right) \mathbf{d}\varphi \right) \mathbf{d}r \\
&= \int_0^R \left(r^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathbf{d}\theta \right)}_{=2} \mathbf{d}\varphi \right) \mathbf{d}r \\
&= 2\int_0^R \left(r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathbf{d}\varphi}_{=2\pi} \right) \mathbf{d}r \\
&= 2\cdot 2\pi \underbrace{\int_0^R r^2\,\mathbf{d}r}_{=\frac{R^3}{3}} \\
&= \frac{4}{3}R^3\pi.
\end{aligned}
\tag{147}
$$

Дакле, у (147) смо добили још једну формулу коју смо користили (наравно, без доказа) још у основној школи не знајући шта је све сакривено иза ње.

233. Одредити запремину тела ограниченог са

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1.$$

234. Одредити запремину тела које је ограничено површима

$$z = xy, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x \quad \text{и} \quad z = 0.$$

235. Одредити запремину тела која је ограничено површима

$$z = 4 \quad \text{и} \quad z = (2x - y)^2 + (x + y - 1)^2.$$

236. (Септембар 2021) Нека је T трапез са теменима $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ и $(0, 1)$. Израчунати интеграл

$$\iint\limits_T e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

Решење. Подинтегрална функција је дефинисана и непрекидна на трапезу T па тражени интеграл постоји као коначхан број (приметимо да је $y + x \neq 0$ за свако $(x, y) \in T$. Сам облик подинтегралне фунцкије нас мотивише да уведемо смене $u = y - x$ и $v = x + y$. Јакобијан ове смене је

$$\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \implies \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)}} = -\frac{1}{2} < 0$$

па применом теореме о смени променљиве у вишеструком интегралу добијамо

$$\iint\limits_T e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iint\limits_{T'} \left| \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} \right| e^{\frac{u}{v}}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v = \frac{1}{2}\iint\limits_{T'} e^{\frac{u}{v}}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v$$

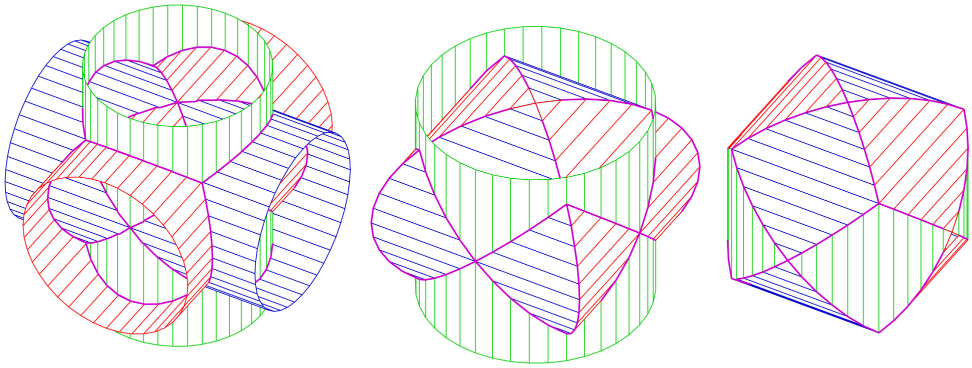
при чему је T' слика трапеза T уведеним сменама. Како уведене смене представљаку композицију ротације и хомотетије (зашто?) слику трапеза T можемо једноставно добити ако пресликамо његова темена (приметимо да је трапез T' оријентисан супротно од оријентације трапеза T јер је Јакобијан уведене смене негативан). Одавде следи да је T' опет трапез па ако означимо вредност траженог инетргала са I, применом Фубинијеве теореме и гледањем у слику (сада су основице трапеза T' паралелене u оси координатног система uOv) имамо

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,\mathbf{d}u \right) \mathbf{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{e^{\frac{u}{v}}}{\frac{1}{v}} \Bigg|_{u=-v}^{u=v} \right) \mathbf{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 v(e^1 - e^{-1})\,\mathbf{d}v = \frac{3}{2}\operatorname{sh} 1.$$

237. Одредити запремину тела које је ограничено површима

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 1 \quad \text{и} \quad z^2 + x^2 = 1.$$

Решење. У овом задатку је најбитније да лепо видимо како изгледа тело које се добија у пресеку датих површи. Нека је зелена површ $x^2 + y^2 = 1$, плава површ $x^2 + z^2 = 1$ и црвена површ $y^2 + z^2 = 1$ (што значи да је x оса заправо оса црвеног цилиндра, y оса је оса плавог цилиндра а z оса је оса зеленог цилиндра). На даље ћемо користити симетрију добијеног тела (нека се зове F). Видимо да запремниму тела F можемо израчунати ако се ограничимо на тело које се налази у половини првог октанта (када нађемо ту запремину тражена запремина је тај број пута 16). Нека се то тело зове D.



Са слике видимо да је тело D заправо цилиндар у чијој се основи налази кружни исечак полупречника 1 и са углом од $\frac{\pi}{4}$. Омотач тела D је нормалан на xOy раван (састављен од дела координатне равни xOz, дела равни $x = y$ и дела површи $x^2 + y^2 = 1$ (на трећој слици зелени део)). Због тога је тражена запремина V једнака интегралу

$$16 \cdot \iint\limits_I \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{z = z(x,y)} \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y$$

при чему је I поменути кружни исечак. Уведимо смену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, при чему је $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $r \in [0, 1]$ и $J = r$. Уз примену Фубинијеве теореме добијамо да је

$$V = 16 \cdot \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi} \, \mathbf{d}r \, \mathbf{d}\varphi = 16 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 r\sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi} \, \mathbf{d}r \right) \mathbf{d}\varphi.$$

Разчунамо најпре унутрашњи интеграл

$$I(\varphi) = \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi} \, \mathbf{d}r$$

при фиксираној вредности $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Уведимо смену $r^2 = t$. Добијамо да је

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - t\cos^2\varphi} \, \mathbf{d}t = \cdots = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}^2\varphi + \frac{2}{3} \frac{1}{\cos^2\varphi} \right)$$

па је

$$V = 16 \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}^2\varphi \, \mathbf{d}\varphi + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathbf{d}\varphi}{\cos^2\varphi} \right) = \cdots = 8 \cdot \left(2 - \sqrt{2} \right).$$

238. (Септембар 2021) Нека је D затворена фигура у првом квадранту xOy равни ограничена кривама

$$y = x^2, \quad 2y = x^2, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Израчунати интеграл

$$\iint\limits_D \frac{2y^2 + x^2}{x^3} \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y.$$

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на D па тражени интеграл постоји. Означимо његову вредност са I. На основу једначина крива које дефинишу границу фигуре D уводимо смене $u = x^2 + y^2$ и $v = \frac{x^2}{y}$, при чему је $u \in [1, 4]$ и $v \in [1, 2]$. Нека је D' слика фигуре D уведеним сменама (видимо да је $D' = [1, 4] \times [1, 2]$ па је овде лако вршити интеграцију). Сада рачунамо

$$\frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -2\frac{x^3}{y^2} - 4x = -2x \cdot \frac{x^2 + 2y^2}{y^2} \implies \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| = \frac{1}{2x} \frac{y^2}{x^2 + 2y^2} \neq 0$$

за свако $(x,y)\in D$. На основу теореме о смени променљиве и на основу Фубинијеве теореме имамо да је

$$I=\iint\limits_{D'}\underbrace{\left|\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}\right|\cdot\frac{2y^2+x^2}{x^3}}_{\text{треба преко } u \text{ и } v \text{ изразити}}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2x}\frac{y^2}{x^2+2y^2}\cdot\frac{2y^2+x^2}{x^3}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}\underbrace{\frac{y^2}{x^4}}_{=\frac{1}{v^2}}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v=\frac{1}{2}\int_1^4\left(\underbrace{\int_1^2\frac{1}{v^2}\,\mathbf{d}v}_{=\frac{1}{2}}\right)\mathbf{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{4}.$$

239. (Септембар 2021) Нека је D затворена област у xOy равни ограничена правама

$$x+y=1,\quad x=0\quad\text{и}\quad y=0.$$

Израчунати интеграл

$$\iint\limits_{D}\cos\frac{x-y}{x+y}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

Решење. Покажимо најпре да дати интеграл постоји. Подинтегрална функција је дефинисана на целом скупу D осим у тачки $(0,1)$. Како је на $D\backslash\{(0,0)\}$ подинтегрална функција ограничена и непрекидна имамо по Лебеговој теореми[66] да је и Риман интеграбилна на D.

Означимо вредност овог интеграла сада са $I\in\mathbb{R}$ и уведимо смене $u=x-y$ и $v=x+y$. Лако рачунамо да је $\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}=\frac{1}{2}$. Слика троугла D уведеним сменама (коју ћемо да зовемо D') према Задатку 33 може да се одреди ако[67] пресликамо само његова темена $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$ (сада у координатном систему uOv). Добијамо да је то троугао са теменима $A'(0,0)$, $B'(1,1)$ и $C'(-1,1)$. На основу теореме о смени променљиве и на основу Фубинијеве теореме (код поновљене интеграције је најбоље и нацртати слику) рачунамо

$$I=\iint\limits_{D'}\left|\underbrace{\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}}_{=1/2}\right|\cos\frac{u}{v}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,\mathbf{d}u\right)\mathbf{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\left(v\sin\frac{u}{v}\right)\Bigg|_{u=-v}^{u=v}\mathbf{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1 2v\sin 1\,\mathbf{d}v=\frac{\sin 1}{2}.$$

240. Нека је дат троугао

$$\triangle=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \big|\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\big\}.$$

Израчунати интеграл

$$\iint\limits_{\triangle}e^{y^2}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

Решење. Приметимо најпре да скуп $\triangle$ представља троугао (затворени троугао, што значи да је $\mathrm{cl}(\triangle)=\triangle$ или неформалније речено, троугао заједно са својим страницама) чија су темена тачке $(0,0)$, $(0,1)$ и $(1,1)$ (објаснити зашто и нацртати слику обавезно!). Постоје два начина како можемо вршити интеграцију по скупу $\triangle$. Први начин се састоји у томе да се за свако $x\in[0,1]$ крећемо по y-оси од x до 1 (зашто?). Уколико кренемо тако, након поновљене интеграције, добијамо

$$\iint\limits_{\triangle}e^{y^2}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}\,\mathbf{d}y\right)\mathbf{d}x.\tag{148}$$

Познато је да вредност унутрашњег интеграла у (148) није могуће израчунати аналитички[68], те нам је овај покушај безуспешан али поучан. Наиме, уколико сада покушамо интеграцијом која за свако $y\in[0,1]$ вредност x шета од 0 до y (зашто су ове границе?) добијамо

$$\iint\limits_{\triangle}e^{y^2}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=\int_0^1\left(\int_0^y\underbrace{e^{y^2}}_{\text{константа}}\,\mathbf{d}x\right)\mathbf{d}y=\int_0^1 e^{y^2}\underbrace{\left(\int_0^y\mathbf{d}x\right)}_{=y}\mathbf{d}y=\cdots=\frac{e-1}{2}.\tag{149}$$

[66] Ово је тврђење са предавања које каже да је ограничена функција на затвореном и мерљивом скупу (а овај наш скуп D то јесте) Риман интеграбилна ако и само ако је скуп тачка прекида подинтегралне функције Лебегове мере нула. У нашем случају је то испуњено јер је у питању само једна тачка где имамо прекид.

[67] Ово је формални аргумент зашто то смемо да урадимо а на испиту је довољно да то само и урадимо.

[68] Примери интеграла које није могуће израчунати аналитички су многобројни. На пример, није могуће израчунати аналитички интеграле функција $x\mapsto\frac{\sin x}{x}$, $x\mapsto\frac{\ln x}{x+1}$, ... У применама се врло често јављају интегали оваквих функција. У овим случајевима се примењују апроксимативне методе Нумеричке анализе. Са тим у вези, развијене су и методе за нумеричку интеграцију вишеструких интеграла.

