Matematicka analiza I-zbirka zadataka

Book · January 2017

1 author:

Stojan Radenović
University of Belgrade

Predgovor

Rukopis koji student ima pred sobom predstavlja četvrto preradjeno kao i dopunjeno izdanje zbirke zadataka iz Analize II, koja je prvi put izašla 1995 godine. Iako je tada kod nas postojalo više zbirki zadataka iz Analize II, kako na našem tako i na ruskom jeziku, naša metodska zbirka rešenih ispitnih i drugih zanimljivih zadataka, izazvala je veliki interes studenata matematike, teorijske fizike i nekih tehničkih fakulteta. Zvanični tiraž od 500 primeraka je brzo rasprodat. U ovom najnovijem izdanju otklonili smo greške i propuste ranijiha izdanja (kojih je bilo i na koje su nam nesebično ukazali pre svih, mnogi studenti koji su pripremali ispit pod našim rukovodstvom), dodali dosta novih zadataka, koji će značajnije pomoći studentima u pripremi ispita iz Analize II. Služeći se citiranom literaturom, u zbirci smo naveli više od 600 zadataka, od toga preko 400 rešenih i oko 200 za samostalni rad. Posebno su značajni zadaci u vezi osetljivih pitanja razmene redosleda graničnih procesa. Dali smo i priličan broj zadataka u kojima se pokazuje da izostanak nekih uslova dovodi do prestanka važenja tvrdjenja. Mnogi od tih zadataka su bili na ispitima na fakultetima u Beogradu ili Kragujevcu. Pojedini zadaci su sa takmičenja studenata u Rusiji. Tekst smo kompjuterski obradili koristeći "Latex-2e"firme 'TCI Software" iz Novog Meksika. Zahvalni smo recenzentima profesoru dr Zoranu Kadelburgu,profesoru dr Nebojši Lažetiću i profesoru dr Arpadu Takačiju, koji su tokom izrade prve verzije zbirke, davali dragocene savete i predloge i time dosta doprineli da zbirka bude kvalitetnija. 10. septembra 2014, Beograd Stojan Radenović, radens@beotel.rs

Sadržaj

Glava 1

Funkcije više promenljivih

1.1 Uvod

U ovoj glavi zbirke detaljno su rešeni specifični zadaci iz funkcija više promenljivih: granične vrednosti, uzastopne granične vrednosti, neprekidnost, ravnomerna neprekidnost, diferencijabilnost, izvod u pravcu, Tejlorova i Maklorenova formula, lokalni ekstremumi, zavisnost i nezavisnost funkcija, vezane ekstremne vrednosti, vektorske i implicitne funkcije, transformacije diferencijalnih izraza-smenom promenljivih. Napomene date posle rešenja većine zadataka čine sastavni deo rešenja. U njima se navode i neke definicije pojmova koji se koriste (na primer napomena posle šesnaestog zadatka). Smatra se da student zna najvažnije stavove ove oblasti ili bar da ima neku od knjiga $([2], II$ ili $[9], I)$ pomoću koje može da prati rešenja zadataka.

1.2 Rešeni zadaci

1.2.1 Granične vrednosti

1.1 Neka je $u(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Pokazati da je

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} u(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} u(x,y)\right) = 0$$

kao i da $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ ne postoji.

◀ Imamo

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{x^2\cdot 0}{x^2\cdot 0+(x-0)^2} = \frac{0}{x^2} = 0,$$

odakle sledi da je $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} u(x,y)\right) = 0$. Pošto je $u(x,y) = u(y,x)$ to je i $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} u(x,y)\right) = 0$. Ako je $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = A$ onda je prelaskom na polarne koordinate $\lim\limits_{\rho\to 0} u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = A$. Međutim

$$u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) = \frac{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} = \begin{cases} 0, & \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \varphi = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

što pokazuje da A nije jedinstveno. ▶

Napomena. Neka student pokaže: $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \rho \to 0$, gde je $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$.

1.2 Naći granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{x^2y^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}$ gde je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\alpha}}$, gde je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $\alpha > 0$.

◀ **a)** Stavljajući da je $xy = t$, ako $(x,y) \to (0,0)$, dobijamo

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{(xy)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

b) Ako je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $x \to 0$, to znači da $x_i \to 0$, $i = \overline{1,\ n}$. Zato je $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}} = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. Korišćena je smena $t = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$. Uvedena je smena $t = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \to +\infty$, kad $x \to \infty$. ▶

Napomena. Student treba da bude oprezan kada traži granične vrednosti funkcija više promenljivih. Oznaka $x \to a$, na primer u $\mathbb{R}^2$ znači isto što i $(x_1 \to a_1 \wedge x_2 \to a_2)$ gde je $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$. Međutim, oznaka $x \to \infty$ (ne $+\infty$ i ne $-\infty$) znači da $x \in V(\infty; r)$. Pogledati ([9], I, strana 71). U $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ postoji samo jedna ∞. Neka student opravda korektnost uvedenih smena u prethodnim primerima.

1.3 Naći $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$.

◀ Prelaskom na polarne koordinate, imamo

$$\frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\varphi + 2\sin\varphi}{\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi + 2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)},$$

a uslov $(x, y) \to \infty$ ekvivaletan je uslovu $\rho \to +\infty$. Lako je pokazati ograničenost količnika $\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$ na segmentu $[0, 2\pi]$ (zbog periodičnosti), odakle sledi da je tražena granična vrednost jednaka nuli. ▶

1.4 Izračunati uzastopne granične vrednosti funkcije $u(x, y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$ u tački $(0, 0)$ ako je $c \cdot d \neq 0$.

◀ Imamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} u(x, y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{\substack{y\to 0 \\ x \text{ je fiksirano} \\ x\neq 0}} \frac{a + b\frac{y}{x}}{c + d\frac{y}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

Slično dobijamo da je $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} u(x, y)\right) = \frac{b}{d}$. ▶

1.5 Ispitati da li postoje granične vrednosti dvojnih nizova:

a) $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \frac{\ln^2 n - \ln^2 m}{\ln^2 n + \ln^2 m}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \frac{\tan n + \tan m}{1 - \tan n \tan m}$; **c)** $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \frac{1}{m^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{k}{m}$.

◀ **a)** $a_{nn} = 0$, $a_{nn^2} = \frac{-3\ln^2 n}{5\ln^2 n} = -\frac{3}{5} \neq 0$. Dakle, kad $n \to +\infty$, $m \to +\infty$, granična vrednost ne postoji.

b) $a_{nm} = \tan(n+m)$. Ako $a_{nm} \to a$, kad $n \to +\infty$, $m \to +\infty$, onda

$$a_{2n2m} = \tan(2(n+m)) = \frac{2a_{nm}}{1 - a_{nm}^2} \to a$$

(kao njegov podniz) odakle sledi da je $a = 0$ (dokazati precizno). Onda i $a_{nn} = \tan 2n \to 0$ kad $n \to +\infty$, tj. $\tan n \to 0$ kad $n \to +\infty$. Neka student sada pokaže da $\sin n \to 0$ i $\cos n \to 0$ što je nemoguće zbog identiteta: $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. ▶

c) Prema formuli

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \ \alpha = \frac{1}{m}$$

sledi da je $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{k}{m} = \frac{\cos\frac{n+1}{2m}\sin\frac{n}{2m}}{\sin\frac{1}{2m}}$, te je

$$\left|\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{m}\right| \leq \frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2m}\right|} = \frac{1}{m^2}\cdot\frac{2m\cdot\frac{1}{2m}}{\sin\frac{1}{2m}} = \frac{2}{m}\cdot\frac{\frac{1}{2m}}{\sin\frac{1}{2m}} \to 0$$

kad $m \to +\infty$, $n \to +\infty$. Dakle, granična vrednost datog dvojnog niza kad $(n, m) \to \infty$ je nula. ▶

1.6 Pokazati da je za dvojni niz $a_{mn} = \frac{1}{n-m+0{,}5}$, m, $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} a_{nm}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty} a_{nm}\right),$$

ali da $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} a_{mn}$ ne postoji.

◀ Jednakost uzastopnih graničnih vrednosti je očigledna, jer za fiksirano n, $a_{mn} \to 0$ kad $m \to +\infty$ i za fiksirano m, $a_{mn} \to 0$ kad $n \to +\infty$. Pošto je $a_{nn} = 2$ i $a_{m,2m} = \frac{1}{m+0{,}5} \to 0$, kad $m \to +\infty$ (tada i $n \to +\infty$) to niz a_{mn} nema graničnu vrednost kad $(m,n) \to \infty$. ▶

1.7 Pokazati da za dvojni niz $a_{nm} = \frac{\sin n}{m}$, n, $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ m\to+\infty}} a_{nm}$ postoji, ali je

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} a_{nm}\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty} a_{nm}\right).$$

◀ Kako je $0 \le \frac{|\sin n|}{m} \le \frac{1}{m} \to 0$ kad $m \to +\infty$, dobijamo $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ m\to+\infty}} a_{nm} = 0$. Zatim je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty} a_{nm}\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0,$$

ali pošto $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$ ne postoji, onda ni $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_{nm}\right)$ ne postoji, jer nije definisan niz $x_m = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{m} = \frac{1}{m}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\right)$. ▶

1.2.2 Neprekidnost

1.8 Ispitati neprekidnost funkcije $u(x,y) = \frac{x-y}{x^3-y^3}$.

◀ Funkcija je definisana na podskupu $D = \{(x,y) : x \neq y\}$ ravni xOy i na njemu je neprekidna. Zaista, funkcija $u(x,y) = \frac{1}{x^2+xy+y^2}$ je neprekidna kao količnik konstantne funkcije i polinoma drugog stepena sa dve promenljive. Dakle, funkcija u je neprekidna u oblasti definisanosti. Ona se može dodefinisati u preostalom delu ravni tako da bude neprekidna u svakoj tački $A(a,a)$ izuzev u koordinatnom početku $O(0,0)$, jer je

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{3a^2},\ a \neq 0,$$

odnosno

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

To znači da su za funkciju

$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^3-y^3}, & x\neq y,\\ \text{proizvoljno}, & x=y,\end{cases}$$

tačke $A(a,a)$, $a\neq 0$ prave $y=x$ otklonjivi prekidi, dok je tačka $O(0,0)$ prekid druge vrste. ▶

Napomena. U savremenijoj literaturi se pojam neprekidnosti uvodi samo za tačke oblasti definisanosti. U starijoj literaturi se može naići na funkcije kao što je na primer $f(x)=\frac{1}{x}$ za koju se kaže da u 0 ima prekid druge vrste. Za to ima opravdanja, jer ma kako definisali funkciju f u nuli, ona će tu imati prekid druge vrste.

1.9 Ispitai ravnomernu neprekidnost funkcije $u(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ na skupu $A=\left\{(x,y):0<x^2+y^2\leq 1\right\}$.

◀ Posmatrajmo skup $\widetilde{A}=A\cup\{(0,0)\}$ i funkciju

$$\widetilde{u}(x,y)=\begin{cases}u(x,y),(x,y)\in A,\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y),(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Kako je skup $\widetilde{A}$ ograničen i zatvoren (dakle kompaktan), a funkcija $\widetilde{u}$ na njemu neprekidna, jer je

$$0\leq|u(x,y)|=\left|x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+y\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leq|x|\cdot 1+|y|\cdot 1=|x|+|y|$$

i $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)=0=\widetilde{u}(0,0)$, to je prema Kantorovoj teoremi, $\widetilde{u}$ ravnomerno neprekidna. Pošto je $\widetilde{u}|_A=u$, to je u ravnomerno neprekidna funkcija na A. ▶

1.10 Dokazati da je funkcija $u(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ ograničena na skupu $A=\left\{(x,y):0<x^2+y^2\leq 1\right\}$ i naći $\inf\limits_A u(x,y)$ i $\sup\limits_A u(x,y)$.

◀ Pošto je

$$u(x,y)=x^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+y^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq x^2+y^2\leq 1$$

to je funkcija u ograničena odozdo nulom, a odozgo jedinicom, dakle za sve $(x,y)\in A$ je $0<u(x,y)\leq 1$. Naravno $\sup\limits_A u(x,y)=1$ jer je na primer $u(1,0)=1$. Kako je $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)=0$, i $0<u(x,y)$, to je $\inf\limits_A u(x,y)=0$.

Zaista, 0 je donja granica brojnog skupa $\{u(x,y) : (x,y) \in A\}$. Dokazujemo da je ona najveća donja granica. Ako je $u(x,y) > \varepsilon > 0$ za sve $(x,y) \in A$, onda iz $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = 0$ sledi da postoji tačka $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ takva da je $0 < u(x_0, y_0) < \varepsilon$ (prema definiciji limesa), što je kontradikcija. ▶

1.11 Dokazati neprekidnost funkcije

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

u tački $O(0,0)$, po svakoj promenljivoj posebno, i njenu prekidnost u istoj tački kao funkcije sa dve promenljive.

◀ Ako je $y = 0$, onda je $u(x,0) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ pa je funkcija u neprekidna po promenljivoj x u svakoj tački. Za $y \neq 0$, u je neprekidna u $(0,y)$, jer je $\lim\limits_{x\to 0} u(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = u(0,y)$ (ako je $y \neq 0$ to je $(x,y) \neq (0,0)$). Ovo znači da je u neprekidna po promenljivoj x u tački $(0,0)$. Kako je $u(x,y) = u(y,x)$, to je dokaz za promenljivu y isti kao za x. Pošto je $u(x,x) = \frac{1}{2}$ i $u(x,-x) = -\frac{1}{2}$, to $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ ne postoji i zato je funkcija prekidna u tački $(0,0)$. ▶

1.12 Ispitati neprekidnost funkcije

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0, \end{cases}$$

u tačkama $O(0,0)$ i $A(1,0)$ posebno po svakoj od promenljivih x i y kao i po promenljivoj (x,y).

◀ Primenom adicionih formula dobija se

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x \sin y}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

Kako je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 = u(0,0),$$

to je funkcija u neprekidna u tački $O(0,0)$, samim tim neprekidna je i po svakoj promenljivoj posebno. Pošto je

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = (\sin 1) \cdot 1 \neq 1 = u(1,0),$$

to je funkcija u u tački $A(1,0)$ prekidna. Ako je $y=0$, imamo da je $\lim\limits_{x\to 1} u(x,0)=\lim\limits_{x\to 1} 1=1=u(1,0)$, tj. u je neprekidna u tački $A(1,0)$ po promenljivoj x. Neka je $x=1$, onda je

$$u(1,y)=\begin{cases}\sin 1\cdot\frac{\sin y}{y}, & y\neq 0,\\ 1, & y=0,\end{cases}$$

te je $\lim\limits_{y\to 0} u(1,y)=\sin 1\neq 1=u(1,0)$, odnosno, u ima prekid po promenljivoj y u tački $A(1,0)$. ▶

1.13 Neka je A otvoren i konveksan (ograničen ili neograničen) skup u $\mathbb{R}^m$ i $u: A\to\mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija na A. Ako su svi parcijalni izvodi funkcije u ograničeni na A, tj. $|u_{x_i}|\leq K$ za $i=\overline{1,m}$ i $x\in A$, za neko $K\in\mathbb{R}$, tada je funkcija u ravnomerno neprekidna na A. Dokazati.

◀ Neka je $\varepsilon>0$. Treba pokazati da postoji $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, takvo da, kad god je rastojanje ρ dveju tačaka $M(x_1',x_2',...,x_m')$ i $N(x_1'',x_2'',...,x_m'')$ iz A manje od δ, važi $|u(M)-u(N)|<\varepsilon$. Uzmimo da je $\delta=\frac{\varepsilon}{mK}$. Pošto je A konveksan skup, ceo segment određen tačkama M i N pripada skupu A i zato se na razliku $u(M)-u(N)$ može primeniti Lagranžova teorema, tj.:

$$u(M)-u(N)=\sum_{i=1}^{m}u_{x_i}(P)\cdot\left(x_i'-x_i''\right),$$

gde P pripada segmentu sa krajevima M i N. Kako je

$$\rho^2(M,N)=\sum_{i=1}^{m}\left(x_i'-x_i''\right)^2,$$

to je $|x_i'-x_i''|<\delta$, te je zbog $|u_{x_i}(P)|\leq K$ ispunjeno: $|u(M)-u(N)|< mK\delta<\varepsilon$. ▶

Napomena. Lagranžova teorema se može primeniti na razliku $u(M)-u(N)$ prema stavu o srednjoj vrednosti za funkcije više promenljivih ([2], II).

1.14 Dokazati da je funkcija

$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

ravnomerno neprekidna na $\mathbb{R}^2$.

◀ Prema prethodnom zadatku dovoljno je pokazati ograničenost parcijalnih izvoda u_x i u_y u celoj ravni. Lako se dobija da je

$$u_x=\begin{cases}\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 1, (x,y)=(0,0),\end{cases}\quad \text{i } u_y=\begin{cases}\frac{y^4+3y^2x^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 1, (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Izražavajući zatim, x, y preko polarnih koordinata dokazuje se ograničenost parcijalnih izvoda:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 2\cos\varphi\sin^3\varphi,\ \rho \neq 0 \text{ i } u_x(0,0) = 1, \\ u_y &= \sin^4\varphi + 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos^3\varphi,\ \rho \neq 0 \text{ i } u_y(0,0) = 1. \end{aligned}$$

U prethodnom zadatku (pogledati rešenje) pretpostavlja se da je funkcija diferencijabilna u svakoj tački konveksne oblasti. Neka student pokaže da ova funkcija nije diferencijabilna u tački $O(0,0)$. Pošto funkcija u nije diferencijabilna samo u $O(0,0)$ to se dokaz prethodnog zadatka modifikuje tako što postoje dva slučaja:

1. Tačka $O(0,0)$ ne pripada pravoj M_1M_2;

2. Tačka $O(0,0)$ pripada toj pravoj.

U prvom slučaju se ništa ne menja jer je na pravoj M_1M_2 funkcija diferencijabilna. U drugom slučaju se razlika $u(M_1) - u(M_2)$ zamenjuje novim zbirom, tj.$(u(M_1) - u(M_3)) + (u(M_3) - u(M_2))$ gde je M_3 tačka koja ne pripada pravoj M_1M_2. Svakako prethodni zadatak treba imati u vidu kao teorijsku potporu. ▶

1.15 Ako je funkcija $(x,y) \mapsto u(x,y)$ neprekidna po svakoj promenljivoj odvojeno i na primer monotona po y, tada je ona neprekidna po (x,y). Dokazati.

◀ Neka je (x_0, y_0) fiksirana tačka i neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ tako da za $|y - y_0| \le \delta_1$ sledi: $|u(x_0,y_0) - u(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ i za $|x - x_0| \le \delta_2$ sledi

$$|u(x, y_0 \pm \delta_1) - u(x_0, y_0 \pm \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zbog monotonosti funkcije po y dobija se: Ako je $|x - x_0| \le \delta_2, |y - y_0| \le \delta_1$ onda je

$$u(x, y_0 - \delta_1) \le u(x,y) \le u(x, y_0 + \delta_1)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} & |u(x, y_0 \pm \delta_1) - u(x_0, y_0)| \\ \le\ & |u(x, y_0 \pm \delta_1) - u(x_0, y_0 \pm \delta_1)| + |u(x_0, y_0 \pm \delta_1) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odavde je $|u(x,y) - u(x_0,y_0)| < \varepsilon$. Zaista, iz

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< u(x, y_0 - \delta_1) - u(x_0, y_0) < \varepsilon \\ -\varepsilon &< u(x, y_0 + \delta_1) - u(x_0, y_0) < \varepsilon, \text{ sleduje} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< u(x, y_0 - \delta_1) - u(x_0, y_0) < u(x, y) - u(x_0, y_0) \\ &< u(x, y_0 + \delta_1) - u(x_0, y_0) < \varepsilon \end{aligned}$$

za $|x - x_0| \leq \delta_2, |y - y_0| \leq \delta_1$, tj. kad god (x, y) pripada pravougaoniku čije su stranice $2\delta_1$ i $2\delta_2$. ▶

1.2.3 Diferencijabilnost

1.16 Dokazati da je funkcija

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{2n+1} + y^{2n+1}}{x^{2n} + y^{2n}}, & (x, y) \neq (0, 0), \ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

u tački $O(0, 0)$ izvodljiva (postoji $u'(0, 0) := [u_x(0, 0) \ \ u_y(0, 0)]$), a nije diferencijabilna.

◀ Kako je

$$u_x = \lim_{h \to 0} \frac{u(0 + h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^{2n+1}}{h^{2n}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

i slično $u_y(0, 0) = 1$ (mada to sledi iz simetričnosti funkcije u, $u(x, y) = u(y, x)$), to je funkcija u u tački $O(0, 0)$ izvodljiva (ima izvod, tj. ima oba parcijalna izvoda u toj tački) i izvod je: $u'(0, 0) := [u_x(0, 0) \ \ u_y(0, 0)] = [1 \ 1]$.

Student treba da zna da je izvod funkcije (ako postoji) koja preslikava $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(n, \ m \in \mathbb{N})$ matrica tipa $m \times n$ ($m-$ vrsta i $n-$ kolona). Ako je $m = 1$, onda je izvod takve funkcije vrsta matrica.

Ako se pretpostavi diferencijabilnost ove funkcije u tački $O(0, 0)$ dobija se za totalni priraštaj u toj tački:

$$u(0 + h, 0 + g) - u(0, 0) = 1 \cdot h + 1 \cdot g + o\left(\sqrt{h^2 + g^2}\right), \quad (h, g) \to (0, 0),$$

tj. $\frac{h^{2n+1} + g^{2n+1}}{h^{2n} + g^{2n}} = h + g + o\left(\sqrt{h^2 + g^2}\right)$, kad $h \to 0$, $g \to 0$. Uzimajući da je $h = g$, dobija se $h = -o\left(\sqrt{2h^2}\right)$, kad $h \to 0$, što je netačno. ▶

Napomena. Iz ovog primera se vidi suštinska razlika između funkcija jedne promenljive i funkcija više promenljivih. Naime, pojmovi izvodljivost (konačan izvod u tački) i diferencijabilnost su ekvivalentni kod funkcija jedne promenljive. Kod ovih drugih, to nije tako.

1.17 Dokazati da je funkcija $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, data sa $u(x) = \|x\|$, diferencijabilna svuda osim u tački $x = 0$.

◀ Ako $x \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, tada je $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_m) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$. Pošto su u_{x_i}, $i = 1, 2, ..., m$ neprekidne funkcije za $(x_1, x_2, ..., x_m) \neq (0, 0, ..., 0)$, to je funkcija u tim tačkama diferencijabilna (obnoviti odgovarajuću teoremu). Nađimo $u_{x_i}(0)$.

$$u_{x_i}(0,0,...,0) = \lim_{h_i \to 0} \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + \cdots + h_i^2 + \cdots + 0^2} - 0}{h_i} = \lim_{h_i \to 0} \frac{|h_i|}{h_i} = \pm 1.$$

Dakle, funkcija nema parcijalne izvode u tački $x = 0$, što znači da nije diferencijabilna u toj tački (obnoviti stav o neophodnom uslovu diferencijabilnosti funkcije u tački, ([2],[9]). ▶

Napomena. Student treba da zna teoremu o dovoljnom uslovu za diferencijabilnost funkcije u tački: Ako postoji okolina tačke takva da parcijalni izvodi postoje u svakoj tački te okoline a da su u toj tački i neprekidni, onda je funkcija diferencijabilna u toj tački.

Ako parcijalni izvodi u nekoj tački postoje i prekidni su, funkcija može biti diferencijabilna. Tada se proverava da li totalni priraštaj u tački može da se predstavi na jedan od sledeća dva ekvivalentna načina:

1.

$$\begin{aligned} \triangle\, u(x_0, y_0) &= u(x_0 + h, y_0 + g) - u(x_0, y_0) \\ &= u_x(x_0, y_0)\, h + u_y(x_0, y_0)\, g + o\left(\sqrt{h^2 + g^2}\right), \quad (h, g) \to (0, 0). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \triangle\, u(x_0, y_0) &= u(x_0 + h, y_0 + g) - u(x_0, y_0) \\ &= u_x(x_0, y_0)\, h + u_y(x_0, y_0)\, g + \alpha(h, g)\, h + \beta(h, g)\, g \end{aligned}$$

gde $\alpha(h, g), \beta(h, g) \to 0$ kad $(h, g) \to (0, 0)$. Za funkcije $3, 4, ...$ i više promenljivih zapis je sličan.

1.18 Dokazati da funkcija $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, data sa

$$u(x, u) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ima u okolini tačke $(0, 0)$ parcijalne izvode koji su prekidni u toj tački, ali je u ipak diferencijabilna u $(0, 0)$.

◀ Koristeći pravila nalaženja izvoda dobijaju se parcijalni izvodi:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ u_x(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
u_y(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \ (x,y)\neq(0,0),\\
u_y(0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

Funkcija ima parcijalne izvode u svakoj tački svog domena i oni su neprekidni izuzev možda u sumnjivoj tački $O(0,0)$. Uzimajući da je $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, dobija se

$$u_x(x,y) = 2\rho\cos\varphi\sin\frac{1}{\rho} - \cos\frac{1}{\rho^2}, (x,y)\neq(0,0),$$

odakle sledi da

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} u_x(x,y) = \lim_{\rho\to0} 2\rho\cos\varphi\sin\frac{1}{\rho} - \lim_{\rho\to0}\cos\frac{1}{\rho^2} = 0 - \lim_{\rho\to0}\cos\frac{1}{\rho^2}$$

ne postoji (zašto?). Dakle, parcijalni izvodi su prekidni u tački $O(0,0)$. Funkcija je ipak diferencijabilna u toj tački. Zaista, treba proveriti da li se totalni priraštaj u $O(0,0)$ može predstaviti u obliku:

$$\left(h^2+g^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+g^2}} = 0\cdot h + 0\cdot g + o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right),$$

kad $h\to0, g\to0$, tj. da li je

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\left(h^2+g^2\right)}{\sqrt{h^2+g^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+g^2}} = \lim_{\substack{h\to0\\g\to0}} \sqrt{h^2+g^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+g^2}} = 0,$$

kad $h\to0, g\to0$? S obzirom da je to tačno ($\sqrt{h^2+g^2}\to0$, kad $h\to0$, $g\to0$, $\left|\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+g^2}}\right|\leq1$) funkcija je diferencijabilna u $O(0,0)$. ►

1.19 Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & x\cdot y = 0,\\ 1, & x\cdot y\neq 0.\end{cases}$$

◄ Funkcija je diferencijabilna (dakle i neprekidna) u svakoj tački (x,y) van koordinatnih osa (obrazložiti zašto!). U tim tačkama je $u_x(x,y) = u_y(x,y) = 0$ tj. $u'(x,y) = [0\ 0]$. Nije pogrešno (mada nije uobičajeno) napisati da je za sve

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\diagdown\left(\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}\right) : u'(x,y) = 0.$$

Ova nula je početak (neutralni element) vektorskog prostora pravougaonih matrica tipa 1×2. Zatim se dobija da je $u_x(x,0)=0$ za $x\neq 0$, tj. $u_y(0,y)=0$ za $y\neq 0$. Međutim $u_y(x,0)$ ne postoji ako je $x\neq 0$ i slično $u_x(0,y)$ ne postoji za $y\neq 0$. Važi $u_x(0,0)=u_y(0,0)=0$. Parcijalni izvodi su neprekidni u $(0,0)$. S obzirom da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)\neq u(0,0),$$

jer je $\lim\limits_{x\to 0} u(x,x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} u(x,0)=0$, to je funkcija u prekidna u tački $O(0,0)$, odnosno u toj tački nije diferencijabilna. ▶

Pitanje: Pošto su parcijalni izvodi u_x i u_y neprekidni u $(0,0)$, a funkcija u toj tački nije diferencijabilna, da li to protivreči teoremi o dovoljnom uslovu za diferencijabilnost?

Odgovor: Ne protivreči. Neka student obrazloži.

1.20 Da li funkcija $u(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ima izvod u tački $M(0,1)$, tj. da li postoji $u'(0,1)$?

◀ Oblast definisanosti funkcije u je skup svih tačaka $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ za koje je $x^2+y^2\leq 1$. Dakle, tačka $M(0,1)$ je rubna tačka domena. Parcijalni izvodi se definišu za unutrašnje tačke domena a za rubnu tačku $M(x_0,y_0)$ domena je $u_x(x_0,y_0):=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u_x(x,y)$ i $u_y(x_0,y_0):=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u_y(x,y)$ ukoliko $u_x(x,y)$ i $u_y(x,y)$ postoje za unutrašnje tačke domena. U datom primeru je $u_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ i $u_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ za tačke (x,y) za koje je $x^2+y^2<1$. Pošto $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ i $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ ne postoje (obrazložiti) to parcijalni izvodi u_x i u_y u rubnoj tački $M(0,1)$ ne postoje, tj. $u'(0,1)$ ne postoji. ▶

1.21 Funkcija $(x,y)\mapsto u(x,y)$ definisana je na $\mathbb{R}^2$ sa

$$u(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0, (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Da li je u neprekidna u tački $(0,0)$?

b) Da li postoje parcijalni izvodi u tački $(0,0)$?

c) Ispitati diferencijabilnost u tački $(0,0)$.

◀ **a)** Kako je $\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq 1$ za $(x,y)\neq(0,0)$, to je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=0=u(0,0)$ jer je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sqrt{x^2+y^2}=0$, dnosno funkcija je neprekidna u $(0,0)$. Korišćena je činjenica da je beskonačo mala pomnožena ograničenom funkcijom beskonačno mala.

b)

$$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

i zbog simetričnosti funkcije $(u(x,y) = u(y,x))$ je $u_y(0,0) = 0.$

c) Funkcija je diferencijabilna u $(0,0)$ ako je za totalni priraštaj u toj tački ispunjeno

$$\triangle\, u(0,0) = u(0+h,0+g) - u(0,0) = 0\cdot h + 0\cdot g + o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right)$$

kad $h\to 0,\ g\to 0$, tj.

$$(h+g)\sqrt{h^2+g^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+g^2}} = o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right)$$

kad $h\to 0,\ g\to 0$. To je tačno, jer je $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ g\to 0}} (h+g)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+g^2}} = 0.$ ▶

1.22 Neka je $u(x,y) = |x| + |y| - ||x| - |y||$. Pokazati da postoje $u_x(0,0)$ i $u_y(0,0)$, a da funkcija u nije diferencijabilna u tački $(0,0)$.

◀

$$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - ||0| - |h||}{h} = 0$$

i slično $u_y(0,0) = 0$. Totalni priraštaj u $(0,0)$ je:

$$\triangle\, u(0,0) = |h| + |g| - ||h| - |g|| = 0\cdot h + 0\cdot g + o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right)$$

kad $h\to 0,\ g\to 0$, u slučaju diferencijabilnosti. Uzimajući $h = g > 0$, $\triangle\ u(0,0) = 2h = o(h)$ tj. $2 = o(1)$, što je netačno. Zato funkcija nije diferencijabilna u $(0,0)$. ▶

1.23 Dokazati sledeća tvrđenja o funkciji

$$u(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Funkcija u ima parcijalne izvode u svakoj tački domena;

b) Ti izvodi su prekidni u $(0,0)$ a u ostalim tačkama su neprekidni;

c) U tački $(0,0)$ funkcija u je diferencijabilna.

◀ **a)** Imamo

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h^2}=0$$

i zbog $u(x,y)=u(y,x)$ sledi $u_y(0,0)=0$.

b) Pošto je

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ u_y(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0), \end{aligned}$$

to su parcijalni izvdi neprekidni u $(0,0)$ ako i samo ako je $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u_x(x,y)=0$ i $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u_y(x,y)=0$, jer je prema **a)** $u_x(0,0)=u_y(0,0)=0$. Ali, na primer,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u_x(x,y) &= \lim_{\rho\to 0}\left(2\rho\cos\varphi\sin\frac{1}{\rho^2}-\frac{2}{\rho}\cos\varphi\cos\frac{1}{\rho^2}\right)\\ &= 0-(2\cos\varphi)\lim\frac{1}{\rho}\cos\frac{1}{\rho^2}=(-2\cos\varphi)\lim_{t\to+\infty}t\cos t^2. \end{aligned}$$

Poslednja granična vrednost ne postoji (Analiza I-neka studet obrazloži).

c) Treba pokazati da totalni priraštaj u $(0,0)$ ima oblik

$$\left(h^2+g^2\right)\sin\frac{1}{h^2+g^2}=0\cdot h+0\cdot g+o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right),$$

kad $h\to 0$, $g\to 0$. To je tačno, zbog $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ g\to 0}}\sqrt{h^2+g^2}\sin\frac{1}{h^2+g^2}=0$. ▶

1.24 Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije

$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^2}{x^4+y^4},x^4+y^4\neq 0,\\ 0,x^4+y^4=0.\end{cases}$$

◀ Pošto je $\left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right|=|x|\cdot\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\leq\frac{1}{2}|x|$ za sve $(x,y)\neq(0,0)$, to je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}|x|=0=u(0,0),$$

dnosno, funkcija je neprekidna u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$. Lako je proveriti da je funkcija diferencijabilna u svakoj tački $(x,y)\neq(0,0)$ jer u njoj ima neprekidne parcijalne izvode. Pošto su parcijalni priraštaji u $(0,0)$ jednaki nuli po obe promenljive, to je $u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0$. Međutim, funkcija nije diferencijabilna u $(0,0)$ jer totalni priraštaj u toj tački $u(x,y) - u(0,0) = \frac{x^3 y^2}{x^4+y^4}$ nema oblik $o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ kad $x \to 0$ i $y \to 0$. Zaista, kad $x \to 0$ i $x = y > 0$ sledi $u(x,x) = \frac{x^5}{2x^4} = \frac{x}{2} \neq o\left(\sqrt{2x^2}\right)$. ▶

1.25 U zavisnosti od vrednosti realnog parametra α, odrediti skup A_α svih tačaka u kojima je funkcija

$$u(x,y) = \begin{cases} \left|x^2 - y^2\right|^\alpha, \ x^2 - y^2 \neq 0, \\ 0, \ x^2 - y^2 = 0, \end{cases}$$

neprekidna, i skup B_α svih tačaka u kojima je funkcija diferencijabilna.

◀ Ako je $\alpha = 0$, onda je $u(x,y) = \begin{cases} 1, \ x^2 - y^2 \neq 0, \\ 0, \ x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$ Znači, funkcija u ima prekide u svim tačkama pravih $y = \pm x$. U ostalim tačkama ravni $\mathbb{R}^2$ je i diferencijabilna. Dakle, $A_0 = B_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm x\right\}$. Ako je $\alpha < 0$, onda je $A_\alpha = A_0$, jer je tada za $y \sim x$, $u(x,y) \sim \infty$. Jasno je za $\alpha < 0$, $A_\alpha = B_\alpha$ (obrazložiti detalje). Neka je $\alpha > 0$. Tada je $A_\alpha = \mathbb{R}^2$, jer je funkcija u neprekidna i u sumnjivim tačkama $(x, \pm x)$. Ispitajmo u ovom slučaju diferencijabilnost funkcije. U tim tačkama imamo:

$$\triangle\, u(x, \pm x) = \begin{cases} |h-g|^\alpha \, |h+g \pm 2x|^\alpha, \ x \neq 0, \\ \left|h^2 - g^2\right|^\alpha, \ x = 0. \end{cases}$$

Funkcija je onda diferencijabilna ako i samo ako je $\triangle\, u(x, \pm x) = o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right)$, kad $h \to 0$, $g \to 0$. odnosno, prelaskom na polarne koordinate ako je $r^\alpha |\sin\varphi - \cos\varphi|^\alpha \, |\rho(\sin\varphi + \cos\varphi) \pm 2x|^\alpha = o(\rho), x \neq 0$, tj. $\rho^{2\alpha} |\cos 2\varphi|^\alpha = o(\rho)$, $x = 0$, tj. ako je $\alpha - 1 > 0$, $x \neq 0$ i $2\alpha - 1 > 0$, $x = 0$. Dakle, ako je $\alpha > 1$ funkcija je diferencijabilna u tačkama pravih $y = \pm x$, $x \neq 0$, odnosno za $\alpha > \frac{1}{2}$ u koordinatnom početku. ▶

1.26 Neka je

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tada je u neprekidna na $\mathbb{R}^2$ i ima u svakoj tački $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ izvod u proizvoljnom pravcu. Međutim, u nije diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. Dokazati.

◀ S obzirom da je $u(x,y) = x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}$ za $(x,y) \neq (0,0)$ i $0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ to je $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x,y) = u(0,0)$ (proizvod beskonačno male i ograničene funkcije je beskonačno mala), tj. u je neprekidna funkcija u sumnjivoj tački $O(0,0)$. U ostalim tačkama je neprekidna kao količnik neprekidnih funkcija. Lako se dobija da je u svim tačkama osim $O(0,0)$ funkcija diferencijabilna (zašto?) i prema ([2], II) u tim tačkama ima izvod u proizvoljnom pravcu. Pošto je $u_x(0,0)=1$, $u_y(0,0)=0$, to je funkcija diferencijabilna u tački $O(0,0)$ ako je $\frac{h^3}{h^2+g^2}=h+o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right)$, kad $h\to 0$, $g\to 0$. Uzimajući $h=g>0$ i $h\to 0$ dobija se $-\frac{h}{2}=o\left(h\sqrt{2}\right)$, tj. $-\frac{1}{2}=o\left(\sqrt{2}\right)$ kad $h\to 0$, (kontradikcija), što znači da funkcija nije diferencijabilna u tački $O(0,0)$. Ipak za izvod u tački $O(0,0)$ u pravcu jediničnog vektora $l(l_1,l_2)$ dobija se ([2], II):

$$\lim_{t\to 0}\frac{u((0,0)+t(l_1.l_2))-u(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3l_1^3}{t^2\left(l_1^2+l_2^2\right)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tl_1^3}{t\left(l_1^2+l_2^2\right)}=l_1^3,$$

tj. u ima izvod u svakoj tački ravni $\mathbb{R}^2$, u proizvoljnom pravcu. ►

1.27 Data je funkcija

$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0, (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Dokazati da u svim tačkama ravni funkcija ima izvod u svim pravcima;
b) Ispitati diferencijabilnost funkcije u;
c) Ispitati da li je u uniformno neprekidna u ravni.

◄ **a)** Ako je $(x,y)\neq(0,0)$, onda je

$$u_x(x,y)=\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\text{ i }u_y(x,y)=\frac{-4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Zatim je $u_x(0,0)=1$ i $u_y(0,0)=0$. Pošto su parcijalni izvodi neprekidne funkcije u svim tačkama $(x,y)\neq(0,0)$, to funkcija ima izvod u njima u svim pravcima. Treba naći izvod u $(0,0)$ u proizvoljnom pravcu:

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(0+tl)-u(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{u(tl_1,tl_2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tl_1\left(t^2\left(l_1^2-l_2^2\right)\right)}{t^3\left(l_1^2+l_2^2\right)}=l_1\left(l_1^2-l_2^2\right),$$

dakle postoji. Ovde je $l=(l_1,l_2)$ proizvoljni jedinični vektor. Neka student proveri prekidnost parcijalnih izvoda u $(0,0)$.

b) Funkcija je diferencijabilna u svakoj tački ravni, izuzev možda u $(0,0)$. Ako bi bila diferencijabilna u $(0,0)$ onda je

$$\frac{h^3-hg^2}{h^2+g^2}=h+o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right),\ h\to 0,\ g\to 0,$$

tj. $\frac{-2hg^2}{h^2+g^2} = o\left(\sqrt{h^2+g^2}\right)$, što je netačno. Zaista, za $h = g > 0$, dobija se $-1 = o(1)$, $h \to 0$.

c) Zbog $|u(x,y)| = |x| \cdot \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq |x|$ sledi neprekidnost u tački $(0,0)$.

d) Isto kao u 1.13 i 1.14 sledi ravnomerna neprekidnost funkcije. ▶

1.28 Odrediti skup A_p svih tačaka u ravni u kojima je funkcija $u(x,y) = \max\{|x|^p, |y|^p\}$, $p > 0$, diferencijabilna.

◀ Funkcija je očigledno diferencijabilna u svakoj tački oblika (x,y), ako je $x \neq \pm y$. Za ispitivanje diferencijabilnosti u tačkama $(0,0)$, (a,a) i $(a,-a)$, $a \neq 0$, treba naći parcijalne izvode.

$$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0+h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^p}{h}.$$

Ako je $0 < p \leq 1$, onda $u_x(0,0)$ ne postoji. Ali, za $p > 1$,

$$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \cdot |h|^{\varepsilon} = 0 \ \ (p = 1+\varepsilon, \varepsilon > 0)$$

i slično $u_y(0,0) = 0$. Neka je sada $a > 0$. Onda je

$$u_x(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h,a) - u(a,a)}{h} = \begin{cases} 0, \ h \to 0^-, \\ pa^{p-1} \neq 0, \ h \to 0^+, \end{cases}$$

jer je

$$u(a+h,a) - u(a,a) = \begin{cases} a^p - a^p, \ h < 0, \\ (a+h)^p - a^p, \ h > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, \ h < 0, \\ (a+h)^p - a^p, \ h > 0. \end{cases}$$

Dakle, za $0 < p \leq 1$ funkcija nije diferencijabilna u $(0,0)$. U tačkama $(a, \pm a)$, $a \neq 0$ funkcija takođe nije diferencijabilna (ne postoje parcijalni izvodi). Ako je $p > 1$, funkcija je diferencijabilna u $(0,0)$ jer je

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ g\to 0}} \frac{\max\{|h|^p, |g|^p\}}{\sqrt{h^2+g^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\max\{\rho^p|\cos\varphi|^p, \rho^p|\sin\varphi|^p\}}{\rho} = 0.$$

Znači, $A_p = \{(x,y) : x \neq \pm y\}$, $0 < p \leq 1$, i $A_p = \{(x,y) : x \neq \pm y\} \cup \{(0,0)\}$, $p > 1$. ▶

1.29 Neka je

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

a) Naći sve tačke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima je funkcija u diferencijabilna;

b) Ispitati da li je funkcija u ravnomerno neprekidna na $\mathbb{R}^2$.

▶ **a)** Za $(x, y) \neq (0, 0)$ postoje parcijalni izvodi i neprekidni su, pa je funkcija diferencijabilna (obnoviti teoremu o tome). Zatim je

$$u_x (0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{u (0 + h, 0) - u (0, 0)}{h} \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

i slično $u_y (0, 0) = 0$. Ako se pretpostavi diferencijabilnost u $(0, 0)$, onda je totalni priraštaj u toj tački

$$\triangle\, u (0, 0) = u (0 + h, 0 + g) - u (0, 0) = 0 \cdot h + 0 \cdot g + o \left(\sqrt{h^2 + g^2} \right),$$

kad $h \to 0$, $g \to 0$, tj. $\frac{hg}{\sqrt{h^2+g^2}} \sin \frac{hg}{h^2+g^2} = o \left(\sqrt{h^2 + g^2} \right)$, kad $h \to 0$, $g \to 0$. Znači u slučaju diferencijabilnosti u $(0, 0)$ je: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ g \to 0}} \frac{hg}{h^2+g^2} \sin \frac{hg}{h^2+g^2} = 0$, što je netačno jer je za $h = g \neq 0$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ g \to 0}} \frac{hg}{h^2 + g^2} \sin \frac{hg}{h^2 + g^2} = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \neq 0.$$

b) Ako je $(x, y) \neq (0, 0)$ onda je

$$u_x = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2 \left(y^2 - x^2 \right)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \cos \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ i}$$

$$u_y = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{yx^2 \left(x^2 - y^2 \right)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Zatim je

$$|u_x (x, y)| \leq \frac{|x|^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xy^2 \left(y^2 - x^2 \right)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \leq 1 + 1 = 2$$

i slično $|u_y| \leq 2$. Kod prvog sabirka se mogu uvesti polarne koordinate, a kod drugog nakon ocene sa

$$\frac{\left| xy^4 \right|}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\left| x^3 y^2 \right|}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

takođe polarne koordinate. S obzirom da je funkcija neprekidna u celoj ravni (neka student proveri za tačku $O (0, 0)$) i da ima ograničene parcijalne izvode onda je ravnomerno neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Za precizno obrazloženje pogledati zadatke 1.13 i 1.14. ►

1.30 Neka je u definisana u nekoj okolini tačke $(0,0)$ i neka je $u_x(0,0) = u_y(0,0) = u(0,0) = 0$. Potreban i dovoljan ulov da u bude diferencijabilna u tački $(0,0)$ je:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot u(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\cdot u(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

◄ Ako je u diferencijabilna u tački $(0,0)$, onda je

$$u(x,y) - u(0,0) = u_x(0,0)\cdot x + u_y(0,0)\cdot y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

kad $(x,y) \to (0,0)$, tj. $u(x,y) - 0 = 0\cdot x + 0\cdot y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ kad $(x,y)\to(0,0)$, odnosno $\frac{x\cdot u(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ kad $(x,y)\to(0,0)$. Zato je i

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot u(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\cdot u(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Obrnuto, iz datih uslova treba pokazati da je funkcija u diferencijabilna u tački $(0,0)$, tj. da je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Pošto je

$$0 \le \left|\frac{u(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|x|\,|u(x,y)|}{x^2+y^2} + \frac{|y|\,|u(x,y)|}{x^2+y^2} \to 0,$$

kad $(x,y)\to(0,0)$, to prema lemi o uklještenju $\frac{u(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, kad $(x,y) \to (0,0)$, odnosno sledi diferencijabilnost funkcije u tački $(0,0)$. ►

Napomena. Korišćena je očigledna nejednakost: $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ i $x^2 = |x|^2, y^2 = |y|^2$.

1.31 Ispitati ravnomernu neprekidnost funkcija:

a) $u(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0), \\ 0, (x,y) = (0,0); \end{cases}$

b) $u(x,y,z) = \sin\left(x^2+y^2+z^2\right), x,y,z \in \mathbb{R}^3$.

◄ Obe funkcije se mogu svesti na funkcije jedne promenljive uvođenjem polarnih koordinata u slučaju prve i sfernih koordinata u slučaju druge funkcije. Tada je

$$u(x,y) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \begin{cases} \rho\sin\frac{1}{\rho},\ \rho\neq 0, \\ 0,\ \rho = 0, \end{cases} = u_1(\rho),\ \text{tj.}$$

$$u(x,y,z)=u(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)=\sin\rho^2=u_2(\rho).$$

Pošto je

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0 \text{ i } \lim_{\rho\to+\infty}\rho\sin\frac{1}{\rho}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$

to je funkcija $u_1:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ neprekidna, dakle i ravnomerno neprekidna jer ima konačnu graničnu vrednost kad $\rho\to+\infty$. Funkcija u_2 nije ravnomerno neprekidna, jer postoje nizovi x_n' i x_n'' takvi da $x_n'-x_n''\to 0$, ali $u(x_n')-u(x_n'')\not\to 0$. Dovoljno je uzeti $x_n'=\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, $x_n''=\sqrt{n\pi}$, $n\in\mathbb{N}$. ▶

Napomena. Neka student pokaže da su parcijalni izvodi funkcije u ograničeni i onda slično kao u zadacima 1.13 i 1.14 dokazati ravnomernu neprekidnost. Što se tiče funkcije $(x,y,z)\mapsto u(x,y,z)$ dovoljno je uzeti nizove: $A_n\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi},0,0\right)$ i $B_n\left(\sqrt{n\pi},0,0\right)$. Za njih je $\rho(A_n,B_n)\to 0$ i $u(A_n)-u(B_n)\not\to 0$.

1.32 Naći $\frac{\partial^{10}u}{\partial x^2\partial y^8}$, ako je $u(x,y)=e^{xy}$.

◀ Treba naći osmi izvod po y od parcijalnog izvoda drugog reda po x. S obzirom na teoremu ([2], II, Posledica 2.6.1 ili [9], I, Teorema 3.4.III) treba naći drugi izvod po x od parcijalnog izvoda osmog reda po y. Pošto je $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}=u_{y^8}=x^8e^{xy}$ to je prema Lajbnicovoj frmuli o $n-$tom izvodu proizvoda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{10}u}{\partial x^2\partial y^8} &= u_{x^2y^8}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^8e^{xy}\right)=\left(x^8\right)''e^{xy}+2\left(x^8\right)'\left(e^{xy}\right)_x'+x^8\left(e^{xy}\right)_{xx}''\\ &= 56x^6e^{xy}+16x^7ye^{xy}+x^8y^2e^{xy}=e^{xy}\left(56x^6+16x^7y+x^8y^2\right).\ ▶\end{aligned}$$

Napomena. $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$ je Lajbnicova formula za $n-$ti izvod proizvoda, $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$.

1.33 Pokazati da je mešoviti izvod $u_{xy}(x,y)$ funkcije u uzastopna granična vrednost, tj.

$$u_{xy}(x,y)=\lim_{h\to 0}\lim_{g\to 0}\frac{u(x+h,y+g)-u(x,y+g)-u(x+h,y)+u(x,y)}{h\cdot g}.$$

◀ Najpre se pretpostavlja da $u_x(x,y)$ postoji u tački (x,y), tj. da je

$$u_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}.$$

Zatim je

$$u_{xy}(x,y)=\lim_{g\to 0}\frac{u_x(x,y+g)-u_x(x,y)}{g}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{g\to 0}\frac{1}{g}\left(\lim_{h\to 0}\frac{u\left(x+h,y+g\right)-u\left(x,y+g\right)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{u\left(x+h,y\right)-u\left(x,y\right)}{h}\right)\\
&= \lim_{g\to 0}\frac{1}{g}\left(\lim_{h\to 0}\frac{u\left(x+h,y+g\right)-u\left(x,y+g\right)-u\left(x+h,y\right)+u\left(x,y\right)}{h}\right)\\
&= \lim_{g\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{u\left(x+h,y+g\right)-u\left(x,y+g\right)-u\left(x+h,y\right)+u\left(x,y\right)}{h\cdot g}.
\end{aligned}$$

Korišćeno je:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(u\left(x\right)-v\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}u\left(x\right)-\lim\limits_{x\to x_0}v\left(x\right)$ ako $\lim\limits_{x\to x_0}u\left(x\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0}v\left(x\right)$ postoje;

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot u\left(x\right)\right)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}u\left(x\right)$, $c\in\mathbb{R}$ i $\lim\limits_{x\to x_0}u\left(x\right)$ postoji. ►

1.34 Dokazati da funkcija

$$u\left(x,y\right)=\begin{cases} xy, & |y|\le|x|,\\ -xy, & |y|>|x|,\end{cases}$$

ima u tački $O\left(0,0\right)$ mešovite parcijalne izvode drugog reda, koji se međusobno razlikuju.

◄ Najpre se dobija da je za $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$

$$u_x\left(x,y\right)=\begin{cases} y, & |y|\le|x|,\\ -y, & |y|>|x|,\end{cases}\qquad u_y\left(x,y\right)=\begin{cases} x, & |y|\le|x|,\\ -x, & |y|>|x|,\end{cases}$$

odnosno, $u_x\left(0,0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$ i slično $u_y\left(0,0\right)=0$. Zatim je

$$\begin{aligned}
u_{xy}\left(0,0\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{u_x\left(0,h\right)-u_x\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1,\ \text{tj.}\\
u_{yx}\left(0,0\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{u_y\left(h,0\right)-u_y\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.
\end{aligned}$$

Korišćena je u oba slučaja nejednakost $|h|\ge|0|=0$. ►

1.2.4 Tejlorova i Maklorenova formula

1.35 a) Razložiti funkciju $u\left(x,y\right)=e^{\frac{x}{y}}$ po Tejlorovoj formuli u okolini tačke $\left(0,1\right)$ do drugog člana zaključno.

b) Predstaviti funkciju $u\left(x,y\right)=xyz$ po Maklorenovoj formuli u okolini tačke $\left(0,0,0\right)$ i po Tejlorovoj formuli u okolini tačke $\left(1,1,1\right)$.

◄ Parcijalni izvodi prvog i drugog reda funkcije u izračunati u tački $\left(x,y\right)$ su:

$u_x(x,y) = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$, $u_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$, $u_{x^2} = \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$, $u_{xy}(x,y) = -\frac{x}{y^3}e^{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$, $u_{y^2} = \frac{x^2}{y^4}e^{\frac{x}{y}} + \frac{2x}{y^3}e^{\frac{x}{y}}$; odakle sledi: $u_x(0,1) = 1$, $u_y(0,1) = 0$, $u_{x^2}(0,1) = 1$, $u_{xy}(0,1) = -1$, $u_{y^2}(0,1) = 0$. Odatle je

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_3 = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - xy + R_3.$$

U Peanovom obliku je $R_3 = o\left(x^2 + (y-1)^2\right)$, $x \to 0$, $y \to 1$.

b) Najpre imamo: $u_x(x,y,z) = yz$, $u_y(x,y) = xz$, $u_z(x,y,z) = xy$, $u_{x^2} = u_{y^2} = u_{z^2} = 0$, $u_{xy} = u_{yx} = z, u_{xz} = u_{zx} = y, u_{yz} = u_{zy} = z, u_{x^3} = u_{y^3} = u_{z^3} = 0, u_{xyz} = u_{yzx} = u_{zxy} = ... = 1$; Dakle, svi parcijalni izvodi prvog, drugog i trećeg reda u tački $(0,0,0)$ su jednaki nuli, izuzev $u_{xyz} = 1$. Zato je $u(x,y,z) = xyz$ istovremeno i Maklorenov polinom date funkcije, i on je polinom trećeg stepena sa tri promenljive. S obzirom da parcijalni izvodi prvog, drugog i trećeg reda u tački $(1,1,1)$ iznose 0 ili 1, a svi ostali reda većeg od tri su nula, to je odgovarajući Tejlorov polinom u toj tački :

$$u(x,y,z) = 1 + (x-1) + (y-1) + (z-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+ (x-1)(z-1) + (y-1)(z-1) + (x-1)(y-1)(z-1). \ \blacktriangleright$$

1.36 Odrediti sve funkcije $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za koje je $d^3u(x,y) = 0$ za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

◀ Iz datog uslova se dobija:

$$u_{x^3}(x,y) = 0 \land u_{y^3}(x,y) = 0 \land u_{x^2y}(x,y) = 0 \land u_{xy^2}(x,y) = 0$$

za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Iz prve jednakosti sledi

$$u_{x^2}(x,y) = A(y), \text{ tj.}$$

$$u_x(x,y) = x \cdot A(y) + B(y).$$

$$\text{Zatim je } u_{x^2y}(x,y) = A'(y) = 0,$$

tj. $A(y) = A = const.$ kao i

$$u_{xy}(x,y) = x \cdot A'(y) + B'(y) = B'(y) = 0.$$

$$\text{Odatle je } u_{xy^2}(x,y) = B''(y) = 0,$$

odnosno, $B'(y) = B = const.$ tj. $B(y) = By + C$. Znači

$$u_x(x,y) = Ax + By + C, \text{ tj.}$$

$$u(x,y) = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + Cx + D(y).$$

Sada se uzastopnim diferenciranjem po y može da odredi funkcija $y \mapsto D(y)$. Zaista,

$$u_y(x,y) = Bx + D'(y), u_{y^2}(x,y) = D''(y) \text{ i } u_{y^3}(x,y) = D'''(y) = 0,$$

odakle je $D''(y) = D = const.$ tj. $D'(y) = Dy + E$, odnosno

$$D(y) = \frac{D}{2}y^2 + Ey + F.$$

Dakle, imamo da je

$$u(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cx + Dy^2 + Ey + F$$

($\frac{A}{2}$ i $\frac{D}{2}$ su označeni sa A i D) funkcija čiji je totalni diferencijal trećeg reda jednak nuli u svakoj tački $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ►

Napomena. Neka student odredi sve funkcije $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za koje je $d^2u(x,y) = 0$ za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1.37 Dokazati Rolovu teoremu za funkcije više promenljivih: Ako je neprekidna funkcija $u : K[0,r] \to \mathbb{R}$ $(K[0,r] \subset \mathbb{R}^m)$ jednaka nuli na granici kugle K, a diferencijabilna u njenoj unutrašnjosti $K\,]0,r[$, tada postoji tačka $x \in K\,]0,r[$ koja je stacionarna za funkciju u.

◄ Iz neprekidnosti date funkcije na kompaktnom skupu $K[0,r]$ prema Vajerštrasovoj teoremi postoje dve tačke $x_m, x_M \in K[0,r]$ u kojima funkcija postiže najmanju i najveću vrednost. Ako su te vrednosti jednake (minimalna i maksimalna) onda je funkcija konstantna na celom skupu $K[0,r]$ i tada su unutrašnje tačke stacionarne, tj. u njima je izvod funkcije jednak nuli. Ako se maksimalna i minimalna vrednost razlikuju onda je bar jedna od tačaka x_m ili x_M unutrašnja (zašto?) i prema neophodnom uslovu za egzistenciju lokalnih ekstremuma stacionarna. ►

Napomena. Neka student uporedi ovaj dokaz sa dokazom Rolove teoreme u jednodimenzionom slučaju. Šta geometrijski znači Rolova teorema kod funkcija sa dve promenljive? Primeniti je na funkciju $u(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

1.38 Neka je funkcija u neprekidna na skupu $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, diferencijabilna na skupu $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$, i konstantna na skupu $C = A \backslash B$. Dokazati da postoji bar jeda tačka $(x_0, y_0) \in B$ takva da je $u_x(x_0,y_0) = u_y(x_0,y_0) = 0$.

◄ Skup A je kompaktan podskup od $\mathbb{R}^2$, te na njemu svaka neprekidna realna funkcija (Vajerštrasova teorema) postiže najmanju i najveću vrednost.

Ako je funkcija konstantna na skupu A, onda je $u_x(x,y) = u_y(x,y) = 0$ za sve $(x,y) \in B$. U protivnom, bar jedna od tačaka (x_1,y_1) tj. (x_2,y_2) u kojima funkcija postiže najmanju ili najveću vrednost je unutrašnja tačka skupa A, tj. pripada skupu B. Na osnovu neophodnog uslova egzistencije lokalnih ekstremuma sledi da je $u_x(x_0,y_0) = u_y(x_0,y_0) = 0$ za neku tačku $(x_0,y_0) \in B$. ►

Napomena. Uporediti sa prethodnim zadatkom.

1.2.5 Ekstremne vrednosti

1.39 Za svaki polinom P jedne realne promenljive važi sledeće tvrđenje: Postoji $x_0 \in \mathbb{R}$, takvo da je za svako $x \in \mathbb{R} : |P(x_0)| \leq |P(x)|$. Na primeru polinoma $P(x,y) = (xy-1)^2 + y^2$ pokazati da analogno tvrđenje ne važi za polinome više promenljivih.

◄ Neka student pokaže tvrđenje za polinome sa jednom promenljivom. Iz primera $P(x) = x^3 - x^2$ sledi da tačka $x_0 \in \mathbb{R}$ za koju je $|P(x_0)| \leq |P(x)|$ nije jedinstvena. Pošto je za dati polinom sa dve promenljive $P(x,y) \geq 0$ za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, to su moguće tačke $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $|P(x,y)| = P(x,y) \geq P(x_0,y_0)$ rešenja sistema:

$$\begin{aligned} P_x(x,y) &= 2(xy-1)\cdot y = 0, \\ P_y(x,y) &= 2(xy-1)\cdot x + 2y = 0. \end{aligned}$$

Dobijeni sistem ekvivalentan je disjunkciji sistema:

$$(xy - 1 = 0 \wedge y + (xy-1)x = 0) \vee (y = 0 \wedge (xy-1)x + y = 0.).$$

Prvi sistem nema rešenja, a drugi sistem ima jedno rešenje $(0,0)$. Zatim je

$$P_{x^2}(x,y) = 2y^2,\; P_{xy}(x,y) = P_{yx}(x,y) = 2(2xy-1),\; P_{y^2}(x,y) = 2\left(1+x^2\right),$$

odakle se dobija totalni diferencijal drugog reda u stacionarnoj tački $O(0,0)$:

$$\begin{aligned} d^2P(0,0) &= 2\cdot 0^2 \cdot dx^2 + 2\cdot 2(2\cdot 0\cdot 0 - 1)\,dxdy + 2\left(1+0^2\right)dy^2 \\ &= -4dxdy + 2dy^2 = 2dy(dy - 2dx). \end{aligned}$$

Ova kvadratna forma je znakopromenljiva. Zaista, za $dy = dx \neq 0$ je $d^2P(0,0) = -2dx^2 < 0$, a za $dy = 3dx \neq 0$ je $d^2P(0,0) = 6dx^2 > 0$, što znači da dati polinom nema minimum u tački $(0,0)$. ►

Napomena. Neka student pokaže da totalni priraštaj polinoma $P(x,y) = (xy-1)^2 + y^2$ u tački $O(0,0)$ menja znak u svakoj njenoj okolini.

1.40 Odrediti tačke lokalnih ekstremuma funkcije

$$u(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

◀ Funkcija je definisana na celom prostoru $\mathbb{R}^3$, dakle sve tačke domena su unutrašnje. Zato jedine tačke u kojima ona može da ima lokalne ekstremume su rešenja sistema:

$$\begin{aligned} u_x &= 4x - y + 2z = 0, \\ u_y &= -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ u_z &= 2x + 2z = 0. \end{aligned}$$

Koristeći metod zamene $(z = -x)$ za rešenja se dobijaju tačke $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ i $M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Zatim je

$$u_{x^2} = 4,\ u_{y^2} = 6y,\ u_{z^2} = 2,\ u_{xy} = -1,\ u_{yz} = 0,\ u_{zx} = 2.$$

Naravno svi mešoviti izvodi su jednaki (student treba da zna prema kojoj teoremi je to tako). Sada se lako nalaze matrice kvadratnih formi po promenljivima dx, dy, dz redom u tačkama M_1 i M_2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vrednosti glavnih minora datih matrica su: $4, 15, 14$ i $4, -13, -14$. Prema Silvesterovom kriterijumu kvadratna forma $d^2u(M_1)$ je pozitivno definitna, što znači da u toj tački funkcija ima lokalni minimum. Forma $d^2u(M_2)$ takođe prema Silvesterovom kriterijumu nije ni pozitivno ni negativno definitna. Može se pokazati da je ona znakopromenljiva. Zaista, uzimajući $dy = dz = 0$ i $dx \neq 0$ dobija se $d^2u(M_2) = 4dx^2 > 0$, odnosno za $dx = dz = 0$ i $dy \neq 0$ dobija se $d^2u(M_2) = -3dy^2 < 0$. Dakle u tački M_2 funkcija nema lokalni ekstremum. ▶

Napomena. Kvadratna forma može biti: znakodefinitna (pozitivno, negativno), znakopromenljiva i kvazi znakodefinitna.

1.41 Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^3$.

◀ Funkcija je očigledno definisana u celoj ravni $\mathbb{R}^2$. Dakle, jedine tačke u kojima funkcija može da ima lokalne ekstremume su rešenja sistema (stacionarne tačke):

$$\begin{aligned} u_x &= 2x - 2y = 0, \\ u_y &= -2x + 12y^2 = 0, \end{aligned}$$

tj. $M_1(0,0)$, $M_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ su moguće tačke lokalnih ekstremuma. Pošto je zatim

$$u_{x^2}=2,\ u_{y^2}=24y,\ u_{xy}=u_{yx}=-2,$$

to je $d^2u(M_1)=2dx^2-4dxdy$, odnosno

$$\begin{aligned} d^2u(M_2) &= 2dx^2-4dxdy+4dy^2=2\left(dx^2-2dxdy+4dy^2\right)\\ &= 2\left(dx^2-2dxdy+dy^2+dy^2\right)=2\Big((dx-dy)^2+dy^2\Big). \end{aligned}$$

Neka student pokaže da je forma $d^2u(M_1)$ znakopromenljiva, dakle u tački $M_1(0,0)$ funkcija nema lokalni ekstremum, dok u tački $M_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ funkcija ima lokalni minimum, jer je forma $d^2u(M_2)$ pozitivno definitna. Dobija se da je $u_{\min}=u(M_2)=-\frac{1}{108}$. ►

Napomena. Može se pokazati da funkcija nema lokalni ekstremum u tački $M_1(0,0)$ i po definiciji. Naime, totalni priraštaj u toj tački je

$$\triangle\, u(0,0)=u(0+h,0+g)-u(0,0)=h^2-2hg+4g^3.$$

Sada se vidi da on menja znak u svakoj okolini nule, naime uzimajući $h=0$, dobija se: $\triangle\, u(0,0)=4g^3$ i $\triangle\, u(0,0)>0$ za $g>0$, odnosno $\triangle\, u(0,0)<0$ za $g<0$.

1.42 Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u(x,y)=3x^2y-x^3-y^4$.

◄ S obzirom da je domen funkcije cela ravan $\mathbb{R}^2$, dakle otvoren skup, moguće tačke u kojima funkcija može da ima lokalne ekstremume su stacionarne tačke, tj. rešenja sistema:

$$\begin{aligned} 6xy-3x^2 &= 0,\\ 3x^2-4y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Dati sistem je ekvivalentan disjunkciji sistema:

$$\left(x=0\wedge 3x^2-4y^3=0\right)\vee\left(6y-3x=0\wedge 3x^2-4y^3=0\right).$$

Njihova rešenja su tačke: $M_1(0,0)$, $M_2(6,3)$. Pošto je

$$u_{x^2}=6y-6x,\ u_{y^2}=-12y^2,\ u_{xy}=u_{yx}=6x,$$

to je $d^2u(M_1)=0$ i

$$d^2u(M_2)=-18dx^2+72dxdy-108dy^2=-18\Big((dx-2dy)^2+2dy^2\Big)<0.$$

Znači u tački $M_2(6,3)$ funkcija ima lokalni maksimum $u_{\max}=27$. Kako je $u(M_1)=0$, to se lako može pokazati da u svakoj okolini nule funkcija postiže i pozitivne i negativne vrednosti. Zaista, za $y = 0$ je $u(x, 0) = -x^3$ i $u(x, 0) > 0$ za $x < 0$, odnosno $u(x, 0) < 0$ za $x > 0$. ►

Napomena. Ispitivanje znaka kvadratne forme sa dve promenljive svodi se na ispitivanje znaka trinoma $z \mapsto Az^2 + Bz + C-$ dakle elementarno. Ako su kvadratne forme sa $3, 4, ...$i više promenljivih onda se primenjuje Silvesterov kriterijum.

1.43 Data je funkcija $u(x, y) = \left(x - y^2\right)\left(2x - y^2\right)$.

Dokazati:

a) Funkcija u ima lokalni minimum u tački $O(0, 0)$ duž svake prave;

b) Funkcija u nema u tački $O(0, 0)$ lokalni minimum.

◄ **a)** Duž koordinatnih osa dobijaju se funkcije

$$u(x, 0) = 2x^2 \text{ i } u(0, y) = y^4$$

koje u tački $O(0, 0)$ imaju strogi lokalni minimum. Duž prave $y = kx$, $k \neq 0$ dobija se funkcija

$$u(x, kx) = x^2\left(k^2x^2 - 1\right)\left(k^2x^2 - 2\right)$$

koja takođe u tački $O(0, 0)$ ima strogi lokalni minimum. Zaista, za sve $(x, kx) \in K\,]0, r[\setminus\{0\}$, $r = \min\left\{\frac{1}{k^2}, 2\right\}$, $u(x, kx) > u(0, k \cdot 0) = 0$, gde je $K\,]0, r[$ otvorena kugla u $\mathbb{R}^2$ sa centrom u $O(0, 0)$ i poluprečnikom r.

b) Totalni priraštaj date funkcije u tački $O(0, 0)$ je:

$$\triangle\, u(0, 0) = u(x, y) - u(0, 0) = \left(x - y^2\right)\left(2x - y^2\right),$$

odakle se vidi da $\triangle\, u(0, 0)$ menja znak u svakoj okolini nule. U delu kruga (okoline) između parabola znak priraštaja je negativan, a u preostalom delu kruga znak je pozitivan. ►

1.44 Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u(x, y) = xy \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

◄ Funkcija je definisana na otvorenom skupu $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$. Zato su moguće tačke u kojima ona može da ima lokalne ekstremume rešenja sistema:

$$\begin{aligned} u_x &= y \ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0, \\ u_y &= x \ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2x}{x^2 + y^2} = 0, \text{ tj.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\left(\ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right) &= 0, \\ x\left(\ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sistem je ekvivalentan disjunkciji sledeća četiri sistema jednačina:

$$
\begin{aligned}
&(x=0 \wedge y=0) \vee \left(y=0 \wedge \ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=0\right) \\
&\vee \left(\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=0 \wedge x=0\right) \\
&\vee \left(\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=0 \wedge \ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=0\right).
\end{aligned}
$$

Prvi sistem jednačina nema rešenja. Drugi sistem ima dva rešenja $(-1,0)$ i $(1,0)$. Treći ima rešenja $(0,-1)$ i $(0,1)$ i na kraju, četvrti sistem je ekvivalentan sistemima:

$$
\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=0 \wedge x=\pm y,
$$

odakle se dobijaju četiri rešenja: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$. Dakle, funkcija u ima ukupno 8 stacionarnih tačaka. Pošto je

$$
u_{x^2}=\frac{6xy}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ u_{y^2}=\frac{6xy}{x^2+y^2}-\frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}
$$

kao i $u_{xy}=u_{yx}=\ln\left(x^2+y^2\right)+2-\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, to kvadratna forma u dobijenim stacionarnim tačkama ima sledeće matrice:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ u tačkama } (0,\pm 1) \text{ i } (\pm 1,0), \\
&\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ u tačkama } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \text{ i} \\
&\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ u tačkama } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right).
\end{aligned}
$$

Iz pozitivne, odnosno, negativne definitosti kvadratnih formi nenultih matrica zaključuje se da funkcija postiže minimum u tačkama $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $u_{\min}=-\frac{1}{2e}$, odnosno, maksimum u tačkama $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $u_{\max}=\frac{1}{2e}$. Kako kvadratna forma u tačkama $(0,\pm1)$ i $(\pm1,0)$ ima vrednost 0, dakle ne može se primeniti teorema o dovoljnom uslovu za lokalne ekstremume, to se mora ispitati znak totalnog priraštaja u tim tačkama. Naime, vidi se da u svakoj okolini tih tačaka funkcija postiže vrednosti suprotne po znaku, jer je neparna po svakoj promenljivoj posebno. Dakle, u njima nema lokalnih ekstremuma. Jasno je $u(x,y) < u(0,1)$ za $x < 0$, $y \neq 0$, tj. $u(0,1) < u(x,y)$ za $x > 0$, $y \neq 0$ u svakoj okolini tačke $(0,1)$. ►

1.45 Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

◄ Očigledno je da su moguće tačke u kojima funkcija može imati lokalne ekstremume rešenja sistema: $4x^3 - 4x = 0 \wedge 4y^3 = 0$. Odavde se dobijaju tačke: $M_1(-1,0)$, $M_2(0,0)$, $M_3(1,0)$. Student mora da vodi računa prilikom rešavanja sistema: $u_x = 0 \wedge u_y = 0$. Kako je zatim

$$u_{xx} = 12x^2 - 4,\ u_{yy} = 12y^2,\ u_{xy} = u_{yx} = 0,$$

to je $d^2u(M_1) = 8dx^2$, $d^2u(M_2) = -4dx^2$, $d^2u(M_3) = 8dx^2$. Svaka od ovih formi je kvazi znakodefinitna (poludefinitna); zaista uzimajući da je $dx = 0$, $dy \neq 0$ dobija se $d^2u(M_i) = 0$, $i = 1,2,3$. Pošto je $u(x,y) = \left(x^2 - 1\right)^2 + y^4 - 1$, to u tačkama $(-1,0), (1,0)$ funkcija ima strogi lokalni minimum jednak -1, jer je $u(x,y) > u(-1,0) = u(1,0)$ kad god je $(x,y) \neq (-1,0)$ i $(x,y) \neq (1,0)$ i $|y| < 1$. Nije teško pokazati da funkcija u tački M_2 nema lokalni ekstremum. Zaista, totalni priraštaj u toj tački $\triangle\, u(0,0) = h^4 + g^4 - 2h^2$ menja znak u svakoj okolini nule, jer je za $h = 0$, $g \neq 0$, $\triangle\, u(0,0) = g^4 > 0$, dok za $h \neq 0$, $g = 0$, $\triangle\, u(0,0) = h^2\left(h^2 - 2\right) < 0$ za $|h| < \sqrt{2}$. ►

1.46 Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u(x,y) = xy$.