Овиме је интеграл $\displaystyle\iint\limits_{\triangle} e^{y^2}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$ израчунат. Из овог задатка видимо да је редослед интеграције код неких функција јако битан. Наиме, у овом задатку интеграција у (148) није ни изводљива, док је интеграција у (149) успешна и ефектна. Може да се деси да су сви могући редоследи интеграције изводљиви, док су неки јако кратки а неки изузетно компликовани. Овај задатак има сврху да нам скрене пажњу на ове ствари, док се осећај стиче искључиво вежбом.

Напомена 49. Приметимо да важи

$$\iint\limits_{\triangle} e^{y^2}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iint\limits_{\mathrm{int}(\triangle)} e^{y^2}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$$

јер вредност интеграла не може да поремети скуп Жорданове мере нула, тј. скуп чија је површина у $\mathbb{R}^2$ једнака нули, а то је у нашем случају скуп $\triangle\backslash\mathrm{int}(\triangle)$, односно унија страница троугла $\triangle$.

241. Нека је $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leqslant x\}$. Израчунати интеграл

$$\iint\limits_{D} y^2\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

242. Нека су дати скупови

$$E_n = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |x|\leqslant n,\ |y|\leqslant n\} \quad \text{за свако} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{E_n}\sin(x^2+y^2)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

Решење. Користићемо[69] да важи

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathbf{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathbf{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

За свако $n\in\mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned}\iint\limits_{E_n}\sin(x^2+y^2)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y &= \iint\limits_{E_n}\sin(x^2)\cos(y^2)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y + \iint\limits_{E_n}\cos(x^2)\sin(y^2)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\\ &= 2\left(\int_{-n}^{n}\sin(x^2)\,\mathbf{d}x\right)\cdot\left(\int_{-n}^{n}\cos(x^2)\,\mathbf{d}y\right).\end{aligned}$$

Одавде, преласком на граничну вредност када $n\to+\infty$ имамо да је

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{E_n}\sin(x^2+y^2)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathbf{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathbf{d}x\right) = 2\cdot\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \pi.$$

243. Нека је D квадрат са теменима $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$. Изачунати интеграл

$$\iint\limits_{D} e^{x+y}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

244. Нека су a и b позитивни бројеви. Израчунати интеграл

$$\int_0^a\int_0^b \max\left\{b^2x^2, a^2y^2\right\}\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

[69] Фреснелови интеграли.

Решење. Означимо подинтегралну функцију из текста задатка са f. Како је она дефинисана функцијом max имамо да је

$$\max\left\{b^2x^2, a^2y^2\right\} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} b^2x^2, & \text{ако је } b^2x^2 \geqslant a^2y^2; \\ a^2y^2, & \text{ако је } a^2y^2 > b^2x^2; \end{cases} = \begin{cases} b^2x^2, & \text{ако је } \frac{b}{a}x \geqslant y; \\ a^2y^2, & \text{ако је } y > \frac{b}{a}x. \end{cases} \tag{150}$$

Приметимо да смо у (150) користили то да су бројеви a и b позитивни, као и то да $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$. Услов $y \leqslant \frac{b}{a}x$ из (150) у пресеку са $[0, a] \times [0, b]$ представља троугао чија су темена тачке $(0, 0)$, $(a, 0)$ и (a, b). Означимо га са $\triangle_1$. Исто тако, услов $y > \frac{b}{a}x$ у пресеку са $[0, a] \times [0, b]$ представља троугао чија су темена $(0, 0)$, (a, b) и $(0, b)$. Означимо овај троугао са $\triangle_2$. Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^b \max\left\{b^2x^2, a^2y^2\right\} \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y &= \iint\limits_{\triangle_1} \underbrace{\max\left\{b^2x^2, a^2y^2\right\}}_{= b^2x^2, \text{ следи из } (150)} \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y + \iint\limits_{\triangle_2} \underbrace{\max\left\{b^2x^2, a^2y^2\right\}}_{= a^2y^2, \text{ следи из } (150)} \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y \\
&= b^2 \iint\limits_{\triangle_1} x^2\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y + a^2 \iint\limits_{\triangle_2} y^2\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y \\
&= b^2 \int_0^a \underbrace{\left(\int_0^{\frac{b}{a}x} x^2\, \mathbf{d}y\right)}_{= \frac{b}{a}x^3} \mathbf{d}x + a^2 \int_0^b \underbrace{\left(\int_0^{\frac{a}{b}y} y^2\, \mathbf{d}x\right)}_{= \frac{a}{b}y^3} \mathbf{d}y \\
&= b^2 \cdot \frac{b}{a} \underbrace{\int_0^a x^3\, \mathbf{d}x}_{= \frac{a^4}{4}} + a^2 \cdot \frac{a}{b} \underbrace{\int_0^b y^3\, \mathbf{d}x}_{= \frac{b^4}{4}} \\
&= \frac{a^3b^3}{4} + \frac{a^3b^3}{4} \\
&= \frac{a^3b^3}{2}.
\end{aligned}$$

245. Израчунати интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x + y}{x + y + z}\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y\, \mathbf{d}z.$$

Решење. Тражени интеграл постоји јер је подинтегрална функција ограничена (јер је $\frac{x+y}{x+y+z} < 1$ за све $x, y, z > 0$) и непрекидна на $[0, 1]^2$ са изузетком у тачки $(0, 0) \in [0, 1]^2$ (Лебегова теорема о интеграбилности). Нека се овај интеграл зове I_3 и нека су

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{y + z}{x + y + z}\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y\, \mathbf{d}z \quad \text{и} \quad I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{z + x}{x + y + z}\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y\, \mathbf{d}z.$$

Бројеви I_1 и I_2 постоје из истог разлога као и број I_3. Имамо и више, важи $I_1 = I_2 = I_3$ због симетрије па је

$$I_1 + I_2 + I_3 = 3I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{2(x + y + z)}{x + y + z}\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y\, \mathbf{d}z = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y\, \mathbf{d}z = 2 \implies I_3 = \frac{2}{3}.$$

246. Израчунати интеграл

$$\int_1^3 \int_1^3 \int_1^3 \int_1^3 \int_1^3 \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}\, \mathbf{d}x_1\, \mathbf{d}x_2\, \mathbf{d}x_3\, \mathbf{d}x_4\, \mathbf{d}x_5.$$

247. Одредити површину фигуре

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (2x - 3y + 1)^2 + (x + 2y - 5)^2 \leqslant 100\}.$$

Решење. Знамо да се површина фигуре (у ознаци $P(E)$) рачуна као

$$P(E) = \iint\limits_E \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y.$$

Уведимо смене $u = 2x - 3y + 1$ и $v = x + 2y - 5$. Лако рачунамо

$$\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \implies \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)}} = \frac{1}{7}$$

па на основу теореме о смени променљиве у вишеструком интегралу добијамо да је

$$P(E) = \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant 100} \frac{1}{7}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v = \frac{1}{7} \cdot 10^2 \cdot \pi = \frac{100\pi}{7}.$$

248. Доказати да је

$$1.96 < \iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 10} \frac{\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leqslant 2.$$

Решење. Најпре приметимо да је скуп $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 10\}$ квадрат, чија су темена тачке $(10,0)$, $(0,10)$, $(-10,0)$ и $(0,-10)$. Површина (Жорданова мера) овог квадрата је 200. Означимо функцију под знаком интеграла са f. Најпре, интеграл $\iint\limits_S f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$ постоји јер је f непрекидна функција на мерљивом и затвореном скупу S. Ова констатација нам је битна јер не можемо процењивати вредност интеграла који не постоји. Дакле, како је потребно проценити интеграл, природно је применити теорему о средњој вредности интеграла. Имамо да је

$$\iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 10} \frac{\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} = f(\xi,\eta) \cdot 200, \quad \text{за неко } (\xi,\eta) \in S. \tag{151}$$

Проблем смо свели на процену вредности $f(\xi,\eta)$. Ово можемо лако урадити користећи својство да је $|\cos x| \leqslant 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Имамо

$$100 \leqslant 100 + \cos^2 x + \cos^2 y \leqslant 100 + 1 + 1 = 102 \implies \frac{1}{102} \leqslant \underbrace{\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}}_{= f(x,y)} \leqslant \frac{1}{100}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{152}$$

Како (152) важи за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ имамо да важи и за (ξ,η), те је $\frac{1}{102} \leqslant f(\xi,\eta) \leqslant \frac{1}{100}$. Одавде и на основу (151) следи да је

$$1.96 < \frac{1}{102} \cdot 200 \leqslant \iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 10} \frac{\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leqslant \frac{1}{100} \cdot 200 = 2.$$

Задатак је управо решен.

Напомена 50. Функција f на скупу S има само у коначно много тачака вредност 100. Означимо овај скуп са L. На основу (152) закључујемо да је $f(x,y) < 2$ за свако $(x,y) \in S \backslash L$. Одавде и на основу непрекидности функције f закључујемо да мора бити $\iint\limits_S f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y < 2$. Зашто? Да ли је у овом задатку могла да се избегне примена теореме о средњој вредности интеграла? Одговор на ово питање је потврдан и следи из (152) и монотоности интеграла. Заиста, имамо

$$\frac{1}{102} \leqslant \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leqslant \frac{1}{100}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies \overbrace{\iint\limits_S \frac{1}{102}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}^{= \frac{200}{102}} \leqslant \iint\limits_S f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y \leqslant \overbrace{\iint\limits_S \frac{1}{100}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}^{= \frac{200}{100}}.$$

249. Израчунати интеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} \frac{x^4 + 2y^4}{x^4 + 4y^4 + z^4}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

Решење. Означимо интеграл из текста задатка са I. Да бисмо уопште причали о овом интегралу, морамо знати да он постоји. То је лако закључити јер је подинтегрална функција $(x,y,z) \mapsto \frac{x^4+2y^4}{x^4+4y^4+z^4}$ непрекидна на затвореном и мерљивом скупу $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$, осим у тачки $(0,0,0)$, јер ту није ни дефинисана. Али како скуп тачака који има меру нула не може утицати на вредност интеграла можемо закључити да $I \in \mathbb{R}$. Пређимо сада на решавање интеграла I. Можемо приметити да су изрази у бројиоцу и имениоцу из интеграла I врло слични, тј. да бројиоцу фали $2y^4+z^4$ да постане именилац. То нас мотивише да поматрамо интеграл

$$J=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{2y^4+z^4}{x^4+4y^4+z^4}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z\in\mathbb{R},$$

јер за ова два интеграла важи

$$I+J=\overbrace{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z=\frac{4}{3}\cdot 1^3\cdot\pi}^{\text{Задатак 232, јер је овај интеграл запремина од }\mathcal{K}[\mathbf{0}_3,1]}=\frac{4}{3}\pi. \tag{153}$$

Да завршимо задатак, довољно је приметити да је $I=J$. Ово је очигледно, док формално објашњење може ићи, на пример, увођењем смене $x=z$, $y=y$ и $z=x$. Дакле, на основу (153) и $I=J$, следи да је $I=\frac{2}{3}\pi$.