◄ Funkcija je definisana u celoj ravni, dakle na otvorenom skupu. Zato su tačke u kojima ona može da ima lokalne ekstremume rešenja sistema: $u_x = y = 0 \wedge u_y = x = 0$, tj. tačka $O(0,0)$ je jedina stacionarna tačka. Pošto je $u_{x^2} = u_{y^2} = 0$ i $u_{xy} = u_{yx} = 1$, to je

$$d^2u(0,0) = 0 \cdot dx^2 + 2 \cdot 1 \cdot dxdy + 0 \cdot dy^2 = 2dxdy.$$

Vidi se da je kvadratna forma $d^2u(0,0)$ znakopromenljiva, tj. $d^2u(0,0) < 0$ za $dy = -dx$, odnosno, $d^2u(0,0) > 0$ za $dy = dx$, što znači da funkcija $u = x \cdot y$ nema lokalnih ekstremuma. ►

Napomena. Neka student pokaže da totalni priraštaj funkcije $u = xy$ menja znak u svakoj okolini nule. Šta to onda znači?

1.47 Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

◄ Pošto je oblast definisanosti funkcije cela ravan, to su stacionarne tačke rešenja sistema:

$$\begin{aligned} u_x &= 2xe^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2x\left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0, \\ u_y &= 2ye^{-\left(x^2+y^2\right)} - 2y\left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0, \end{aligned}$$

tj. rešenja sistema:

$$2x\left(1-x^2-y^2\right)=0\wedge 2y\left(1-x^2-y^2\right),$$

koji je ekvivalentan disjunkciji četiri sistema:

$$(x=0\wedge y=0)\vee\left(x=0\wedge 1-x^2-y^2=0\right)$$
$$\vee\left(1-x^2-y^2=0\wedge y=0\right)\vee\left(1-x^2-y^2=0\wedge 1-x^2-y^2=0\right).$$

Dakle, stacionarne tačke su $O\,(0,0)$ i sve tačke jedinične kružnice: $x^2+y^2=1$. S obzirom da je $u\,(x,y)>u\,(0,0)=0$, za sve $(x,y)\neq(0,0)$, to funkcija u tački $O\,(0,0)$ postiže minimum. Što se tiče stacionarnih tačaka jedinične kružnice, uvođenjem smene $t=x^2+y^2$ može se posmatrati funkcija $z\,(t)=te^{-t}$ jedne promenljive, čiji su izvodi

$$z'\,(t)=(1-t)\,e^{-t},\ z''\,(t)=(t-2)\,e^{-t}.$$

Kako je $z'\,(1)=0$, $z''\,(1)=-\frac{1}{e}$, to funkcija z ima u svakoj tački jedinične kružnice nestrogi maksimum $z_{\max}=e^{-1}$. ►

1.2.6 Implicitna faukcija

1.48 Dokazati da jednačina $y+\frac{1}{2}\sin y-x=0$ definiše jedinstvenu implictnu funkciju oblika $y=f\,(x)$, $x\in\mathbb{R}$, i naći $f'\,(x)$, $f''\,(x)$, $f'\,(\pi)$, $f''\,(\pi)$.

◄ Neka je $F\,(x,y)=y+\frac{1}{2}\sin y-x$, što je uobičajena oznaka kod implicitnih funkcija ([2], II; ili [9], I). S obzirom da je $F_y=1+\frac{1}{2}\cos y>0$, to je za svako fiksirao $x\in\mathbb{R}$, funkcija F rastuća po y. Zatim je za svako fiksirano $x\in\mathbb{R}$ i dovoljno veliko $|y|$ ispunjeno: $F\,(x,y)<0$ za $y<0$, odnono, $F\,(x,y)>0$ za $y>0$. Kako je F neprekidna funkcija to znači (Bolcano-Koši) da za svako $x\in\mathbb{R}$ postoji jedinstveno $y\in\mathbb{R}$, (jer je funkcija strogo rastuća) takvo da je $F\,(x,y)=0$, odnosno jednačina $F\,(x,y)=0$ ima jedinstveno rešenje po y. Drugim rečima data jednačina definiše jedinstvenu implicitnu funkciju $y=f\,(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Pošto je F diferencijabilna funkcija sa dve promenljive i $F_y\,(x,y)\neq 0$, to je funkcija $y=f\,(x)$ diferencijabilna na celoj brojnoj pravoj i

$$f'\,(x)=-\frac{F_x\,(x,y)}{F_y\,(x,y)}=\frac{2}{2+\cos f\,(x)}.$$

Zatim je

$$f''\,(x)=-\frac{2}{(2+\cos f\,(x))^2}\cdot\left(-f'\,(x)\cdot\sin f\,(x)\right)=\frac{4\sin f\,(x)}{(2+\cos f\,(x))^3}.$$

Za nalaženje $f'(\pi)$ i $f''(\pi)$ treba najpre naći $f(\pi)$. Za $x = \pi$, nalazi se $y = \pi$ (usmeno-proba se-jedinstveno je) tj. $f(\pi) = \pi$. Zato je $f'(\pi) = 2$ i $f''(\pi) = 0$. ▶

1.49 Naći $f'(0)$ i $f''(0)$ implicitne funkcije $y = f(x)$, zadate jednačinom $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$ za koju je $f(0) = 1$.

◀ Funkcija $F(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$, skup $A = \mathbb{R}^2$ i tačka $(0,1)$ zadovoljavaju sve uslove iz $([2], II$, Teorema 3.2.1 i Stav 3.2.1 ili Teorema 1.7.III iz [9], I). Zaista, A je otvoren skup; $(0,1) \in A; F : A \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija (zašto?); $F(0,1) = 0; F_y$ postoji za svako $(x,y) \in A$ i F_y je neprekidna funkcija na A i važi: $F_y(0,1) = (-x+4y-1)|_{(0,1)} = 3 \neq 0; F_x$ takođe postoji i neprekidna je funkcija na A; na kraju $F \in C^1(A)$, tj. F je neprekidno diferencijabilna funkcija na A. Zato postoji okolina U tačke $(0,1)$ u skupu A u kojoj jednačina u zadatku definiše jedinstvenu funkciju $y = f(x)$, za koju je $f(0) = 1$. Ta funkcija je zatim u odgovarajućoj okolini nule diferencijabilna i važi

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2x - y + 1}{-x + 4y - 1},$$

tj. $f'(0) = -\frac{2\cdot 0 - 1 + 1}{-0 + 4\cdot 1 - 1} = 0$. Naravno, funkcija f u dobijenoj okolini nule ima i drugi izvod (uveriti se u to- prema navedenim teoremama) i on je jednak:

$$f''(x) = -\frac{(2 - y')(-x + 4y - 1) - (2x - y + 1)(-1 + 4y')}{(-x + 4y - 1)^2}$$

tj. $f''(0) = -\frac{(2-0')(-0+4\cdot 1-1)-(2\cdot 0-1+1)(-1+4\cdot 0)}{(-0+4\cdot 1-1)^2} = -\frac{2}{3}$. ▶

Napomena. a) $f'(0)$ i $f''(0)$ se mogu dobiti i dva puta formalnim nalaženjem izvoda date funkcije. Zaista,

$$2x - y - x \cdot y' + 4yy' + 1 - y' = 0.$$

Uzimajući da je $x = 0$, $y = 1$, dobija se $y'(0) = 0$. Ponovnim uzimanjem izvoda i zamenjivanjem: $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$ dobija se:

$$2 - 2y' - xy'' + 4y'y' + 4yy'' - y'' = 0$$

tj. $y''(0) = -\frac{2}{3}$.

b) U rešenju se pominje odgovarajuća okolina nule, dobijena okolina nule,....Studentu treba da bude jasno, da je ta okolina nule upravo projekcija okoline tačke $(0,1)$ iz $\mathbb{R}^2$ (koja postoji na osnovu teoreme) na $x-$osu.

1.50 Naći izvode prvog i drugog reda implicitne funkcije $y = f(x)$, zadate jednačinom $y - 2x \arctan \frac{y}{x} = 0$.

◀ Ovde je
$$F\left(x,y\right)=y-2x\arctan\frac{y}{x},\ x\neq 0.$$

$$\begin{aligned} F_y &= 1-2x\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=1-\frac{2x^2}{y^2+x^2}=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\neq 0,\ \text{za } y\neq\pm x.\\ F_x &= -2\arctan\frac{y}{x}-2x\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-2\arctan\frac{y}{x}+\frac{2xy}{y^2+x^2}; \end{aligned}$$

Primenom teoreme o implicitnoj funkciji sa realnim vrednostima ([2], II, Teorema 3.2.1 i Stav 3.2.1 ili [9], I, Teorema 1.7.III) dobija se da u nekoj okolini svake tačke (x,y) iz domena, jednakost $F\left(x,y\right)=0$ definiše jedinstvenu funkciju $y=f\left(x\right)$. Ta funkcija je u odgovarajućoj okolini tačke x diferencijabilna i njeni izvodi $y'\left(x\right)$ i $y''\left(x\right)$ su jednaki:

$$y'-2\arctan\frac{y}{x}-2x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{y'}{x}\right)=0,$$

tj. koristeći vezu $y-2x\arctan\frac{y}{x}=0$, dobija se jednačina:

$$y'-\frac{y}{x}-\frac{2x}{x^2+y^2}\left(xy'-y\right)=0.$$

Iz poslednje jednačine neposredno sledi da je $y'=\frac{y}{x}$. Diferencirajući dobijenu jednačinu dobija se $y''=\frac{xy'-y}{x^2}=0$. ▶

Napomena. Stavljajući da je $\frac{y}{x}=t,\ x\neq 0$, data jednačina postaje $t=2\arctan t$. Ona ima tri rešenja: $t=-t_0$, $t=0$, $t=t_0$ odakle sledi da polazna jednačina ($F\left(x,y\right)=0$) definiše tri linearne funkcije:

$$y=-t_0x,\ y=0,\ y=t_0x,\ x\neq 0.$$

1.51 Dokazati da jednačina $z^3-xyz+y^2=16$ definiše u nekoj okolini tačke $(1,4,2)$ jedinstvenu implicitnu funkciju $z=f\left(x,y\right)$. Naći njene parcijalne izvode $z_x\left(x,y\right)$, $z_{x^2}\left(x,y\right)$, $z_x\left(1,4\right)$ i $z_{x^2}\left(1,4\right)$.

◀ Ovde je $F\left(x,y,z\right)=z^3-xyz+y^2-16, A=\mathbb{R}^{2+1}, F\left(1,4,2\right)=0, F_z\left(1,4,2\right)=8\neq 0$, gde je $F_z=3z^2-xy$. Dakle ispunjeni su svi uslovi iz ([2], II, Teorema 3.2.2 ili [9], I Teorema 3.7.III) i zato sledi tvrđenje iz zadatka. Za nalaženje parcijalnog izvoda $z_x\left(x,y\right)$ jedinstvene funkcije $z=f\left(x,y\right)$ koristi se formula:

$$z_x\left(x,y\right)=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-yz}{3z^2-xy}=\frac{yf\left(x,y\right)}{3f^2\left(x,y\right)-xy}.$$

Uzimanjem zatim prvog izvoda po x (izvod količnika) i zamenjivanjem $z_x(x,y)$ svojom vrednošću, dobija se traženi parcijalni izvod drugog reda:

$$z_{x^2} = -\frac{2xy^3 f(x,y)}{\left(3f^2(x,y) - xy\right)^2}.$$

Zatim je $z_x(1,4) = \frac{4 \cdot f(1.4)}{3 \cdot f^2(1,4) - 4} = \frac{4 \cdot 2}{12-4} = 1$ i $z_{x^2} = -\frac{2 \cdot 1 \cdot 64 \cdot 2}{64 \cdot 8} = -0,5$. ►

Napomena. **a)** Prvi deo zadatka je teorijskog karaktera-treba samo prepoznati teoremu koju treba primeniti, tj. čije uslove treba proveriti.

b) Uzimanjem dva puta izvode leve i desne strane po promenljivoj x, mogu se dobiti traženi parcijalni izvodi. Zaista,

$$3z^2 z_x - yz - xyz_x = 0 \text{ i}$$

$$6zz_x^2 + 3z^2 z_{x^2} - 2yz_x - xyz_{x^2} = 0,$$

odakle sledi $z_x = \frac{yz}{3z^2 - xy}$ i $z_x(1,4) = \frac{4 \cdot 2}{12-4} = 1$, i slično z_{x^2} i $z_{x^2}(1,4)$.

1.52 Dokazati da jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ definiše jedinstvenu implicitnu fuinkciju $z = f(x,y)$ u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$, gde je $z_0 = \sqrt{a^2 - x_0^2 - y_0^2} \neq 0$, i naći

a) parcijalne izvode z_x i z_{xy}; **b)** diferencijale dz i d^2z.

◄ S obzirom da je $z_0 \neq 0$, to su ispunjeni svi uslovi više puta navođene teoreme o implicitnoj funkciji ([2], II, Teorema 3.2.2 ili [9], I, Teorema 3.7.III). Neka student detaljno proveri. Odatle i sledi rešenje prvog dela zadatka.

a) Diferencirajući datu jednakost redom po x i y dobija se:

$$2x + 2zz_x = 0 \text{ i } 2y + 2zz_y = 0,$$

tj. $x + zz_x = 0$ i $y + zz_y = 0$. Odatle je $z_x = \frac{-x}{z}$. Ako se diferencira jednačina $x + zz_x = 0$ po y dobija se

$$z_y z_x + zz_{xy} = 0, \text{ tj.}$$

$$z_{xy} = -\frac{z_y z_x}{z} = -\frac{z_x}{z}\left(-\frac{y}{z}\right) = z_x \cdot \frac{y}{z^2} = -\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z^2} = -\frac{xy}{z^3},$$

gde je u svim slučajevima $z = f(x,y)$ jedinstvena funkcija u nekoj okolini tačke (x,y).

b) Nalaženjem totalnog diferencijala leve i desne strane jednakosti $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dobija se

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0.$$

Ponovnim uzimanjem diferencijala sledi

$$2\,(dx)^2 + 2\,(dy)^2 + 2\,(dz)^2 + 2zdz^2 = 0.$$

Iz poslednje dve jednakosti nalaze se dz i d^2z, tj. $dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dz$ i

$$d^2z = -\frac{x^2+z^2}{z^3}\,(dx)^2 - \frac{2xy}{z^3}dxdy - \frac{y^2+z^2}{z^3}\,(dy)^2\,,$$

gde je u oba slučaja $z = f\,(x,y)\,.$ Sada se mogu dobiti parcijalni izvodi prvog i drugog reda funkcije $z = f\,(x,y)$:

$$z_x = -\frac{x}{z},\ z_y = -\frac{y}{z},\ z_{x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3},\ z_{xy} = -\frac{xy}{z^3},\ z_{y^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}.$$

1.53 Naći izvode prvog i drugog reda implicitnih funkcija $x\,(z)$ i $y\,(z)$ u tački $z = 2$, zadatih sistemom jednačina

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 0.5z^2, \\ x+y+z &= 2, \end{aligned}$$

sa $x\,(2) = 1$, $y\,(2) = -1$.

◄ Funkcije

$$F_1\,(x,y,z) = x^2+y^2-0.5z^2 \text{ i } F_2\,(x,y,z) = x+y+z-2$$

su diferencijabilne u proizvoljnoj okolini tačke $M\,(1,-1,2)\,.$ Njihovi parcijalni izvodi $F_{1x} = 2x$, $F_{1y} = 2y$, $F_{2x} = 1$, $F_{2y} = 1$ su neprekidne funkcije u tački M. Zatim je $F_1\,(1,-1,2) = F_2\,(1,-1,2) = 0$. Na kraju jakobijan funkcija F_1 i F_2 po promenljivim x i y u tački M je:

$$\frac{\mathcal{D}\,(F_1,F_2)}{\mathcal{D}\,(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Ispunjeni su svi uslovi ([2], II, Teorema 3.3.1 ili [9], I, Teorema 3.7.III) da dati sistem određuje jedinstven par diferencijabilnih funkcija $x\,(z)$ i $y\,(z)$ u odgovarajućoj okolini tačke $z = 2$. Pretpostavljajući da su u sistemu x i y funkcije od z i uzimajući izvod po z dobija se sistem po nepoznatim $x'\,(2)$ i $y'\,(2)$:

$$2xx' + 2yy' = z \text{ i } x' + y' + 1 = 0.$$

Stavljajući $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, sistem postaje:

$$x'\,(2) - y'\,(2) = 1 \text{ i } x'\,(2) + y'\,(2) = -1,$$

odakle se dobija $x'(2) = 0$, $y'(2) = -1$. Ponovnim uzimanjem izvoda po promenljivoj z dobija se sistem:

$$2\left(x'\right)^2 + 2xx'' + 2\left(y'\right)^2 + 2yy'' = 1 \text{ i } x'' + y'' = 0.$$

Iz ovog sistema za $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, $x'(2) = 0$, $y'(2) = -1$, dobija se $x''(2) = -0,25$, $y''(2) = 0,25$. ▶

Napomena. Rešenje ovog zadatka može da koristi studentu za razumevanje implicitnih funkcija sa vektorskim vrednostima, ako promeni oznake iz $([2], II$ ili $[9], I)$ i proveri da li su ispunjeni uslovi glavne teoreme. Imajući to u vidu, prethodni zadatak bi glasio:

Naći $y_1'(0)$, $y_2'(0)$, $y_1''(0)$ i $y_2''(0)$ implicitnih funkcija $y_1(x)$ i $y_2(x)$ u tački $x_1 = 2$ zadatih sistemom:

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 - 0,5x_1^2 &= 0, \\ y_1 + y_2 + x_1 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

sa $y_1(2) = 1$, $y_2(2) = -1$. Ovde je $n = 2$, $m = 1$:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, y_1, y_2) &= y_1^2 + y_2^2 - 0,5x_1^2 \\ F_2(x_1, y_1, y_2) &= y_1 + y_2 + x_1 - 2 \\ y_1 &= f_1(x_1),\ y_2 = f_2(x_1) \end{aligned}$$

$$F = (F_1, F_2), f = (f_1, f_2), (x) = (x_1), (y) = (y_1, y_2), (x, y) = (x_1, y_1, y_2)$$

Upoređujući sa oznakama iz $[2], II$ ili $[9], I$ za nalaženje izvoda $y_1'(x_1)$, $y_2'(x_1)$ dobija se matrična jednakost:

$$\begin{bmatrix} y_1'(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_{1y_1} & F_{1y_2} \\ F_{2y_1} & F_{2y_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F_{1x_1} \\ F_{2x_1} \end{bmatrix}, \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1'(0) \\ y_2'(0) \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} 2y_1(0) & 2y_2(0) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dobro proraditi $[2], II$, Stav 3.3.1 ili $[9], I$, Teorema 3.7.III.

1.54 Dokazati da implicitna funkcija $z = f(x, y)$ definisana jednačinom:

$$x^2 + y^2 + z^2 = yg\left(\frac{y}{z}\right),$$

gde je g proizvoljna diferencijabilna funkcija, zadovoljava uslov:

$$\left(x^2 - y^2 - z^2\right) z_x + 2xyz_y = 2xz.$$

◀ U tačkama $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gde funkcija $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yg\left(\frac{y}{z}\right)$ zadovoljava sve uslove teoreme o implicitnoj funkciji dobija se:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \; z_y = -\frac{F_y}{F_z}, \text{ gde je}$$

$$F_x = 2x, \; F_y = 2y - g\left(\frac{y}{z}\right) - \frac{y}{z}g', \; F_z = 2z + \frac{y^2}{z^2}g'.$$

Nakon zamenjivanja i pažljivog računa uz korišćenje veze $F(x, y, z) = 0$, dobija se tražena jednakost. ▶

Napomena. a) Parcijalni izvodi z_x i z_y implicitne funkcije definisane jednakošću $F(x, y, z) = 0$, nalaze se i na sledeći način: Nađu se diferencijali prvog i drugog reda obeju strana jednakosti:

$$x^2 + y^2 + z^2 = yg\left(\frac{y}{z}\right), \text{ tj.}$$

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = g\left(\frac{y}{z}\right)dy + g'\left(\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}dy - \frac{y^2}{z^2}dz\right),$$

odakle sledi da je

$$dz = \frac{-2xdx + \left(g\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{y}{z}g'\left(\frac{y}{z}\right) - 2y\right)dy}{2z + \frac{y^2}{z^2}g'\left(\frac{y}{z}\right)},$$

odnosno, čitaju se z_x i z_y :

$$z_x = \frac{-2x}{2z + \frac{y^2}{z^2}g'\left(\frac{y}{z}\right)} \text{ i } z_y = \frac{g\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{y}{z}g'\left(\frac{y}{z}\right) - 2y}{2z + \frac{y^2}{z^2}g'\left(\frac{y}{z}\right)}.$$

b) Diferencijal dz neke funkcije sa dve promenljive u fiksiranoj tački (x_0, y_0) student mora da razume kao linearno preslikavanje iz $\mathbb{R}^2$ (vektorskog rostora) u $\mathbb{R}^1$ (vektorski prostor) koje dejstvuje po propisu:

$$\begin{aligned} dz\left((m, n)\right) \quad : &= \left[z_x\left(x_0, y_0\right) \;\; z_y\left(x_0, y_0\right)\right]_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ &= \left[z_x\left(x_0, y_0\right) \cdot m + z_y\left(x_0, y_0\right) \cdot n\right]_{1\times 1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zapis $dz = z_x dx + z_y dy$ $(m = dx, \; n = dy)$ koji se često sreće u literaturi, daleko je od pravog značenja diferencijala.

1.55 Neka je preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisano sa $f(x, y_1, y_2) = x^2 y_1 + e^x + y_2$. Dokazati da postoji diferencijabilna realna funkcija g na nekoj okolini tačke $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ takva da je u toj okolini $f(g(y_1, y_2), y_1, y_2) = 0$. Izračunati $g'(1, -1)$.

◀ Kako je $f(x, 1, -1) = x^2 + e^x - 1 = 0$ za $x = 0$ (dokazati jedinstvenost), to su ispunjeni svi uslovi teoreme o implicitnoj funkciji više promenljivih ([2], II, Teorema 3.2.2) tj. teoreme o implicitnoj funkciji-opšti slučaj ([9], I, Teorema 3.7.III) za tačku $(0, 1, -1)$ i funkciju $f(x, y_1, y_2) = x^2 y_1 + e^x + y_2$. Zaista, $f_x(0, 1, -1) = 1 \neq 0$ a neprekidnost funkcija f i f_x je očigledna. Zato postoji okolina tačke $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ (sa osama y_1, y_2) na kojoj je definisana jedinstvena funkcija $x = x(y_1, y_2)$, tj. tražena funkija $g(y_1, y_2)$. Prema istoj teoremi postoji $g'(1, -1)$ i

$$g'(1, -1) = [g_{y_1}(1, -1) \;\; g_{y_2}(1, -1)], \text{ gde je}$$

$$\begin{aligned} g_{y_1}(1, -1) &= -\frac{f_{y_1}(0, 1, -1)}{f_x(0, 1, -1)} = -\frac{\left(x^2|_{(0,1,-1)}\right)}{(2xy_1 + e^x)|_{(0,1,-1)}} = -\frac{0}{1} = 0, \\ g_{y_2}(1, -1) &= -\frac{f_{y_2}(0, 1, -1)}{f_x(0, 1, -1)} = -\frac{1}{1} = -1. \end{aligned}$$

Dakle, $g'(1, -1) = [0 \; -1] -$ matrica tipa 1×2. ▶

Napomena. Ako se preformuliše prethodni zadatak kao: "Dokazati da preslikavanje $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisano sa $F(x_1, x_2, y) = y^2 x_1 + e^y + x_2$ ima osobinu: postoji diferencijabilna realna funkcija f na nekoj okolini tačke $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ takva da je u toj okolini $F(x_1, x_2, f(x)) = 0$. Izračunati $f'(1, -1)$", onda je provera uslova teorema iz [2] ili [9] znatno lakša.

1.56 Dokazati da je u nekoj okolini $]-r, r[$, $r > 0$ tačke 0, jedinstveno određena funkcija f klase C^1 koja zadovoljava uslove:

$$e^{2x \cos f(x)} + e^{f(x) \cos 2x} = 2, \; x \in \,]-r, r[\,, \text{ i } f(0) = 0.$$

Izračunati $f'(0)$.

◀ Funkcija $F(x, y) = e^{2x \cos f(x)} + e^{f(x) \cos 2x} - 2$, je definisana i neprekidna u ravni $\mathbb{R}^2$; $F(0, 0) = 0$; $F_y(x, y) = -e^{2x \cos y} \cdot 2x \sin y + e^{y \cos 2x} \cdot \cos 2x$ postoji i neprekidna je funkcija u celoj ravni $\mathbb{R}^2$; $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Ispunjeni su dakle uslovi teoreme o egzistenciji implicitne funkcije ([2], II, ili [9], I) odakle sledi postojanje okoline $]-r, r[$ tačke 0 u kojoj postoji jedinstvena funkcija $y = f(x)$ koja zadovoljava navedene uslove. Ona je klase C^1 jer je F_x očigledno neprekidna funkcija. Izvod $f'(0)$ se računa po formuli

$$f'(0) = -\frac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = -\frac{\left(e^{2x \cos y} \cdot 2 \cos y - e^{y \cos 2x} \cdot 2 \sin 2x\right)|_{(0,0)}}{1} = -2. \;\; ▶$$

1.57 a) Proveriti da sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + \cos(x_2 y_2) &= 0, \\ e^{x_1 x_2} + y_1 y_2 &= 0, \end{aligned}$$

definiše neprekidno diferencijabilnu funkciju $x = \varphi(y)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ u okolini tačke $b = (-1, 1)$ koja tu tačku preslikava u tačku $a = (1, 0)$;

b) Odrediti izvod funkcije φ u tački b;

c) Odrediti linearnu aproksimaciju funkcije φ u okolini tačke b.

◀ **a)** Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa

$$f(x, y) = (x_1 y_1 + \cos(x_2 y_2), e^{x_1 x_2} + y_1 y_2)$$

je neprekidno diferencijabilna i pri tom je

$$f_x = \begin{bmatrix} y_1 & -y_2 \sin(x_2 y_2) \\ x_2 e^{x_1 x_2} & x_1 e^{x_1 x_2} \end{bmatrix}, \; f_y = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \sin(x_2 y_2) \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix}.$$

Sledi da je

$$f_x(a, b) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; f_y(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $f(a, b) = 0$ i $\det f_x(a, b) \neq 0$, postoje okolina U tačke a i okolina V tačke b i neprekidno diferencijabilna funkcija $\varphi : V \to U$ takva da je za $x \in U$ i $y \in V$

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(y).$$

b)

$$\varphi'(b) = -f_x(a, b)^{-1} \cdot f_y(a, b) = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\approx \varphi(b) + \varphi'(b)(y - b) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 2 \\ -y_1 + y_2 - 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.58 Odrediti lokalne ekstremume implicitne funkcije $z = f(x, y)$, zadate jednačinom:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

◀ Stacionarne tačke funkcije $z = z(x, y)$ dobijaju se rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} F_x &= 2x - 2 = 0, \\ F_y &= 2y + 2 = 0, \\ F(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

odakle slede tačke $M_1(1, -1, -2)$ i $M_2(1, -1, 6)$. Pošto je $F_z(M_1) = -8 \neq 0$ i $F_z(M_2) = 8 \neq 0$, to su ispunjeni svi uslovi osnovne teoreme o implicitnoj funkciji sa dve promenljive. Dakle, u nekoj okolini svake od tačaka M_1 i M_2 postoje jedinstvene funkcije

$$z = f_1(x, y) \;\text{ i }\; z = f_2(x, y),$$

za koje je $f_1(1, -1) = -2$ i $f_2(1, -1) = 6$. Tačka $(1, -1)$ je dakle tačka mogućeg lokalnog ekstremuma za svaku od funkcija f_1 i f_2. Zato treba naći d^2z u svakoj od njih. Polazeći od date jednačine $F(x, y, z) = 0$, dobija se

$$2xdx + 2ydy + 2zdz - 2x + 2dy - 4dz = 0, \;\text{ tj.}$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 + zd^2z + (dz)^2 - 2d^2z = 0,$$

odnosno

$$d^2z = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2 - z} = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2 - z}, \;\; z \neq 2.$$

Kako je $dz(1, -1) = 0$, to je

$$d^2f_1(1, -1) = \frac{1}{4}\left((dx)^2 + (dy)^2\right) > 0, \;\; d^2f_2(1, -1) = -\frac{1}{4}\left((dx)^2 + (dy)^2\right) < 0.$$

Ovo znači da funkcija f_1 postiže u tački $(1, -1)$ lokalni minimum jednak -2, a funkcija f_2 ima u tački $(1, -1)$ lokalni maksimum jednak 6. ▶

Napomena. Data jednačina $F(x, y, z) = 0$ se može svesti na oblik:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 16,$$

koji predstavlja jednačinu sfere poluprečnika $r = 4$, sa centrom u tački $(1, -1, 2)$. Najviša i najniža tačka sfere su maksimalna i minimalna vrednost funkcije $z = f_1(x, y)$ gornje i $z = f_2(x, y)$ donje polusfere.

1.59 Dokazati da implicitna funkcija $z = f(x, y)$ definisana jednačinom $F(x - az, y - bz) = 0$, gde je $(u, v) \mapsto F(u, v)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija (a, b su konstante), zadovoljava uslov:

$$a \cdot z_x + b \cdot z_y = 1.$$

◀ Uzimanjem diferencijala funkcije F dobija se

$$F_1' \cdot (dx - adz) + F_2' \cdot (dy - bdz) = 0$$

tj. $(aF_1' + bF_2') \cdot dz = F_1'dx + F_2'dy$. Odatle je

$$z_x = \frac{F_1'}{aF_1' + bF_2'} \text{ i } z_y = \frac{F_2'}{aF_1' + bF_2'},$$

odnosno $a \cdot z_x + b \cdot z_y = \frac{aF_1'+bF_2'}{aF_1'+bF_2'} = 1$, što je i dokaz tvrđenja. Napomenimo da je F_1' je izvod funkcije F po prvom, a F_2' njen izvod po drugom argumentu. ▶

1.60 Dokazati da implicitna funkcija $z = f(x, y)$ definisana jednačinom $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$, gde je $(u, v) \mapsto F(u, v)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija, zadovoljava uslov:

$$xz_x + yz_y = z - xy.$$

◀ Slično kao u prethodnom zadatku dobija se:

$$F_1' \cdot \left(dx + \frac{ydz - zdy}{y^2}\right) + F_2' \cdot \left(dy + \frac{xdz - zdx}{x^2}\right) = 0,$$

odnosno

$$dz = \frac{y\left(zF_2' - x^2F_1'\right)}{x\left(xF_1' + yF_2'\right)}dx + \frac{x\left(zF_1' - y^2F_2'\right)}{y\left(xF_1' + yF_2'\right)}dy,$$

odakle se nalaze z_x i z_y. Njihovim množenjem redom sa x i y i sabiranjem dobija se tražena jednakost. ▶

1.61 Sistem jednačina

$$\begin{aligned} x\cos u + y\sin u + \ln z &= g(u), \\ -x\sin u + y\cos u &= g'(u), \end{aligned}$$

gde je g proizvoljna diferencijabilna funkcija, definiše implicitne funkcije $z = f_1(x, y)$, $u = f_2(x, y)$. Dokazati da funkcija $z = f_1(x, y)$ zadovoljava uslov:

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2.$$

◀ Diferencirajem prve jednačine sistema dobija se

$$(\cos u) \cdot dx + (\sin u) \cdot dy + \left(-x\sin u + y\cos u - g'(u)\right) du + \frac{dz}{z} = 0.$$

Na osnovu druge jednačine sistema sledi da je

$$dz = -z(\cos u) \cdot dx - z(\sin u) \cdot dy.$$

Dakle, $z_x = -z\cos u, z_y = -z\sin u$, odakle je

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 = (-z\cos u)^2 + (-z\sin u)^2 = z^2\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) = z^2. \ \blacktriangleright$$

1.62 Dokazati da su funkcije $y_1 = x_1 + x_2$ i $y_2 = x_1x_2$ nezavisne u proizvoljnoj okolini tačke $O(0,0)$.

◀ Jakobijan funkcija y_1, y_2 po promenljivima x_1 i x_2 glasi

$$\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2)}{\mathcal{D}(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

On je očigledno jednak nuli u tački $O(0,0)$. Inače u proizvoljnoj okolini tačke $O(0,0)$ postoji tačka $M_0(x_1, x_2)$ u kojoj je $x_1 \neq x_2$, i dakle jakobijan u toj tački nije nula. To znači da su na osnovu ([4], Teorema 5, strana 71) funkcije y_1 i y_2 nezavisne u proizvoljnoj okolini tačke $O(0,0)$. ▶

Napomena Nezavisnost funkcija y_1 i y_2 može se pokazati i na sledeći način: Neka su y_1 i y_2 zavisne u nekoj okolini tačke $O(0,0)$. Onda u toj okolini ili y_1 zavisi od y_2, ili y_2 zavisi od y_1. Neka na primer y_1 zavisi od y_2, tj. $y_1 = F(y_2)$ i dakle $x_1 + x_2 = F(x_1x_2)$ za sve tačke (x_1, x_2) iz uzete okoline. Za tačke $(x_1, 0)-$ tačke prve ose: $x_1 = F(0) = const.$, a to je suprotno činjenici da se x_1 menja duž x_1 ose. To znači da y_1 ne zavisi od y_2. Ako se pretpostavi da y_2 zavisi od y_1, tj. $y_2 = F(y_1)$, odnosno $x_1x_2 = F(x_1 + x_2)$ za sve tačke (x_1, x_2) iz uzete okoline, odatle za tačke $(x_1, -x_1)$ (tačke koje pripadaju pravoj $x_2 = -x_1$) sledi $-x_1^2 = F(0) = const.$, što protivureči činjenici da se x_1 menja duž navedene prave. Dakle, y_2 ne zavisi od y_1, tj. funkcije y_1 i y_2 su nezavisne u proizvoljnoj okolini tačke $O(0,0)$.

1.63 Ispitati zavisnost funkcija

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ y_1 &= (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2. \end{aligned}$$

◀ Funkcionalna matrica sastavljena od parcijalnih izvoda funkcija y_1, y_2, y_3 glasi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) \end{bmatrix}.$$

Rang matrice A je 2, jer su svi minori trećeg reda jednaki nuli (zašto?). Zato su funkcije sistema zavisne u celom prostoru $\mathbb{R}^4$ (obnoviti definiciju pojma i osnovnu teoremu $[2], II$, Teorema 3.5.1 ili $[9], I$, Teorema 5.7.III). ►

Napomena. Na osnovu matrice A i navedene teoreme iz $[2], II$ tj. $[9], I$ može se dati opsežnija diskusija o nezavisnosti funkcija y_1, y_2, y_3. Na osnovu toga su y_1 i y_2 nezavisne u proizvoljnoj okolini svake tačke $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ prostora $\mathbb{R}^4$, a to znači da su takve i u celom prostoru. Dalje, funkcija y_3 zavisi od y_1 i y_2 u nekoj okolini svake tačke prostora $\mathbb{R}^4$. Odatle ne sledi da y_3 zavisi od y_1 i y_2 u celom prostoru (zadatak 1.32). Međutim u ovom slučaju je $y_3 = 0,5\left(y_1^2 + y_2^2\right)$, tj. y_3 zavisi od y_1 i y_2 u celom prostoru. Opet se zaključuje da su funkcije y_1, y_2, y_3 zavisne u $\mathbb{R}^4$.

1.64 Date su funkcije,

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ (x+1)^2, & x \leq -1. \end{cases}$$

Dokazati da y_1 zavisi od y_2 u nekoj okolini proizvoljne tačke brojne prave, ali y_1 ne zavisi od y_2 na celoj brojnoj pravoj.

◄ Za sve $x \in \mathbb{R}$ može se naći takva okolina u kojoj se zavisnost y_1 od y_2 za $x > -1$ izražava formulom $y_1 = F_1(y_2) = y_2$, dok za $x \leq -1$ formulom $y_1 = F_2(y_2)$. Dakle, y_1 zavisi od y_2 u nekoj okolini tačke $x \in \mathbb{R}$. Ali, y_1 ne zavisi od y_2 na celoj brojnoj pravoj $\mathbb{R}$. Zaista, ako nije tako, onda postoji diferencijabilna funkcija $F(y_2)$ takva da je za sve $x \in \mathbb{R}$: $y_1 = F(y_2)$. Pogledati ($[2], II$ ili $[9], I$- o nezavisnosti funkcija). Poslednja jerdnakost postaje identitet prilikom zamene $y_1 = y_1(x)$ i $y_2 = y_2(x)$: $y_1(x) = F(y_2(x))$. Stavljajući u ovu jednakost $x = -2$, dobija se $y_1(-2) = 0$, $y_2(-2) = 1$, tj. $F(1) = 0$. Uzimajući zatim $x = 1$, dobija se iz $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 1$, da je $F(1) = 1$. Jednakosti $F(1) = 0$ i $F(1) = 1$ protivureče jedna drugoj. Dobija se dakle da funkcija y_1 ne zavisi od y_2 na celoj brojnoj pravoj. ►

1.2.7 Vezani ekstremumi

1.65 Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u = x+y+z^2$ ako je $z-x = 1$, $y - xz = 1$, koristeći Lagranžovu funkciju.

◄ Lagranžova funkcija je

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z^2 + \lambda(z - x - 1) + \mu(y - xz - 1).$$

Rešavanjem sistema

$$F_x = 1 - \lambda - \mu z = 0$$

$$\begin{aligned} F_y &= 1+\mu=0, \\ F_z &= 2z+\lambda-\mu x=0, \\ F_\lambda &= z-x-1=0, \\ F_\mu &= y-xz-1=0, \end{aligned}$$

dobijaju se tačke u kojima funkcija F može da ima lokalne ekstremume. Pošto je $\mu=-1$, to je sistem ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned} 1-\lambda+z &= 0, \\ 2z+\lambda+x &= 0, \\ z-x-1 &= 0, \\ y-xz-1 &= 0, \end{aligned}$$

odakle se dobija $\lambda=1$, $x=-1$, $z=0$, $y=1$. Znači tačka $N(-1,1,0)$ je jedina u kojoj funkcija $u=x+y+z^2$ može pod datim uslovima da ima lokalni ekstremum. S obzirom da je

$$F_{x^2}=F_{y^2}=0,\ F_{z^2}=2,\ F_{xy}=F_{yz}=0,\ F_{xz}=-\mu,$$

imamo $d^2F(N)=2(dz)^2+2dzdx$. Iz datih uslova $z-x=1$ i $y-xz=1$ sledi

$$dz-dx=0 \text{ i } dy-xdz-zdx=0,$$

tj. u tački N je $dz-dx=0$ i $dy+dz=0$. Zato je $d^2F(N)=4(dx)^2>0$, tj. u tački N funkcija u pod datim uslovima postiže (uslovni) minimum $u_{\min}=0$. ▶

Napomena. a) Forma $d^2F(N)=4(dx)^2$ je pozitivno definitna, jer ako je $dx=0$ onda je $dy=0$, odnosno i $dz=0$. To je nemoguće, jer se pretpostavlja da je bar jedna od promenljivih dx, dy, dz,... različita od nule.

b) Student ne sme da zaboravi da nađe rang matrice

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{1z} \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & \varphi_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -z & 1 & -x \end{bmatrix}$$

na skupu S rešenja sistema: $\varphi_i(x,y,z)=0$, $i=1,2$. U ovom slučaju on je 2. Osnovna pretpostavka o skupu S je ispunjena ([2], II, strana 88 ili [9], I, strana 254).

1.66 Metodom eliminacije promenljivih naći lokalne ekstremume funkcije $u=x+y-z$ ako je

$$\begin{aligned} 4x^3+4y^3+4z^3+12x+12y+12z &= 13 \\ x+y &= 1. \end{aligned}$$

◄ Ako se sa

$F_1(x,y,z) = 4x^3+4y^3+4z^3+12x+12y+12z-13$ i $F_2(x,y,z) = x+y-1$

označe funkcije koje se dobijaju iz datih uslova, one su nezavisne jer je rang matrice

$$\begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2+12 & 12y^2+12 & 12z^2+12 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

njihovih parcijalnh izvoda jednak 2 (proveriti) u svakoj tački $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pošto je

$$\frac{\mathcal{D}(F_1,F_2)}{\mathcal{D}(y,z)} = -\left(12x^2+12\right) \neq 0,$$

dati sistem definiše jedinstvene funkcije $y = y(x)$, $z = z(x)$, dva puta diferencijabilne u nekoj okolini svake tačke (x,y,z) koja zadovoljava sistem. Zamenjujući te funkcije u izrazu za $u = x+y-z$ dobija se funkcija $u = u(x)$ sa jednom promenljivom. Uzimanjem diferencijala obeju strana jednačina sistema dobija se

$$\left(x^2+1\right)dx + \left(y^2+1\right)dy + \left(z^2+1\right)dz = 0,\ dx+dy = 0,$$

tj. $dy = -dx$, $dz = \frac{1-2x}{1+z^2}dx$. S obzirom da iz date funkcije $u = x+y-z$ sledi $du = dx+dy-dz$, to je

$$du = \frac{2x-1}{z^2+1}dx = \frac{2x-1}{z^2(x)+1}dx.$$

Odavde se dobija da je $u'(x) = 0$, za $x = \frac{1}{2}$, tj. $y = \frac{1}{2}$ i $z = 0$. Dakle, tačka $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}0\right)$ je moguća tačka lokalnog ekstremuma. Pošto je

$$u''(x) = \frac{2\left(z^2(x)+1\right) - (2x-1)\left(2z \cdot z'(x)\right)}{\left(z^2(x)+1\right)^2},$$

to je $u''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$. Dakle, funkcija u tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ima lokalni minimum jednak 1. ►

Napomena. Ovo je tipičan primer zadatka gde se primenjuje implicitnost. Funkcije $y = y(x)$ i $z = z(x)$, za koje je pokazano da postoje zamenjene su u dati sistem i onda je izvršeno diferenciranje. Neka student proba da reši zadatak koristeći Lagranžovu funkciju ili na neki drugi način.

1.67 Metodom eliminacije promenljivih naći lokalne ekstremume funkcije $u = x+y+z^2$ ako je $z-x = 1$, $y-xz = 1$.

◀ Rešavanjem datog sistema po y i z dobija se:

$$y = x^2 + x + 1,\ \ z = x + 1,$$

tako da u postaje funkcija sa jednom promenljivom, tj. $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$. Pošto je $u'(x) = 4x + 4$, $u''(x) = 4$, to je $u_{\min} = u(-1) = 0$, odnosno imamo da je $u_{\min}(-1, 1, 0) = 0$. ▶

1.68 a) Neka tačka $M_0(x_0, y_0)$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{x^2}{2} - (x+1)\arctan y = 0,\ \ x > -1.$$

Dokazati da postoji neprekidno diferencijabilno rešenje $y = f(x)$ date jednačine, takvo da kriva koju ono predstavlja prolazi kroz tačku $M_0(x_0, y_0)$ i jedinstveno je u nekoj okolini te tačke.

b) Dokazati da postoji tačka $M_0(x_0, y_0)$ takva da odgovarajuće rešenje $y = f(x)$ date jednačine ima minimum za $x = x_0$.

◀ **a)** Ovde je $F(x, y) = \frac{x^2}{2} - (x+1)\arctan y$, neprekidna funkcija u delu ravni $\mathbb{R}^2$ gde je $x > -1$, i $F_y = -\frac{x+1}{1+y^2} \neq 0$. S obzirom da su ispunjeni svi uslovi teoreme o implicitnoj funkciji (neka student proveri sve uslove) to je prvi deo zadatka rešen.

b) Iz uslova $y'(x) = 0$, tj. $F_x = 0$, dobijamo $x - \arctan y = 0$, što sa polaznom jednačinom

$$\frac{x^2}{2} - (x+1)\arctan y = 0,$$

daje $x = 0$ ili $x = -2 < -1$. Ostaje da se proveri da funkcija koju definiše jednakost ima u nuli minimum. To je jasno, jer iz jednakosti

$$\frac{x^2}{2(x+1)} = \arctan y,$$

za $x \neq 0$, sledi da je $y > 0$. ▶

1.69 Odrediti supremum i infimum funkcije $u(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 6y$ ako je $x^2 + y^2 \leq 25$.

◀ S obzirom da je domen funkcije kompaktan podskup od $\mathbb{R}^2$, to prema Vajerštrasovoj teoremi funkcija na njemu postiže maksimum (supremum) i minimum (infimum). Stacionarne tačke u unutrašnjosti kruga nalaze se rešavanjem sistema: $u_x = 2x - 12 = 0$ i $u_y = 2y + 6 = 0$. Pošto se rešenje sistema tačka $(6, -3)$ nalazi van kruga, to na kružnici

$$x = 5\cos t,\ \ y = 5\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi[$$

funkcija postiže najmanju i najveću vrednost. Sada je $u(x,y) = u(t) = 25 - 60\cos t + 30\sin t$, te je

$$u'(t) = 60\sin t + 30\cos t \text{ i } u''(t) = 60\cos t - 30\sin t.$$

Dakle, iz $u'(t) = 0$ tj. $\tan t = -\frac{1}{2}$, sledi da postoje $t_0, t_1 \in [0, 2\pi[$ u kojim funkcija postiže najmanju ($u''(t_1) > 0$) i najveću ($u''(t_0) < 0$) vrednost. Pošto je

$$\sin t_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos t_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ i } \sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos t_0 = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

to je $u_{\min} = u(t_1) = 25 - 30\sqrt{5}$ i $u_{\max} = u(t_0) = 25 + 30\sqrt{5}$. ▶

Napomena. Neka student reši drugi deo zadatka pomoću Lagranžove funkcije

$$F(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$$

i proveri rešenje.

1.70 Naći supremum i infimum funkcije $u = (x+y+z)\,e^{-(x+2y+3z)}$ u oblasti $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

◀ Tačke u kojima funkcija može da ima lokalne ekstremume su rešenja sistema:

$$\begin{aligned} u_x &= e^{-(x+2y+3z)} - (x+y+z)\,e^{-(x+2y+3z)} = 0, \\ u_y &= e^{-(x+2y+3z)} - 2(x+y+z)\,e^{-(x+2y+3z)} = 0, \\ u_z &= e^{-(x+2y+3z)} - 3(x+y+z)\,e^{-(x+2y+3z)} = 0, \end{aligned}$$

odnosno sistema

$$\begin{aligned} 1 &= x+y+z, \\ 1 &= 2(x+y+z), \\ 1 &= 3(x+y+z), \end{aligned}$$

koji je nemoguć. Iz $\lim\limits_{\substack{x\to 0, y\to 0\\ z\to 0}} u(x,y,z) = 0$ sledi da je $\inf\limits_{\substack{x>0, y>0\\ z>0}} u(x,y,z) = 0$ na osnovu definicije granične vrednosti funkcije i infimuma skupa. Pošto je

$$u(x,y,z) \le (x+y+z)\,e^{-(x+y+z)} = te^{-t}$$

i kako funkcija $t \mapsto te^{-t}$ ima maksimum $\frac{1}{e}$ za $t = 1$, to je $\sup\limits_{\substack{x>0, y>0\\ z>0}} u(x,y,z) \le \frac{1}{e}$. Ako se domen funkcije ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) proširi uslovom $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, onda se na rubu domena dobijaju sledeće funkcije:

$$xe^{-x},\ ye^{-2y},\ ze^{-3z},\ (x+y)\,e^{-(x+2y)},\ (x+z)\,e^{-(x+3z)},\ (y+z)\,e^{-(2y+3z)}.$$

Prve tri imaju lokalne maksimume redom $\frac{1}{e}$ za $x = 1$; $\frac{1}{2e}$ za $y = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3e}$ za $z = \frac{1}{3}$. Druge tri funkcije nemaju lokalnih maksimuma većih od maksimuma prve tri funkcije. Stoga je $\sup\limits_{\substack{x>0,y>0\\z>0}} u(x,y,z) = \frac{1}{e}$. ►

1.71 Odrediti ekstremume funkcije $u(x,y,z) = x + y + z$ na skupu $A = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.

◄ S obzirom da je $A \subset \mathbb{R}^3$ kompaktan podskup to na njemu funkcija postiže najmanju i najveću vrednost. U unutrašnjosti skupa, ona ne postiže lokalne ekstremume, jer nema stacionarnih tačaka. Ako su M, N, P redom presečne tačke ravni $x+y+z = 1$ sa koordinatnim osama, onda u unutrašnjosti trouglova OMN, ONP i OMP funkcija takođe ne postiže ekstremume (O je koordinatni početak). U svim tačkama trougla MNP funkcija uzima vrednost 1. Na dužima OM, ON i OP ona ima redom vrednosti x, y, z. Dakle,

$$u_{\min} = 0 = u(0,0,0) \text{ i } u_{\max} = 1 = u(x,y,z)$$

za sve $(x,y,z) \in \triangle\ MNP$. ►

1.72 Neka su $x_k \in]0,1[\,, 1 \leq k \leq m$ i $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k = 1,\ m > 1$. Dokazati nejednakost $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x_k} \geq \frac{m^2}{m-1}$.

◄ Treba naći lokalne ekstremume funkcije

$$u(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - x_k}$$

pod uslovom $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k = 1,\ x_k \in]0,1[\,, 1 \leq k \leq m$. Uzimanjem uobičajene Lagranžove funkcije

$$F(x_1, x_2, ..., x_m, \lambda) = u(x_1, x_2, ..., x_m) - \lambda \left(\sum_{k=1}^{m} x_k - 1 \right)$$

i nakon proveravanja uslova osnovne teoreme o vezanim ekstremumima ($[2], II$ ili $[9], I$) dobija se sistem za određivanje mogućih stacionarnih tačaka:

$$F_{x_k} = \frac{1}{(1 - x_k)^2} - \lambda = 0,\ k = \overline{1,m};\ F\lambda = \sum_{k=1}^{m} x_k - 1.$$

S obzirom na uslove u zadatku lako se dobija da je $M\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},...,\frac{1}{m}\right),\lambda=\frac{m^2}{(m-1)^2}$ jedina stacionarna tačka funkcije F. Zatim je

$$F_{x_k^2}=\frac{1}{(1-x_k)^3},\ k=\overline{1,m};\ F_{x_jx_i}=0 \text{ za } i\neq j,$$

Odatle se dobija totalni diferencijal drugog reda funkcije F u tački $M\left(\frac{1}{m},...,\frac{1}{m}\right)$, za $\lambda=\frac{m^2}{(m-1)^2}$:

$$d^2F(M)=\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{(1-x_k)^3}dx_k^2=\frac{2m^3}{(m-1)^3}\sum_{k=1}^{m}dx_k^2>0.$$

Korišćena je činjenica, da iz uslova $\sum\limits_{k=1}^{m}x_k=1$ sledi $\sum\limits_{k=1}^{m}dx_k=0$. Dobija se dakle da funkcija u ima u tački $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},...,\frac{1}{m}\right)$ lokalni minimum, koji iznosi $m\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{m}}=\frac{m^2}{m-1}$. To znači da je navedena nejednakost dokazana. ►

Napomena. Data nejednakost trivijalno sledi primenom nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine na (pozitivne) brojeve $1-x_k$, $k=\overline{1,m}$:

$$\frac{m}{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x_k}}\leq\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(1-x_k)=\frac{m-1}{m}.$$

1.73 Naći najkraće rastojanje tačke $(0,3,3)$ od kruga

$$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=1\right\}.$$

◄ Ako je (x,y,z) proizvoljna tačka datog kruga onda je kvadrat rastojanja te tačke do tačke $(0,3,3)$ jednak

$$u(x,y,z)=x^2+(y-3)^2+(z-3)^2.$$

Treba dakle naći minimum funkcije u pod uslovoma: $x^2+y^2+z^2=1$ i $x+y+z=1$. Pošto je rang matrice

$$\begin{bmatrix}\varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{1z}\\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & \varphi_{2z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

jednak 2 (manji od broja promenljivih, tj. manji od 3) gde su $\varphi_i(x,y,z)=0$, $i=1,2$ date veze promenljivih, to se koristeći Lagranžovu funkciju

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=u(x,y,z)+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+\mu(x+y+z-1)$$

određuje minimum funkcije u. Rešenja sistema

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F_y &= 2(y-3) + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F_z &= 2(z-3) + 2\lambda z + \mu = 0, \\ F\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ F\mu &= x + y + z - 1 = 0, \end{aligned}$$

su moguće tačke lokalnih ekstremuma. Oduzimanjem druge od treće jednačine dobija se $2(z-y)(\lambda+1) = 0$, odakle sledi $z = y$ ili $\lambda = -1$. Ako je $\lambda = -1$ onda se dobija $\mu = 0$ iz prve jednačine tj. $\mu = 6$ iz druge jednačine. Dakle $\lambda \neq -1$, tj. $z = y$, odnosno dobija se sistem

$$x^2 + 2y^2 = 1 \text{ i } x + 2y = 1,$$

čija su rešenja $(1,0)$ i $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Moguće tačke u kojima funkcija u postiže minimum su $M_1(1,0,0)$ i $M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Zbog $u(M_1) = 19$, $u(M_2) = 11$, tačka M_2 kruga K je najbliža tački $(0,3,3)$ i od nje je udaljena za $\sqrt{11}$. ▶

1.74 Data je funkcija

$$u(x,y) = \frac{x^2}{4a} + \sqrt{6a^2 - x^2}\cos y, \ a > 0,$$

a) Naći lokalne ekstremume funkcije u za koje je $|x| < a\sqrt{6}$;

b) Naći najmanju i najveću vrednost funkcije u na skupu

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a\sqrt{6}\right\}.$$

◀ **a)** Funkcija je definisana na otvorenom skupu $\left]-a\sqrt{6}, a\sqrt{6}\right[\times \mathbb{R}$. U njegovim tačkama imamo sistem:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{2a} - \frac{x}{\sqrt{6a^2 - x^2}}\cos y = 0 \\ u_y &= -\sqrt{6a^2 - x^2}\sin y = 0, \end{aligned}$$

čija su rešenja $(0, k\pi)$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ i $\left(\pm a\sqrt{2}, 2k\pi\right)$. To su i stacionarne tačke. Zatim je

$$u_{x^2} = \frac{1}{2a} - \frac{6a^2\cos y}{(6a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \ u_{y^2} = -\sqrt{6a^2 - x^2}\cos y, \ u_{xy} = u_{yx} = \frac{x\sin y}{\sqrt{6a^2 - x^2}}.$$

Onda je

$$d^2u\,(0,k\pi)=\frac{\sqrt{6}-2\,(-1)^k}{2\sqrt{6}a}dx^2-a\sqrt{6}\,(-1)^k\,dy^2,$$

tj. $d^2u\,(0,k\pi)$ menja znak za parne vrednosti broja k ($dy=0,\ dx\neq 0$; $dy\neq 0,\ dx=0$). Ako je $k-$neparno

$$d^2u\,(0,k\pi)=\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{6}a}dx^2+a\sqrt{6}dy^2>0.$$

Dakle u tačkama $M_k\,(0,(2k+1)\,\pi)\,,\ k\in\mathbb{Z}$, funkcija ima lokalni minimum $u_{\min}=-a\sqrt{6}$. Dalje je

$$d^2u\left(\pm a\sqrt{2},2k\pi\right)=-\frac{1}{4a}dx^2-2ady^2<0$$

tj. funkcija ima u tačkama $N_k\left(\pm a\sqrt{2},2k\pi\right)$ lokalni maksimum $u_{\max}=\frac{5a}{2}$.

b) Pošto je $u\left(\pm a\sqrt{6},y\right)=\frac{3a}{2}<\frac{5a}{2}$ onda u tim tačkama funkcija ne postiže najveću vrednost. Najveću vrednost postiže u tačkama N_k i ona iznosi $u_{\max}=\frac{5a}{2}$. Najmanju vrednost postiže u tačkama M_k i ona iznosi $u_{\min}=-a\sqrt{6}$. ▶

1.75 Na paraboloidu $z=c-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$, $c>0$, odrediti tačku u kojoj tangentna ravan sa koordinatnim ravnima zaklapa tetraedar minimalne zapremine.

◀ Neka je $M\,(x_0,y_0,z_0)$ tačka na paraboloidu. Onda je

$$z-z_0=(x-x_0)\left(-\frac{2x_0}{a^2}\right)+(y-y_0)\left(-\frac{2y_0}{b^2}\right)$$

jednačina tangentne ravni sa dodirom u tački M. Njen segmentni oblik je $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$ gde je

$$A=\frac{a^2\,(2c-z_0)}{2x_0},\ B=\frac{b^2\,(2c-z_0)}{2y_0},\ C=2c-z_0.$$

Ako je V zapremina navedenog tetraedra, onda je

$$\frac{24}{a^2b^2}V=\frac{(2c-z_0)^3}{x_0y_0}.$$

Dakle, treba naći ekstremne vrednosti funkcije $u\,(x,y,z)=\frac{(2c-z)^3}{xy}$ ako je $z=c-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$. Lagranžova funkcija je

$$F\,(x,y,z,\lambda)=\frac{(2c-z)^3}{xy}+\lambda\left(z-c+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Moguće tačke lokalnih ekstremuma su rešenja sistema

$$\begin{aligned}
F_x &= -\frac{(2c-z)^3}{x^2 y} + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\
F_y &= -\frac{(2c-z)^3}{x y^2} + \frac{2\lambda y}{a^2} = 0, \\
F_z &= -\frac{3\,(2c-z)^3}{xy} + \lambda = 0, \\
F\lambda &= z - c + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.
\end{aligned}$$

Iz geometrijske prirode zadatka je $x \neq 0$, $y \neq 0$. Iz prve dve jednačine sledi $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$, a iz druge i treće je $z = 2c - \frac{6y^2}{b^2}$. Koristeći zatim četvrtu jednačinu dobija se tačka $N\left(\frac{a\sqrt{c}}{2}, \frac{b\sqrt{c}}{2}, \frac{7c}{8}\right)$ za $\lambda = \frac{27c}{ab}$. Postoje još tri tačke (u drugom, trećem i četvrtom oktantu, $z > 0$) koje daju tetraedre iste zapremine. Neka se student uveri (koristeći znak kvadratne forme) da u dobijenoj tački N funkcija F, a samim tim i u, ima lokalni minimum. ▶

1.76 Naći rastojanje između parabole $y = x^2$ i prave $x - y - 2 = 0$.

◀ Ako je $M\,(x, y)$ proizvoljna tačka parabole $y = x^2$, onda je sa

$$d\,(x, y) = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{2}}$$

dato rastojanje te tačke od date prave. Minimum te funkcije (vezani ekstremum) je traženo rastojanje parabole i prave. On se može naći metodom eliminacije jedne promenljive, na primer $y = x^2$ (uslov). Pošto je parabola sa iste strane prave $x - y - 2 = 0$ sa koje je i koordinatni početak $(x - y - 2 < 0)$ to je

$$d\,(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x + x^2 + 2\right)$$

funkcija čiji je minimum traženo rastojanje. Ostaje, da student nađe lokalne ekstremume funkcije $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x + x^2 + 2\right)$ jedne promenljive. Traženo rastojanje parabole i prave je $\frac{7}{4\sqrt{2}}$, a tačka $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ parabole je najbliža datoj pravoj. ▶

Napomena. Neka student proba Lagranžovom funkcijom

$$F\,(x, y, \lambda) = d\,(x, y) + \lambda\left(y - x^2\right)$$

ili na neki drugi način.

1.77 Na elipsoidu $x^2+2y^2+4z^2=8$ naći najudaljeniju tačku od tačke $(0,0,3)$.

◀ Rastojanje između tačaka (x,y,z) i $(0,0,3)$ dato je formulom $d=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}$ iz koje sledi funkcija

$$u(x,y,z)=d^2=x^2+y^2+(z-3)^2.$$

Nalaženje najudaljenije tačke datog elipsoida od tačke $(0,0,3)$ svodi se na određivanje maksimuma funkcije u pod uslovom: $x^2+y^2+4z^2=8$. Laganžova funkcija je

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+(z-3)^2+\lambda\left(x^2+y^2+4z^2-8\right).$$

Odgovarajući sistem jednačina je

$$\begin{aligned}
F_x &= 2x+2\lambda x=2x(1+\lambda)=0,\\
F_y &= 2y+4\lambda y=2y(1+2\lambda)=0,\\
F_x &= 2z-6+8\lambda z=0,\\
F_x &= x^2+y^2+4z^2-8=0,
\end{aligned}$$

koji je ekvivalentan disjunkciji četiri sistema:

$$\begin{aligned}
&(x=0\wedge y=0\wedge F_z=0\wedge F\lambda=0)\\
&\vee(x=0\wedge 1+2\lambda=0\wedge F_z=0\wedge F\lambda=0)\\
&\vee(1+\lambda=0\wedge y=0\wedge F_z=0\wedge F\lambda=0)\\
&\vee(1+\lambda=0\wedge 1+2\lambda=0\wedge F_z=0\wedge F\lambda=0).
\end{aligned}$$

Drugi i četvrti sistem nemaju rešenja. Prvi sistem ima za rešenje tačke $A\left(0,0,\sqrt{2}\right)$, $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{4}$, i $B\left(0,0,-\sqrt{2}\right)$, $\lambda=-\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{4}$, a treći sistem ima takođe dva rešenja: $C(2,0,-1)$ i $D(-2,0,-1)$, $\lambda=1$. Kako je

$$u(A)=\left(3-\sqrt{2}\right)^2<\left(3+\sqrt{2}\right)^2=u(B)<20=u(C)=u(D),$$

to su C i D najudaljenije tačke elipsoida od tačke $(0,0,3)$. ▶

1.2.8 Smena promenljih

1.78 U jednačini $yy'+xy^2+x^3=0$ preći na promenljive t, u gde je $u=u(t)$, ako su formule smene promenljivih date sa

$$u^2-y^2-x^2=0 \text{ i } x^2-t^2+u^2=0.$$

◀ Difrencirajući jednačine sistema po promenljivoj t dobija se

$$u\,\dot{u} - y\,\dot{y} - x\,\dot{x} = 0 \text{ i } x\,\dot{x} - t + u\,\dot{u} = 0,$$

odakle sledi

$$\dot{x} = \frac{t - u\,\dot{u}}{x}, \quad \dot{y} = \frac{2u\,\dot{u} - t}{y}.$$

Iz formule $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (kada su x, y izraženi preko parametra t) se dobija:

$$y' = \frac{x\left(2u\,\dot{u} - t\right)}{y\left(t - u\,\dot{u}\right)}.$$

Zamenjujući u polaznu jednakost i eliminišući x, y koristeći polazni sistem dobija se veza

$$u\,\dot{u} = \frac{t\left(1 - u^2\right)}{2 - u^2}$$

funkcije u sa promenljivom t. ▶

1.79 Rešiti jednačinu $\left(1 + x^2\right)^2 y'' = y$ prelazeći na nove promenljive t, u gde je $u = u(t)$, ako je $x = \tan t$, $y = \frac{u}{\cos t}$.

◀ Iz datih veza je

$$\dot{x} = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \dot{y} = \frac{\dot{u}\cos t + u \sin t}{\cos^2 t}, \text{ tj. } y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{u}\cos t + u \sin t.$$

Zatim je

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\dot{u}\cos t + u \sin t\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{u}\cos t + u \sin t\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \left(\ddot{u}\cos t - \dot{u}\sin t + u\cos t + \dot{u}\sin t\right)\frac{1}{\dot{x}} = \left(\ddot{u} + u\right)\cos^3 t. \end{aligned}$$

Sada jednačina $\left(1 + x^2\right)^2 y'' = y$ postaje $u'' = 0$. Njeno rešenje je linearna funkcija $u = At + B$, odnosno prelaskom na stare promenljive $y = (A \arctan x + B)\sqrt{1 + x^2}$. ▶

1.80 Rešiti jednačinu $y''(y')^{-3} - x = 0$ uzimajući y za novu nezavisno promenljivu, a x za novu funkciju.

◀ Imitirajući postupak iz prethodnog zadatka, to znači da se prelazi na nove promenljive uslovima:

$$t = y, \; u = x, \; u = u(t).$$

Diferenciranjem jednačina datih uslova po t dobijamo $1 = \dot{y}$, $\dot{u} = \dot{x}$. Zatim je $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{\dot{u}}$ tj.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\dot{u}}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{(\dot{u})^2} \cdot \ddot{u} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = -\frac{1}{(\dot{u})^2} \cdot \ddot{u} \cdot \frac{1}{\dot{u}} = -\frac{\ddot{u}}{(\dot{u})^3}.$$

Onda polazna jednačina glasi $\ddot{u} + u = 0$, tj. $x''(y) + x(y) = 0$. Njeno rešenje je $x = A \sin(y + \varphi)$ gde su A, φ konstante, tj. $y = \arcsin \frac{x}{A} - \varphi$. ►

1.81 Transformisati jednačinu $xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$ uzimajući y za novu nezavisno promenljivu, a $z = \ln \frac{y}{x}$ za novu funkciju.

◄ Uzimajući $z = \ln \frac{y}{x}$ i $t = y$ tj. $x = te^{-z}$ i $y = t$ za smenu promenljivih treba dati diferencijalni izraz transformisati u oblik $F(t, z, z', z'') = 0$. Iz poslednjih uslova je:

$$dx = e^{-z}(dt - tdz), \text{ i } dy = dt,$$

tj. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^z}{1 - tz'}$ gde je $z' = \frac{dz}{dt}$. Zatim je

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dt}\left(\frac{e^z}{1 - tz'}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{e^z z'(1 - tz') + e^z(z' + tz'')}{(1 - tz')^2} \cdot \frac{e^z}{1 - tz'} \\ &= e^{2z} \cdot \frac{z' - tz'^2 + z' + tz''}{(1 - tz')^3}. \end{aligned}$$

Zamenjujući y', y'' svojim vrednostima preko t, z, z', z'' u polaznu jednačinu dobija se $t \cdot z''_t + z'_t = 0$ što je i traženi oblik $F(t, z, z', z'') = 0$. ►

Napomena. Smenom promenljivih $x = x(u, t)$, $y = y(u, t)$ gde je $u = u(t)$, diferencijalni izraz $F_1(x, y, y', y'') = 0$ transformiše se u izraz $F_2(t, u, u'(t), u''(t)) = 0$.

1.82 Transformisati izraz $B = xz_x + yz_y - 2z$ prelaskom na nove promenljive date uslovima

$$u = \frac{x}{y}, \; v = \frac{x^2 + y^2}{2}, \; \varpi = \frac{xy}{z},$$

gde je $\varpi = \varpi(u, v)$.

◄ Iz datih uslova sledi

$$\begin{aligned} du &= \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy \\ dv &= x dx + y dy \\ d\varpi &= \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz \end{aligned}$$

Kako je $dz = z_x dx + z_y dy$, to treća jednačina prethodnog sistema postaje

$$d\varpi = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}\left(z_x dx + z_y dy\right).$$

Pošto je $\varpi = \varpi\left(u, v\right)$, tada je $d\varpi = \varpi_u du + \varpi_v dv$. Zamenjujući du, dv i $d\varpi$ svojim vrednostima preko x, y, z, dx, dy, dobija se jednačina

$$\varpi_u \left(\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}dy\right) + \varpi_v \left(xdx + ydy\right) = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}\left(z_x dx + z_y dy\right)$$

za nalaženje parcijalnih izvoda z_x, z_y. Izjednačavanjem izraza uz dx i dy leve i desne strane poslednje jednačine dobija se sistem

$$\frac{1}{y}\varpi_u + x\varpi_v = \frac{y}{x} - \frac{xy}{z^2}z_x \text{ i } -\frac{x}{y^2}\varpi_u + y\varpi_v = \frac{x}{z} - \frac{xy}{z^2}z_y,$$

za nalaženje z_x, z_y. Rešavanjem dobijamo

$$z_x = \frac{z}{x} - \frac{z^2}{xy^2}\varpi_u - \frac{z^2}{y}\varpi_v,\ z_y = \frac{z}{y} + \frac{z^2}{y^3}\varpi_u - \frac{z^2}{x}\varpi_v.$$

Sada je $B = -z^2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = -\frac{4uv^2}{\varpi^2(1+u^2)}\varpi_v$. Novi izraz zavisi od novih promenljivih u i v, nove funkcije $\varpi = \varpi\left(u, v\right)$ i parcijalnih izvoda. ▶

Napomena. Ako su u, v, ϖ dati preko x, y, z kao u prethodnom primeru, student treba da zna da je izloženo rešenje opšti metod za transformaciju diferencijalnog izraza oblika $B = B\left(x, y, z, z_x, z_y\right)$

1.83 Rešiti jednačinu $z_y - z_x = 0$ uvođenjem smene promenljivih

$$u = x + y,\ v = x - y.$$

◀ Imamo da je $du = dx + dy$, $dv = dx - dy$. Pošto je $dz = z_x dx + z_y dy$ i $dz = z_u du + z_v dv$ (zašto?) to je

$$z_x dx + z_y dy = z_u\left(dx + dy\right) + z_v\left(dx - dy\right)$$

tj. $z_x = z_u + z_v$ i $z_y = z_u - z_v$. Sada polazna jednačina dobija oblik $2z_v = 0$. Njeno rešenje je proizvoljna diferencijabilna funkcija $z = f\left(u\right)$, odnosno, $z = f\left(x + y\right)$ preko starih promenljivih. ▶

1.84 Transformisati jednačinu $z_{x^2} + z_{xy} + z_x = z$ prelazeći na nove promenljive $u, v, \varpi = \varpi\left(u, v\right)$ date sa $x = u + v$, $y = u - v$, $z = \varpi e^{v-u}$.

◀ Uzimajući u obzir da je $d\varpi = \varpi_u du + \varpi_v dv$, i date uslove sledi

$$\begin{aligned} dx &= du + dv, \\ dy &= du - dv, \\ dz &= e^{v-u}\left(\varpi_u du + \varpi_v dv\right) + \varpi e^{v-u}\left(dv - du\right). \end{aligned}$$

Iz prve dve jednačine dobijamo da je $du = 0,5\,(dx + dy)$ i $dv = 0,5\,(dx - dy)$. Zamenjujući ove vrednosti u izrazu za dz imamo:

$$z_x dx + z_y dy = 0,5e^{v-u}\left(\varpi_u\,(dx + dy) + \varpi_v\,(dx - dy)\right) - \varpi e^{v-u}dy.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz dx nalazimo da je $z_x = 0,5e^{v-u}\left(\varpi_u + \varpi_v\right)$. Da bismo našli parcijalne izvode z_{x^2} i z_{xy} postupamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} dz_x &= z_{x^2}dx + z_{xy}dy = 0,5e^{v-u}\,(du - dv)\,(\varpi_u + \varpi_v) \\ &\quad +0,5e^{v-u}\left(\varpi_{u^2}du + \varpi_{uv}dv + \varpi_{vu}du + \varpi_{v^2}dv\right). \end{aligned}$$

Zamenjujući sada izraze za du, dv imamo jednakost

$$\begin{aligned} dz_x &= z_{x^2}dx + z_{xy}dy = -0,5e^{v-u}\,(\varpi_u + \varpi_v)\,dy \\ &\quad +0,25e^{v-u}\left(\varpi_{u^2}\,(dx + dy) + 2\varpi_{uv}dx + \varpi_{v^2}\,(dx - dy)\right). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz dx i dy obeju strana poslednje jednakosti, dobijamo

$$z_{x^2} = 0,25e^{v-u}\left(\varpi_{u^2} + 2\varpi_{uv} + \varpi_{v^2}\right),$$

$$z_{xy} = z_{yx} = -0,5e^{v-u}\,(\varpi_u + \varpi_v) + 0,25e^{v-u}\left(\varpi_{u^2} - \varpi_{v^2}\right).$$

Zamenjivanjem dobijenih vrednost za parcijalne izvode prvog i drugog reda u dati izraz, dobija se $\varpi_{u^2} + \varpi_{v^2} = 2\varpi$. ►

Napomena. Ovde su stare promenljive izražene preko novih, za razliku od primera 83. Neka student izrazi nove promenljive preko starih i primeni metod izložen u zadatku 83 $(u = 0,5\,(x + y)\,, v = 0,5\,(x - y)\,, \varpi = ze^{-y})$.