250. Нека је $D\subset\mathbb{R}^2$ фигура која је ограничена кружницама

$$x^2+y^2-2x=0,\quad x^2+y^2-4x=0,\quad x^2+y^2-2y=0\quad\text{и}\quad x^2+y^2-6y=0.$$

Израчунати интеграл

$$\iint\limits_D\frac{\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Решење. Како је $(0,0)\notin D$ имамо да интеграл постоји јер је подинтегрална функција непрекидна на D. Означимо вредност овог интеграла са I и уведимо смене $x=\frac{u}{u^2+v^2}$ и $y=\frac{v}{u^2+v^2}$. Када се реши овај систем по u и v добија се $u=\frac{x}{x^2+y^2}$ и $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ па је слика фигуре D уведеним сменама правоугаоник $D'=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$ (ово се види ако једначине којима је дефинисана фигура D поделимо са x^2+y^2). Тада је

$$\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\\ -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\cdot\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\cdot\begin{vmatrix}v^2-u^2 & -2uv\\ -2uv & u^2-v^2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(u^2+v^2)^4}\cdot(-(v^2-u^2)^2-4u^2v^2)=\frac{-u^4-2u^2v^2-v^4}{(u^2+v^2)^4}=\frac{-(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^4}=-\frac{1}{(u^2+v^2)^2}.$$

Лако видимо да је

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{\left(\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2\right)^2}=(u^2+v^2)^2$$

па на основу теореме о смени променљиве у вишеструком интегралу добијамо

$$I=\iint\limits_{D'}\left|-\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\right|\cdot\frac{\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v}{(x^2+y^2)^2}=\iint\limits_{D'}\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\cdot(u^2+v^2)^2\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v=\iint\limits_{D'}\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{12}.$$

251. Израчунати површину фигуре која је ограничена кривама

$$xy=1,\quad xy=8,\quad y^2=x\quad\text{и}\quad y^2=8x.$$

Решење. Све се дешава у првом квадранту тј. за $x,y>0$ тако да можемо слободно делити и са x и са y. Назовимо нашу фигуру са F. Тада је површина фигуре F (у ознаци $m(F)$) једнака

$$m(F)=\iint\limits_F\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

Уведимо смене $u=xy$ и $v=\frac{y^2}{x}$. Тада је

$$J=\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}=\frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ -(\frac{y}{x})^2 & 2\frac{y}{x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{2y^2}{x}+\frac{xy^2}{x^2}}=\frac{x^2}{3xy^2}=\frac{x}{3y^2}=\frac{1}{3v}$$

па је по теореми о смени променљиве у вишеструком интегралу

$$m(F)=\iint\limits_{[1,8]^2}\frac{1}{3v}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v=\frac{1}{3}\left\{\int_1^8\mathbf{d}u\right\}\cdot\left\{\int_1^8\frac{1}{v}\,\mathbf{d}v\right\}=\frac{1}{3}\cdot 7\cdot\ln 8=7\ln 2.$$

252. Шта је веће:

$$\int_0^1 x^x \,\mathbf{d}x \quad \text{или} \quad \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} \,\mathbf{d}x \,\mathbf{d}y \quad ?$$

Решење. Оба интеграла постоје као Риманови интеграли јер је $\lim\limits_{a\to 0+} a^a = 1$. Уведимо у други интеграл смене $u = xy$ и $v = y$. Тада је $x = \frac{u}{v}$ и $y = v$ па је

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v} \neq 0 \quad \text{за свако} \quad v = y \in (0,1].$$

Из $u = xy = \underbrace{xv \leqslant v}_{\text{јер је } x \in (0,1]}$ добијамо да је $v \in [u,1]$ када $u \in (0,1]$. Одавде је

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} \,\mathbf{d}x \,\mathbf{d}y = \int_0^1 \left(\int_u^1 u^u \cdot \frac{1}{v} \,\mathbf{d}v \right) \mathbf{d}u = \int_0^1 u^u (-\ln u) \,\mathbf{d}u.$$

Приметимо сада да је $(u^u)' = u^u(1 + \ln u)$ одакле имамо

$$\int_0^1 u^u \ln u \,\mathbf{d}u = \underbrace{(u^u)\Big|_{u=0}^{u=1}}_{=1-1=0} - \int_0^1 u^u \,\mathbf{d}u = -\int_0^1 u^u \,\mathbf{d}u.$$

Дакле, интеграли су једнаки.

253. (Јунски рок 2020) Нека је $K_n = [0,1]^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{K_n} \cdots \int \max\{x_1, \ldots, x_n\} \,\mathbf{d}x_1 \ldots \mathbf{d}x_n.$$

Решење. Нека је

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{K_n} \cdots \int \max\{x_1, \ldots, x_n\} \,\mathbf{d}x_1 \ldots \mathbf{d}x_n$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Бројеви I_n постоје јер је подинтегрална функција непрекидна (зашто?) на коцки K_n. Подинтегрална функција узима тачно n вредности на коцки K_n па на основу симетрије и Фубинијеве теореме имамо да је

$$\begin{aligned} I_n &= n \int_0^1 \left(\int_0^{x_1} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_1} x_1 \,\mathbf{d}x_2 \,\mathbf{d}x_3 \cdots \mathbf{d}x_n \right) \mathbf{d}x_n \\ &= n \int_0^1 x_1 \cdot x_1^{n-1} \,\mathbf{d}x_n = \frac{n}{n+1} \implies \lim_{n\to+\infty} I_n = 1. \end{aligned}$$

254. Израчунати интеграл

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0 \\ 1\leqslant xy\leqslant 2 \\ 1\leqslant \frac{y}{x}\leqslant 2}} x \,\mathbf{d}x \,\mathbf{d}y.$$

Решење. Овај интеграл можемо решавати сменама које се природно намећу $u = u(x,y) = xy$ и $v = v(x,y) = \frac{y}{x}$. У овом случају је јасно да $u \in [1,2]$ и $v \in [1,2]$ када (x,y) припрада скупу по коме се врши интеграција. Потребно је видети да ли је Јакобијан овог пресликавања различит од нуле у области променљивих (u,v). Због тога изразимо слова x и y у функцији од u и v. Имамо да је $uv = (xy) \cdot \frac{y}{x} = y^2$, те како је $uv \geqslant 0$ јер је $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ имамо $y = \sqrt{uv}$. Одавде добијамо да је

$$x = \frac{u}{y} = \frac{u}{\sqrt{uv}} = \sqrt{\frac{u}{v}}.$$

Приметимо да смо овде користили да је $y \neq 0$ (зашто?). Сада израчунавамо Јакобијан

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \underbrace{= \cdots =}_{\text{краћи рачун}} \frac{1}{2v} \neq 0. \tag{154}$$

Сада примењујемо теорему о смени у вишеструком интегралу. Имамо

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0 \\ 1\leqslant xy\leqslant 2 \\ 1\leqslant \frac{y}{x}\leqslant 2}} x \,\mathbf{d}x \,\mathbf{d}y = \int_1^2 \int_1^2 \underbrace{|\mathcal{J}|}_{=\frac{1}{2v}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{u}{v}}}_{=x(u,v)} \,\mathbf{d}u \,\mathbf{d}v = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \,\mathbf{d}u \,\mathbf{d}v = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} \,\mathbf{d}u \int_1^2 v^{-\frac{3}{2}} \,\mathbf{d}v = \frac{5\sqrt{2} - 6}{3}.$$

Напомена 51. Проверимо једнакост (154) на мало елегантнији начин. Слично као формула за извод инверзне функције изгледа и формула за Јакобијан $\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}$. Наиме, под одређеним претпоставкама[70] важи

$$\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\left(\frac{2y}{x}\right)} = \frac{1}{2v}. \tag{155}$$

Дакле, у (155) се добија исти резултат као у (154). Предност оваквог начина рачунања Јакобијана (у одређеним ситуацијама, као што је на пример ова) је очигледна.

255. Израчунати интеграл

$$\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} (xy)^2 \,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

256. Израчунати инетеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \cos(x+2y+3z)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

Решење. Означимо вредност интеграла са I и приметимо да је

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \cos(\underbrace{\langle(1,2,3),(x,y,z)\rangle}_{\text{скаларни производ}})\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

Нека је $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ матрица ротације која координатни систем ротира тако да је $M(1,2,3) = (0,0,\sqrt{14})$ (ако су прве две координате нула онда трећа координата мора да буде једнака дужини вектора $(1,2,3)$ јер ротација чува интензитет вектора а овде је $\|(1,2,3)\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$). Матрица M је ортогонална као матрица ротације па је $MM^T = I_3$. Како је $\langle Mx, y\rangle = \langle x, M^T y\rangle$ за свако $x, y \in \mathbb{R}^3$ добијамо да је

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \cos(\langle(1,2,3),(x,y,z)\rangle)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \cos(\langle\underbrace{M(1,2,3)}_{=(0,0,\sqrt{14})}, M(x,y,z)\rangle)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

Нека је $M(x,y,z) = (x',y',z')$ за свако (x,y,z) из кугле $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. Како је M ротација имамо да јединичну куглу $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ слика на саму себе (сада у ознаци $x'^2+y'^2+z'^2 \leqslant 1$) па је

$$I = \iiint\limits_{x'^2+y'^2+z'^2\leqslant 1} \cos(\sqrt{14}\cdot z')\,\mathbf{d}x'\,\mathbf{d}y'\,\mathbf{d}z'.$$

Добијени интеграл се лако решава сферним сменама. Код ове смене је $z = \cos\theta$ за $\theta \in [0,\pi]$ и $|J| = r^2\sin\theta$ па је

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi} \cos(\sqrt{14}\cdot r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}r\,\mathbf{d}\theta = 2\pi\int_0^1 \left(\int_0^{\pi}\cos(\sqrt{14}\cdot r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,\mathbf{d}\theta\right)\mathbf{d}r = \cdots = \frac{2\pi}{7}\left(\frac{\sin\sqrt{14}}{\sqrt{14}} - \cos\sqrt{14}\right).$$

5.2 Криволинијски интеграли. Теорема Грина

257. Нека је γ крива која представља полукружницу $x^2+y^2=1$, $y \geqslant 0$. Израчунати интеграл

$$\int_{\gamma} |x|\cdot y^2\,\mathbf{d}\ell.$$

[70] Нека читалац размисли које су претпоставке неопходне да би се применио рачун из (155). Да ли су ти услови аналогни условима теореме о изводу инверзне функције једне реалне променљиве? Уколико је студент заборавио ову теорему, сада је право време да обнови овај део градива из Математике 1.

258. Израчунати дужину дела криве која се налази у пресеку површи $x^2 = 3y$ и $2xy = 9z$, између тачака $A(0,0,0)$ и $B(3,3,2)$.

259. Нека је $a > 0$. Одредити координате тежишта хомогеног сферног троугла

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}.$$

260. Израчунати интеграле:

(а)

$$\oint\limits_k x^2\,\mathbf{d}\ell,$$

где је k пресек сфере $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a > 0$ и равни $x+y+z = 0$;

(б)

$$\oint\limits_k xy\,\mathbf{d}\ell,$$

где је k пресек сфере $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a > 0$ и равни $x+y+z = 0$.

Решење. Овај задатак може бити јако тежак односно доста лак, зависно од тога како гледамо на њега. Уколико посматрамо праволинисјки овај проблем (и у делу под (а) и у делу под (б)) потребно је извршити параметризацију криве која се добија у пресеку равни и сфере (та крива је кружница). Овај проблем није лак. Зато размишљајмо на следећи начин. Уколико погледамо интеграле у (а) и (б) и криве по којима се врши интеграција закључујемо да је проблем симетричан!

(а) Посматрајмо интеграл $I_1 := \oint\limits_k x^2\,\mathbf{d}\ell$ и због наведене симетрије придружимо му интеграле

$$I_2 := \oint\limits_k y^2\,\mathbf{d}\ell \quad \text{и} \quad I_3 := \oint\limits_k z^2\,\mathbf{d}\ell.$$

Јасно је да важи $I_1 = I_2 = I_3$, на основу симетрије. Овде је задатак практично готов јер је

$$3I_1 = I_1+I_2+I_3 = \oint\limits_k x^2\,\mathbf{d}\ell + \oint\limits_k y^2\,\mathbf{d}\ell + \oint\limits_k z^2\,\mathbf{d}\ell = \oint\limits_k \big(\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{=a^2}\big)\,\mathbf{d}\ell = a^2 \overbrace{\oint\limits_k \mathbf{d}\ell}^{\text{дужина криве } k} = a^2\cdot 2a\pi.$$

Одавде добијамо да је $I_1 = \frac{2a^3\pi}{3}$. Решимо сада интеграл из дела под (б), користећи се идејама из дела под (а). Придружимо интегралу $I_3 := \oint\limits_k xy\,\mathbf{d}\ell$ интеграле

$$I_1 := \oint\limits_k yz\,\mathbf{d}\ell \quad \text{и} \quad I_2 := \oint\limits_k xy\,\mathbf{d}\ell.$$

Јасно је да важи $I_1 = I_2 = I_3$, опет на основу симетрије. Имамо да је

$$3I_3 = I_1+I_2+I_3 = \oint\limits_k \big(xy+yz+zx\big)\,\mathbf{d}\ell = \oint\limits_k \frac{(\overbrace{x+y+z}^{=0})^2 - (\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{=a^2})}{2}\,\mathbf{d}\ell = -\frac{a^2}{2} \overbrace{\oint\limits_k \mathbf{d}\ell}^{\text{дужина криве } k} = -a^3\pi.$$

Дакле, $I_3 = -\frac{a^3\pi}{3}$. Све у свему, леп трик.

261. Израчунати интеграл

$$\oint\limits_\ell 2(x^2+y^2)\,\mathbf{d}x + (x+y)^2\,\mathbf{d}y,$$

где је ℓ позитивно оријентисана контура троугла са теменима $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$.

262. Израчунати интеграл
$$\oint\limits_{\ell} z\,\mathbf{d}\,x + x\,\mathbf{d}y + y\,\mathbf{d}\,z,$$
где је крива ℓ пресек површи
$$z = x^2 + y^2 \quad \text{са} \quad z = \frac{3}{4} - |y|.$$
Оријентација криве ℓ је позитивна посматрано са позитивног дела z-осе.

263. Израчунати интеграл
$$\oint\limits_{\ell} \frac{x\,\mathbf{d}y - y\,\mathbf{d}x}{x^2 + y^2},$$
где је ℓ затворена контура која ограничава област $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$.

264. Израчунати интеграл
$$\oint\limits_{\ell} y\,\mathbf{d}x + x^2\,\mathbf{d}y,$$
где је ℓ позитивно оријентисан руб скупа
$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{-2x-x^2},\ y \geqslant 0\right\}.$$

265. Одредити површину скупа у равни који је ограничен x-осом и циклоидом[71]
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t),\ t \in [0, 2\pi],\ a > 0.$$

266. Израчунати интеграле:

(а)
$$\int_\gamma \frac{x\,\mathbf{d}x + y\,\mathbf{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
где је γ путања која не пролази кроз тачку $(0,0)$ и чији је почетак тачка $A(1,0)$ а крај тачка $B(6,8)$.

(б)
$$\int_\gamma \frac{x\,\mathbf{d}y - y\,\mathbf{d}x}{(x-y)^2},$$
где је γ путања која не сече симетралу првог и трећег квадранта и чији је почетак тачка $A(0,-1)$ а крај тачка $B(1,0)$.

267. Нека је γ позитивно оријентисана јединична кружница. Израчунати интеграл
$$\oint\limits_{\gamma} e^{x^2-y^2}(\cos(2xy)\,\mathbf{d}x + \sin(2xy)\,\mathbf{d}y).$$

268. (Јануар 2021) Нека је дата функција $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са
$$P(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xy}, & \text{ако је } x \neq 0 \end{cases}$$
и нека је за свако $r > 0$ са $K(r)$ означен позитивно оријентисан руб квадрата $[0,r]^2$.

(а) Израчунати интеграл $\displaystyle\oint\limits_{K(r)} P(x,y)\,\mathbf{d}x$ за свако $r > 0$.

(б) Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathbf{d}x$.

[71] Циклоида је крива у равни која настаје кретањем једне фиксиране тачке на кружници полупречника a, док се кружница котрља без клизања по правој линији.

5.3 Површински интеграли. Теорема Гауса-Остроградског и Стокса

269. Израчунати интеграл
$$\iint\limits_S \frac{\mathbf{d}\mathcal{S}}{(1+z)^2},$$
где је S полусфера $x^2+y^2+z^2=1$. $z \geqslant 0$.

270. Израчунати масу параболичке опне
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{1}{2}(x^2+y^2),\, z \leqslant 1\right\}$$
чија се површинска густина мења по закону $\rho(x,y,z)=z$, $(x,y,z) \in S$.

271. Нека је $a \neq 0$. Израчунати координате тежишта дела хомогене површи $z=\sqrt{x^2+y^2}$ изрезане цилиндром $x^2+y^2=ax$.

272. Нека је $a>0$. Израчунати површину мањег дела затворене површи која је ограничена са
$$x^2+y^2+z^2=3a^2 \quad \text{и} \quad x^2+y^2=2az.$$

273. Израчунати интеграл
$$\iint\limits_S x\,\mathbf{d}\mathcal{S},$$
где је S део површи $y=x^2+1$ између површи $y=2$, $y=3$ и $y=x^2+y^2$, за $x \geqslant 0$.

274. Израчунати интеграл
$$\oiint\limits_S x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z + x\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}x + (1+z)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y,$$
где је S параболоид $z=2-(x^2+y^2)$ за $-2 \leqslant z \leqslant 2$. Интеграција врши по страни која се види из тачке $(0,0,3)$.

275. Користећи теорему Гауса-Остроградског израчунати интеграл
$$\oiint\limits_S xz\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z + x^2y\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}x + y^2z\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y,$$
где је S тела из првог октанта ограниченог површима $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$.

276. Користећи теорему Гауса-Остроградског израчунати интеграл
$$\oiint\limits_S xz\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z + xy\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}x + yz\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y,$$
где је S спољна страна цилиндра $x^2+y^2=R^2$ из првог октанта исеченог површима $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $z=H$, $H>0$.

Решење. Да бисмо применили теорему Гауса-Остроградског површ мора ограничавати неко тело. То значи да морамо затворити тело које је за сада делимично ограничено цилиндром. То можемо учинити са равнима $z = 0$ и $z = H$ (горњи део новоформиране површи означимо са S_1) као и са равнима $x = 0$ и $y = 0$ (за $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ одговарајући површински интеграли су једнаки нули (зашто?) па их нећемо ни писати). Оријентишимо ове равни ка споља у односу на управо формирано тело (ваљак). Означимо овај ваљак са V. Нека је $P = xz$, $Q = xy$ и $R = yz$. Ове функције задовољавају услове теореме Гауса-Остроградског. Сада имамо да је

$$\oiint\limits_S xz\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z + xy\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}x + yz\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z - \iint\limits_{S_1} yz\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

Израчунајмо прва два интеграла из последњег реда. Имамо

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z = \iiint\limits_V (z + x + y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

У последњи интеграл уведимо смене $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и $z = z$. Јакобијан овог пресликавања је $\mathcal{J} = r$ док су границе за променљиве $z \in [0, H]$, $r \in [0, R]$ и $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. На основу теореме о смени у вишеструком интегралу и на основу Фубинијеве теореме имамо

$$\iiint\limits_V (z + x + y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z = \int_0^H\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r}_{=|\mathcal{J}|}(z + r\cos\varphi + r\sin\varphi)\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}r\,\mathbf{d}\varphi = \cdots = \frac{1}{24}HR^2(3\pi H + 16R).$$

Остаје да израчунамо још један интеграл. На површи S_1 је $z = H$. Нормала на ову површ заклапа туп (опружен) угао са позитивним делом z-осе одакле добијамо

$$\iint\limits_{S_1} yz\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = H\iint\limits_{S_1} y\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = -H\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant 1}} y\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = -H\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\sin\varphi\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}r = \cdots = \frac{HR^3}{3}.$$

Овиме смо и израчунали тражени интеграл, тј. имамо

$$\oiint\limits_S xz\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z + xy\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}x + yz\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \frac{1}{24}HR^2(3\pi H + 16R) - \frac{HR^3}{3} = \frac{HR^2}{24}(3H\pi + 8R).$$

277. Израчунати интеграл

$$\oiint\limits_S (x - y + z)\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z + (y - z + x)\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}x + (z - x + y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y,$$

где је S спољна страна тела ограниченог са

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$

278. Нека је S спољна страна тела ограниченог са

$$|x| + 2|y| + 3|z| = 7.$$

Израчунати интеграл

$$\oiint\limits_S \frac{x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z + y\,\mathbf{d}z\,\mathbf{d}x + z\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

279. Користећи теорему Стокса израчунати интеграл

$$\oint\limits_\ell (y^2 - z^2)\,\mathbf{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathbf{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathbf{d}z,$$

где је ℓ линија пресека омотача коцке $[0, a]^3$ са равни $x + y + z = \frac{3a}{2}$. Крива ℓ позитивно оријентисана посматрано из тачке $(0, 0, 2a)$.

280. Користећи теорему Стокса израчунати интеграл

$$\oint\limits_{\ell} y^2\,\mathbf{d}x - x^2\,\mathbf{d}y + z^2\,\mathbf{d}z,$$

где је ℓ линија пресека површи

$$x^2 + y + z^2 = 1$$

са координатним равнима за

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \quad , z \geqslant 0.$$

Посматрано са позитивног дела x-осе крива ℓ је позитивно оријентисана.

281. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција која има непрекидан извод и ℓ било која глатка, затворена крива у простору. Доказати једнакост

$$\oint\limits_{\ell} f(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x\,\mathbf{d}x + y\,\mathbf{d}y + z\,\mathbf{d}z) = 0.$$

Решење. Дефинишимо функције $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ са

$$P(x,y,z) = x \cdot f(x^2 + y^2 + z^2), \quad Q(x,y,z) = y \cdot f(x^2 + y^2 + z^2), \quad R(x,y,z) = z \cdot f(x^2 + y^2 + z^2).$$

Функције P, Q и R имају непрекидне парцијалне изводе првог реда јер функција f има непрекидан извод. Нека је S било која глатка површ на којој се налази крива ℓ и нека је $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ вектор јединичне нормале површи S (свеједно је како је оријентисана). Приметимо најпре да важе једнакости

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2yz \cdot f'(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial Q}{\partial z}, \tag{156}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2xz \cdot f'(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial P}{\partial z}, \tag{157}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \cdot f'(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{158}$$

Сада смо припремили терен за употребу формуле Стокса (испуњени су сви услови ове теореме) па је оправдан рачун

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\ell} f(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x\,\mathbf{d}x + y\,\mathbf{d}y + z\,\mathbf{d}z) &= \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathbf{d}S \\
&= \iint\limits_{S} \left[\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} \cdot \cos\alpha - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} \cdot \cos\beta + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \cdot \cos\alpha \right] \mathbf{d}S \\
&= \iint\limits_{S} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)}_{=\,0 \text{ по } (156)} \cdot \cos\alpha - \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right)}_{=\,0 \text{ по } (157)} \cdot \cos\beta + \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=\,0 \text{ по } (158)} \cdot \cos\alpha \right] \mathbf{d}S = 0.
\end{aligned}$$

Овиме је задатак решен.