1.85 Transformisati diferencijalnu jednačinu

$$z_{x^2} + z_{xy} + z_{y^2} = 1 + z - xy$$

uvodeći nove promenljive $u, v, \varpi = \varpi\,(u, v)$ sa

$$v + x + y + u = 1,\ v - x + y - u = 0,\ xy - z = \varpi.$$

◄ Iz datih uislova sledi

$$u = \frac{1 - 2x}{2}, v = \frac{1 - 2y}{2}, \varpi = xy - z,\ \text{tj.}$$

$$du = -dx,\ dv = -dy,\ d\varpi = ydx + xdy - dz.$$

Koristeći isti metod kao u zadacima 1.82 i 1.83 dobija se:

$$\varpi_u du + \varpi_v dv = ydx + xdy - z_x dx - z_y dy,\ \text{tj.}$$

$$-\varpi_u dx - \varpi_v dy = ydx + xdy - z_x dx - z_y dy$$

odakle je $z_x = y + \varpi_u$, $z_y = x + \varpi_v$. Sada je

$$dz_x = z_{x^2} dx + z_{xy} dy \text{ i } dz_x = dy + d\varpi_u, \text{ odnosno}$$

$$z_{x^2} dx + z_{xy} dy = dy + (\varpi_{u^2} du + \varpi_{uv} dv) = dy - \varpi_{u^2} dx - \varpi_{uv} dy.$$

Znači $z_{x^2} = -\varpi_{u^2}$, $z_{xy} = 1 - \varpi_{uv}$ kao i $dz_y = z_{yx} dx + z_{y^2} dy$ i

$$dz_y = dx + d\varpi_u = dx + (\varpi_{vu} du + \varpi_{v^2} dv) = dx - \varpi_{vu} dx - \varpi_{v^2} dy$$

odakle je $z_{y^2} = -\varpi_{v^2}$. Dakle, dati diferencijalni izraz postaje

$$-\varpi_{u^2} + 1 - \varpi_{uv} - \varpi_{v^2} = 1 - \varpi,$$

odnosno $\varpi_{u^2} + \varpi_{uv} + \varpi_{v^2} = \varpi$. ▶

1.86 Transformisati izraze $\Phi_1 = (z_x)^2 + z_y$, $\Phi_2 = z_{x^2} + z_{y^2}$ prelaskom na polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

◀ Iz jednakosti $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, sledi

$$\begin{aligned} dx &= \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi, \\ dy &= \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Pošto je $dz = z_x dx + z_y dy$ i $dz = z\rho d\rho + z\varphi d\varphi$ to je

$$z\rho d\rho + z\varphi d\varphi = z_x(\cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi) + z_y(\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi).$$

Odatle je

$$z\rho = z_x\cos\varphi + z_y\sin\varphi \text{ i } z\varphi = -\rho z_x\sin\varphi + z_y\rho\cos\varphi,$$

tj. rešavanjem poslednjeg sistema po z_x, z_y sledi

$$z_x = \frac{\rho z\rho\cos\varphi - z\rho\sin\varphi}{\rho}, \; z_y = \frac{z\varphi\cos\varphi + \rho z\rho\sin\varphi}{\rho}, \text{ te je}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho^2}(\rho z\rho\cos\varphi - z\rho\sin\varphi)^2 + \frac{z\varphi\cos\varphi + \rho z\rho\sin\varphi}{\rho}.$$

Kao u primerima 1.85 i 1.87 nalazimo parcijalne izvode z_{x^2} i z_{y^2} koristeći jednakosti:

$$dz_x = z_{x^2} dx + z_{xy} dy, \; dz_y = z_{yx} dx + z_{y^2} dy, \text{ s jedne i}$$

$$dz_x = \frac{d}{d\rho} z_x d\rho + \frac{d}{d\varphi} z_x d\varphi, \; dz_y = \frac{d}{d\rho} z_y d\rho + \frac{d}{d\varphi} z_y d\varphi,$$

s druge strane. Diferenciranjem se nalazi

$$\begin{aligned} dz_x &= \left(z_{\rho^2} \cos\varphi + \frac{z_\varphi}{\rho^2} \sin\varphi \right) d\rho + \left(-z_\rho \sin\varphi - \frac{z_{\varphi^2} \sin\varphi}{\rho} - \frac{z_\varphi \cos\varphi}{\rho} \right) d\varphi, \\ dz_y &= \left(z_{\rho^2} \sin\varphi - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \cos\varphi \right) d\rho + \left(z_\rho \cos\varphi - \frac{1}{\rho} z_\varphi \sin\varphi \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Zamenjujući dx, dy svojim vrednostima sa početka rešenja zadatka i izjednačavanjem koeficijenata uz $d\rho$ i $d\varphi$ dobijaju se sistemi

$$\begin{aligned} z_{x^2} \cos\varphi + z_{xy} \sin\varphi &= z_{\rho^2} \cos\varphi + \frac{1}{\rho^2} z_\varphi \sin\varphi, \\ -z_{x^2} \rho \sin\varphi + z_{xy} \rho \cos\varphi &= -z\rho \sin\varphi - \frac{z_{\varphi^2} \sin\varphi}{\rho} - \frac{z_\varphi \cos\varphi}{\rho} \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} z_{xy} \cos\varphi + z_{y^2} \sin\varphi &= z_\varphi \sin\varphi - \frac{1}{\rho^2} z_\varphi \cos\varphi, \\ -z_{yx} \sin\varphi + z_{y^2} \rho \sin\varphi &= z_\rho \cos\varphi - \frac{z_\varphi}{\rho} \sin\varphi, \end{aligned}$$

za određivanje z_{x^2}, x_{y^2}. Iz prvog sistema je

$$z_{x^2} = z_{\rho^2} \cos^2\varphi + z\rho \frac{\sin^2\varphi}{\rho} + 2z\rho \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\rho^2} + z_{\varphi^2} \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} - 2z_{\varphi\rho} \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\rho},$$

a iz drugog

$$z_{y^2} = z_{\varphi^2} \sin^2\varphi + z_\rho \frac{\cos^2\varphi}{\rho} + 2z_\varphi \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\rho^2} + z_{\varphi^2} \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} + 2z_{\varphi\rho} \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\rho}.$$

Na osnovu toga je

$$\Phi_2 = z_{\rho^2} + \frac{1}{\rho} z\rho + \frac{1}{\rho^2} z_{\varphi^2}. \; \blacktriangleright$$

1.3 Zadaci za samostalni rad

1.87 Pokazati da tangentne ravni površi $xyz = 8$ obrazuju sa koordinatnim ravnima tetraedar konstantne zapremine.

1.88 Kroz tačku $M\,(a, b, c)$ odrediti ravan koja sa koordinatnim ravnima gradi tetraedar najmanje zapremine.

1.89 Dokazati da:

a) Sve tangentne ravni površi $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$ prolaze kroz jednu tačku;

b) Sve tangentne ravni površi $z = x + \varphi(y - z)$ paralelne su jednoj pravoj. Pri tom se pretpostavlja da su funkcije f i φ neprekidno diferencijabilne.

1.90 Dokazati da sve normalne ravni krive

$$x = a\sin^2 t,\ y = a\sin t\cos t,\ z = a\cos t,\ a > 0,\ t \in [0, 2\pi]$$

sadrže istu tačku.

1.91 Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je zadata sa

$$f(x, y, z) = z^5 - z^4 e^x - z^3 \cos(xy) + z^2 + \sin x.$$

Dokazati da postoji otvorena okolina U tačke $(0, 0)$ i neprekidno diferencijabilna funkcija $g : U \to \mathbb{R}$, takva da je $f(x, y, g(x, y)) = 0$, za sve $(x, y) \in U$. Izračunati parcijalne izvode g_x, g_y funkcije g u tački $(0, 0)$.

1.92 Neka je $u(x_1, x_2, x_3)$ homogena funkcija stepena m i neka su uvedene oznake $u_{x_i} = u_i$, $u_{x_i x_j} = u_{ij}$. Dokazati relaciju

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{(m-1)^2}{x_3^2} \begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1} & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}.$$

1.93 Odrediti Tejlorov red funkcije $f(x, y) = \frac{x}{y}$ u okolini tačke $M(1, 1)$.

1.94 Odrediti uslovne ekstremume funkcije $u = xyz$, ako je

$$xy + yz + zx = 8 \text{ i } x + y + z = 5.$$

1.95 Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

◀ **I način:** Rešavanjem sistema jednačina: $u_x = 0 \wedge u_y = 0 \wedge u_z = 0$, dobija se da je tačka $M(x, x, x), x > 0$ jedina tačka mogućeg lokalnog ekstremuma. Nalaženjem parcijalnih izvoda drugog reda u tački M, dobijamo da je $d^2u(M) > 0$, što znači da u toj tački funkcija u ima lokalni minimum i on iznosi $u_{\min} = u(x, x, x) = \frac{3}{2}$.

II način: Stavimo $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$. Odatle je

$$x = \frac{b+c-a}{2},\ y = \frac{c+a-b}{2},\ z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{b+a-c}{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-3\right) \\ &\geq \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Jednakost važi jedino za $a=b=c$ tj. $x=y=z$. ▶

1.96 Odrediti maksimum i minimum funkcije $u_{\alpha}(x,y)=(x+\alpha)(y+\alpha)$ na skupu $D=[-1,1]\times[-1,1]$ za $\alpha>0$.

1.97 Pokazati da funkcija $u=(1+e^y)\cos x - ye^y$ ima beskonačan skup lokalnih maksimuma, a nijedan minimum.

1.98 Naći najmanju i najveću vrednost funkcije $u=x^2-xy+y^2$ na skupu $|x|+|y|\leq 1$.

1.99 Odrediti najmanju vrednost funkcije $(x_1,x_2,...,x_n)\mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ pod uslovom $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$.

1.100 Naći maksimum funkcije $(x_1,x_2,x_3)\mapsto x_1+x_2+x_3$ na skupu onih tačaka $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, za koje je $x_1x_2x_3=1$, $0<x_i\leq h$ $(i=1,2,3)$, $h>1$.

1.101 Odrediti najveću vrednost funkcije

$$(x,y)\mapsto \frac{\sin x-\sin y}{x-y},$$

ako je $x-y\geq\frac{\pi}{4}$.

1.102 Funkcija u ima lokalni minimu u tački (x_0,y_0) na svakoj pravoj koja prolazi kroz tu tačku. Da li u ima lokalni minimum u toj tački?

1.103 Odrediti skup vrednosti funkcije

$$(x,y,z)\mapsto \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$$

za $x>0$, $y>0$, $z>0$ i $xyz=1$.

1.104 Predstaviti sve tačke (x,y) ravni xOy za koje je $\sin x\geq\cos y$.

1.105 Naći supremum i infimum funkcije $u(x,y,z,t)=x^2+y^2-z^2-t^2$ zadate na skupu

$$\left\{(x,y,z,t): x^2+y^2+z^2+t^2=1,\ x+y+z+t=0\right\}.$$

1.106 Dokazati da funkcija $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ na površi $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}+\frac{z^4}{c^4}=1$ ima 14 tačaka lokalnog ekstremuma, od kojih su 6 minimumi, a 8 maksimumi.

1.107 Neka je $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq z\leq 1\right\}$ i neka je funkcija $u: D\to\mathbb{R}$ zadata sa $u(x,y,z)=x+2y+3z$. Naći supremum i infimum funkcije u.

1.108 Dokazati da sistem jednačina

$$e^x\cos y=x\wedge e^x\sin y=y,$$

ima beskonačno mnogo rešenja.

1.109 Ispitati da li funkcije

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 3x^4+x^2y+2y^2+y^4,\\ v(x,y) &= -2x^4y^2+5x^6y-x^8+x^7y^2-x^5y^5-11y^{10}, \end{aligned}$$

imaju ekstremum u tački $(0,0)$.

◀ Pošto je totalni priraštaj $\triangle\, u(0,0)$ date funcije u tački $(0,0)$ jednak

$$\triangle\, u(0,0)=u(x,y)-u(0,0)=\left(x^2+\frac{y}{2}\right)^2+2x^4+y^4+\frac{7}{4}y^2\geq 0,$$

stoga funkcija u u tački $(0,0)$ ima lokalni minimum.

Što se tiče funkcije $v(x,y)$ za nju pažljivim računom dobijamo da su totalni diferencijali zaključno sa petim redom u tački $(0,0)$ jednaki nuli, tj. $d^ku(0,0)=0$ za $k=\overline{1,5}$. Ako je $k=6$ imamo

$$d^6u(0,0)=\binom{6}{1}\cdot 420dx^5dy+\binom{6}{2}\cdot 324dx^4dy^2=60dx^4dy\,(62dx+81dy)\neq 0,$$

odakle uzimajući $dy=1,\ dx>-\frac{81}{62}$ tj. $dy=1, dx<-\frac{81}{62}$ sledi znakopromenljivost diferencijala $d^6u(0,0)$. Prema tome funkcija $v(x,y)$ u tački $(0,0)$ nema ekstremum. ▶

Napomena. Neka student obnovi teoremu o lokalnim ekstremumima u terminima viših diferencijala.

1.110 Neka je

$$f(x,y)=(u(x,y),v(x,y)),\ u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=2xy-y^2$$

$(x,y)\in D=\,]0,1[\,\times\,]0,1[$. Dokazati da je preslikavanje f "$1-1$".

1.111 Neka $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i neka f ima sve parcijalne izvode svakog mogućeg reda u svim tačkama ravni. Sledi li iz toga da je f neprekidna na $\mathbb{R}^2$?

1.112 Neka je G otvoren skup, $G \subset \mathbb{R}^2$ i $f : G \to \mathbb{R}$ funkcija za koju je $f_y = 0$ u svim tačkama $(x, y) \in G$. Da li odatle sledi da postoji funkcija φ takva da je $f(x, y) = \varphi(x)$ za sve $(x, y) \in G$?

1.113 Dokazati nejednakost $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

1.114 Odrediti ekstremume kvadratne forme

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

($a_{ij} = a_{ji}$ su realni brojevi) ako je $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

1.115 Odrediti ekstremume funkcije $u(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$, $x_i > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$, $a > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,\ n}$.

1.116 Transformisati izraz $xz_x + yz_y - z = 0$ uzimajući $u = x$, $v = \frac{y}{x}$, gde su u, v nove nezavisno promenljive.

1.117 Pokazati da jednačina $z_{x^2} \cdot z_{y^2} - z_{xy}^2 = 0$ ne menja oblik pri proizvoljnoj permutaciji promenljivih x, y, z.

1.118 Pokazati da funkcija $z = z(y, x)$ određena jednačinom $z = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$, gde je φ diferencijabilna funkcija, zadovoljava jednakost $x \cdot z_x + y \cdot z_y = z$.

1.119 Naći prvi i drugi izvod funkcija $y = y(x)$ i $z = z(x)$ u tački $(1, 1, -2)$ ako je $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 - z^3 = 10$.

1.120 Ako je $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$, onda je $xu_x + yu_y + zu_z = 0$. Dokazati.

1.121 Ispitati diferencijabilnost funkcije

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\max\left\{x^2+y^2+1, z^2\right\}}{x^2+y^2+z^2}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

1.122 Ispitati diferencijabilnost funkcije $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ date sa $u = \max\left\{\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right\}$.

Napomena. Za prethodna dva zadatka koristiti formule:

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2},\ \ \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

1.123 Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date sa $u(x, y) = \sqrt[2n-1]{xy}$, gde je n prirodan broj.

1.124 Neka su $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi i $f : A \to B$ bijekcija takva da su f i f^{-1} diferencijabilna preslikavanja. Dokazati da je $m = n$.

1.125 Naći maksimum i minimum funkcije $(x,y)\mapsto(x+y)^2$ na skupu $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 6\right\}$.

1.126 Neka je $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 1, y\geq x^2\right\}$. Naći minimum i maksimum funkcije $(x,y)\mapsto x^2+xy+y^2$ definisane na skupu D.

1.127 Neka je $f(x,y)=x(y-1)-y^x, x\in\mathbb{R}, y>0$. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije f i naći njen skup vrednosti.

1.128 Telo T se sastoji od pravog kružnog cilindra, koji se završava pravim kružnim konusom. Ako je površina tela T jednaka P, odrediti dimenzije tela, tako da njegova zapremina bude najveća moguća.

1.129 Izraz

$$\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}}$$

transformisati, uvodeći nove promenljive u,v i novu funkciju w pomoću jednakosti $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan z, w=x+y+z$.

1.130 Razviti po Tejlorovoj formuli funkciju $f(x,y)=x^3-2y^3+xy$ u okolini tačke $(2,1)$.

1.131 Za funkciju $f(x,y)=e^x\sin y$ napisati Maklorenov polinom drugog stepena i odgovarajući ostatak Maklorenove formule u Lagranžovom obliku.

1.132 Funkcija $z(x,y)$ definisana je implicitno jednačinom $z^3-2xz+y=0$, tako da je $z(1,1)=1$. Aproksimirati funkciju $z(x,y)$ Tejlorovim polinomom drugog stepena u okolini tačke $(1,1)$.

1.133 Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y)=\ln|2xy-y|+xy-x.$$

1.134 Odrediti ekstreme funkcije

$$u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}$$

ako je $x^2+y^2+z^2=1$. Na osnovu dobijenih rezultata izvesti nejednakosti

$$\sqrt{2}\leq\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}\leq\sqrt{6}.$$

1.135 Date su tačke $A(0,0,12)$, $B(0,0,4)$ i $C(8,0,8)$. U ravni xOy naći tačku D tako da poluprečnik sfere koja prolazi kroz tačke A,B,C i D bude najmanji.

1.136 Odrediti ekstremne vrednosti funkcija
a) $(x,y)\mapsto\left(x^2+y^2-8\right)\left(x^2+y^2\right)$; **b)** $(x,y)\mapsto 4x^2-\sqrt{1-x^2}\left(y^3+3y+1\right)$;
c) $(x,y)\mapsto\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$; **d)** $(x,y)\mapsto x\ln x^2+y^2$.

1.137 Neka je $y = y(x)$ funkcija definisana implicitno sa

$$xy = e^{x+y} - 1,\ y(0) = 0.$$

Dokazati da je $y(x) = -\left(x + x^2 + x^3\right) + o\left(x^3\right),\ x \to 0.$

1.138 Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - \cos(xy) - \sin(xy)$.

a) Naći okoline I i J tačaka 1 i 0 respektivno i preslikavanje $\varphi : J \to I$ takvo da je za svako $(x, y) \in I \times J$, relacija $F(x, y) = 0$ ekvivalentna sa $x = \varphi(y)$;

b) Dokazati da je $\varphi(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right), y \to 0.$

1.139. Za funkciju $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ispitati lokalne ekstremume i odrediti $f(D_f)$.

1.140. Da li funkcija $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ ima lokalni ekstremum u tački $O(0, 0)$?

1.141. Dokazati nejednakost

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

ako je $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$

Uputstvo: Naći maksimum funkcije $u = xyz$ pod uslovom $x + y + z = S$.

1.142. Neka je z implicitna funkcija od x i y definisana jednačinom

$$z^2 - 2xz + y = 0$$

i za koju je $z(1, 1) = 1$. Napisati nekoliko članova razlaganja funkcije z po rastućim stepenima $x - 1$ i $y - 1$.

Glava 2

Integrali

2.1 Uvod

Ovaj deo zbirke sadrži urađene zadatke iz višestrukih integrala (dvojni, trojni,...), krivolinijskih integrala prve i druge vrste, površinskih integrala prve i druge vrste i teorije polja (vektorska analiza). Najčešće se koriste: teorema o svođenju $n-$integrala na uzastopne (ponovljene) integrale, teorema o smeni promenljivih u $n-$integralu, polarne, cilindrične i sferne koordinate, Grinova, Gaus-Ostrogradskog i Stoksova formula. Za izračunavanje krivolinijskih integrala oba tipa koristi se parametrizacija krivih. Ako je $z = f(x, y)$ jednačina dvostrane površi S, onda su sa $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ i

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \ \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \ \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

data dva (suprotna po smeru) neprekidna vektorska polja normala, gde je $p = z_x$, $q = z_y$. Na osnovu toga se površinski integral

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

druge vrste svodi na površinski integral prve vrste:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_S f(x, y, z)\, dS.$$

Student mora da bude oprezan kada koristi pojmove: gornja strana, donja strana, unutrašnja strana,...Ako je na primer data površ $z^2 = x^2 + y^2$ ograničena ravnima $z = 0$ i $z = 1$, onda njena gornja (unutrašnja) strana u odnosu na ravan xOy, nije ni gornja ni donja strana u odnosu na ravni xOz i yOz.

Ako se u zadacima ne navodi smer krive ili strana površi, onda se podrazumeva da je smer pozitivan, a strana spoljašnja.

2.2 Višestruki integrali

2.1 Svesti na dva načina dvojni integral $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$ na dvostruki (uzastopni) ako je G oblast ograničena krivama $x=1$, $y=x^2$, $y=2x$ $(x\le 1)$.

◄ **I način:** $G=\left\{(x,y):0\le x\le 1, x^2\le y\le 2x\right\}$. Zato je $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy$.

II način:

$$G=\left\{(x,y):0\le y\le 1,\frac{y}{2}\le x\le\sqrt{y}\right\}\cup\left\{(x,y):1\le y\le 2,\frac{y}{2}\le x\le 1\right\}$$

U ovom slučaju je

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)\,dx. \ ►$$

Napomena. Umesto $\int\limits_a^b\left\{\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx$ uobičajeno se zapisuje kao $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$.

2.2 Izračunati dvojni integral $\iint\limits_G \left(x+y^2\right)dxdy$ po oblasti G, ograničenoj krivama $y=x$ i $y=x^2$.

◄ S obzirom da je $G=\left\{(x,y):0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\right\}$ to je

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_G \left(x+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}\left(x+y^2\right)dy=\int\limits_0^1 dx\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{x} \\ &= \int\limits_0^1\left(x^2-x^3+\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{42}. \ ► \end{aligned}$$

2.3 Izmeniti redosled integraljenja u dvostrukom integralu

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy.$$

◀ Vidi se da je

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x,y) : 0 \le x \le 2, \sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{2x}\right\} \\ &= \left\{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 2x - x^2 \le y^2 \le 2x\right\} \end{aligned}$$

tj. G je deo ravni Oxy van kružnice $(x-1)^2 + y^2 = 1$, a u unutrašnjosti parabole $y^2 = 2x$. Da bi se izmenio redosled uzimanja integrala, tj. da bi y bilo ograničeno konstantama, G se deli na tri oblasti:

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ \frac{y^2}{2} \le x \le 1 - \sqrt{1-y^2}\right\} \\ G_2 &= \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1, 1 + \sqrt{1-y^2} \le x \le 2\right\} \\ G_3 &= \left\{(x,y) : 1 \le y \le 2,\ \frac{y^2}{2} \le x \le 2\right\}. \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{G_1} + \iint\limits_{G_2} + \iint\limits_{G_3} \\ &= \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx \\ &= \int_0^1 dy \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx \right) + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx. \end{aligned}$$ ▶

2.4 Svesti na dva načina dvojni integral $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$ na dvostruki, ako je G oblast ograničena kružnicom $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

◀ Imamo da je

$$\begin{aligned} & G \\ = & \left\{(x,y) : -4 \le x \le 6,\ 2 - \sqrt{-x^2 + 2x + 24} \le y \le 2 + \sqrt{-x^2 + 2x + 24}\right\} \\ = & \left\{(x,y) : -3 \le y \le 7,\ 1 - \sqrt{21 - y^2 + 4y} \le x \le 1 + \sqrt{21 - y^2 + 4y}\right\}. \end{aligned}$$

Zato je

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int\limits_{-4}^{6} dx \int\limits_{2-\sqrt{-x^2+2x+24}}^{2+\sqrt{-x^2+2x+24}} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-3}^{7} dy \int\limits_{1-\sqrt{21-y^2+4y}}^{1+\sqrt{21-y^2+4y}} f(x,y)\,dx.$$

Neka student nacrta sliku date kružnice i na osnovu nje prati granice. ▶

2.5 U dvojnom integralu $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right) dxdy$, gde je G oblast ograničena kruznicom $x^2+y^2=2x$, preći na polarne koordinate sa polom u tački $O(0,0)$, i zatim izračunati dati integral.

◀ Funkcijom $(\rho,\varphi) \mapsto (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ oblast g preslikava se na oblast G. Zamenjivanjem x, y svojim vrednostima jednačina kružnice $x^2+y^2=2x$ postaje $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$, odakle sledi $\rho=0$ ili $\rho = 2\cos\varphi$. Te dve krive čine granicu oblasti g. Zato je

$$g = \left\{(\rho,\varphi) : |\varphi| \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi\right\} \to G = \left\{(x,y) : x^2+y^2 = 2x\right\}.$$

Prema osnovnoj teoremi o smeni promenljive u višestrukom integralu ([2], II, Teorema 5.5.1 ili [9], I, Teorema 3.6.IV) sledi

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_G \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint\limits_g \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cdot 16\cos^4\varphi d\varphi = 4 \cdot 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi \\ &= 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \cdots = \frac{3\pi}{2}. \ ▶ \end{aligned}$$

Napomena. a) Kod ovakvih zadataka student ima teškoća prilikom određivanja granica za ρ i φ, tj. teško nalazi oblast g koja se formulama $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ preslikava u neki krug. Za to se često koristi znak apscise ili ordinate tačaka kružnice. U prethodnom primeru je za sve tačke kružnice $x \geq 0$, zato je i $\cos\varphi \geq 0$ (jer je $\rho \geq 0$ po prirodi) tj. $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Naravno, za φ se može uzeti i $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Ako je na primer

$$G = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq -2x\right\} \text{ to je}$$

$$g = \left\{(x,y) : \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq -2\cos\varphi\right\}.$$

U ovom slučaju je $x \leq 0$, i zato je $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$.

b) Smena u dvojnom integralu se uvodi da bi se dobila jednostavnija oblast integraljenja, na primer pravougaonik. Ako se u prethodnom primeru uvedu polarne koordinate sa polom u tački $(1,0)$, tj.

$$x - 1 = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \text{onda je}$$

$$g = \{(\rho,\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

Tada je

$$\iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left((1 + \rho\cos\varphi)^2 + \rho^2\sin^2\varphi\right) \rho d\rho = \cdots = \frac{3\pi}{2}.$$

2.6. Izračunati dvojni integral $I = \iint\limits_G x^2y^2dxdy$, ako je

$$G = \left\{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

◀ Uvođenjem polarnih koordinata $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ pravougaonik

$$g = \{(x,y) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 1 \leq \rho \leq 2\}$$

se preslikava na kružni prsten G, tako da je

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_G x^2y^2dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi \int\limits_1^2 \rho^5 d\rho \\ &= \frac{1}{6}\rho^{\,6}\Big|_1^2 \cdot \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{63}{24} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{21\pi}{8}. \end{aligned}$$ ▶

2.7 Naći površinu figure G, ograničene krivom

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = 4xy,\ a > 0,\ b > 0.$$

◀ S obzirom na znak leve strane jednačine krive, sledi da x, y moraju biti istog znaka, tj. kriva se prostire u prvom i trećem kvadrantu i simetrična je u odnosu na koordinatni početak ($M(x,y)$ pripada krivoj ako i samo ako $N(-x,-y)$ pripada krivoj). Prelaskom na pomerene uopštene polarne koordinate:

$$x - x_0 = a\rho\beta\cos\alpha\varphi,\ y - y_0 = b\rho\beta\sin\alpha\varphi,\ x_0,\ y_0,\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},$$

kojima se ravan $\mathbb{R}^2$ preslikava u nju samu, dobija se da je jakobijan tog preslikavanja jednak: $\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi)} = ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1}\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi$. Uzimajući $x_0 = y_0 = 0$ i zamenjivanjem $x = a\rho\beta\cos\alpha\varphi, y = a\rho\beta\sin\alpha\varphi$ dobija se jednostavnija jednačina date krive, ako se uzme $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Tada je $\rho^4 = 4ab\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ jednačina date krive u polarnim koordinatama, tj. $\rho = 0$ ili $\rho = 2\sqrt{ab}\cos\varphi\sin\varphi = \rho(\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (prvi kvadrant). Zato je

$$\begin{aligned} S &= 2\iint\limits_G dxdy = 2\iint\limits_G 2ab\rho\cos\varphi\sin\varphi d\rho d\varphi \\ &= 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}\rho d\rho = 8a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi \\ &= 8a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)d(\sin\varphi) = \frac{2a^2b^2}{3}. \end{aligned}$$ ▶

2.8. Naći zapreminu tela T, koje je ograničeno površima:

a)

$$z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1;$$

b)

$$x^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + z^2 = b^2,\ x^2 - z^2 - y^2 = 0,\ x > 0, 0 < a < b;$$

c)

$$z = 1 - x^2, z = x^2 + y^2;$$

d)

$$x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2 - 1, z = x^2;$$

e)

$$z = x^2, z = 1 - |y|.$$

◀ **a)** Dato telo se može predstaviti u obliku

$$T = \left\{(x,y,z) : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x^2+y^2\right\}.$$

Zato je

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_{0}^{x^2+y^2} dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \left(x^2+y^2\right) dy = \frac{88}{105}.$$

b) Za projekciju D tela na ravan xOz je ispunjeno:

$$D = \left\{(x,z) : a \le \sqrt{x^2+z^2} \le b \wedge x > 0 \wedge |z| \le x\right\},$$

jer je $y^2 = x^2 - z^2$. Odatle je

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \left(\sqrt{x^2-z^2} - \left(-\sqrt{x^2-z^2}\right)\right) dxdz = 2\iint\limits_D \sqrt{x^2-z^2}dxdz \\ &= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi}d\varphi \int\limits_a^b \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\left(b^3-a^3\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi}d\varphi. \end{aligned}$$

Poslednji Rimanov integral se smenom $2\varphi = t$ svodi na integral: $\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos t}dt$ koji se uobičajenom smenom $\cos t = \sqrt{z}$ svodi na "beta funkciju":tj.

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos t}dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 z^{\frac{3}{4}-1}(1-z)^{\frac{1}{2}-1} dz = \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right).$$

Znači, $V = \frac{b^3-a^3}{3}\cdot B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.

c) Imamo da je

$$V = \iint\limits_{2x^2+y^2\le 1} \left(1-2x^2-y^2\right) dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho-\rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Uvedena je smena: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, 0 \le \rho \le 1, -\pi \le \varphi \le \pi$.

d) U ovom slučaju je

$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(x^2 - \left(x^2+y^2-1\right)\right) dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(1-y^2\right) dxdy \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1-\rho^2\sin^2\varphi\right)\rho d\rho = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

e) Ako je T telo čija se zapremina V traži, a D projekcija na ravan xOy tela T, onda je

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_T dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_1^{1-|y|} dz\right) dxdy = \iint\limits_D \left(1-|y|-x^2\right) dxdy \\
&= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x^2} \left(1-|y|-x^2\right) dy
\end{aligned}
$$

jer je D ograničeno krivom $|y| = 1-x^2$, koja ima dva dela: $y = x^2-1$ (ispod $x-$ose) i $y = 1-x^2$ (iznad $x-$ose u ravni xOy). Dalje je

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{x^2-1}^{1-x^2} \left(1-|y|-x^2\right) dy &= \int\limits_{x^2-1}^{0} \left(1+y-x^2\right) dy + \int\limits_0^{1-x^2} \left(1-y-x^2\right) dy \\
&= 2\left(1-2x^2+x^4\right),
\end{aligned}
$$

odnosno $V = \frac{16}{15}$. ▶

2.9 Naći površinu figure ograničene krivama:

$$xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = x,\ y = 2x \ \ (x > 0,\ y > 0)\,.$$

◀ **I način.** $S = \iint\limits_G dxdy$. Prelaskom na polarne koordinate $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, oblast

$$g = \left\{(\rho,\varphi) : \rho_1 = \frac{a}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} \le \rho \le \rho_2 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}, \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \arctan 2\right\}$$

se preslikava na oblast ograničenu datim krivama, i zato je

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \left(\frac{2a^2}{\cos\varphi\sin\varphi} - \frac{a^2}{\cos\varphi\sin\varphi}\right) d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\frac{d\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\tan\varphi} \\
&= \frac{a^2}{2}\ln\left(\tan\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} = \frac{a^2}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{a^2\ln 2}{2}.
\end{aligned}
$$

II način. Uvođenjem smene $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$ pravougaonik $P = \left[a^2, 2a^2\right] \times [1, 2]$ preslikava se na oblast G. Za jakobijan preslikavanja imamo

$$
\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{yx}{x^2}} = \frac{1}{2v}.
$$

Sada je

$$
S = \iint\limits_G dxdy = \iint\limits_P \frac{1}{|2v|}dudv = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{2a^2} du\int\limits_1^2 \frac{1}{v}dv = \frac{1}{2}\left(2a^2 - a^2\right)\ln 2 = \frac{a^2\ln 2}{2}. \ \blacktriangleright
$$

2.10 Uvodeći uopštene polarne koordinate naći površinu figure ograničene krivama:

$$
\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2},\ x = 1,\ y = -1.
$$

◀ Smenom $x - 1 = \rho^2\cos^4\varphi$, $y + 1 = \rho^2\sin^4\varphi$ oblast

$$
g = \left\{(\rho,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le \sqrt{2}\right\}
$$

se preslikava na oblast G čija se površina traži (kao u zadatku 2.7, α i β se određuju tako da otpadne kvadratni koren). Jakobijan tog preslikavanja je

$$
\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi)} = 8\rho^3\sin^3\varphi\cos^3\varphi.
$$

Granice za φ se dobijaju iz jednakosti $x = 1$, $y = -1$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$). Zato je

$$
\begin{aligned}
S &= 8\iint\limits_G dxdy = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi \\
&= 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\left(1 - \sin^2\varphi\right)d\sin\varphi = 8\int\limits_0^1 t^3\left(1 - t^2\right)dt = \frac{2}{3}. \ \blacktriangleright
\end{aligned}
$$

2.11 Naći zapreminu tela ograničenog površima

$$z = xy,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ z = 0.$$

◀ $V = \iint\limits_G xydxdy$, gde je G oblast u ravni xOy ograničena krivama:

$$x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ y^2 = 2x.$$

S obzirom da je $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ gde je

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{(x,y) : 1 \le x \le \sqrt[3]{2},\ \sqrt{x} \le y \le x^2\right\}, \\ G_2 &= \left\{(x,y) : \sqrt[3]{2} \le x \le \sqrt[3]{4},\ \sqrt{x} \le y \le \sqrt{2x}\right\}, \\ G_3 &= \left\{(x,y) : \sqrt[3]{4} \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x^2 \le y \le \sqrt{2x}\right\}, \end{aligned}$$

$$\text{to je } V = \iint\limits_{G_1} xydxdy + \iint\limits_{G_2} xydxdy + \iint\limits_{G_3} xydxdy.$$

Tačke preseka M, N, P, Q imaju koordinate:

$$M\,(1,1)\,,\ N\left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}\right),\ P\,(2,2)\,,\ Q\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right),$$

koje se dobijaju rešavanjem odgovarajućeg sistema. Zato je

$$\begin{aligned} \iint\limits_{G_1} xydxdy &= \int\limits_1^{\sqrt[3]{2}} xdx \int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} ydy = \int\limits_1^{\sqrt[3]{2}} x\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{3}, \\ \iint\limits_{G_1} xydxdy &= \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{4}} xdx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} ydy = \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{2}} x\left(\frac{2x}{2} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{3}, \\ \iint\limits_{G_1} xydxdy &= \int\limits_{\sqrt[3]{4}}^{2} xdx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{2x}} ydy = \int\limits_{\sqrt[3]{4}}^{2} x\left(\frac{2x}{2} - \frac{x^4}{8}\right)dx = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

i onda je $V = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. ▶

Napomena. Neka student reši zadatak uvođenjem smene $\frac{x^2}{y} = u$, $\frac{y^2}{x} = v$, (na isti način kao primer 2.9).

2.12. Trojni integral $I = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$, gde je T kugla ograničena sferom

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$$

svesti na trostruki (uzastopni) integral.

◀ $I = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ gde su

$$z_1 = -2 - \sqrt{9-(y-1)^2-(x+1)^2} \text{ i } z_2 = -2 + \sqrt{9-(y-1)^2-(x+1)^2}$$

jednačine gornje i donje polusfere u odnosu na ravan $z = -2$, a G je projekcija kugle na ravan xOy, i ona je ograničena kružnicom $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$. Zato je

$$I = \int\limits_{-4}^{2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

gde su

$$y_1(x) = 1 - \sqrt{9-(x+1)^2} \text{ i } y_2(x) = 1 + \sqrt{9-(x+1)^2}$$

jednačine donje i gornje polukružnice u odnosu na pravu $y = 1$ (neka student nacrta sliku). ▶

2.13. Trojni integral $I = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$, gde je T oblast u $\mathbb{R}^3$ ograničena površima $z = 0$, $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, svesti na trostruki (uzastopni) integral.

◀ S obzirom da površ $z = xy$ sadrži koordinatne ose Ox, Oy, to je

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy\}.$$

Zato je $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} f(x,y,z)\,dz$. ▶

Napomena. Student treba da zna da površi $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ predstavljaju ravni, tako da je telo T jedna "krivolinijska piramida". U prethodnom zadatku, površi $y = x^2, y = \sqrt{2x}, \ldots$ su tzv. cilindrične površi, čije su generatrise paralelne sa $z-$osom (osom koja ne učestvuje u jednačini). Ali, u ravni xOy to su krive (direktrise cilindričnih površi).

2.14 Izračunati integral $I = \iiint\limits_T xy\sqrt{z}dxdydz$, gde je T oblast ograničena površima $z = 0$, $z = y$, $y = x^2$, $y = 1$.

◀ Najpre imamo

$$T = \left\{(x, y, z) : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y\right\},$$

i zato je

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} xy\sqrt{z}dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \frac{2}{3} xy^{\frac{5}{2}} dy = \frac{4}{21} \int\limits_{-1}^{1} x\left(1 - \left|x^7\right|\right) dx = 0,$$

jer je podintegralna funkcija $x \mapsto x\left(1 - \left|x^7\right|\right)$ neparna. ▶

Napomena. Ako je funkcija f integrabilna, trojni integral se isto kao i dvojni može izračunavati koristeći iterirane (ponovljene) integrale. Kod dvojnog integrala imamo samo dve mogućnosti:

$$dxdy \text{ ili } dydx.$$

Ako je telo T prosto, trojni integral $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dV$ se može izračunavati sa iteriranim integralima koristeći jednu od šest mogućnosti integraljenja:

$$dxdydz, dydxdz, dzdxdy,$$
$$dxdzdy, dydzdx, dzdydx.$$

Kod pojedinih iteriranih integrala, da bismo došli do rešenja bitan je redosled integraljenja. Neka se student u to uveri izračunavajući sledeći integral

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int\limits_{x}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int\limits_{1}^{3} \sin y^2 dzdydx.$$

Kojim redosledom integraljenja se dati integral može izračunati?

2.15. Izračunati integral $I = \iiint\limits_T \left((x + y)^2 - z\right) dxdydz$, ako je oblast T ograničena površima $z = 0$ i $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$.

◀ Telo T predstavlja klasičnu kupu, jer je $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ jednačina konusne površi sa vrhom u tački $(0, 0, 1)$ koja seče ravan $z = 0$ po kružnici: $x^2 + y^2 = 1$. Zato je

$$T = \left\{(x, y, z) : |x| \le 1,\ |y| \le \sqrt{1 - x^2},\ 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

i onda je

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} \left((x+y)^2 - z\right) dz \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left((x+y)^2\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)^2(1-\rho) - \frac{1}{2}(1-\rho)^2\right)\rho d\rho \\
&= \int_0^{2\pi}(1+\sin 2\varphi)\,d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3-\rho^4\right) d\rho - \pi\int_0^1\left(\rho - 2\rho^2+\rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{60}.
\end{aligned}$$

Primenjene su polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Napomena. Prethodni zadatak se može rešiti uvođenjem cilindričnih koordinata. Zaista,

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$$

su koomponentna preslikavanja vektorske funkcije

$$(\rho,\varphi,z) \mapsto (x,y,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,.$$

Tim preslikavanjem se trostrana prizma

$$\tau = \{(\rho,\varphi,z) : 0\le\rho\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le 1-\rho\}$$

preslikava u kupu T. Pošto je $\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi,z)} = \rho$, to je prema teoremi o smeni promenljive u trojnom integralu

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_T \left((x+y)^2 - z\right) dxdydz = \iiint_\tau \left((\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^2 - z\right)\rho d\rho d\varphi dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho}\left(\rho^2(1+\sin 2\varphi) - z\right)\rho dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3(1-\rho)(1+\sin 2\varphi) - \frac{1}{2}\rho(1-\rho)^2\right) d\rho \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}(1+\sin 2\varphi) - \frac{1}{24}\right) d\varphi = \frac{\pi}{60}.
\end{aligned}$$

Naravno, granice prizme τ se dobijaju zamenjivanjem cilindričnih koordinata u jednačinama granica kupe T. Prizma τ je inverzna slika navedenog vektorskog preslikavanja date kupe T. ▶

2.16 Izračunati integral $I = \iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, ako je oblast T ograničena sferom $x^2+y^2+z^2=z$.

◀ Oblast $T \subset \mathbb{R}^3$ je kugla ograničena sferom $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Dati trojni integral se može svesti na trostruki, tj.

$$I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dy \int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$$

i predlažemo studeentu da uobičajenim načinom završi zadatak. Međutim, ovo je tipičan primer integrala koji se rešava smenom. Uvođenjem sfernih koordinata (ρ,θ,φ) :

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta,$$

oblast

$$\tau=\Big\{(\rho,\theta,\varphi):0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le\cos\theta\Big\}\subset\mathbb{R}^3$$

preslikava se na datu kuglu T. Pošto je $\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\rho,\theta,\varphi)}=\rho^2\sin\theta$ to je

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_\tau \rho^3\sin\theta d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} \rho^3\sin\theta d\rho = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$ ▶

Napomena. Znajući šta geometrijski znače uglovi φ i θ, studentu ne bi trebalo da bude teško da odredi granice. Granice za ρ se dobijaju iz jednačine $x^2+y^2+z^2=z$ koja zamenjivanjem koordinata x,y i z postaje $\rho^2=\rho\cos\theta$, tj. $\rho=0$ ili $\rho=\cos\theta$. Pošto je za datu kuglu $z\ge 0$, to je $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

2.17 Naći zapreminu tela T čija je granica data jednačinom:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}+\sqrt{\frac{z}{15}}=1;$$

◀ Funkcijom (vektorska funkcija)

$$(u,v,w)\mapsto(x,y,z):\left(u=\sqrt{\frac{x}{2}},v=\sqrt{\frac{y}{3}},w=\sqrt{\frac{z}{15}}\right)$$

trostrana piramida

$$\tau=\{(u,v,w):0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1-u,\ 0\le w\le 1-u-v\}$$

preslikava se na dato telo T. Pošto je jakobijan uvedenog preslikavanja

$$\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u,v,w)}=\begin{vmatrix}4u & 0 & 0\\ 0 & 6v & 0\\ 0 & 0 & 30w\end{vmatrix}=720uvw\neq 0$$

za svaku tačku (u,v,w) koja ne pripada ni jednoj koordinatnoj osi (skup tačaka u kojima je jakobijan jednak nuli je Lebegove mere nula). Zato je

$$\begin{aligned}V &= \iiint_T dxdydz=\iiint_\tau 720uvwdudvdw\\ &= 720\int_0^1 udu\int_0^{1-u}vdv\int_0^{1-u-v}wdw=\frac{720}{2}\int_0^1 udu\int_0^{1-u}v(1-u-v)^2dv\\ &= 360\int_0^1 udu\int_0^1(1-u)t(1-u-(1-u)t)^2(1-u)dt\\ &= 360\int_0^1 u(1-u)^4du\int_0^1 t(1-t)^2dt=360\left(\int_0^1 u^4(1-u)du\right)^2=1.\end{aligned}$$

Napomena. Neka student reši ovaj zadatak uvođenjem pomerenih uopštenih sfernih koordinata:

$$x-x_0=a\rho^n\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi,\ y-y_0=b\rho^n\sin^\alpha\theta\sin^\beta\varphi,\ z-z_0=c\rho^n\cos^\alpha\theta,$$

$0\le\rho<+\infty$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, gde se x_0, y_0, z_0, a, b, c, α, β biraju od slučaja do slučaja. Jakobijan matrice prelaska glasi

$$\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\rho,\theta,\varphi)}=abcn\alpha\beta\rho^{3n-1}\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi.$$ ▶

2.18 Izračunati zapreminu tela $T \subset \mathbb{R}^n$ koje je određeno nejednakostima:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ..., x_n \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1.$$

◀ Zapremina datog skupa tačaka prostora $\mathbb{R}^n$ znači Žordanovu meru tog skupa ($[2], II$, Teorema 2.5.6 ili $[9], I$, Teorema 2.6.IV) tj. $n-$integral jedinične funkcije po datom skupu. Pošto je Žordanova mera granice skupa T jednaka nuli to on ima "zapreminu" (odnosno Žordanovu meru), tj. jedinična funkcija ima $n-$integral (Rimanov) po tom skupu. Student treba da zna jednostavnije primere u $\mathbb{R}^n$ koji nemaju "zapreminu" ($[2], II$, Primeri 5.1.2 ili $[9], I$, Primer 3.3.IV). Dakle

$$\begin{aligned}
V(T) &= \int \cdots \int_{T^n} 1 \cdot dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int \cdots \int_{T^{n-1}} dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_0^{1-\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k} dx_n \\
&= \int \cdots \int_{T^{n-1}} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \int \cdots \int_{T^{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-2} \int_0^{1-\sum\limits_{k=1}^{n-2} x_k} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) dx_{n-1} \\
&= \int \cdots \int_{T^{n-2}} \frac{1}{2!} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-2} x_k\right)^2 dx_1 \cdots dx_{n-2} \\
&= \int \cdots \int_{T^{n-3}} \frac{1}{3!} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-3} x_k\right)^3 dx_1 \cdots dx_{n-3} \\
&= \cdots = \int_0^1 \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 = \frac{1}{n!}.\ ▶
\end{aligned}$$

2.19 Izračunati $n-$integrale:

a) $\int\limits_T \cdots \int \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, gde je T $n-$ dimenziona kocka određena nejednakostima $0 \le x_k \le 1,\ k = \overline{1,\ n}$.

b) $\int\limits_T \cdots \int \left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, gde je T $n-$dimenziona piramida određena nejednakostima $x_k \ge 0,\ k = \overline{1,\ n}$ i $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \le 1$.

◀ **a)**

$$I = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_T \cdots \int x_k^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} = \frac{n}{3}.$$

Korišćena su svojstva $n-$integrala na $n-$segmentu.

b) Smenom

$$x_1 = y_1, x_1 + x_2 = y_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_n, \text{ skup}$$

$$\tau = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_{n-1} \le y_n \le 1\}$$

preslikava se na skup T. To sledi iz relacija

$$x_1 = y_1 \ge 0, x_2 = y_2 - y_1 \ge 0, ..., x_n = y_n - y_{x-1} \ge 0 \text{ i } y_n \le 1.$$

S obzirom da je

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, ..., x_n)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, ..., y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, ..., x_n)}} = 1, \text{ to je}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_T \cdots \int \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int\limits_0^1 \sqrt{y_n} dy_n \int\limits_0^{y_n} dy_{n-1} \int\limits_0^{y_{n-1}} dy_{n-2} \cdots \int\limits_0^{y_2} dy_1 \\
&= \int\limits_0^1 \sqrt{y_n} dy_n \int\limits_0^{y_n} dy_{n-1} \int\limits_0^{y_{n-1}} dy_{n-2} \cdots \int\limits_0^{y_3} y_2 dy_2 \\
&= \int\limits_0^1 \sqrt{y_n} dy_n \int\limits_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int\limits_0^{y_4} \frac{y_3^2}{2!} dy_3 \\
&= \cdots = \int\limits_0^1 \sqrt{y_n} \frac{1}{(n-1)!} y_n^{n-1} dy_n = \frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}.
\end{aligned}$$ ▶

Napomena. Neka student proveri rezultat za $n = 1, 2, 3$ i neka geometrijski (slikom) predstavi oblast τ kada je $n = 2, 3$. Napominjemo studentu da zapamti uvedenu smenu jer se često primenjuje. Zadatak 2.19 i uopšte, integral oblika

$$\int\limits_{T}\cdots\int f\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

gde je T oblast iz prethodnog zadatka b), a f neprekidna funkcija, rešava se koristeći uvedenu smenu.

2.20 Izračunati zapreminu $n-$dimnenzionog paralelopipeda ograničenog ravnima

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_1$$

$i = \overline{1,\ n}$ ako je $\triangle = \det \|a_{ki}\|_{n,n} \neq 0$, $h_i > 0$, $i = \overline{1,\ n}$.

◄ Smenom promenljivih

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = y_i,\ \ i = \overline{1,\ n}$$

skup tačaka

$$\tau = \left\{(y_1, y_2, ..., y_n) : -h_i \leq y_i \leq h_i,\ \ i = \overline{1,\ n}\right\},$$

tj. paralelopiped u $\mathbb{R}^n$ čije su strane paralelne koordinatnim ravnima, preslikava se na dati paralelopiped. Jakobijan preslikavanja

$$(y_1, y_2, ..., y_n) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_n)$$

je različit od nule, jer je

$$\frac{\mathcal{D}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{\mathcal{D}\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, ..., y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, ..., x_n)}} = \frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}.$$

Zato je

$$V\left(T\right) = \int\limits_{T}\cdots\int dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_{kk}}\int\limits_{\tau}\cdots\int dy_1\cdots dy_n = \frac{2^n\prod\limits_{k=1}^{n} h_{kk}}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_{kk}}. \ ►$$

2.21 Izračunati zapreminu $n-$dimenzione piramide, određene nejednakostima:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1,\ \ x_i \geq 0,\ \ a_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,\ n}.$$

◀ Smenom promenljivih $\frac{x_i}{a_i} = y_i$, $i = \overline{1,\ n}$, $n-$dimenziona piramida

$$\tau = \left\{ (y_1, y_2, ..., y_n) : y_i \geq 0,\ i = \overline{1, n} \text{ i } \sum_{k=1}^{n} y_k \leq 1 \right\}$$

se preslikava na datu $n-$dimenzionu piramidu. S obzirom da je jakobijan tog preslikavanja

$$\frac{\mathcal{D}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{\mathcal{D}\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)} = a_1 a_2 \cdots a, \text{ to je}$$

$$V\left(T\right) = \int \cdots \int_T dx_1 \cdots dx_n = |a_1 a_2 \cdots a_n| \int \cdots \int_T dy_1 \cdots dy_n = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}{n!}$$

prema zadatku 2.18, jer je $a_i > 0$. ▶

2.22 Izračunati zapreminu tela $T \subset \mathbb{R}^n$ određenog sa

$$T = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : |-x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots - x_n| \leq 1\}$$

◀ Vektorskim preslikavanjem $F : (u_1, u_2, ..., u_n) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_n)$ prostora $\mathbb{R}^n$ u samog sebe, datim sa $u_k = x_1 + x_2 + \cdots - x_k + \cdots + x_n$, $k = 1, 2, ..., n$, skup tačaka

$$T' = \{(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n : |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

preslikava se u skup tačaka T i zato prema glavnoj teoremi o smeni promenljivih u višestrukom integralu ([2], II ili [9], I -obnoviti je) sledi

$$V\left(T\right) = \int \cdots \int_T dx_1 dx_2 ... dx_n = \int \cdots \int_{T'} \left|J\left(F\right)\right| du_1 du_2 ... u_n$$

gde je

$$\begin{aligned} J\left(F\right) &= \frac{\mathcal{D}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{\mathcal{D}\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)} = \left(\frac{\mathcal{D}\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)}{\mathcal{D}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}\right)^{-1} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 2 & -2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 2 & 0 & -2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \\ 2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -2 \end{vmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} n-2 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -2 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{(n-2)\cdot(-2)^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)\,2^{n-1}}$$

za $n > 2$. Sada se dobija

$$\begin{aligned} V(T) &= \frac{1}{(n-2)\,2^{n-1}} V(T') = \frac{2^n}{(n-2)\,2^{n-1}} \int\limits_{T'} \cdots \int du_1 du_2 ... du_n \\ &= \frac{2}{n-2} \int\limits_{\substack{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|\le 1 \\ u_1\ge 0,\dots,u_n\ge 0}} \cdots \int du_1 du_2 ... du_n = \frac{2}{(n-2)\,n!} \end{aligned}$$

prema zadatku 2.18, jer je

$$\begin{aligned} V(T') &= V(\{(u_1,...,u_n) : |u_1| + \cdots + |u_n| \le 1\}) \\ &= 2^n V\left(\left\{(u_1,...,u_n) : u_1 + \cdots + u_n \le 1,\ u_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ n}\right\}\right). \end{aligned}$$

Slučaj $n = 2$ treba odvojeno razmatrati jer preslikavanje

$$(u_1, u_2) \mapsto (-u_1 + u_2, u_1 - u_2)$$

nema jakobijan različit od nule. Tada je

$$V(T) = \iint\limits_{|x_1-x_2|+|x_2-x_1|\le 1} dx_1 dx_2 = \iint\limits_{|x_1-x_2|\le \frac{1}{2}} dx_1 dx_2 = +\infty. \ \blacktriangleright$$

2.23 U ravni uv dat je četvorougao s temenima $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$ i $D(1,3)$. Preslikavanje ravni uv u ravan xy dato je jednačinama

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv. \tag{2.1}$$

a) Naći sliku četvorougla $ABCD$ u ravni xy;

b) Izračunati integral $\iint\limits_P xydxdy$ koristeći smenu (2.1), gde je $P = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

◀ **a)** Imamo

$$\begin{aligned} A(1,1) &\mapsto A'\left(1^2 - 1^2, 2\cdot 1\cdot 1\right) = A'(0,2) \\ B(2,1) &\mapsto B'\left(2^2 - 2^2, 2\cdot 2\cdot 1\right) = B'(3,4) \\ C(2,3) &\mapsto C'\left(2^2 - 3^2, 2\cdot 2\cdot 3\right) = C'(-5,12) \\ D(1,3) &\mapsto D'\left(1^2 - 3^2, 2\cdot 1\cdot 3\right) = D'(-8,6). \end{aligned}$$

b)

$$\iint\limits_{P} xydxdy = \iint\limits_{P'} \left(u^2 - v^2\right) 2uv \left|\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}\right| dudv$$

$$= \iint\limits_{P'} 2\left(u^2 - v^2\right) uv \left(4u^2 + 4v^2\right) dudv = 8 \iint\limits_{P'} \left(u^4 - v^4\right) uvdudv$$

gde je

$$P' = \left\{(u,v) : \left(u^2 - v^2\right)^2 + 4u^2v^2 \le 1\right\} = \left\{(u,v) : u^2 + v^2 \le 1\right\}.$$

Zato je

$$8 \iint\limits_{P'} \left(u^4 - v^4\right) uvdudv = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left(u^4 - v^4\right) uvdv = 0$$

jer je funkcija $(u,v) \mapsto \left(u^4 - v^4\right) uv$ neparna po v. ▶

2.24 Naći formule transformacije pri kojima oblast

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \ge 1,\ xy \le 2,\ x - y + 1 \ge 0,\ x - y - 1 \le 0,\ x > 0\right\}$$

prelazi u pravougaonik čije su stranice paralelne koordinatnim osama.

◀ Uzimajući da je $xy = u$, $x - y = v$ dobijamo da je

$$\frac{\mathcal{D}(u,v)}{\mathcal{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -y - x \ne 0$$

za $(x,y) \in G$, pa je datim jednačinama definisana funkcija koja G preslikava na deo ravni $O'uv$. Taj deo ravni je pravougaonik. Zaista, prave

$$x - y + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$$

se preslikavaju u prave $v + 1 = 0$, $v - 1 = 0$, a hiperbole $xy = 1$ i $xy = 2$ u prave $u = 1$, $u = 2$. Neka student nacrta sliku. ▶

2.25 Izračunati

$$\int\limits_{K_n}\cdots\int \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

gde je $K_n = [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]$.

◀ S obzirom da je K_n, $n-$segment u $\mathbb{R}^n$, to je

$$\begin{aligned}
I &= \int_{K_n}\cdots\int\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 dx_1\cdots dx_n=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 dx_n\\
&= n\int_0^1 x_1^2dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n\\
&\quad +2\frac{n(n-1)}{2}\int_0^1 x_1dx_1\int_0^1 x_2dx_2\int_0^1 dx_3\cdots\int_0^1 dx_n\\
&= n\cdot\frac{1}{3}+n(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n(3n+1)}{12}.
\end{aligned}$$

Korišćena je jednakost

$$\int_0^1 x_1^2dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_n=\int_0^1 dx_1\int_0^1 x_2^2dx_2\cdots\int_0^1 dx_n=\cdots$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdot\cdot\int_0^1 x_{n-1}^2dx_{n-1}\int_0^1 dx_n=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 dx_{n-1}\int_0^1 x_n^2dx_n.$$

broj sabiraka u razvoju $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^2$ ne računajući $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2$ i činjenicu da je

$$\int_0^1 x_1dx_1\int_0^1 x_2dx_2\int_0^1 dx_3\cdots\int_0^1 dx_n=\int_{01}^1 x_1dx_1\int_0^1 dx_2\int_0^1 x_3dx_3\cdots\int_0^1 dx_n$$

$$=\cdots=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1 x_{n-1}dx_{n-1}\int_0^1 x_ndx_n. \;\blacktriangleright$$

2.26 a) Ako je $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f(0,0)=0$, dokazati da je

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy=-\frac{\pi}{4}.$$

b) Izračunati integral

$$I=\iint\limits_G e^{-(x+y)}\,(x+y)^n\,dxdy, n\in\mathbb{N},$$

gde je $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0\right\}.$

◀ **a)** Najpre je

$$\begin{aligned}
& I_1(y) \\
= {} & \int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=\int\limits_0^1 \frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}-\int\limits_0^1 \frac{2x^2dx}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
= {} & \frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^1-\left(-x\,\frac{1}{x^2+y^2}\Big|_0^1+\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}\right) \\
= {} & \frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Zatim je

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx=\int\limits_0^1 I_1(y)\,dy=\arctan y|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

S druge strane je $I_2(x)=-I_1(x)=-\frac{1}{1+x^2}$, (obrazložiti!) i zato je

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 I_2(x)\,dx=-\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=-\frac{\pi}{4}.$$

Pitanje. Šta može da se kaže o integralu $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$, gde je

$$G=\{(x,y):0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\},$$

a f funkcija iz prethodnog zadataka?

b) Integral

$$I=\iint\limits_G e^{-(x+y)}\,(x+y)^n\,dxdy$$

predstavlja sumu od $n+1$ nesvojstvenog dvojnog integrala po oblasti

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0\right\}=\bigcup_{m=1}^{+\infty}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq m, 0\leq y\leq m\right\}.$$

Pošto je $(x+y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$, to je

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{m\to+\infty}\int_0^m\int_0^m\left\{e^{-(x+y)}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\right\}dxdy \\
&= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\int_0^m e^{-x}x^{n-k}dx\int_0^m e^{-y}y^k dy\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lim_{m\to+\infty}\int_0^m e^{-x}x^{n-k}dx\int_0^m e^{-y}y^k dy \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-k}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-y}y^k dy \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(n-k)!k! = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot(n-k)!k! \\
&= (n+1)\,n! = (n+1)!.
\end{aligned}$$

Korišćena je jednakost $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^k dx = k!$. ▶

2.27 Izračunati integral

$$\int_0^a\int_0^b e^{-\max\left\{b^2x^2,a^2y^2\right\}}dxdy,\ a>0,\ b>0.$$

◀ Funkcijom $(u,v)\mapsto(x,y)$ gde je $x=\frac{1}{b}u$, $y=\frac{1}{a}v$ pravougaonik $[0,a]\times[0,b]$ preslikava se na kvadrat $[0,ab]\times[0,ab]$ (propratiti crtežom). Pošto je $\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}=\frac{1}{ab}$, to je

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a\int_0^b e^{-\max\left\{b^2x^2,a^2y^2\right\}}dxdy = \frac{1}{ab}\int_0^{ab}\int_0^{ab}e^{-\max\left\{u^2,v^2\right\}}dudv \\
&= \frac{2}{ab}\int_0^{ab}du\int_0^u e^{-u^2}dv = \frac{2}{ab}\int_0^{ab}e^{-u^2}du\int_0^u dv \\
&= -\frac{1}{ab}\int_0^{ab}e^{-u^2}d\left(-u^2\right) = -\frac{1}{ab}e^{-u^2}\Big|_0^{ab} = \frac{1-e^{-a^2b^2}}{ab}.\ ▶
\end{aligned}$$

2.28 Izračunati integral $I = \iint\limits_G \ln\sin(x-y)\,dxdy$, gde je G trougao ograničen pravama $y=0$, $y=x$, $x=\pi$.

◀ Stavljajući $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$ oblast

$$G = (x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le x$$

ravni Oxy preslikava se na oblast

$$G_1 = \{(u,v) : 0 \le v \le \pi,\ v \le u \le 2\pi - v\},$$

Pošto je $\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \frac{1}{2} \ne 0$ ispunjeni su uslovi teoreme o smeni promenljivih u nesvojstvenom integralu, te je

$$\iint\limits_G \ln\sin(x-y)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{G_1} \ln\sin v dvdu = \iint\limits_{G_2} \ln\sin v dvdu$$

gde je $G_2 = \{(u,v) : 0 \le t \le \pi,\ u \le v \le \pi\}$. Dalje je

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{G_3} \ln\sin v dvdu = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \ln\sin v dvdu = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi \ln\sin v dv = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

gde je $G_3 = \{(u,v) : 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le \pi\}$. Skup vrednosti funkcije $(u,v) \mapsto \ln\sin v$, na G_1 jednak je skupu vrednosti na $\{(u,v) : 0 \le u \le \pi, 0 \le v \le u\}$. Zato je $I = \frac{1}{2}\iint\limits_{G_3} \ln\sin v dvdu$. ▶

2.29 Koristeći dvojni intergral dokazati jedakost mešovitih izvoda $u_{xy} = u_{yx}$ pretpostavljajući njihovu neprekidnost.

◀ Ako se pretpostavi da je $u_{xy}(x_0,y_0) > u_{yx}(x_0,y_0)$ u nekoj tački (x_0,y_0) otvorenog skupa G ravni $\mathbb{R}^2$, onda iz neprekidnosti mešovitih parcijalnih izvoda u toj tački sledi da postoji pravougaonik $[a,b;c,d]$ sa centrom u toj tački koji je sadržan u G, tako da je $u_{xy}(x,y) > u_{yx}(x,y)$ za sve $(x,y) \in [a,b;c,d]$. Dakle,

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d u_{xy}(x,y)\,dxdy > \int\limits_a^b\int\limits_c^d u_{yx}(x,y)\,dxdy.$$

Međutim,

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d u_{xy}(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b u_y(x,y)'_x\,dx = \int\limits_c^d (u_y(b,y) - u_y(a,y))\,dy$$

$$= \int_c^d u_y(b,y)\,dy - \int_c^d u_y(a,y)\,dy = u(b,d) - u(b,c) - u(a,d) + u(a,c)$$

i na isti način sledi

$$\int_a^b \int_c^d u_{yx}(x,y)\,dxdy = u(b,d) - u(b,c) - u(a,d) + u(a,c),$$

što je kontradikcija. ▶

Napomena. Korišćeno je lokalno svojstvo neprekidnosti funkcije, osnovna teorema integralnog računa (Analiza I), svođenje dvojnog integrala neprekidne funkcije na ponovljene (uzastopne).

2.30 Naći površinu dela ravni koju ograničava kriva

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a\left(x^3 - 3xy^2\right), \ a > 0.$$

◀ Prelaskom na polarne koordinate jednačina date krive postaje

$$\begin{aligned} \rho &= a\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\right) = a\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - 3\left(1-\cos^2\varphi\right)\right) \\ &= a\left(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right) = a\cos 3\varphi. \end{aligned}$$

Odatle sledi $\cos 3\varphi \geq 0$, tj.

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \{1,2,3\},$$

zbog $T = \frac{2\pi}{3}$. Sada je

$$\begin{aligned} \frac{P}{3} &= \iint_G dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{a\cos 3\varphi} \rho d\rho = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi d\varphi \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi + \frac{a^2}{12}\sin 6\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2\pi}{12}. \end{aligned}$$

Znači, $P = \frac{a^2\pi}{4}$. ▶

2.3 Krivolinijski integrali

2.31 Izračunati krivolinijski integral prve vrste

$$I=\int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl$$

ako je kriva L astroida $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

◀ Uzimajući parametarske jednačine astroide:

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$$

integral se svodi na Rimanov. Imamo,

$$dx=-3a\cos^2 t\sin t dt,\ dy=3a\sin^2 t\cos t dt,\ \text{te je}$$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} a^{\frac{4}{3}}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)3a\left|\cos t\sin t\right|dt \\ &= 12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t\right)dt=4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

Korišćena je formula $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$ kao i činjenica da je astroida deo po deo glatka kriva, jer je $\dot{x}^2+\dot{y}^2=0$ samo za vrednosti parametra t : $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$. ▶

Napomena. U pojedinim zadacimo smo izvod $x'(t)$ označavali sa $\dot{x}$.

2.32 Izračunati krivolinijski integral prve vrste

$$I=\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$$

ako je kriva L zadata jednačinom $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

◀ Prelaskom na polarne koordinate $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, jednačina krive L postaje: $\rho=a^2\cos 2\varphi$. S obzirom da je $\rho\ge 0$, to mora biti $\cos 2\varphi\ge 0$, tj. $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ ili $\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{5\pi}{4}$. Pošto je $dl=\sqrt{\rho^2+\dot{\rho}^2}d\varphi$, onda je:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4\cos 2\varphi\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}d\varphi+\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a^4\cos 2\varphi\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}d\varphi$$

$$= \quad 2a^4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos 2\varphi \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi} d\varphi = \frac{2a^4}{2\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi} d\left(\sqrt{3}\sin 2\varphi\right)$$

$$= \quad 2a^4 + \frac{a^4}{\sqrt{3}} \ln\left(\sqrt{3}+2\right).$$

2.33 Izračunati krivolinijski integral

$$I = \int_L (x+y)\, dl$$

gde je L manji deo kružnice $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ y = x\right\}$ ograničen tačkama $A\,(0,0,R)$ i $B\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

◀ Parametarske jednačine luka $\widehat{AB}$ date kružnice su

$$x = t,\ y = t,\ z = \sqrt{R^2-2t^2},\ 0 \le t \le \frac{R}{2}.$$

Tada je

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{1+1+\frac{4t^2}{R^2-2t^2}} dt = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2-2t^2}} dt, \text{ tj.}$$

$$I = \int_0^{\frac{R}{2}} 2t \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2-2t^2}} dt = -\frac{R\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{d\left(R^2-2t^2\right)}{\sqrt{R^2-2t^2}} = R^2\left(\sqrt{2}-1\right). \ ▶$$

2.34 Izračunati krivolinijske integrale prve vrste:

a) $\int_L (x+y)\, dl$, L je granica trougla sa temenima $O\,(0,0)$, $A\,(1,0)$, $B\,(0,1)$;

b) $\int_L y^2 dl$, L je luk cikloide $x = a\,(t-\sin t)$, $y = a\,(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

c) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, L je granica kružnog isečka $\left\{(\rho,\varphi) : 0 \le \rho \le a, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right\}$, ρ i φ su polarne koordinate;

d) $\int_L \sqrt{x^2+y^2} dl$, L je kružnica $x^2+y^2 = ax$;

e) $\int_L z dl$, L je zavojna linija $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t, 0 \le t \le t_0$;

f) $\int_L \left(x^2+y^2+z^2\right) dl$, gde je L kružnica jednaka

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x+y+z = 0\right\}.$$

◄ **a)**

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_{OA} (x+y)\,dl + \int\limits_{AB} (x+y)\,dl + \int\limits_{BO} (x+y)\,dl,$$

Na OA je: $y = 0,\ 0 \le x \le 1,\ dl = dx$;
Na AB je: $x+y = 1,\ dl = \sqrt{1+\dot{y}^2}dx = \sqrt{2}dx$, jer je $y = 1-x,\ 0 \le x \le 1$;
Na BO je: $x = 0,\ 0 \le y \le 1,\ dl = dy$.
Sada je

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_0^1 xdx + \int\limits_0^1 \sqrt{2}dx + \int\limits_0^1 ydy = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

b) Najpre je $dx = a\,(1-\cos t)\,dt,\ dy = a\sin t dt$ te je

$$dl = \sqrt{a^2\,(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

jer je $0 \le \frac{t}{2} \le \pi$. Zato je

$$\begin{aligned}
\int\limits_L y^2 dl &= \int\limits_0^{2\pi} a^2\,(1-\cos t)^2\,2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a^3\int\limits_0^{2\pi} 4\sin^5\frac{t}{2}dt \\
&= 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = 16a^3\int\limits_0^{\pi}\sin^5 zdz = 16a^3\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2 z\right)^2\sin zdz \\
&= 16a^3\int\limits_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^2 dt = 32a^3\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)^2 dt = \frac{256a^3}{15}.
\end{aligned}$$

c)

$$\int\limits_L = \int\limits_{OA} + \int\limits_{\widehat{AB}} + \int\limits_{BO}$$

Na OA je: $y = 0, 0 \le x \le a, dl = dx$;
Na $\widehat{AB}$ je: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ dl = adt, 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$;
Na BO je: $y = x,\ dl = \sqrt{2}dx$;
Sada je

$$\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl = \int\limits_0^a e^x dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^a dt + \int\limits_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} e^{x\sqrt{2}}\sqrt{2}dx = 2\left(e^a - 1\right) + \frac{\pi a e^a}{4}.$$

d) Parametarske jednačine date kružnice su

$$x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t,\ y=\frac{a}{2}\sin t,\ 0\le t\le 2\pi,$$

te je $dx=-\frac{a}{2}\sin t dt$, $dy=\frac{a}{2}\cos t dt$, tj. $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\frac{a}{2}dt$. Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right)}\frac{a}{2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}2\cos^2\frac{t}{2}}\frac{a}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}|\cos z|\,2dz=a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos zdz-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos zdz\right)=a^2\left(1-(-1)\right)=2a^2. \end{aligned}$$

e) Ovde je

$$\dot{x}=\cos t-t\sin t,\quad \dot{y}=\sin t+t\cos t,\quad \dot{z}=1$$

te je $dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{2+t^2}dt$. Onda je

$$\int_L zdl=\int_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^{2+t_0^2}\sqrt{u}du=\frac{1}{3}\left(\left(2+t_0^2\right)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right).$$

f) Pošto je za svaku tačku $(x,y,z)\in L: x^2+y^2+z^2=a^2$, i kako je integral $\int_L dl$ jednak dužini krive L, to je

$$\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)dl=a^2\int_L dl=a^2\cdot 2\pi a=2\pi a^3. \ ▶$$

2.35 Izračunati krivolinijski integral druge vrste

$$I=\int_{AB}2xydx+x^2dy$$

po tri krive koje spajaju tačke A i B.