282. Израчунати интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} x\,\mathbf{d}y\mathbf{d}z + y\,\mathbf{d}z\mathbf{d}x + z\,\mathbf{d}x\mathbf{d}y,$$

где је $\mathcal{S}$ спољна страна тела ограниченог површима

$$x^2 + y^2 = 7 - 2z \quad \text{и} \quad z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

283. Нека је S јединична сфера и $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Израчунати интеграл

$$\oiint\limits_{S} (ax^2 + by^2 + cz^2)\,\mathbf{d}S.$$

Решење. Нека је $\overrightarrow{F}=(ax,by,cz)$ векторско поље. Јединична нормала у тачки (x,y,z) површи S усмерена споља је управо $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$. На основу дефиниције површинског интеграла друге врсте и на основу теореме Гауса-Остроградског имамо

$$\oiint\limits_S (ax^2+by^2+cz^2)\,\mathbf{d}S=\oiint\limits_S\langle\overrightarrow{F},\overrightarrow{n}\rangle\,\mathbf{d}S=\iiint\limits_{\mathrm{int}S}\mathrm{div}\overrightarrow{F}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z=(a+b+c)\underbrace{\iiint\limits_{\mathrm{int}S}\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z}_{\text{запремина сфере } S}=\frac{4}{3}(a+b+c)\pi.$$

284. Нека је S јединична сфера $x^2+y^2+z^2=1$. Израчунати интеграл

$$\oiint\limits_S (x^2+y+z)\,\mathbf{d}S.$$

285. Нека је S јединична сфера $x^2+y^2+z^2=1$. Израчунати интеграл

$$\oiint\limits_S (x^4+y^4+z^4)\,\mathbf{d}S.$$

Решење. Означимо вредност интеграла са I. Нека је $\overrightarrow{F}=(x^3,y^3,z^3)$ векторско поље и $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ нормала на сферу S. Тада је

$$\oiint\limits_S (x^4+y^4+z^4)\,\mathbf{d}S=\oiint\limits_S\langle\overrightarrow{F},\overrightarrow{n}\rangle\,\mathbf{d}S=\iiint\limits_{\mathrm{int}S}\mathrm{div}\overrightarrow{F}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z=\iiint\limits_{\mathrm{int}S}(3x^2+3y^2+3z^2)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

Пређимо сада на сферне координате $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$ и $z=r\cos\theta$ при чему је $\varphi\in[0,2\pi]$, $\theta\in[0,\pi]$ и $r\in[0,1]$. Јакобијан код ове смене је $J=-r^2\sin\theta$ па на основу теореме о смени у вишеструком интегралу добијамо да је

$$I=3\iiint\limits_{[0,2\pi]\times[0,\pi]\times[0,1]} r^2\cdot r^2|\sin\theta|\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\theta\,\mathbf{d}r=3\int_0^{2\pi}\mathbf{d}\varphi\int_0^{\pi}|\sin\theta|\,\mathbf{d}\theta\int_0^1 r^4\,\mathbf{d}r=3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{12\pi}{5}.$$

286. Нека су дати позитивни бројеви a, b и c и површ

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,ax^2+by^2+zc^2=1\right\}.$$

Израчунати интеграл

$$\oiint\limits_E\frac{\mathbf{d}E}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}.$$

Решење. Нека је $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,ax^2+by^2+cz^2\leqslant 1\right\}$ и $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}$ као и $F(x,y,z)=(x,y,z)$ за свако $(x,y,z)\in E$. Функција f је добро дефинисана на и непрекидна на E па тражени интеграл постоји. Означимо вредност овог интеграла са I. Вектор јединичне нормалне површи E је $n(x,y,z)=\frac{(ax,by,cz)}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}$ за свако $(x,y,z)\in E$. Приметимо да је

$$\underbrace{n(x,y,z)\cdot(x,y,z)}_{\text{скаларно множење}}=\frac{ax\cdot x+by\cdot y+cz\cdot z}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}\quad\text{за свако}\quad(x,y,z)\in E.$$

На основу везе површинског интеграла прве и друге врсте као и на основу теореме Гауса-Остроградског добијамо да је

$$I=\oiint\limits_E n(x,y,z)\cdot(x,y,z)\,\mathbf{d}E=\iiint\limits_V\mathrm{div}F(x,y,z)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z=3\iiint\limits_V\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

Потребно је сада израчунати само још запремину тела V. Због тога уведимо смене $x=\frac{u}{\sqrt{a}}$, $y=\frac{v}{\sqrt{b}}$ и $z=\frac{w}{\sqrt{c}}$. Тада је $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{\sqrt{abc}}$ па је

$$I=3\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{abc}}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v\,\mathbf{d}w=\frac{3}{\sqrt{abc}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v\,\mathbf{d}w=\frac{3}{\sqrt{abc}}\cdot\frac{4}{3}\cdot 1^3\cdot\pi=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$$

287. Нека је S проста, глатка, затворена површ и нека је V запремина тела које ограничава површ S. Доказати формулу

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathbf{d}S.$$

Бројеви $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ су косинуси углова које спољна нормала на површ S заклапа са позитивним смеровима x, y и z осе.

Решење. Интеграл постоји јер је површ S глатка. Нека је $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ јединична спољашња нормала на S у тачки $(x,y,z) \in S$. Тада је $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Нека је T тело које ограничава површ S. Тада је на основу везе површинског интеграла прве и друге врсте као и на основу теореме Гауса-Остроградског оправдан рачун

$$\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathbf{d}S = \oiint\limits_S \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle\,\mathbf{d}S = \iiint\limits_T \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)}_{=1+1+1=3}\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z = \iiint\limits_T \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z = 3V.$$

Тврђење следи.

288. Нека је конусна површ исечена са неком равни. Ако је површина пресека једнака P а растојање врха конуса до пресечне равни једнако H тада је запремина конуса дата са $V = \frac{PH}{3}$. Доказати.

Решење. Конусна површ настаје на следећи начин. Имамо неку криву у простору и фиксирану тачку ван те криве. Посматамо површ која настаје када права пролази кроз дату тачку и када клизи низ дату криву. Наравно, сматрамо да је крива проста.

Поставимо конусну површ тако да је врх конуса смештен у $(0,0,0)$ и да је раван која сече ту конусну површ паралелна xOy равни и да сече z-осу у тачки $(0,0,H)$. Ово све можемо постићи а да не изгубимо општост разматрања. Сада смо све лепо припремили за примену Задатка 287. Нека је S тако добијена површ и нека је S_1 део површи S коју добијамо када права клизи по описаној кривој (тј. део омотача ако све ово замишљамо као неку купу) и S_2 основа (чија је површина по услову задатка P). Тада је $S_1 \cup S_2 = S$. Имамо да је

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle\,\mathbf{d}S = \frac{1}{3}\left(\oiint\limits_{S_1} \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle\,\mathbf{d}S + \oiint\limits_{S_2} \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle\,\mathbf{d}S\right). \tag{159}$$

Погледајмо најпре шта се дешава на омотачу, тј. на површи S_1. На овом делу површи имамо да је $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = 0$ за свако $(x,y,z) \in S_1$ (ово је очигледно по дефиницији површи S_1) па је

$$\oiint\limits_{S_1} \langle (x,y,z), \vec{n}\rangle\,\mathbf{d}S = 0.$$

Остаје да видимо шта се дешава на S_2. На основу уводне приче о положају конусне површи у координатном систему имамо да је $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z) = (0,0,1)$ за свако $(x,y,z) \in S_2$. Тада је $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = z$ за свако $(x,y,z) \in S_2$ а ту имамо да је $z = H$, тј. важи $\langle (x,y,z), \vec{n}\rangle = H$ на S_2.

Обједнимо сада резултате. Имамо да се (159) своди на

$$V = \frac{1}{3}\left(0 + \oiint\limits_{S_2} H\,\mathbf{d}S\right) = \frac{1}{3}\cdot H \cdot \underbrace{\oiint\limits_{S_2} \mathbf{d}S}_{\text{површина површи } S_2} = \frac{1}{3}\cdot H \cdot P.$$

Овиме је тврђење показано.

5.4 Разни задаци

289. Израчунати интеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} xy(x+z)(y+z)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z.$$

290. Израчунати интеграл
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}{1-xy}$$
а потом, користећи добијени резултат, доказати да је
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

291. Нека је $\mathcal{O}$ обим елипсе са полуосама a и b. Доказати неједнакости
$$\pi\cdot(a+b)\leqslant\mathcal{O}\leqslant 2\pi\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

292. Одредити запремину тела ограниченог са
$$\big(x^2+y^2+z^2+8\big)^2=36(x^2+y^2).$$

Решење. Овај задатак ћемо решавати тако што ћемо прво видети које тело дефинише дата површ. Како имамо квадрате у изразу за површ, природно је увести цилиндричне смене $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=z$ имамо
$$(r^2+z^2+8)^2=36r^2 \iff r^2+z^2+8=6r \iff (r-3)^2+z^2=1. \tag{160}$$
Из последње једнакости у (160) можемо закључити како изгледа наша површ, односно тело које је ограничено датом површи. Наша површ је добијена ротацијом кружнице, која лежи у равни која садржи z-осу, чији је центар тачка $(3,0,0)$ и полупречник једнак броју 1. Овиме се добија добро позната површ која се зове торус[72]. Запремина торуса дефинисаног једначином (160) се израчунава[73] као
$$V=\underbrace{(2\cdot 3\cdot\pi)}_{\text{Обим кружнице коју прави тачка }(3,0,0)}\cdot\underbrace{(1^2\cdot\pi)}_{\text{Површина круга који ротира}}=6\pi^2. \tag{161}$$

293. Нека је дата површ T једначином
$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1.$$
Израчунати интеграл
$$\iint\limits_T |z|\,\mathbf{d}S.$$

Решење. Површ T је торус са центом у $(0,0,0)$ који има за осу z-осу. Дужина већег полупречника торуса T је 3 а мањег 1. Из једначине којом је задат торус T имамо да је
$$|z|=\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}.$$
Нека је $z\geqslant 0$. Диференцирањем по x и по y једначине торуса T најлакше је проверити једнакост
$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)^2}=\cdots=\frac{1}{\sqrt{z^2}}=\frac{1}{z}.$$
Нека је T_1 део торуса за $z\geqslant 0$. Добијамо
$$\iint\limits_{T_1}|z|\,\mathbf{d}S=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3}\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=3^2\pi-1^2\pi=8\pi.$$
На основу симетрије сада очигледно имамо да је
$$\iint\limits_T |z|\,\mathbf{d}S=2\cdot 8\pi=16\pi.$$

[72] Тело које има облик гуме за пливање, ђеврека, крофне,. . . .

[73] Објаснимо мало детаљније зашто овако, као у (161), рачунамо запремуну торуса. Интуитивно, уколико торус пресечемо са неком равни која садржи осу торуса и исправимо га (ово за сада не сматрамо математичком трансформацијом, него интуитивном) добијамо ваљак, који за основу има круг (исти онај који ротира и прави ово тело) и дужину висине једнаке путу који пређе центар тог истог круга. Гледано формално математички, у позадини ове идеје је сакривена дубља Математичка анализа, тј. користе се интергали. Како?

294. Нека је $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. За свако $(a,b) \in (0,1)^2$ нека је $S(a,b)$ највећи квадрат са центром у (a,b), чије су странице паралелне координатним осама и који је цео садржан у $[0,1]^2$. Претпоставимо да важи услов

$$\iint\limits_{S(a,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = 0, \qquad \forall (a,b) \in (0,1)^2.$$

Да ли функција f мора бити идентички једнака нули на $[0,1]^2$?

Решење. Означимо са $R(a,b)$ правоугаоник чије су странице паралелне координатним осама, чије је доње лево теме тачка $(0,0)$ и горње десно теме тачка $(a,b) \in [0,1]^2$. Идеја се састоји у томе да покажемо да је за свако $(a,b) \in [0,1]^2$ испуњено $\iint\limits_{R(a,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = 0$. Због чега? Замислимо на тренутак да је испуњена ова наша жеља и размотримо шта би се десило да у некој тачки из $[0,1]^2$ функција f нема вредност 0. Нека је то тачка $(x^*,y^*) \in [0,1]^2$. Због непрекидности функције f на $[0,1]^2$ постоји правоугаоник $P = \{(x,y) \mid a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ b_1 \leqslant y \leqslant b_2\} \subseteq [0,1]^2$, који садржи тачку (x^*,y^*) и такав да је $f(x,y) > 0$ (или < 0, али доказ је исти у оба случаја) за свако $(x,y) \in P$. На основу оног што смо пожелели, имамо да је

$$\iint\limits_{P} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iint\limits_{R(a,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y - \iint\limits_{R(a_1,b_2)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y - \iint\limits_{R(a_2,b_1)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y + \iint\limits_{R(a_1,b_1)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y. \tag{162}$$

Дакле, једнакост (162) представља очигледно контрадикцију јер је сваки од интеграла на десној страни једнак нули, за сада по претпоставци коју ћемо потом доказати, док је на десној страни у истој једнакости вредност интеграла већа од нуле, јер је $f(x,y) > 0$ за свако $(x,y) \in P$.