◀ **a)**

$$I=\int_{AB}2xydx+x^2dy=\int_{AC}+\int_{CB}$$

Na AC je: $y = 0$, $dy = 0$, $0 \le x \le 1$;
Na CB je: $x = 1$, $dx = 0$, $0 \le y \le 1$;
Zato je

$$I = \int_0^1 0 \cdot dx + 0^2 \cdot 0 + \int_0^1 2 \cdot 1 \cdot y \cdot 0 + 1 \cdot dy = 1.$$

b) $I = \int\limits_{\substack{AB \\ y=x^2}} 2xydx + x^2dy$. Na AB je: $y = x^2, dy = 2xdx, 0 \le x \le 1$, te je

$$I = \int_0^1 \left(2x^3 + 2x^3\right) dx = 4 \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = 1.$$

c) $I = \int\limits_{\substack{AB \\ y=x}} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 \left(2x^2 + x^2\right) dx = 3 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1.$

Napomena. Neka student obrazloži, da li se slučajno desila jednakost integrala po različitim putanjama koje povezuju tačke A i B.

2.36 Izračunati krivolinijski integral druge vrste

a)

$$I = \oint_L (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$$

gde je L kružnica $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

b)

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

ako su a, c i $ac - b^2$ pozitivni brojevi, gde je L kružnica $x^2 + y^2 = r^2$.

◀ **a)** Pošto su

$$x = 1 + 2\cos t,\ \ y = 1 + 2\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$$

parametarske jednačine date kružnice i kako je $dx = -2\sin t dt$, $dy = 2\cos t dt$ to je

$$I = \oint_L (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} (2+2\cos t+2\sin t)(-2\sin t)\,dt + (2\cos t-2\sin t)\,2\cos t dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-4\sin t - 8\sin t\cos t + 4\cos 2t)\,dt = 0.
\end{aligned}
$$

Napomena. Pošto je $\frac{\partial}{\partial x}(x-y) = \frac{\partial}{\partial y}(x+y)$ i kriva po kojoj se vrši integraljenje je zatvorena, to je vrednost datog integrala jednaka nuli-teorija.

b) Uzimajući parametarske jednačine kružnice $x^2+y^2=r^2$:

$$x = r\cos t,\ \ y = r\sin t, xdy - ydx = r^2 dt$$

sledi

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t} \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t} \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t} \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{a+2bz+cz^2} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{c\left(z+\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{c}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{c}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{t^2+\frac{ac-b^2}{c}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \frac{t\sqrt{c}}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.
\end{aligned}
$$

Korišćeno je: podintegralna funkcija ima period $T=\pi$ i zato je $\int\limits_0^{\pi} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$, smena $\tan t = z$ i činjenica da su a, c i $ac-b^2$ pozitivni-uslov zadatka. ▶

2.37 Izračunati krivolinijski integral

$$\int_L \left(y^2-z^2\right)dx + 2yzdy - x^2dz$$

gde je L kriva: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$, u smeru rastenja parametra t.

◀ $I = \int\limits_0^1 \left(t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4\right) dt = \frac{1}{35}$, jer je $dx = dt$, $dy = 2tdt$, $dz = 3t^2 dt$. ▶

2.38 Izračunati krivolinijski integral

$$\oint\limits_L \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz$$

gde je L presek koordinatnih ravni sa delom jedinične sfere iz prvog oktanta.

◀ Kontura L se sastoji iz tri podudarne krive (delovi kružnica). Zato je $I = I_1 + I_2 + I_3$ gde je $I_1 = \int\limits_{l_1}$, $I_2 = \int\limits_{l_2}$, $I_3 = \int\limits_{l_3}$. Na l_1 je: $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, te ako se uzme

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

sledi $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$, $dz = 0$. Sada je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 t - 0\right)(-\sin t)\, dt + \left(0 - \cos^2 t\right)\cos t dt + \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) \cdot 0 \\
&= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 t + \sin^3 t\right) dt = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt \\
&= -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right)\sin t dt = -2\int\limits_0^1 \left(1 - u^2\right) du = -2\ u\big|_0^1 + \frac{2}{3} u^{\ 3}\big|_0^1 = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Nije teško proveriti da je i $I_2 = I_3 = -\frac{4}{3}$. Dakle $I = -4$. ▶

2.39 Da li za krivolinijski integral druge vrste važi teorema o srednjoj vrednosti, tj.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = P(x_1, y_1) \int\limits_{AB} dx + Q(x_2, y_2) \int\limits_{AB} dy.$$

◀ Ne važi. Neka je AB deo kružnice $x^2 + y^2 = 1$ od tačke $A(0,1)$ do tačke $B(0,-1)$ i neka su na tom delu definisane funkcije $P(x,y) = y$,

$Q(x,y)=0$. Onda je

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_{AB} ydx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin t\,(-\sin t)\,dt=-\frac{\pi}{2}\neq 0.$$

Međutim $\int\limits_{AB} dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,dt=0$ tj. nije moguća jednakost

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx=P(x_1,y_1)\cdot\int\limits_{AB} dx.$$

Korišćene su parametarske jednačine luka $AB: x=\cos t,\ y=\sin t,\ \frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{3\pi}{2}$. ►

2.40 Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint\limits_{L}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$$

ako je L kružnica

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ y=x\tan\alpha,\ \alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Smer kretanja je suprotan smeru kretanja kazaljke na časovniku kada se gleda iz tačke $(2a,-2a,0)$, $a>0$.

◄ Ako je t ugao što ga čini poteg OM sa ravni xOy, onda je

$$\begin{aligned} x &= OM'\cos\alpha=a\cos t\cos\alpha,\ y=OM'\sin\alpha=a\cos t\sin\alpha,\\ z &= MM'=a\sin t,\ 0\leq t\leq 2\pi,\ \text{tj.}\end{aligned}$$

$$dx=-a\sin t\cos\alpha dt,\ dy=-a\sin t\sin\alpha dt,\ dz=a\cos t dt.$$

Onda se zamenjivanjem dobija da je $I=2\pi\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)$. Videti ([2], II, Primeri 6.21.2). ►

2.41 Izračunati integral

$$I=\oint\limits_{L} y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

gde je L Vivanijeva kriva $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax,\ (z\geq 0,\ a\geq 0)$ orijentisana pozitivno u odnosu na tačku $(2a,0,0)$.

◄ Pošto je projekcija krive L na ravan xOy kružnica $x^2+y^2=ax$, čije su parametarske jednačine

$$x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t,\ y=\frac{a}{2}\sin t,$$

to su parametarske jednačine krive L date sa x,y iste kao za navedenu kružnicu (direktrisu cilindra)

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{a^2-ax}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos t} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos t)}=\sqrt{a^2\sin^2\frac{t}{2}}=a\sin\frac{t}{2},\ 0\le t\le 2\pi. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\frac{a^3}{8}\sin^2 t\cdot(-\sin t)\,dt+\frac{a^3}{2}\sin^2\frac{t}{2}\cos t dt+\frac{a^3}{8}(1+\cos t)^2\cos\frac{t}{2}dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3}{8}\sin^3 t+\frac{a^3}{2}\sin^2\frac{t}{2}\cos t+\frac{a^3}{8}\cdot 4\cos^5\frac{t}{2}\right)dt=\cdots=-\frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$ ►

2.42 Izračunati krivolinijski integral

$$I=\int_{AO}(e^x\sin y-py)\,dx+(e^x\cos y-p)\,dy$$

gde je AO gornja polukružnica $x^2+y^2=ax$, $O\,(0,0)$, $A\,(a,0)$.

◄ Ovo je primer krivolinijskog integrala koji se ne može rešiti kao prethodni. Za njegovo rešavanje koristi se **Grinova** formula. Pošto su funkcije

$$P\,(x,y)=e^x\sin y-py \text{ i } Q\,(x,y)=e^x\cos y-p$$

neprekidno-diferencijabilne u celoj ravni, a oblast G ograničena sa dve glatke krive

$$y_1\,(x)=+\sqrt{ax-x^2} \text{ i } y_2\,(x)=0,$$

to je prema Grinovoj formuli

$$\iint_G (Q_x-P_y)\,dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

gde je $L = OA \cup \widehat{AO}$. S obzirom da je

$$Q_x = e^x \cos y,\ P_y = e^x \cos y - p, \text{kao i}$$

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_{OA} Pdx + Qdy + \int\limits_{\widehat{AO}} Pdx + Qdy, \text{ to je}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\widehat{AO}} Pdx + Qdy &= \iint\limits_G (Q_x - P_y)\, dxdy - \int\limits_{OA} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy \\ &= p \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - \int\limits_0^a 0 \cdot dx + (e^x - p) \cdot 0 = \frac{a^2 \pi p}{8}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

2.43 Primenjujući Grinovu formulu izračunati krivolinijske integrale druge vrste

a) $\oint\limits_L xy^2 dy - x^2 dx$, L je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$;

b) $\oint\limits_L (x+y)\, dx - (x-y)\, dy$, L je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

c) $\oint\limits_L e^{-x^2+y^2} (\cos 2x dx + \sin 2xy dy)$, L je kružnica $x^2 + y^2 = R^2$.

◀ **a)**

$$P(x,y) = -x^2,\ Q(x,y) = xy^2 \Rightarrow Q_x = y^2,\ P_y = 0$$

$$\text{te je } \oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} y^2 dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{a^4}{4} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^4}{8} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi - \frac{a^4}{4} \int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^4}{4}.$$

b)

$$P(x,y) = x + y,\ Q(x,y) = y - x \Rightarrow Q_x = -1,\ P_y = 1$$

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1} (-1-1)\, dxdy = -2 \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1} dxdy = -2\pi ab.$$

c)

$$\begin{aligned} P(x,y) &= e^{-x^2+y^2}\cos 2xy,\ Q(x,y) = e^{-x^2+y^2}\sin 2xy \\ P_y &= 2ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy - 2xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy \\ Q_x &= -2xe^{-x^2+y^2}\sin 2xy + 2ye^{-x^2+y^2}\cos 2xy \end{aligned}$$

sledi $Q_x - P_y = 0$. Zato je $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$. ▶

2.44 Izračunati integral

$$I = \oint\limits_L (x\cos\alpha + y\cos\beta)\, dl$$

gde je L zatvorena glatka kriva koja ograničava oblast G površine S; α i β su uglovi spoljašnje normale $\overrightarrow{n}$ na krivu L u tački $M(x,y)$ sa osama Ox i Oy.

◀ Zna se $([2], II$ ili $[9], I)$ da je

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_L (P\cos\varphi + Q\sin\varphi)\, dl$$

gde je $\tau = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ jedinični vektor tangente u tački $M(x,y)$ krive, φ ugao tangente sa pozitivnim smerom $x-$ ose. Kako je

$$\begin{aligned} 2S &= \oint\limits_L -ydx + xdy = \oint\limits_L (-y\cos\varphi + x\sin\varphi)\, dl \\ &= \oint\limits_L (y\cos(\pi-\varphi) + x\sin\varphi)\, dl = \oint\limits_L \left(y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + x\sin\varphi\right) dl \\ &= \oint\limits_L (y\cos\beta + x\sin(\pi-\varphi))\, dl = \oint (y\cos\beta + x\sin\alpha)\, dl = I, \end{aligned}$$

gde je S površina oblasti G; sledi da je $I = 2S$. ▶

2.45 Izračunati integral

$$I = \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

gde je L zatvorena kontura koja ograničava oblast $G \subset \mathbb{R}^2$.

◀

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2},\ Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Kako je $P_y = Q_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$ to je prema Grinovoj formuli $I = \iint\limits_G (Q_x - P_y)\, dxdy = 0$ ako koordinatni početak $O\,(0,0)$ ne pripada oblasti G. Tada su funkcije $P\,(x,y)$ i $Q\,(x,y)$ neprekidno diferencijabilne za sve $(x,y) \in G$ i može se primeniti Grinova formula. Ako tačka $O\,(0,0)$ pripada oblasti G koja za granicu ima konturu L, ne može se primeniti Grinova formula. U tom slučaju se može uzeti neka druga zatvorena kontura l koja ograničava oblast kojoj pripada tačka $O\,(0,0)$. Pravljenjem tzv. zaseka dobija se jednostruko povezana oblast na koju može da se primeni Grinova formula, tj.

$$\oint\limits_{L\cup AB\cup l^- \cup BA} Pdx + Qdy = 0,$$

odnosno

$$\oint\limits_{L} + \oint\limits_{AB} + \oint\limits_{l^-} + \oint\limits_{BA} = 0,$$

(gde $\oint\limits_{l^-}$ znači da je krivolinijski integral po putanji u negativnom smeru), odakle sledi da je

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \oint\limits_{l} Pdx + Qdy.$$

To znači da integral ne zavisi od zatvorene putanje koja ograničava oblast kojoj pripada $O\,(0,0)$. Uzimanjem jedinične kružnice i prelaskom na parametarske jednačine dobija se $I = 2\pi$. Naravno, integral ne postoji ako koordinatni početak pripada konturi L. ▶

2.46 Koristeći krivolinijski integral izračunati površinu oblasti ograničenu krivama:

a) elipsom $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

b) parabolom $(x+y)^2 = 2ax$, $a > 0$ i $x-$som;

c) hiperbolom $y = \frac{1}{x}$, $x-$osom i pravama $x = 1$ i $x = 2$;

d) kružnicom $x^2 + y^2 = 4$ i parabolom $x^2 = 2 - y$ (oblast koja sadrži koordinatni početak).

◀ **a)** Formulom

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy - ydx \ \ (P\,(x,y) = -y,\ Q\,(x,y) = x)$$

se izračunava površina oblasti G koja je ograničena zatvorenom konturom L. U slučaju elipse je

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t \cdot (-a\sin t))\,dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} 1\cdot dt = \pi ab.$$

b) Parabola se može napisati u obliku $y = -x \pm \sqrt{2ax}$ i uzima se $y = \sqrt{2ax} - x$. Tada je

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{OA} x\cdot 0 - 0\cdot dx + \frac{1}{2}\int\limits_{2a}^{0}\left(x\cdot\left(\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) - \left(\sqrt{2ax} - x\right)\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}\left(\sqrt{2a}\frac{\sqrt{x}}{2} - x - \sqrt{2ax} + x\right)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}\left(\frac{\sqrt{2ax}}{2} - \sqrt{2ax}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}\frac{\sqrt{2ax}}{2}dx = \frac{\sqrt{2a}}{4}\int\limits_0^{2a}\sqrt{x}dx = \frac{\sqrt{2a}}{4}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a} = \frac{2a^2}{3}.
\end{aligned}$$

c) $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$, $L = \overline{12}\cup\overline{23}\cup 34\cup\overline{41}$. Sledi

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{12}} x\cdot 0 - 0\cdot dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2dy - y\cdot 0 + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int\limits_1^0 1\cdot dy - y\cdot 0 \\
&= \frac{1}{2} - \int\limits_2^1 \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2} = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2.
\end{aligned}$$

d)

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{L_1\cup L_2} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_{L_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{L_2} xdy - ydx.$$

Na L_1 je $x = 2\cos t$, $dx = -2\sin t dt$, $y = 2\sin t$, $dy = 2\cos t dt$. Iz

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 2\cos t \wedge -1 = 2\sin t \Rightarrow t = \frac{11\pi}{6}\\ -\sqrt{3} &= 2\cos t \wedge -1 = 2\sin t \Rightarrow t = \frac{7\pi}{6}.\end{aligned}$$

Na L_2 je $y = 2 - x^2, dy = -2xdx, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. Tada je

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} 4\cos^2 t dt + 4\sin^2 t dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \left(-2x^2 dx\right) - \left(2 - x^2\right) dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \left(-x^2 - 2\right) dx = \frac{4}{3}\pi + 3\sqrt{3}. \ \blacktriangleright\end{aligned}$$

2.47 Neka je L granica proste oblasti G. Može li se površina S te oblasti izračunati po formuli

$$S = \oint\limits_L \frac{1}{5}xdy - \frac{4}{5}ydy?$$

◀ Može. Za bilo koje dve funkcije $P(x,y), Q(x,y)$ koje imaju neprekidne parcijalne izvode u oblasti G važi Grinova formula:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(Q_x - P_y\right) dxdy.$$

Uzimajući da je $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$ ili $Q(x,y) = 0$, $P(x,y) = -y$ i koristeći činjenicu da je $\iint\limits_G dxdy$ površina oblasti G dobija se:

$$S = \oint\limits_L xdy \text{ i } S = -\oint\limits_L ydx.$$

Neka su sada α, β proizvoljni pozitivni brojevi takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Onda je

$$\alpha S + \beta S = \oint\limits_L \alpha xdy - \beta ydx$$

tj. $S = \oint\limits_L \alpha xdy - \beta ydx$. Specijalno za $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ sledi uobičajena formula

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$$

koja se sreće u literaturi. ▶

2.48 Neka je

$$P(x,y) = xy,\ Q(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2-y},\ G = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Dokazati da je izraz $Pdx + Qdy$ totalni diferencijal neke funkcije $(x,y) \mapsto u(x,y)$ u krugu G, i naći tu funkciju. Izračunati zatim

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy$$

gde je L proizvoljna zatvorena deo po deo glatka kontura $L \subset G$. Izračunati $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ ako je $A(-1,1)$, $B(1,1)$.

◀ S obzirom da je $P_x = x$ i $Q_y = x$ to je prema ([2], $.II$, Teorema 6.3.1 ili [9], II, Teorema 1.3.VI) izraz $Pdx + Qdy$ totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$ definisane u krugu G. Za nalaženje funkcije $u(x,y)$ čiji je totalni diferencijal du jednak izrazu $Pdx + Qdy$ koristi se formula

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C$$

gde je (x_0, y_0) fiksirana tačka u oblasti G, a (x,y) promenljiva tačka. Pošto onda integral ne zavisi od putanje

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C.$$

U datom slučaju je

$$u(x,y) = \int\limits_0^x 0 \cdot dx + \int\limits_0^y \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2-y}\right) dy = \frac{x^2 y}{2} + \ln(2-y) + C$$

jer je $|y| \le 2$. Zatim je prema ([2], $.II$, Teorema 6.3.1 ili [9], II, Teorema 3.3.VI)

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0.$$

Prema istim teoremama iz [2] ili [9] je

$$\begin{aligned}\int\limits_L Pdx + Qdy &= u(B) - u(A) = \left(\frac{x^2y}{2} + \ln(2-y) + C\right)\Bigg|_{(-1,1)}^{(1,1)}\\ &= \left(\frac{1}{2} + \ln 1 + C\right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 1 + C\right) = 0. \blacktriangleright\end{aligned}$$

2.49 Primenom Grinove formule izračunati krivolinijske integrale:
a) $I = \oint\limits_\gamma xy^2dy - x^2ydx,\ \gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\right\};$
b) $I = \oint\limits_\gamma (x+y)\,dx - (x-y)\,dy,\ \gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\right\};$
c) $I = \oint\limits_\gamma e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(\cos 2xydx + \sin 2xydy\right), \gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\right\}.$
◀ **a)**

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (Q_x - P_y)\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \left(y^2 + x^2\right)dxdy\\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{2}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (Q_x - P_y)\,dxdy = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (-1-1)\,dxdy\\ &= -2\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} dxdy = -2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = -4.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} (Q_x - P_y)\,dxdy\\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \Big(-2xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\sin 2xy + 2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos 2xy\\ &\quad +2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos 2xy + 2xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\sin 2xy\Big)\,dxdy\end{aligned}$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} 4ye^{-\left(x^2+y^2\right)} \cos 2xydxdy$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 4ye^{-\left(x^2+y^2\right)} \cos 2xydy = \int\limits_{-R}^{R} dx \cdot 0 = 0$$

(podintegralna funkcija je neparna po y, a granice su suprotnog znaka). U svim primerima lako je proveriti uslove za primenu Grinove formule. ▶

2.50 Dokazati da je podintegralni izraz potpun diferencijal i izračunati krivolinijski integral

$$I = \int\limits_{AB} \left(15x^2y + 3z^2\right) dx + \left(5x^3 - 2yz\right) dy + \left(6xz - y^2\right) dz$$

gde je $A(1,2,1)$, $B(2,3,2)$.

◀ Pošto je

$$P(x,y,z) = 15x^2y + 3z^2,\ Q(x,y,z) = 5x^3 - 2yz,\ R(x,y,z) = 6xz - y^2$$

to je

$$P_y = 15x^2,\ P_z = 6z,\ Q_x = 15x^2,\ Q_z = -2y,\ R_x = 6z,\ R_y = -2y.$$

Onda je prema ([2], II, Teorema 6.3.2 ili [9], I, Teorema 2.3.VI)

$$Pdx + Qdy + Rdz = du,$$

gde je $u(x,y,z)$ neka diferencijabilna funkcija sa tri promenljive. Slično kao u dvodimenzionalnom slučaju je:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz + C \end{aligned}$$

gde je (x_0, y_0, z_0) fiksirana, a (x,y,z) promenljiva tačka. U ovom slučaju se može uzeti $(0,0,0)$ da bude fiksirana. Zato je

$$u(x,y,z) = \int\limits_0^x 0 \cdot dx + \int\limits_0^y 5x^3dy + \int\limits_0^z \left(6xz - y^2\right) dz + C = 5x^3y + 3xz^2 - y^2z + C.$$

Sada je prema $([2], II, 6$ ili $[9], I, VI)$

$$I = u(2,3,2) - u(1,2,1) = 138. \ \blacktriangleright$$

2.51 Naći funkciju $u(x,y,z)$ ako je

$$du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

◀ Lako je proveriti da je desna strana totalni diferencijal neke funkcije sa tri promenljive, tj. $P_y = Q_x$, $Q_z = R_y$ i $R_x = P_z$. Onda je

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \int_{z_0}^{z} \frac{xy}{z^2} dz + C \\
&= \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) x\Big|_{x_0}^{x} + \left(\frac{xy}{z_0} - \frac{x}{y}\right)\Big|_{y_0}^{y} + \frac{xy}{z}\Big|_{z_0}^{z} + C \\
&= x\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) - x_0\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) + C \\
&= x - \frac{x}{y} - \frac{xy}{z} + C_1
\end{aligned}$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta i $yz \neq 0$. ▶

2.4 Površinski integrali

2.52 Izračunati površinu S površi:

a) S je deo hiperboličkog paraboloida $z = xy$ koji se nalazi u cilindru $x^2 + y^2 = 8$;

b) S je deo površi $z = 1 - \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ koji odseca ravan $z = 0$.

◀ **a)**

$$S = \iint_S dS = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

gde je $G = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 8\right\}$. S obzirom da je $z_x = y$, $z_y = x$, to je

$$S = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = 26\pi.$$

Napomena. Ako je površ S zadata jednačinom $z = z(x,y)$ onda student treba da zna da je $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$; student zatim treba da zna kako izgleda površ $z = xy$ (na primer sadrži koordinatne ose i prolazi kroz prvi i treći, odnosno šesti i osmi oktant) i da obnovi jednačine osnovnih površi koje je sreo u analitičkoj geometriji (sfera, elipsoid, cilindar, konus,...).

b)

$$S = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$$

gde je $G = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, deo ravni xOy na koju se površ projektuje. Kriva $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 1$ tj. $x^2 + y^2 = 1$ (kružnica) je granica projekcije površi na xOy ravan. Zatim je

$$z_x = -3x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}},\ z_y = -3y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \text{te je}$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+9\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ i } S = \iint_G \sqrt{1+9\left(x^2+y^2\right)^2}\,dxdy.$$

Prelaskom na polarne koordinate dobija se

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{1+9\rho^4}\,d\rho \\ &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{3\rho^2}{2}\sqrt{1+9\rho^4} + \frac{1}{2}\ln\left(3\rho^2+\sqrt{1+9\rho^4}\right)\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}\left(3\sqrt{10} + \ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right). \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

2.53 Izračunati površinu S površi date jednačinom: $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = 2a^2xy$, $a > 0$.

◀ Očigledno je $S = 4\iint_{S_I} dS$, gde je S_I deo površi u I oktantu. Ako je $\rho = \rho(\theta,\varphi)$ jednačina površi u sfernim koordinatama, onda su

$$\begin{aligned} x &= \rho(\theta,\varphi)\cos\varphi\sin\theta, \\ y &= \rho(\theta,\varphi)\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= \rho(\theta,\varphi)\cos\theta, \end{aligned} \tag{1}$$

parametarske jednačine (ulogu parametara u i v igraju θ i φ) površi. Tada je

$$dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv = \sqrt{EG-F^2}\,dudv \tag{2}$$

$$= \sqrt{\left(\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2\right)\sin^2\theta+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2}\rho d\theta d\varphi,$$

gde je kao što znamo iz teorije (pogledati i zadatak 2.59, c))

$$A=\frac{\mathcal{D}(y,z)}{\mathcal{D}(\theta,\varphi)},\ B=\frac{\mathcal{D}(z,x)}{\mathcal{D}(\theta,\varphi)},\ C=\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\theta,\varphi)} \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}. \end{aligned}$$

S obzirom da je $\rho = a\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}$ jednačina date površi u sfernim kordinatama, to se pažljivim računom prema navedenoj formuli, dobija da je

$$dS=\sqrt{\left(\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2\right)\sin^2\theta+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2}\rho(\theta,\varphi)\,d\theta d\varphi=\frac{a\sin\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho(\theta,\varphi)\,d\theta d\varphi.$$

Sada je

$$\begin{aligned} S &= 4\cdot\iint\limits_{S_I} dS = 4\cdot\iint\limits_{0\le\theta,\varphi\le\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\cdot a\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}d\theta d\varphi \\ &= 4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\pi^2a^2. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

2.54 Naći površinu tela ograničenog površima $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.
◀ Tražena površina je

$$S=16S_1=16\iint\limits_{\triangle OAB}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

gde je S_1 površina krivolinijskog trougla CAB, i na trouglu CAB je: $z=\sqrt{a^2-y^2}$. Tada je

$$\begin{aligned} z_x &= 0,\ z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}},\ \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}, \\ \triangle\, OAB &= \{(x,y): 0\le x\le y, 0\le y\le a\}. \end{aligned}$$

Zatim je

$$S = 16a\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\int_0^y dx = 16a\int_0^a \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}} = 16a\ \sqrt{a^2-y^2}\Big|_a^0 = 16a^2. \ \blacktriangleright$$

2.55 Izračunati površinu tela ograničenog površima:
a) $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$, $x+y+z=2a$, $a>0$;
b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x+2z=a$, $a>0$.

$\blacktriangleleft$ **a)** Tražena površina kupe koja se dobija presekom ravni i konusa je $S=M+B$. Imamo

$$M = \iint\limits_{B'} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

gde je B' projekcija elipse

$$x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2 \wedge x+y+z=2a$$

na ravan xOy i $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$. Dalje je

$$z_x = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y = \frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pošto je $1+z_x^2+z_y^2=4$ to je

$$M = 2\iint\limits_{B'} dxdy = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}B = \frac{2B}{\sqrt{3}}.$$

Dakle $S=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)B=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}B$. Treba naći B (površinu elipse). S obzirom da je $B=\frac{\pi}{4}\cdot PQ\cdot RS$ gde su PQ i RS redom velika i mala osa elipse, to je dovoljno odrediti koordinate tačaka P,Q,R i S. Rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} y &= x, \\ x^2+y^2 &= \frac{1}{3}z^2, \\ x+y+z &= 2a, \end{aligned}$$

dobijaju se koordinate tačaka P i Q, tj.

$$P\left(\frac{2a}{2+\sqrt{6}},\frac{2a}{2+\sqrt{6}},\frac{2a\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}\right) \text{ i } Q\left(\frac{2a}{2-\sqrt{6}},\frac{2a}{2-\sqrt{6}},\frac{-2a\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}\right),$$

i centra elipse $O'\left(-2a,-2a,6a\right)$. Koordinate tačaka R i S nalaze se rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} z &= 6a, \\ x^2+y^2 &= \frac{1}{3}z^2, \\ x+y+z &= 2a, \end{aligned}$$

odakle je $R\left(-2a-a\sqrt{2},-2a+a\sqrt{2},6a\right)$, $S\left(-2a+a\sqrt{2},-2a-a\sqrt{2},6a\right)$. Nalaženjem veličina duži PQ i RS dobija se tražena površina tela

$$S=4\pi a^2\left(3+2\sqrt{3}\right).$$

b) Slično kao u delu zadatka pod a) je $S=M+B$ ($M-$omotač, $B-$osnova kupe).

$$M=\iint\limits_{B'}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

gde je B' oblast ravni xOy ograničena projekcijom elipse

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\wedge x+2z=a,\ a>0.$$

Eliminacijom promenljive z dobija se jednačina

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\left(\frac{2a}{3}\right)^2$$

što predstavlja elipsu u ravni xOy. Njena površina je

$$S\left(B'\right)=\pi\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}a=2\pi a^2\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Kako je $z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, to je

$$M=\iint\limits_{B'}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{B'}dxdy=\sqrt{2}S\left(B'\right)=\frac{2\pi a^2}{9}\sqrt{6}.$$

Dalje je $B=\iint\limits_{B'}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$, gde je $z=\frac{a-x}{2}$, odakle je $z_x=-\frac{1}{2}$, $z_y=0$. Površina osnove je onda

$$B=\frac{\sqrt{5}}{2}S\left(B'\right)=\frac{\pi a^2\sqrt{15}}{9}.$$

Sada je $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{9}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$. ▶

2.56 Izračunati površinu dela sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ koji se nalazi unutar cilindra $x^2+z^2=b^2, 0<b<a$.

◀

$$\begin{aligned} P &= 2\iint\limits_{x^2+z^2\le b^2}\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz = 2\iint\limits_{x^2+z^2\le b^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}dxdz \\ &= 2ab^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-b^2\rho^2}} = 4ab^2\pi\left(-\frac{1}{b^2}\sqrt{a^2-b^2\rho^2}\Big|_0^1\right) \\ &= 4a\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \end{aligned}$$

jer je $y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$ za $y\ge 0$ i $y_x=\frac{-x}{y}$, $y_z=\frac{-z}{y}$. Uvedene su uopštene polarne koordinate $x=b\rho\cos\varphi$, $z=b\rho\sin\varphi$. ▶

2.57 Izračunati površinski integral prve vrste

a) $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, S je polusfera $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$;

b) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS$, S granica tela datog sa $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

◀ **a)** Pošto je na S odgovarajuća funkcija $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, to je

$$I=\iint\limits_S (x+y+z)\,dS=\iint\limits_G\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdy$$

gde je

$$1+y_x^2+y_z^2=\frac{a^2}{z^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}\text{ i } G=\left\{(x,y): x^2+y^2\le a^2\right\}.$$

Zatim je

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_G\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy \\ &= \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho \\ &= \int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi\cdot\int\limits_0^a\frac{\rho^2 a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int\limits_0^a a\rho d\rho \\ &= 0\cdot\int\limits_0^a\frac{\rho^2 a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho+\pi a^3=\pi a^3. \end{aligned}$$

b)

$$I=\iint\limits_{S}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint\limits_{S_1}\left(x^2+y^2\right)dS+\iint\limits_{S_2}\left(x^2+y^2\right)dS.$$

Na S_1 je: $z=1$ te je $z_x=z_y=0$ i $dS=1+z_x^2+z_y^2dxdy=dxdy$.
Na S_2 je: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ te je

$$\begin{aligned}
z_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ i}\\
dS &= \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{G}\left(x^2+y^2\right)dxdy+\iint\limits_{G}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy\\
&= \iint\limits_{G}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(x^2+y^2\right)dxdy\\
&= \left(1+\sqrt{2}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3d\rho=\frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

gde je G projekcija površi S_1 i S_2 na ravan xOy. ▶

2.58 Uraditi prethodni zadatak pod a) koristeći projekciju površi na ravan xOz.

◀ Kružnicom K čija je jednačina $x^2+z^2=a^2$ površ S je podeljena na površi S_1 i S_2. Zato je

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{S_1}(x+y+z)\,dS+\iint\limits_{S_2}(x+y+z)\,dS\\
&= \iint\limits_{x^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0}\left(x-\sqrt{a^2-x^2-z^2}+z\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdz\\
&\quad+\iint\limits_{x^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0}\left(x+\sqrt{a^2-x^2-z^2}+z\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdz\\
&= 2\iint\limits_{x^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0}(x+z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdz.
\end{aligned}$$

Pošto je $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$ to je

$$y_x = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}},\ y_z = \pm\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}},$$

tj. $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}$. Sada je traženi integral

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint\limits_{x^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0} (x+z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdz \\ &= 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\frac{\rho a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho \\ &= 2\int_0^{\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi \int_0^{a} \frac{\rho^2 a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho = 4a\cdot\int_0^{a}\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho \\ &= 4a\left(-\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_0^a + \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}d\rho\right) = \pi a^3. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

Napomena. Neka student uradi zadatak 2.57 **b)** koristeći projektovanje na xOz ili yOz ravan.

2.59 Izračunati površinske integrale prve vrste:

a) $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, S je granica tetraedra: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ i $x+y+z \le 1$;

b) $\iint\limits_S |xyz|\,dS$, S je deo površi $z = x^2 + y^2$ za $z \le 1$;

c) $\iint\limits_S zdS$, S je deo helikoida $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$ za $0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi$;

d) $\iint\limits_S z^2 dS$, S je deo konusne površi $x = r\cos\varphi\sin\alpha$, $y = r\sin\varphi\sin\alpha$, $z = r\cos\alpha$ za $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ ($a > 0, \alpha$ je konstantan ugao iz $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$);

e) $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$, S je deo konusne površi $z = \sqrt{x^2+y^2}$ koji se nalazi u cilindru $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ **a)** Iz

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \iint\limits_{S_3} + \iint\limits_{S_4},$$

sledi:

Na S_1 je $z = 0$ te je $dS = dxdy$;

Na S_2 je $x=0$ te je $dS=\sqrt{1+x_z^2+x_y^2}dzdy=dzdy$,
Na S_3 je $y=0$ te je $dS=\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}dxdz=dxdz$,
Na S_4 je $z=1-x-y$ te je $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$.
Ako sa I_i, $i=\overline{1,4}$ označimo redom integrale po površi S_i, dobijamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_{S_1}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{OMN}\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}\\ &= \int\limits_0^1\left(-\left.\frac{1}{1+x+y}\right|_0^{1-x}\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx=\ln 2-\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{S_2}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{ONP}\frac{dzdy}{(1+0+y)^2}=\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{1-z}\frac{dy}{(1+y)^2}\\ &= \int\limits_0^1\left(-\left.\frac{1}{1+y}\right|_0^{1-z}\right)dz=\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{2-z}\right)dz=1-\ln 2; \end{aligned}$$

Zbog simetrije sa integralom $\iint\limits_{S_2}\frac{dS}{(1+x+y)^2}$ važi

$$I_3=\iint\limits_{S_3}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\triangle MOP}\frac{dxdz}{(1+x)^2}=1-\ln 2.$$

I na kraju

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint\limits_{S_4}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{MNP}\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+y)^2}\\ &= \sqrt{3}\iint\limits_{S_1}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

Dakle,

$$\iint\limits_{S}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\sum_{i=1}^{4}I_i=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2\right).$$

b)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S |xyz|\, dS = \iint\limits_S |xy|\, z dS \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} |xy| \left(x^2+y^2\right) \sqrt{1+4x^2+4y^2} dxdy \\
&= 4 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\geq 0, y\geq 0}} xy \left(x^2+y^2\right) \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)} dxdy
\end{aligned}
$$

jer je $z \geq 0$ i $z_x = 2x, z_y = 2y$, te je $dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$. Kako

$$
\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\geq 0, y\geq 0}} xy \left(x^2+y^2\right) \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)} dxdy
$$

predstavlja zapreminu ograničenu grafikom funkcije
$z = xy\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$, cilindrom $x^2+y^2 = 1$ i koordinatnom ravni $z = 0$, jasno je zašto se brisanjem apsolutne vrednosti javlja četvorostruka vrednost. Prelaskom na polarne koordinate integral postaje

$$
\begin{aligned}
I &= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^5 \sqrt{1+4\rho^2} d\rho = 2\int\limits_0^1 \rho^5\sqrt{1+4\rho^2}d\rho \\
&= 2\int\limits_0^2 \frac{1}{32} t^5 \sqrt{1+t^2} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{32}\int\limits_0^2 t^5\sqrt{1+t^2}dt \\
&= \frac{1}{32}\int\limits_1^{\sqrt{5}} \left(u^2-1\right)^2 u^2 du = \cdots = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S z dS = \iint\limits_G v\sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv, \\
G &= \left\{(u,v) : 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi\right\}.
\end{aligned}
$$

Ako je granica tela (površ) zadata parametarski:

$$
x = x\left(u,v\right),\ y = y\left(u,v\right),\ z = z\left(u,v\right),
$$

onda je $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$ gde je

$$A = \frac{\mathcal{D}(y,z)}{\mathcal{D}(u,v)},\ B = \frac{\mathcal{D}(z,x)}{\mathcal{D}(u,v)},\ C = \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}.$$

U datom primeru je

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin v,\ B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -\cos v, \\ C &= \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u. \end{aligned}$$

Onda je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a du \int_0^{2\pi} v\sqrt{1+u^2}dv = \int_0^a \sqrt{1+u^2}du \int_0^{2\pi} vdv = \\ &= 2\pi^2 \left(\frac{u\sqrt{1+u^2}}{2}\Bigg|_0^a + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\Bigg|_0^a \right) \\ &= \pi^2\left(a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right). \end{aligned}$$

d)

$$I = \iint_S z^2 dS = \iint_G \left(\rho^2\cos^2\alpha\right)\sqrt{A^2+B^2+C^2}d\rho d\varphi$$

(ovde su parametri ρ i φ i $G = \{(\rho,\varphi) : 0 \le \rho \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$)

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \sin\varphi\sin\alpha & \rho\cos\varphi\sin\alpha \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = -\rho\cos\varphi\sin\alpha\cos\alpha, \\ B &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \cos\varphi\sin\alpha & -\rho\sin\varphi\sin\alpha \end{vmatrix} = -\rho\sin\varphi\sin\alpha\cos\alpha, \\ C &= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\alpha & -\rho\sin\varphi\sin\alpha \\ \sin\varphi\sin\alpha & \rho\cos\varphi\sin\alpha \end{vmatrix} = \rho\sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\rho^2\cos^2\alpha\right)\sqrt{\rho^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \rho^2\sin^4\alpha d\rho} \\ &= 2\pi\cos^2\alpha \int_0^a \rho^2\sqrt{\rho^2\sin^2\alpha\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}d\rho \end{aligned}$$

$$= \quad 2\pi \cos^2\alpha \sin\alpha \int\limits_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{2} \cos^2\alpha \sin\alpha.$$

e)

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S (xy + yz + zx)\, dS \\ &= \iint\limits_G \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy \end{aligned}$$

gde je (**sl. 2.31**)

$$G = \left\{(x,y) : (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\right\},\ z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Zatim je

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_G \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2} dxdy \\ &= \sqrt{2}\iint\limits_G xydxdy + \sqrt{2}\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}dxdy + \sqrt{2}\iint\limits_G y\sqrt{x^2+y^2}dxdy \\ &= \sqrt{2}\int\limits_0^{2a} xdx \int\limits_{-y}^{y} ydy + \sqrt{2}\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}dxdy + \sqrt{2}\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{-y}^{y} y\sqrt{x^2+y^2}dy \\ &= 0 + \sqrt{2}\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}dxdy + 0 = \sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^3 d\rho \\ &= 4\sqrt{2}a^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = 8\sqrt{2}a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = 8\sqrt{2}a^4 \frac{4!!}{5!!} = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}, \end{aligned}$$

gde je $y = \sqrt{2ax - x^2}$. Korišćena je neparnost podintegralnih funkcija po y u prvom i trećem integralu. ▶

Napomena. Ako se deo neke površi nalazi u cilindru $x^2+y^2 = a^2$, onda je njena projekcija na ravan xOy krug (deo ravni xOy ograničen direktrisom cilindra).