Остаје само да докажемо оно што смо пожелели. Ту ћемо користи услов задатка који још нисмо употребили. Нека је $(a,b) \in [0,1]^2$ произвољно. Уколико је $a \leqslant b$ имамо да је

$$\iint\limits_{R(a,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iint\limits_{R(a,b-a)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$$

(и ставимо у овом случају $b_1 = b - a$ и $a_1 = a$) а ако је $a > b$ имамо да је

$$\iint\limits_{R(a,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iint\limits_{R(a-b,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$$

(и ставимо $a_1 = a - b$ и $b_1 = b$). Настављајући овај поступак ми у ствари конструшемо низове $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ са својством $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ као и низ правоугаоника $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ са својством

$$\iint\limits_{R(a,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iint\limits_{P_n} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y \ \text{ које важи за свако } n \in \mathbb{N}. \tag{163}$$

Проценимо како се понашају интеграли $\iint\limits_{P_n} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$ када n расте. Са циљем да ограни-чимо апсолутну вредност ових интергала, уведимо $M = \max\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} \big|f(x,y)\big|$ и $M_n = \max\limits_{(x,y)\in P_n} \big|f(x,y)\big|$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Бројеви M и M_n постоје јер је f (а одатле и $|f|$) непрекидна на $[0,1]^2$ (па самим тим и на сваком (дводимензионалном) подсегменту). Очигледно, $M_n \leqslant M$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Сада, имамо да је

$$\left|\iint\limits_{P_n} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\right| \leqslant \iint\limits_{P_n} \underbrace{\big|f(x,y)\big|}_{\leqslant M_n}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y \leqslant \underbrace{M_n}_{\leqslant M} \underbrace{\iint\limits_{P_n} \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}_{\text{површина од } P_n \,=\, a_n b_n} \leqslant M \cdot a_n b_n \to 0 \text{ када } n \to +\infty. \tag{164}$$

Дакле, из (163) и (164) имамо да је

$$\iint\limits_{R(a,b)} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{P_n} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = 0 \text{ за свако } (a,b) \in [0,1]^2. \tag{165}$$

Са (165) је задатак завршен јер је $(a,b) \in [0,1]^2$ произвољно бирано.

Напомена 52. Низ правоугаоника $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, као и низови $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, зависе од одабира тачке $(a,b) \in [0,1]^2$.

295. Нека је $0 < a \leqslant b$. Доказати неједнакост

$$\iint\limits_{[a,b]^2} \frac{x^{12}+y^{12}}{x^5+y^5}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y \geqslant \frac{(b-a)(b^8-a^8)}{8}.$$

Решење. На основу неједнакости Чебишева имамо да је $(x^5+y^5)(x^7+y^7) \leqslant 2(x^{12}+y^{12})$ за свако $x, y \in [a,b]$ па је

$$\iint\limits_{[a,b]^2} \frac{x^{12}+y^{12}}{x^5+y^5}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y \geqslant 2 \iint\limits_{[a,b]^2} (x^7+y^7)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \cdots = \frac{(b-a)(b^8-a^8)}{8}.$$

296. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y,$$

а потом показати да је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathbf{d}x = \sqrt{\pi}.$$

297. Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ симетрична, позитивно дефинитна матрица. Израчунати интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^TAx}\,\mathbf{d}x.$$

298. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати неједнакост

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathbf{d}x.$$

299. Доказати да је

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi.$$

300. Доказати следећа тврђења:

(а) Нека су P и Q непрекидне функције на део по део глаткој кривој γ. Тада је

$$\left|\int_\gamma P(x,y)\,\mathbf{d}x + Q(x,y)\,\mathbf{d}y\right| \leqslant M\cdot L,$$

где је L дужина криве γ и $M = \max\limits_{(x,y)\in\gamma}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$.

(б) Нека је за свако $R > 0$ дефинисана крива $\ell_R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = R^2\right\}$. Тада је

$$\lim_{R\to+\infty}\oint\limits_{\ell_R} \frac{y\,\mathbf{d}x - x\,\mathbf{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0.$$

301. Нека је у xOy равни дат многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ површине P. Ако је $A_k = (x_k, y_k)$ за свако $k \in \{1,\ldots,n+1\}$ и $A_{n+1} = A_1$ доказати формулу

$$P = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}+x_k)\cdot(y_{k+1}-y_k).$$

Решење. Нека је M многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ и ℓ позитивно оријентисана крива руба многоугла M. На основу Гринове формуле имамо да је

$$P = \iint\limits_M \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \oint\limits_\ell x\,\mathbf{d}y = \sum_{k=1}^{n}\;\oint\limits_{A_kA_{k+1}} x\,\mathbf{d}y.$$

За свако $k \in \{1,\dots,n\}$ израчунајмо криволинијски интеграл $\oint\limits_{A_kA_{k+1}} x\,\mathbf{d}y$. За то нам треба параметризација дужи A_kA_{k+1} која је дата са (ово је заправо једначина праве кроз дате две тачке):

$$A_kA_{k+1}: \quad y(x) - x_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k) \quad \text{за свако} \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \quad \text{или} \quad x \in [x_{k+1}, x_k].$$

У овом тренутку видимо да нам је потребно $x_k \neq x_{k+1}$ за свако $k \in \{1,\dots,n\}$ па решимо задатак под овом претпоставком од које ћемо се касније и ослободити. Сада је $y'(x) = \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}$ свако x које је између тачака x_k и x_{k+1} и за свако $k \in \{1,\dots,n\}$ па по дефиницији криволинијског интеграла друге врсте рачунамо

$$P = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} x \cdot \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}\,\mathbf{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} x\,\mathbf{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} \cdot \frac{x_{k+1}^2 - x_k^2}{2}.$$

Када применимо формулу за разлику квадрата имамо тражено тврђење под претпоставком да је $x_k \neq x_{k+1}$ за свако $k \in \{1,\dots,n\}$. Ако је за неко $x_k \neq x_{k+1}$ испуњено $x_k = x_{k+1}$ тада је

$$\oint\limits_{A_kA_{k+1}} x\,\mathbf{d}y = x_k \cdot (y_{k+1}-y_k) = \frac{1}{2}(x_k + x_k)\cdot(y_{k+1}-y_k) = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})\cdot(y_{k+1}-y_k)$$

одакле видимо да тражена формула важи и у том случају. Овиме је задатак у потпуности решен.

Напомена 53. Приметимо да ова формула важи за било какав многоугао у xOy равни на који се може применити Гринова формула. Како су то сви многуглови без самопресецања видимо да формула важи за њих. Дакле, ова формула тачно ради и за неконвексне многоуглове.

302. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$\int_{\|x\|\geqslant 1} \frac{\mathbf{d}x}{\|x\|^n} = +\infty.$$

303. Нека је $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ отворен скуп и нека је дата функција $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ која има непрекидне мешовите парцијалне изводе другог реда на $\mathcal{D}$. Доказати да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Решење. Овај задатак представаља у ствари теорему коју смо користили обилато у Поглављу 4. Сада ћемо представити њен доказ на доста нестандардан начин, користићи вишеструке интеграле. Претпоставимо да постоји нека тачка $(x^*,y^*) \in \mathcal{D}$ таква да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*,y^*)$$

и нека је најпре

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*) > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*,y^*)$$

тј. да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*,y^*) > 0.$$

Како је функција

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

непрекидна у (x^*,y^*), постоји $r > 0$ тако да је за свако $(x,y) \in \mathcal{K}\big((x^*,y^*),r\big)$ испуњено

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > 0.$$

Формирајмо произвољан правоугаоник P у $\mathcal{K}\big((x^*,y^*),r\big)$, са теменима $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$ и $D(d_1,d_2)$, чији је центар тачка (x^*,y^*) и чије су странице паралелне координатним осама (дакле, дужи $[A,B]$ и $[C,D]$ су паралелне x-оси док су дужи $[A,D]$ и $[B,C]$ паралелне y-оси). На основу монотоности интеграла имамо да је

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{d_2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right] \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y > 0 \iff \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{d_2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\right] \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y > 0. \qquad (166)$$

Сада, користећи линеарност интеграла, последња неједнакост у (166) постаје

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{d_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y-\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{d_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y>0. \tag{167}$$

Идеја је да користимо Њутн-Лајбницову теорему и теорему о размени редоследа интеграције (Фубинијева теорема). Имамо да је, након размене редоследа интеграције, (167) еквивалентно са

$$\int_{a_2}^{d_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathbf{d}x\right)\mathbf{d}y-\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{d_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\mathbf{d}y\right)\mathbf{d}x>0. \tag{168}$$

Сада примењујемо Њутн-Лајбницову теорему. Неједнакост (168) поприма облик

$$\int_{a_2}^{d_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(b_1,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,y)\right)\mathbf{d}y-\int_{a_1}^{b_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,d_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,a_2)\right)\mathbf{d}x>0. \tag{169}$$

Након још једне примене теореме Њутна и Лајбница, користећи опет линеарност интеграла, добијамо да се (170) своди на

$$\Big\{\big[f(b_1,d_2)-f(b_1,a_2)\big]-\big[f(a_1,d_2)-f(a_1,a_2)\big]\Big\}-\Big\{\big[f(b_1,d_2)-f(a_1,d_2)\big]-\big[f(b_1,a_2)-f(a_1,a_2)\big]\Big\}>0. \tag{170}$$

Након краћења одговарајућијх сабирака у (170) се добија $0>0$, што очигледно представља контрадикцију. Дакле, наша претпоставка је немогућа, те је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x^*,y^*)\leqslant\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x^*,y^*).$$

На потпуно исти начин се закључује да мора бити и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x^*,y^*)\geqslant\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x^*,y^*).$$

Из последње две неједнакости закључујемо, користећи антисиметричност[74] релације $\leqslant$ у скупу $\mathbb{R}$, да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x^*,y^*)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x^*,y^*).$$

Како је (x^*,y^*) била произвољно одабрана тачка из $\mathcal{D}$, тврђење следи.

304. Одредити све непрекидне функције $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ за које важи

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\big(xy-f(x,y)\big)f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=\frac{1}{36}.$$

Решење. Једнакост из услова задатка можемо записати у еквивалентном облику као

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\big(xy-f(x,y)\big)f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{x^2y^2}{4}\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y. \tag{171}$$

Уколико све пребацимо са леве стране једнакости (171) добијамо

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\left(\big(xy-f(x,y)\big)f(x,y)-\frac{x^2y^2}{4}\right)\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=0\iff\iint\limits_{[0,1]^2}\left(\frac{x^2y^2}{4}-xyf(x,y)+f^2(x,y)\right)\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=0. \tag{172}$$

Последњи интеграл у (172) се може записати као

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\left(\frac{xy}{2}-f(x,y)\right)^2\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y=0. \tag{173}$$

Подинтегрална функција у (173) је ненегативна и непрекидна на $[0,1]^2$ јер је f непрекидна на $[0,1]^2$, по услову задатка. Одавде закључујемо[75] да је $f(x,y)=\frac{xy}{2}$ за свако $(x,y)\in[0,1]^2$.

[74] Нека је $A\neq\varnothing$ и ρ релација на A. За релацију ρ кажемо да је антисиметрична на скупу A ако важи логичка формула $(\forall x,y\in A)\ x\rho y\wedge y\rho x\implies x=y$. Да ли је релација $<$ антисиметрична на скупу $\mathbb{R}$?

[75] Нека студент обнови како гласи одговарајуће тврђење на које треба у овом тренутку да се позовемо.

Напомена 54. Како се сетити да једнакост из услова задатка треба написати као (171)? Одговор на ово питање треба тражити са следећом идејом. Најпре је потребно посумњати да треба све пребацити на једну страну једнакости и штеловати квадрат бинома под знаком интеграла. Дакле, видимо да нам под знаком интеграла из услова задатка треба члан $c\cdot(xy)^2$, где је c нека реална константа. Дакле, све се своди на тражење константе c као решење једначине

$$\frac{1}{36} = \iint\limits_{[0,1]^2} c\cdot(xy)^2\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$$

тј. имамо да је

$$c = \frac{1}{36\iint\limits_{[0,1]^2}(xy)^2\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y} = \frac{1}{36\underbrace{\left(\int_0^1 x^2\,\mathbf{d}x\right)}_{=\frac{1}{3}}\cdot\underbrace{\left(\int_0^1 y^2\,\mathbf{d}y\right)}_{=\frac{1}{3}}} = \frac{1}{4}.$$

305. Доказати да интегрална једначина

$$f(x,y) = 1 + \int_0^x\int_0^y f(u,v)\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v$$

има највише једно непрекидно решење на квадрату $[0,1]\times[0,1]$.

Решење. Уколико ова једначина нема непрекидних решења на $[0,1]\times[0,1]$ задатак је завршен. Претпоставимо сада да једначина има непрекидних решења на $[0,1]\times[0,1]$ и покажимо да такво решење мора бити јединствено. Нека су f_1 и f_1 произвољна два непрекидна решења на $[0,1]\times[0,1]$. Тада је и функција $g = f_1 - f_2$ непрекидна на $[0,1]\times[0,1]$ и задовољава једнакост

$$g(x,y) = \int_0^x\int_0^y g(u,v)\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v,\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{174}$$

Нека је $M = \max\limits_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} g(x,y)$. Овај број постоји због непрекидности функције g на $[0,1]\times[0,1]$. Из (174) закључујемо да је

$$|g(x,y)| = \left|\int_0^x\int_0^y g(u,v)\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v\right| \leqslant \int_0^x\int_0^y \underbrace{|g(u,v)|}_{\leqslant M}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v \leqslant M\int_0^x\int_0^y \mathbf{d}u\,\mathbf{d}v = Mxy,\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{175}$$

Уколико поновимо овај корак, на основу (175) имамо да је

$$|g(x,y)| = \left|\int_0^x\int_0^y g(u,v)\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v\right| \leqslant \int_0^x\int_0^y \underbrace{|g(u,v)|}_{\leqslant Mxy}\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v \leqslant M\int_0^x\int_0^y xy\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v = M\frac{x^2}{2}\frac{y^2}{2},\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{176}$$

Математичком индукцијом сада лако показујемо да важи

$$|g(x,y)| \leqslant M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!},\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{177}$$

Заиста, на исти начин на који смо прешли из (175) у (176) тако вршимо индуктивни прелаз (корак) са n на $n+1$. Како (177) важи за свако $n\in\mathbb{N}$ следи да је

$$|g(x,y)| \leqslant M\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!} = 0,\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{178}$$

Дакле, из (178) закључујемо да је g идентички једнако нули на $[0,1]\times[0,1]$, те је $f_1 = f_2$.

Напомена 55. Може се показати да ова интегрална једначина има непрекидно решење на $[0,1]\times[0,1]$, што заједно са нашим задатком даје да посматрана интегрална једначина има јединствено непрекидно решење на $[0,1]\times[0,1]$. Заиста, дефинишимо рекурзивно низ функција $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ на $[0,1]\times[0,1]$ са

$$g_0(x,y) = 1 \quad \text{и} \quad g_{n+1}(x,y) = \int_0^x\int_0^y g_n(u,v)\,\mathbf{d}u\,\mathbf{d}v,\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{179}$$

Индуктивно, као и у решењу задатка, на основу (179) налазаимо да је

$$g_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k}{(k!)^2},\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{180}$$

Како је $0 \leqslant xy \leqslant 1$ (због тога што је $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$) имамо да је

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(xy)^k}{(k!)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} < +\infty, \quad \forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1],$$

те на основу поредбеног и Вајерштрасовог критеријума закључујемо да ред $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(xy)^k}{(k!)^2}$ конвергира равномерно на квадрату $[0,1] \times [0,1]$, одакле имамо да се може интегралити члан по члан у овом квадрату. Одавде, директном заменом у полазну једначину и интеграцијом по квадрату $[0,1] \times [0,1]$ члан по члан, имамо да је функција $g(x,y) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(xy)^k}{(k!)^2}$ решење интегралне једначине на $[0,1] \times [0,1]$. Непрекидност функције g такође следи на основу равномерне конвергенције реда $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(xy)^k}{(k!)^2}$ на $[0,1] \times [0,1]$. Равномерна конвергенција и интеграција функционалних низова и редова, као и целокупна Теорија редова, се учи у Математици 3.

306. Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} \cos^2 \frac{\pi \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{2n} \, \mathbf{d}x_1 \, \mathbf{d}x_2 \cdots \mathbf{d}x_n.$$

Решење. Функција $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \cos^2 \frac{\pi \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{2n}$ је непрекидна на мерљивом скупу $[0,1]^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. То значи да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји интеграл (реалан је број)

$$I_n := \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2 \frac{\pi \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{2n} \, \mathbf{d}x_1 \, \mathbf{d}x_2 \cdots \mathbf{d}x_n, \tag{181}$$

те можемо говорити о постојању граничне вредности $\lim_{n \to +\infty} I_n$. Паралелно са интегралима I_n природно је посматрати интеграле

$$J_n := \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{2n} \, \mathbf{d}x_1 \, \mathbf{d}x_2 \cdots \mathbf{d}x_n, \tag{182}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Интеграли J_n постоје из истог разлога као и интеграли I_n. На основу (181), (182) и основног тригонометријског идентитета (тј. Питагорине теореме) имамо да је

$$I_n + J_n = \overbrace{\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 1 \, \mathbf{d}x_1 \, \mathbf{d}x_2 \cdots \mathbf{d}x_n}_{\text{Запремина (мера) скупа } [0,1]^n} = \underbrace{(1-0) \cdots (1-0)}_{n}}^{\text{Запремина } n\text{-димензионалног правоугаоника се по дефиницији овако рачуна}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{183}$$

Дакле, из (183) видимо да уколико нађемо везу између I_n и J_n можемо израчунати колико је сваки елемент низа $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, те ћемо моћи да покушамо да израчунамо граничну вредност $\lim_{n \to +\infty} I_n$. Да бисмо повезали интеграле I_n и J_n у интеграл I_n из (181) уведимо смене $x_k = 1 - u_k$ за свако $k \in \{1, \ldots, n\}$. Јакобијан овог пресликавања је $\mathcal{J}_n = (-1)^n$, док се домен интеграције $[0,1]^n$ пресликава у $[0,1]^n$, па на основу теореме о смени у вишеструком интегралу интеграл I_n из (181) постаје

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \underbrace{|(-1)^n|}_{= |\mathcal{J}_n|} \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot \big(n - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\big)}{2n} \, \mathbf{d}u_1 \, \mathbf{d}u_2 \cdots \mathbf{d}u_n \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{2n} \right) \mathbf{d}u_1 \, \mathbf{d}u_2 \cdots \mathbf{d}u_n \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{2n} \, \mathbf{d}u_1 \, \mathbf{d}u_2 \cdots \mathbf{d}u_n \\ &= J_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{184}$$

На основу (183) и (184) лако видимо да је $I_n = \frac{1}{2}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Одавде следи да је $\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}$. Задатак је управо решен.

307. Нека је $K_n = [0,1]^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Израчунати инетргал

$$\int\limits_{K_n}\!\!\cdots\!\!\int \cos(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)\,\mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n.$$

308. Нека је $k \in \mathbb{N}$. Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,1]^n}\!\!\cdots\!\!\int \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^k \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n.$$

Решење. Нека је

$$I(n,k) = \int\limits_{[0,1]^n}\!\!\cdots\!\!\int \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^k \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n$$

за свако $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Сви ови интеграли постоје јер је подинтегрална функција непрекидна а област интеграције $[0,1]^n$ компактан скуп. На основу симетрије имамо да је за $k \geqslant 1$ задовољено

$$\begin{aligned}
I(n,k) &= \int\limits_{[0,1]^n}\!\!\cdots\!\!\int \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{k-1} \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{[0,1]^n}\!\!\cdots\!\!\int x_j \cdot \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{k-1} \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \int\limits_{[0,1]^n}\!\!\cdots\!\!\int x_1 \cdot \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{k-1} \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n \\
&= \int\limits_{[0,1]^n}\!\!\cdots\!\!\int x_1 \cdot \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{k-1} \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n.
\end{aligned}$$

Након примене Фубинијеве теореме (што је оправдано због непрекидности подинтегралне функције и због тога што је област интеграције коцка $[0,1]^n$ (основна верзија Фубинијеве теореме)) добијамо

$$I(n,k) = \frac{1}{n^{k-1}} \int\limits_{[0,1]^{n-1}}\!\!\cdots\!\!\int \left(\int_0^1 x_1 \cdot (x_1 + (x_2 + \cdots + x_n))^{k-1}\,\mathbf{d}x_1\right) \mathbf{d}x_2 \cdots \mathbf{d}x_n.$$

Применимо сада Њутнову биномну формулу на израз под интегралом. Добијамо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x_1 \cdot (x_1 + (x_2 + \cdots + x_n))^{k-1}\,\mathbf{d}x_1 &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (x_2 + \cdots + x_n)^j \int_0^1 x_1 \cdot x_1^{(k-1)-j}\,\mathbf{d}x_1 \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{(x_2 + \cdots + x_n)^j}{k-j+1}.
\end{aligned}$$

Замењујући добијено имамо да је

$$\begin{aligned}
I(n,k) &= \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{1}{k-j+1} \int\limits_{[0,1]^{n-1}}\!\!\cdots\!\!\int (x_2 + \cdots + x_n)^j\,\mathbf{d}x_2 \cdots \mathbf{d}x_n \\
&= \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{(n-1)^j}{k-j+1} I(n-1,j).
\end{aligned}$$

Докажимо математичком индукцијом да гранична вредност $\lim\limits_{n\to+\infty} I(n,k)$ постоји и да је $\lim\limits_{n\to+\infty} I(n,k) = \dfrac{1}{2^k}$ за свако $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. За $k = 0$ (па и за $k = 1, 2$ тврђење је лако провериво директно). Дакле, нека гранична вредност $\lim\limits_{n\to+\infty} I(n, k-1)$ постоји и нека је $\lim\limits_{n\to+\infty} I(n, k-1) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Ако издвојимо сабирак коме одговара индекс $j = k-1$ у рекурентној једнакости за $I(n,k)$ добијамо

$$I(n,k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} \cdot \binom{k-1}{k-1} \cdot (n-1)^{k-1} \cdot I(n-1, k-1) + \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-1}{j} \frac{(n-1)^j}{k-j+1} I(n-1,j).$$

Како је $I(n-1,j) \in [0,1]$ за свако $n, j \in \mathbb{N}$ и како за $j \in \{0, \dots, k-2\}$ важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)^j}{n^{k-1}} = 0$ добијамо да је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-1}{j} \frac{(n-1)^j}{k-j+1} I(n-1,j) = 0.$$

Сада је на основу индуктивне хипотезе

$$\lim_{n\to+\infty} I(n,k) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} \cdot \lim_{n\to+\infty} I(n-1,k-1) + 0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Овиме смо показали да је

$$\lim_{n\to+\infty} \underset{[0,1]^n}{\int \cdots \int} \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^k \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n = \frac{1}{2^k}.$$

Напомена 56. Може се лако показати уз још мало знања анализе да имамо и више. За сваку непрекидну функцију $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ важи једнакост

$$\lim_{n\to+\infty} \underset{[0,1]^n}{\int \cdots \int} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \mathbf{d}x_1 \cdots \mathbf{d}x_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Разлог лежи у томе што је скуп функција $\{f_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ где је $f_k(x) = x^k$ за $x \in [0,1]$ свуда густ у $\mathcal{C}[0,1]$ (Теорема Вајерштраса из Математике 1).

309. Нека је $\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi\big\}$. Доказати да је

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \ln\big|\sin(x-y)\big| \,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.$$

310. Нека је $a > 0$. Доказати да је

$$\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]} \sin\left(x^2+y^2\right) \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = \iint\limits_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a\sqrt{2}}} \sin\left(x^2+y^2\right) \mathbf{d}x\,\mathbf{d}y.$$

311. Нека су $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне и растуће функције. Доказати неједнакост

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \right) \left(\int_a^b g(x)\,\mathbf{d}x \right) \leqslant (b-a) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathbf{d}x$$

312. Нека је $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ функција чији су сви парцијални изводи до четвртог реда непрекидни на $[0,1]^2$ и нека је вредност функције f на рубу квадрата једнака 0. Доказати да је

$$\left| \iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y \right| \leqslant \frac{1}{144} \cdot \max_{(x,y)\in[0,1]^2} \left| \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right|.$$

313. На свакој страни полиедра конструисан је по један вектор нормале оријентисан ка споља и који има дужину једнаку површини стране на коју је нормалн. Доказати да је збир свих конструсаних вектора нормала једнак нула вектору.

Решење. Нека је T полиедар са $k \in \mathbb{N}$ страна и S његова површ која је унија његових страна S_j. Означимо са $n = (n_x, n_y, n_z)$ јединичну нормалу на површ S ($\overrightarrow{n}$ зависи од тачке на површи S у којој је конструисана) оријентисану ка споља и нека је $\overrightarrow{I}$ збир свих конструисаних вектора нормала. Како је на свакој страни S_j полиедра T вектор $\overrightarrow{n}$ константан имамо да је

$$\underbrace{P(S_j)}_{\text{површина}} \cdot \overrightarrow{n} = \iint\limits_{S_j} \overrightarrow{n}\, \mathbf{d}S \quad \text{за свако} \quad j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Одавде закључујемо да је

$$\overrightarrow{I} = \sum_{j=1}^{k} \iint\limits_{S_j} \overrightarrow{n}\, \mathbf{d}S = \iint\limits_{S} \overrightarrow{n}\, \mathbf{d}S = \left(\iint\limits_{S} n_x\, \mathbf{d}S, \iint\limits_{S} n_y\, \mathbf{d}S, \iint\limits_{S} n_z\, \mathbf{d}S \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Израчунајмо сваку од координата посебно. Нека је $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$. На основу формуле која повезује површински интеграл прве и друге врсте и на основу теореме Гауса-Остроградског имамо да је

$$\iint\limits_{S} n_x\, \mathbf{d}S = \iint\limits_{S} \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{n} \rangle\, \mathbf{d}S = \iint\limits_{S^+} 1\, \mathbf{d}y\, \mathbf{d}z + 0\, \mathbf{d}z\, \mathbf{d}x + 0\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y = \iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial}{\partial x} 1 + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z} 0 \right) \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y\, \mathbf{d}z = 0.$$

Идентично се показује

$$\iint\limits_{S} n_y\, \mathbf{d}S = 0 = \iint\limits_{S} n_z\, \mathbf{d}S.$$

Овиме смо показали да је $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{0}$.

314. Нека је $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и D квадрат са теменима $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$. Израчунати интеграл

$$\iint\limits_{D} x \cdot f\left(x^2 + y^2\right)\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y.$$

Решење. Приметимо најпре да за свако $(x, y) \in D$ важи $x^2 + y^2 \in [0, 1]$. Због тога је подинтегрални израз добро дефинисан. Како је функција f непрекидна интеграл постоји. Означимо његову вредност са I. Уведимо смену $u = -x$ и $v = y$. Овом сменом се квадрат D пресликава бијективно на себе. Јакобијан овог пресликавања има константну вредност -1. На основу Теореме о смени променљиве у вишеструком интегралу добијамо

$$I = \iint\limits_{D} \underbrace{|-1|}_{= \mathcal{J}} \cdot (-u) \cdot f((-u)^2 + v^2)\, \mathbf{d}u\, \mathbf{d}v = -I \implies 2I = 0 \implies I = 0.$$

315. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ фиксирана тачка и

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Доказати једнакост

$$\oiint\limits_{S} f(ax + by + cz)\, \mathbf{d}S = 2\pi \int_{-1}^{1} f\left(u \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)\, \mathbf{d}u.$$

Решење. Како је функција f непрекидна имамо да постоји интеграл

$$\oiint\limits_{S} f(ax + by + cz)\, \mathbf{d}S.$$

Означимо његову вредност са I. Приметимо да је

$$ax + by + cz = \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle.$$

Постоји ортигинална матрица $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ која ротира координатни систем тако да је

$$T(a, b, c) = \left(0, 0, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right).$$

Пресликавање T је изометрија простора $\mathbb{R}^3$ па самим тим чува норму и меру површине а јединичну сферу S слика на саму себе тј. важи $T(S) = S$. Лако се проверава да је $TT^T = I_3$ (матрица ротације је ортогонална матрица) па имајући у виду све наведено можемо да рачунамо на следећи начин

$$\begin{aligned}
I &= \oiint\limits_S f(\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle)\,\mathbf{d}S(x,y,z)\\
&= \oiint\limits_S f\left(\langle T(a,b,c), T(x,y,z)\rangle\right)\,\mathbf{d}S(x,y,z)\\
&= \oiint\limits_S f\left(\left\langle \left(0,0,\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right), (x',y',z')\right\rangle\right)\,\mathbf{d}S(x',y',z')\\
&= \oiint\limits_S f\left(z'\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\,\mathbf{d}S(x',y',z').
\end{aligned}$$

Последњи интеграл (површински интеграл прве врсте) ћемо израчунати по дефиницији. Уведимо сферне смене. У овим сменама је $x = x(\varphi,\theta) = \cos\varphi\cdot\sin\theta$, $y = y(\varphi,\theta) = \sin\varphi\cdot\sin\theta$ и $z = z(\varphi,\theta) = \cos\theta$, при чему је $\varphi \in [0,2\pi)$ и $\theta \in [0,\pi]$ (θ је угао између вектора $(x,y,z) \in S$ и позитивног дела z-осе). Одавде је

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{[0,2\pi)\times[0,\pi]} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cos\theta\right)\cdot\sqrt{E(\varphi,\theta)\cdot G(\varphi,\theta) - (F(\varphi,\theta))^2}\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\theta\\
&= \iint\limits_{[0,2\pi)\times[0,\pi]} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cos\theta\right)\cdot\sin\theta\,\mathbf{d}\varphi\,\mathbf{d}\theta
\end{aligned}$$

при чему смо Гаусове коефицијенте $E(\varphi,\theta)$, $G(\varphi,\theta)$ и $F(\varphi,\theta)$ рачунали као

$$E(\varphi,\theta) = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = (-\sin\varphi\cdot\sin\theta)^2 + (\cos\varphi\cdot\sin\theta)^2 + 0^2 = \sin^2\theta\cdot(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = \sin^2\theta,$$

$$G(\varphi,\theta) = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 = (\cos\varphi\cdot\cos\theta)^2 + (\sin\varphi\cdot\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 = \cos^2\theta\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \sin^2\theta = 1,$$

$$F(\varphi,\theta) = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta} = -\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta + \cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta = 0.$$

Због тога је

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi\int_0^\pi f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cos\theta\right)\cdot\sin\theta\,\mathbf{d}\varphi = \left| u = \cos\theta \implies \mathbf{d}u = -\sin\theta\,\mathbf{d}\theta \right|\\
&= -2\pi\int_1^{-1} f\left(u\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\,\mathbf{d}u = 2\pi\int_{-1}^1 f\left(u\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\,\mathbf{d}u.
\end{aligned}$$

316. Нека је S проста, затворена површ и $\overrightarrow{n}$ вектор спољне јединичне нормале површи S и $\overrightarrow{\ell}$ фиксиран вектор. Доказати једнакост

$$\oiint\limits_S \cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{\ell})\,\mathbf{d}S = 0.$$

Решење. Можемо да рачунамо са претпоставком да је $\|\overrightarrow{\ell}\| = 1$ а да не нарушимо општост разматрања јер важи $\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{\ell}) = \cos(\overrightarrow{n},\lambda\overrightarrow{\ell})$ за свако $\lambda > 0$ у произвољној тачки површи S. Нека је $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$ матрица ротације за коју је $M(\overrightarrow{\ell}) = (1,0,0)$. Оваква матрица је ортогонална, тј. важи $MM^T = I_3$. Нека је слика површи S матрицом M површ S'. Како је M ротација имамо да је $M(\overrightarrow{n})$ нормала површи S' кад год је $\overrightarrow{n}$ нормала површи S и да M чува вредност мере површине. Ово је припрема да променимо површ интеграције S у S' а да не променимо вредност интеграла. Да видимо како се трансформише подинтегрална функција овом трансформацијом. Имамо да је

$$\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{\ell}) = \frac{\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{\ell}\rangle}{\|\overrightarrow{n}\|\cdot\|\overrightarrow{\ell}\|} = \frac{\langle M(\overrightarrow{n}), M(\overrightarrow{\ell})\rangle}{\|\overrightarrow{n}\|\cdot\|\overrightarrow{\ell}\|} = \langle M(\overrightarrow{n}),(1,0,0)\rangle.$$

Одавде и на основу везе површинског интеграла прве и друге врсте (уз помоћ теореме Гауса-Остроградског што је коректно јер је површ S' затворена (јер је S' подударна затвореној површи S)) можемо да закључимо да је

$$\oiint\limits_S \cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{\ell})\,\mathbf{d}S = \oiint\limits_{S'}\langle M(\overrightarrow{n}),(1,0,0)\rangle\,\mathbf{d}S' = \iiint\limits_{\mathrm{int}(S')}\left(\frac{\partial}{\partial x}1 + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}0\right)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z = 0.$$

317. Израчунати интеграл

$$\iiint\limits_{[0,1]^3} \frac{\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}z}{1+x^2y^2z^2}.$$

318. Нека је $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати једнакост

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{r^2\pi} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y = f(0,0).$$

Решење. Нека је $K(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leqslant r^2\}$ и нека је $I(r) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y$ за свако $r > 0$ (овај број је коначан јер је функција f непрекидна). Идеја је да применимо теорему о средњој вредности интеграла. За свако $r > 0$ постоји $(x(r), y(r)) \in K(r)$ таква да важи $I(r) = f(x(r), y(r)) \cdot r^2\pi$. Одавде је

$$\lim_{r\to 0+} \frac{I(r)}{r^2\pi} = \lim_{r\to 0+} \frac{f(x(r),y(r)) \cdot r^2\pi}{r^2\pi} = \lim_{r\to 0+} f(x(r),y(r)) = f(0,0).$$

Напоменимо само још да последњу једнакост дугујемо непрекидности функције f у тачки $(0,0)$ јер је $\lim\limits_{r\to 0+}(x(r),y(r)) = (0,0)$ па је и $\lim\limits_{r\to 0+} f(x(r),y(r)) = f(0,0)$.