2.60 Izračunati površinski integral $I = \iint\limits_S zdS$, gde je S deo hiperboličkog paraboloida $z = xy$ koji se nalazi u cilindru $x^2 + y^2 = 4$.

◀

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} xy\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{1+\rho^2}\rho^3 d\rho = 0$$

jer je $\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$. ▶

Napomena. Neka student obrazloži zašto sledeći postupak rešavanja integrala $\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$ nije korektan: $\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \int\limits_0^0 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^0 = 0$ (smena $\sin\varphi = t$).

2.61 Izračunati površinski integral $I = \iint\limits_S ydS$, gde je S deo cilindra $x = 2y^2 + 1$, $y > 0$ ograničen površima $x = y^2 + z^2$, $x = 2$, $x = 3$.

◀ S obzirom da u jednačini površi ne učestvuje promenljiva z, to se dati površinski integral prvog tipa može svesti na dvojni integral oblika:

$$\iint\limits_{G_{xz}} y\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz \text{ ili } \iint\limits_{G_{yz}} y\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz.$$

Na osnovu toga je

$$I = \iint\limits_{G_{xz}} \sqrt{\frac{x-1}{2}}\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

gde je $y_x = \frac{1}{2\sqrt{2(x-1)}}$, $y_z = 0$, a

$$G_{xz} = \left\{(x,z) : 2 \le x \le 3, -\sqrt{\frac{x+1}{2}} \le z \le \sqrt{\frac{x+1}{2}}\right\}$$

je projekcija dela cilindra S na ravan xOz i dobija se eliminacijom promenljive y iz jednačina $x = 2y^2 + 1$, $x = y^2 + z^2$. Zatim je

$$I = \int\limits_2^3 \frac{1}{4}\sqrt{8x-7}dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{x+1}{2}}}^{\sqrt{\frac{x+1}{2}}} dz = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_2^3 \sqrt{8x^2+x-7}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_2^3 \sqrt{\left(x+\frac{1}{16}\right)^2-\left(\frac{25}{16}\right)^2}\,dx \\
&= \left(\frac{x+\frac{1}{16}}{2}\sqrt{x^2+\frac{x}{8}-\frac{7}{8}}-\left(\frac{15}{16}\right)^2\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{16}+\sqrt{x^2+\frac{x}{8}-\frac{7}{8}}\right|\right)\Bigg|_2^3 \\
&= \frac{98\sqrt{17}-99\sqrt{3}}{64\sqrt{2}}+\left(\frac{15}{16}\right)^2\ln\frac{33+12\sqrt{6}}{49+8\sqrt{34}}. \ \blacktriangleright
\end{aligned}
$$

Napomena. Student treba da zna redosled koraka za rešavanje površinskog integrala prve vrste $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS$. Najpre mora da razmotri položaj površi S u prostoru $\mathbb{R}^3$, njenu jednačinu. Na osnovu toga bira koordinatnu ravan na koju projektuje površ S, tj. bira tip dvojnog integrala preko koga izražava površinski integral. Ako je površ data parametarski, onda uzima ravan uOv određenu parametrima i dS izračunava preko poznate formule $\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$. Neka student prethodni zadatak reši tako što će projektovati površ na ravan yOz.

2.62 Izračunati koordinate jediničnih vektora normala uzetih na donju stranu konusne površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0<a\le z\le b$, $a<b$. Dokazati da je to polje normala neprekidno.

◀ Neka je $\overrightarrow{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ jedinični vektor proizvoljne spoljašnje normale na datu površ u tački $M\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)$. S obzirom da spoljašnja normala gradi tup ugao sa pozitivnim delom $z-$ose, to je

$$
\begin{aligned}
\cos\gamma &= \frac{1}{-\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \cos\beta=\frac{-z_y}{-\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\frac{y}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}, \\
\cos\alpha &= \frac{-z_x}{-\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\frac{x}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}.
\end{aligned}
$$

Tako je definisano vektorsko polje

$$
\overrightarrow{n}(M)=\left(\frac{x}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}},\frac{y}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
$$

koje je neprekidno (takve su njegove koordinate). Oblast definisanosti funkcija

$$
P(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}},\ Q(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}},\ R(x,y,z)=-\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

je omotač zarubljene kupe, tj. deo konusa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ između ravni $z = a$ i $z = b$. S obzirom da se u svakoj tački date površi može definisati neprekidno vektorsko polje normala, to je data površ dvostrana $([2], II$, strana 215 ili $[9], I$, strana 243). ▶

2.63 Odrediti smer neprekidnog vektorskog polja normala, uzetih na spoljašnjoj strani sfere $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a \cos u$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

◀ Parametri u i v odgovaraju uglovima θ i φ $(\rho = a)$ koji se pojavljuju u sfernim koordinatama. Ako je $\overrightarrow{n}$ jedinični vektor proizvoljne normale usmeren na spoljašnju stranu sfere poluprečnika a, onda se njegove koordinate $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma$ uglovi sa koordinatnim osama x, y, z redom računaju po formulama

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\
\cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} a\cos u \sin v & a \sin u \cos v \\ -a \sin u & 0 \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 u \cos v \\
B &= \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} -a \sin u & 0 \\ a\cos u \cos v & -a \sin u \sin v \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 u \sin v \\
C &= \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} a\cos u \cos v & -a \sin u \sin v \\ a \cos u \sin v & a \sin u \cos v \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 u \cos u
\end{aligned}$$

gde je

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^4 \sin^4 u + a^4 \sin^2 u \cos^2 u = a^4 \sin^2 u$$

tj. $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a^2 \sin u$ tako da vektorsko poilje normala $\overrightarrow{n}$ ima koordinate $\overrightarrow{n} = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ tj.
$\overrightarrow{n} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, -\cos u)$ što zavisi od toga da li je tačka na gornjoj ili donjoj strani sfere. Na kružnici sfere koja pripada ravni xOy vektorsko polje normala ima koordinate $\overrightarrow{n} = (\cos v, \sin v, 0)$. ▶

2.64 Izračunati površinske integrale druge vrste

$$\iint_S dxdy, \quad \iint_S dydz, \quad \iint_S dzdx,$$

gde S označava spoljašnju stranu sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

◀
$$I_1 = \iint\limits_S dxdy = \iint\limits_{S^+} dxdy + \iint\limits_{S^-} dxdy$$

gde S^+, odnosno S^- označava spoljašnju gornju, odnosno spoljašnju donju stranu. Zatim je

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} dxdy + \left(- \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} dxdy \right) = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} dxdy - \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} dxdy = 0.$$

Korišćena je definicija površinskog integrala druge vrste preko dvostrukog integrala ($[2], II$, strana 216 ili $[9], I$, Definicija 1.2.VII). Na isti način se dobija da su i ostala dva integrala jednaka nuli. ▶

2.65 Izračunati površinski integral druge vrste

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

gde je S spoljašnja strana kocke $\{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$. Kolika je vrednost tog integrala ako je S unutrašnja strana kocke?

◀ S obzirom da kocka ima šest strana (kvadrata), i da su ivice mere (površine) nula, to je $I = \sum\limits_{k=1}^{6} I_k$ gde je na primer $I_1 = \iint\limits_{S_1} zdxdy, I_2 + \iint\limits_{S_2} zdxdy$, a S_1 i S_2 pripadaju redom ravnima $z=0$ i $z=1$. zato je

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} zdxdy = \iint\limits_{G_2} dxdy = 1$$

gde je $G_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Takođe je

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} 0 \cdot dxdy = 0.$$

Ostala dva integrala se slično izračunavaju, dakle

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 3.$$

Ako je S unutrašnja strana kocke, vrednost integrala je -3, jer je na primer

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} z dx dy = -\iint\limits_{G_2} dx dy = -1$$

$([2], II$, strana 216 ili $[9], I$, Definicija 1.2.VII). ►

Napomena. Prethodni površinski integral se može izračunati i primenom formule Gaus-Ostrogradskog, tj.

$$I = \iiint\limits_{T} (P_x + Q_y + R_z)\, dx dy dz = 3 \iiint\limits_{T} dx dy dz = 3$$

gde je T telo čija je granica kocka osnovne ivice jednake 1 smeštena u prvom oktantu.

2.66 Izračunati površinski integral druge vrste $\iint\limits_{S} dx dy$ gde je S donja strana dela konusa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ za $0 \leq z \leq 1$.

◄ $I = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dx dy = -\pi$ jer se integral uzima po donjoj strani. ►

2.67 Izračunati površinski integral druge vrste $I = \iint\limits_{S} y dz dx$ gde je S gornja strana paraboloida $z = x^2 + y^2$ ograničena ravnima $z = 0$ i $z = 2$.

◄ Gornja (unutrašnja) strana paraboloida $z = x^2 + y^2$ u odnosu na ravan Oxy ima svoju gornju (S^+) i svoju donju (S^-) stranu u odnosu na ravan Oxz. Zato je

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{S^+} y dz dx + \iint\limits_{S^-} y dz dx \\
&= +\iint\limits_{G} \left(-\sqrt{z - x^2}\right) dz dx - \iint\limits_{G} \sqrt{z - x^2} dz dx \\
&= -2 \iint\limits_{G} \sqrt{z - x^2} dz dx = -2 \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} \sqrt{z - x^2} dz \\
&= -2 \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left(\frac{2}{3}\left(z - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{2}\right) = -\frac{4}{3} \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\left(2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 0\right) dx \\
&= -\frac{8}{3} \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{8}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = -2\pi.
\end{aligned}$$

Korišćena je smena $x = \sqrt{2}\sin t$. ►

Napomena. Kako je

$$I = \iint_S 0 \cdot dydz + y \cdot dzdx + 0 \cdot dxdy$$

onda je

$$I = \iint_{S \cup K^-} 0 \cdot dydz + y \cdot dzdx + 0 \cdot dxdy - \iint_{K^-} 0 \cdot dydz + y \cdot dzdx + 0 \cdot dxdy$$

gde je K^- donja strana kruga $\left\{(x, y, z) : z = 2,\ z = x^2 + y^2\right\}$, to je prema formuli Gaus-Ostrogradskog

$$I = -\iiint_T 1 \cdot dxdydz - 0 = -\iint_{x^2+y^2 \leq 2} dxdy \int_{x^2+y^2}^{2} dz = \cdots = -2\pi.$$

$\iint_{K^-} = 0$, jer je $z = 2$ na K, odakle sledi $dz = 0$. Primenjen je metod "zatvaranja" površi.

2.68 Izračunati protok (fluks) vektorskog polja $\overrightarrow{a}(x, y, z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ kroz spoljašnju stranu sfere $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

◄ **I način.** Ispunjeni su uslovi za primenu formule Gaus-Ostrogradskog. Zato je protok

$$\Phi = \iiint_T (2x + 2y + 2z)\, dxdydz = 2\iiint_T (x + y + z)\, dxdydz$$

gde je T kugla ograničena datom sferom. Prelaskom na sferne koordinate

$$x - a = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y - b = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z - c = \rho\cos\theta,$$

dobija se

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} (a + \rho\cos\varphi\sin\theta + b + \rho\sin\varphi\sin\theta \\ &\quad + c + \rho\cos\theta)\, \rho^2 \sin\theta d\rho \\ &= 2\,(a + b + c) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \rho^2 d\rho\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int\limits_0^{R}\rho^3 d\rho \\
= \quad & 2\,(a+b+c)\,2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3}+2\cdot 0\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{8\pi R^3}{3}\,(a+b+c)\,.
\end{aligned}
$$

II način.

$$\Phi=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=I_1+I_2+I_3.$$

U odnosu na ravan $z=c$ spoljašnja strana sfere ima svoju gornju i donju stranu, zato je na primer

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \iint\limits_{S^+} z^2dxdy+\iint\limits_{S^-} z^2dxdy \\
&= \iint\limits_{K_{xy}}\left(c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2 dxdy \\
&\quad -\iint\limits_{K_{xy}}\left(c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2 dxdy \\
&= 4c\iint\limits_{K_{xy}}\left(c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2 dxdy \\
&= 4c\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=\frac{8\pi cR^3}{3}
\end{aligned}
$$

gde je $K_{xy}=\left\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\right\}$. Korišćene su "pomerene" polarne koordinate $x-a=\rho\cos\varphi$, $y-b=\rho\sin\varphi$. Na isti način (samo druga slova) se nalaze $I_1=\frac{8\pi aR^3}{3}$ i $I_2=\frac{8\pi bR^3}{3}$.

III način. Prema formulama

$$dydz=(\cos\alpha)\,dS,\;\; dzdx=(\cos\beta)\,dS,\;\; dxdy=(\cos\gamma)\,dS$$

površinski integral druge vrste (fluks vektorskog polja) postaje

$$\Phi=\iint\limits_S\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS=\iint\limits_S f\,(x,y,z)\,dS$$

gde je S površ sfere (nije bitna unutrašnja ili spoljašnja strana-orijentacija je sadržana u $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$). S obzirom da je

$$z = c \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \text{ to je}$$

$$z_x = \frac{-(x-a)}{\pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}},\ z_y = \frac{-(y-b)}{\pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}}$$

odnosno

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}}$$

$$\text{tj. } \cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}}{R} = \frac{z-c}{R}$$

gde znak "-" odgovara jediničnim vektorima dela sfere ispod ravni $z = c$. Zatim je

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{R},\ \cos\beta = \frac{y-b}{R}.$$

Dakle, ako je $\overrightarrow{n}$ jedinični vektor proizvoljne normale na spoljašnju stranu sfere, onda je $\overrightarrow{n} = \left(\frac{x-a}{R}, \frac{y-b}{R}, \frac{z-c}{R}\right)$. Zato je

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint\limits_S \left(x^2\frac{x-a}{R} + y^2\frac{y-b}{R} + z^2\frac{z-c}{R}\right) dS \\
&= \int_0^{2\pi} dv \int_0 \pi R^2 \sin u \Big((a + R\cos v\sin u)^2 \cos v \sin u \\
&\quad + (b + R\sin v\sin u)^2 \sin v\sin u + (c + \ R\cos u)^2\Big)\, du \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} 2aRcs^2 v dv \int_0 \pi\sin^3 u du + R^2 \int_0^{2\pi} 2bR\sin^2 v dv \int_0 \pi \sin^3 u du \\
&\quad + R^2 \int_0^{2\pi} 2cR dv \int_0 \pi\cos^2 u \sin u du \\
&= \frac{8\pi R^3}{3}(a + b + c).
\end{aligned}$$

Korišćene su "pomerene" parametarske jednačine sfere:

$$x = a + R\cos v\sin u,\ y = b + R\sin v\sin u,\ z = c + R\cos u,$$

i činjenica da je tada $\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv = dS$, tj. $\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv = R^2 \sin u dudv$, gde je

$$A = \frac{\mathcal{D}(y,z)}{\mathcal{D}(u,v)},\ B = \frac{\mathcal{D}(z,x)}{\mathcal{D}(u,v)},\ C = \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)}. \ \blacktriangleright$$

Napomena. Površinski integral oblika

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$$

rešava se svođenjem na površinski prvog tipa, a ovaj na dvostruki ili direktno svaki sabirak $\iint\limits_S Pdydz$, $\iint\limits_S Qdzdx$, $\iint\limits_S Rdxdy$ po definiciji na dvostruki integral.

2.69 Izračunati površinske integrale druge vrste:

a) $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, S je spoljnja strana sfere $x^2+y^2+z^2 = a^2$;

b) $\iint\limits_S f(x)\,dydz + g(y)\,dzdx + h(z)\,dxdy$, S je spoljnja strana kvadra

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c,$$

a $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ su neprekidne funkcije;

c) $\iint\limits_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy$, ako je S donja strana konusne površi $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le h$;

d) $\iint\limits_S \left(\frac{\cos\alpha}{x} + \frac{\cos\beta}{y} + \frac{\cos\gamma}{z}\right) dS$, S je spoljnja strana elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

◀ **a) I način:**

$$I = \iiint\limits_T (1+1+1)\,dxdydz = 3 \cdot \iiint\limits_T dxdydz = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

gde je $T = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\right\}$. Primenjena je formula Gaus-Ostrogradskog.

II način:

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{S^+} zdxdy + \iint\limits_{S^-} zdxdy \\ &= \iint\limits_{K_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy - \iint\limits_{K_{xy}} \left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right) dxdy \end{aligned}$$

$$= \quad 2\iint\limits_{K_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\rho d\rho = \frac{4\pi a^3}{3}$$

gde je $K_{xy} = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$.

III način:

$$I = \iint (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS$$

i dalje kao prethodni zadatak jer je $\overrightarrow{n} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$.

b)

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint\limits_S h(z)\, dxdy = \iint\limits_{S_1} h(c)\, dxdy + \iint\limits_{S_0} h(0)\, dxdy \\ &= h(c)\, ab - h(0)\, ab = (h(c) - h(0))\, ab \end{aligned}$$

i slično se nalaze

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_S g(y)\, dzdx = (g(b) - g(0))\, ac \\ I_3 &= \iint\limits_S f(x)\, dydz = (f(a) - f(0))\, bc. \end{aligned}$$

Dakle

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S f(x)\, dydz + g(y)\, dzdx + h(z)\, dxdy \\ &= (f(a) - f(0))\, bc + (g(b) - g(0))\, ac + (h(c) - h(0))\, ab. \end{aligned}$$

Napomena. Neka student uradi zadatak svođenjem na površinski integral prve vrste. Da li može da se primeni formula Gaus-Ostrogradskog?

c)

$$I = \iint\limits_S + \iint\limits_{K_h^+} - \iint\limits_{K_h^+}.$$

Na K_h je $z = h$, odakle sledi $dz = 0$ i onda je

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_T 0 \cdot dxdydz - \iint\limits_{K_h^+} (x - y)\, dxdy = \iint\limits_{K_h^+} (y - x)\, dxdyu \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq h^2} (y - x)\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^h \rho^2 d\rho = 0 \cdot \frac{h^3}{3} = 0. \end{aligned}$$

d)
$$I = \iint\limits_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}.$$

Može se naći $I_3 = \iint\limits_S \frac{dxdy}{z}$. Zaista

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint\limits_{S^+} + \iint\limits_{S^-} = \frac{2}{c} \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy \\ &= \frac{2ab}{c} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho}} = \frac{4\pi ab}{c}. \end{aligned}$$

Zato je $I = 4\pi \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)$. Korišćene su polarne koordinate $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$. ►

2.70 Da li se površinski integral prve vrste $\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS$ može smatrati površinskim integralom druge vrste, ako je S neka dvostrana površ?

◄ Može. Kako je

$$dS = \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}, \text{ to je}$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_S \frac{f(x,y,z)}{3\cos\alpha} dydz + \frac{f(x,y,z)}{3\cos\beta} dzdx + \frac{f(x,y,z)}{3\cos\gamma} dxdy. \text{ ►}$$

2.71 Koristeći Stoksovu formulu izračunati krivolinijski integral

$$I = \int\limits_{OA} yzdx + 3xzdy + 3xydz$$

gde je OA kriva $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t^2$, $0 \le t \le 2\pi$, $O(0,0,0)$, $A\left(2\pi, 0, 4\pi^2\right)$.

◄ Nezatvorena kriva OA pripada paraboloidu

$$z = x^2 + y^2 \ \left(x^2 + y^2 = t^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = z\right).$$

Ako se dopuni lukom AO (deo parabole $z = x^2$), onda je

$$I = \oint\limits_{OA\cup AO} yzdx + 3xzdy + 2xydz - \int\limits_{AO} yzdx + 3xzdy + 2xydz.$$

Na paraboli $z = x^2$ je $y = 0$ odakle sledi $dy = 0$, zato je

$$
\begin{aligned}
I &= \oint\limits_{OA \cup AO} yzdx + 3xzdy + 2xydz \\
&= \iint\limits_{S} (R_y - Q_z)\,dydz + (P_z - R_x)\,dzdx + (Q_x - P_y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{S} (2x - 3x)\,dydz + (y - 2y)\,dzdx + (3z - z)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{S} (-x)\,dydz - ydzdx + 2zdxdy \\
&= \iint\limits_{S} (-x\cos\alpha - y\cos\beta + 2z\cos\gamma)\,dS \\
&= \iint \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS = 4 \iint\limits_{G} \left(x^2 + y^2\right) dxdy, \text{ jer je}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}, \\
\cos\beta &= \frac{-z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = \frac{-2y}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.
$$

Jedinični vektor normale uzete na gornjoj strani paraboloida ograničenog zatvorenom konturom gradi oštar ugao sa pozitivnim delom $z-$ose. G je projekcija tog dela paraboloida na ravan xOy, tj.

$$
G = \{(x, y) : x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi\}.
$$

Za izračunavanje dvojnog integrala po oblasti G može se preći na polarne koordinate $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Zamenjivanjem x, y u jednačini krive dobija se $\rho = t$ i $\varphi = t$, tako da je $\rho = \varphi$ jednačina krive l u polarnim koordinatama. Dalje je

$$
I = 4 \iint\limits_{G} \rho^3 d\rho d\varphi = 4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{32}{5}\pi^5. \ \blacktriangleright
$$

2.72 Izračunati krivolinijski integral $I=\oint\limits_L ydx+z^2dy+x^2dx$, gde je L kružnica $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ z=\sqrt{3}\right\}$ ako je smer kretanja po kružnici suprotan smeru kretanja kazaljke na časovniku kada se posmatra iz tačke $(0,0,2)$.

◀ **I način.** Eliminacijom z iz datog sistema dobija se $x^2+y^2=1$, pa su parametarske jednačine kružnice L

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sqrt{3},\ 0\le t\le 2\pi,$$

odakle je $dx=-\sin tdt$, $dy=\cos tdt$, $dz=0$. Dalje je

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} -\sin^2 tdt+3\cos tdt+\cos^2 t\cdot 0=\int\limits_0^{2\pi}\left(3\cos t-\sin^2 t\right)dt \\ &= 3\sin t\big|_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=-\pi. \end{aligned}$$

II način. Ispunjeni su uslovi za primenu Stoksove formule, tj.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S (R_y-Q_z)\,dydz+(P_z-R_x)\,dzdx+(Q_x-P_y)\,dxdy \\ &= \iint\limits_S (0-2z)\,dydz+(0-2x)\,dzdx+(0-1)\,dxdy \\ &= \iint -2zdydz-2xdzdx-dxdy \end{aligned}$$

gde je S površ dela sfere iznad ravni $z=\sqrt{3}$. Neka student detaljno proveri uslove za primenu Stoksove formule $([2],II$ ili $[9],II)$. Integrali

$$\iint\limits_S (-2x)\,dzdx \text{ i } \iint\limits_S (-2z)\,dydz$$

su jednaki nuli. Zaista

$$\begin{aligned} \iint\limits_S (-2x)\,dzdx &= \iint\limits_{S^+} (-2x)\,dzdx+\iint\limits_{S^-} (-2x)\,dzdx \\ &= \iint\limits_{S_{xz}} (-2x)\,dzdx-\iint\limits_{S_{xz}} (-2x)\,dzdx=0 \end{aligned}$$

gde je S_{xz} projekcija dela sfere iznad ravni $z = \sqrt{3}$ na ravan Oxz . Jasno je da taj deo sfere u odnosu na ravan xOz ima gornju (S^+) i donju (S^-) stranu. Integral

$$\iint\limits_S (-1)\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (-1)\,dxdy = -\pi. \ \blacktriangleright$$

Napomena. a) Integral

$$\iint -2zdydz - 2xdzdx - dxdy$$

se može rešiti metodom "zatvaranja" površi, tj. primenom formule Gaus-Ostrogradskog.

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{S\cup K^-} - \iint\limits_{K^-} = \iiint\limits_T 0\cdot dxdydz - \iint\limits_{K^-} -2zdydz - 2xdzdx - dxdy$$

gde je T deo lopte iznad ravni $z = \sqrt{3}$. Na K^- je $z = \sqrt{3}$ odakle sledi $dz = 0$. Zato je

$$\iint\limits_S = -\iint\limits_{K^-} (-1)\,dxdy = \iint\limits_{K^-} dxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = -\pi.$$

b) U Stoksovoj formuli površ S za granicu ima konturu L po kojoj se uzima krivolinijski integral. U prethodnom zadatku za S se može uzeti i gornja strana kruga

$$K = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1,\ z = \sqrt{2}\right\}.$$

Zato je

$$\begin{aligned} I &= \oint\limits_L ydx + z^2dy + x^2dz = \iint\limits_K -2zdydz - 2xdzdx - dxdy \\ &= \iint\limits_K (-2z\cdot 0 - 2x\cdot 0 - 1\cdot 1)\,dS = -\iint\limits_K dS = -\pi \end{aligned}$$

jer jedinični vektor normale gornje strane kruga K ima koordinate $\overrightarrow{n} = (0,0,1)$.

2.73 Primenom Stoksove formule izračunati sledeće krivolinijske integrale:

a) $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$, gde je L linija $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, $0\le t\le 2\pi$, u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku;

b) $\oint\limits_L (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, gde je L kružnica $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\tan\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku, ako se posmatra iz tačke $(2a,0,0)$;

c) $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$, gde je L kružnica $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku ako se posmatra iz tačke $(a,0,0)$;

d) $\oint\limits_L (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, gde je L elipsa

$$x^2+y^2=a^2\wedge\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1,\ a>0,\ h>0$$

u smeru istom kao u zadatku pod b);

e) $\oint\limits_L \left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz$, gde je L linija preseka kocke $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ sa ravni $x+y+z=\frac{3a}{2}$ u smeru istom kao u zadatku pod b).

◀ **a)** Neka je S površ kruga ograničenog kružnicom

$$L=\left\{(x,y,z):x^2+y^2=1,\ z=0\right\}$$

Pošto su ispunjeni uslovi za primenu Stoksove formule važi

$$\oint\limits_L ydx+zdy+xdz=-\iint\limits_{S^+} dydz+dzdx+dxdy=-\iint\limits_S (0+0+1)\,dS=-\pi.$$

Donja strana površi S (kruga) je saglasna sa orijentacijom krive L.

b)

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S (-1-1)\,dydz+(-1-1)\,dzdx+(-1-1)\,dxdy \\ &= -2\iint\limits_S dydz+dzdx+dxdy \end{aligned}$$

gde je S deo ravni $y=x\tan\alpha$ ograničen kružnicom

$$\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=a^2,\ y=x\tan\alpha\right\}.$$

Neprekidno vektorsko polje normala definisanih na S ima koordinate

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, 0\right), \text{ tako da je}$$

$$\begin{aligned} I &= -2\iint\limits_S \left(\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} + 0\right) dS \\ &= \frac{2(1-\tan\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \iint\limits_S dS = \frac{2(1-\tan\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\pi a^2 \\ &= 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha). \end{aligned}$$

Korišćeno je: Stoksova formula, veza površinskog integrala druge vrste sa površinskim integralom prve vrste i činjenica da je $\iint\limits_S dS$ površina površi S.

Napomena. **1)** Student mora da zna zašto u prethodnom zadatku jedinični vektor $\overrightarrow{n}$ normale na S ima koordinate

$$\left(\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, 0\right),$$

$$\text{a ne } \left(-\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, 0\right).$$

U svakoj tački (x_0, y_0, z_0) ravni $y = x\tan\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ definisana su dva neprekidna vektorska polja normala $(\tan\alpha, -1, 0)$ i $(-\tan\alpha, 1, 0)$, čije su koordinate suprotne po znaku . Prvo vektorsko polje saglasno je u smislu orijentacije $([2], II$ ili $[9], I)$ sa smerom suprotnim kretanju kazaljke na časovniku, a drugo sa istim smerom kretanja kazaljke na časovniku. U prvom slučaju, normalni vektor gradi tup ugao sa pozitivnim smerom $y-$ose.)

2) Površinski integral $-2\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy$ se može uraditi i po definiciji, svaki sabirak posebno, svođenjem na dvojne integrale. Zaista

$$I_3 = -2\iint\limits_S dxdy = -2\iint\limits_{S_{xy}} dxdy = 0$$

(mera projekcije S_{xy} kruga na ravan xOy je 0, jer je S_{xy} duž).

$$I_2 = -2\iint\limits_S dzdx = (-2)\cdot\left(-\iint\limits_{S_{xz}} dzdx\right) = 2\iint\limits_{S_{xz}} dzdx = 2\cdot\pi a^2\cos\alpha$$

jer je $\pi a^2 \cos\alpha$ površina projekcije kruga S na ravan xOz. Zatim je

$$\begin{aligned} I_1 &= -2\iint\limits_S dydz = (-2)\cdot\left(-\iint\limits_{S_{yz}} dydz\right) \\ &= 2\iint\limits_{S_{yz}} dydz = 2\pi a^2\cos\varphi = 2\pi a^2\left(-\sin\alpha\right) \end{aligned}$$

gde je φ ugao ravni $y = x\tan\alpha$ i yOz, a $\pi a^2\cos\varphi$ površina projekcije kruga S na ravan yOz. Dakle

$$-2\iint dydz + dzdx + dxdy = 2\pi a^2\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right).$$

c)

$$\begin{aligned} I &= \oint\limits_L ydx + zdy + xdz = \iint\limits_S (-1)\,dydz + (-1)\,dzdx + (-1)\,dxdy \\ &= -\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy = -\iint\limits_S\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)dS \\ &= -\sqrt{3}\iint\limits_S dS = -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

Površ (ravan) $x + y + z = 0$ ima dva neprekidna vektorska polja normala $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ i $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ od kojih je prvo saglasno sa datom orijentacijom kružnice

$$L = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0\right\},$$

(**sl. 2.45**). Primenjene su činjenice korišćene u delu ovog zadatka pod b).

d)

$$\begin{aligned} I &= -2\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy \\ &= -2\iint\limits_S \frac{h+a}{\sqrt{h^2+a^2}}dS = -\frac{2\left(h+a\right)}{\sqrt{h^2+a^2}}\iint\limits_S dS \\ &= -\frac{2\left(h+a\right)}{\sqrt{h^2+a^2}}\iint\limits_{S_{xy}}\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2(h+a)}{\sqrt{h^2+a^2}} \iint\limits_{S_{xy}} \frac{1}{a}\sqrt{a^2+h^2}dxdy \\
&= -\frac{2(h+a)}{a} \iint\limits_{S_{xy}} dxdy = -\frac{2(h+a)}{a} \cdot \pi a^2 = -2(a+h)\pi a.
\end{aligned}
$$

Površ S ograničena elipsom $\left\{(x,y,z) : x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\right\}$ ima za neprekidno vektorsko polje normala $\left(\frac{1}{a}, 0, \frac{1}{h}\right)$ koje je saglasno sa orijentacijom krive L.

e)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S (-2y-2z)\,dydz + (-2z-2x)\,dzdx + (-2x-2y)\,dxdy \\
&= -\iint\limits_S \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2y+2z) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2z+2x) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2x+2y)\right) dS \\
&= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_S (x+y+z)\,dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}a \iint\limits_S dS = -2\sqrt{3}a \cdot P_{ABCDEF} \\
&= -2\sqrt{3}a \cdot 6 \cdot \frac{\overline{AB}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = -\frac{9}{2}a^3
\end{aligned}
$$

jer je $AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Kao i u prethodnim primerima primenjena je Stoksova formula, veza površinskog integrala druge vrste sa površinskim integralom prve vrste, zatim važan "trik"

$$
\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = a \iint\limits_S dS = a \cdot P(S)
$$

ako je $f(x,y,z) = a$ jednačina površi S, gde je $P(S)$ površina površi S. Kontura L je glatka sem u tačkama A, B, C, D, E, F. ▶

2.74 Izračunati integral $I = \iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^2dxdy$ gde je S donja strana paraboloida $z = x^2+y^2$ odsečena sa ravni $z = 2x$.

◀ Metodom "zatvaranja" površi, dobija se

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{S \cup K^+} - \iint\limits_{K^+} \\
&= \iiint\limits_T \left(3x^2+3y^2+2z\right) dxdydz - \iint\limits_{K^+} x^3dydz + y^3dzdx + z^2dxdy
\end{aligned}
$$

gde je T telo ograničeno površima $z = x^2 + y^2$ i $z = 2x$. Zatim je,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{2x} \left(3\left(x^2+y^2\right)+2z\right) dz \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} \left(6x\left(x^2+y^2\right)+4x^2-4\left(x^2+y^2\right)^2\right) dxdy \\
&= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \left(6\rho^3\cos\varphi+4\rho^2\cos^2\varphi-4\rho^4\right) \rho d\rho \\
&= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{6}{5}\rho^5\cos\varphi+\rho^4\cos^2\varphi-\frac{2}{3}\rho^6\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\
&= 16\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{12}{5}\cos^6\varphi+\cos^6\varphi-\frac{8}{3}\cos^6\varphi\right) d\varphi \\
&= \frac{176}{15}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi d\varphi = \frac{176}{15}\cdot 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi d\varphi = \frac{11}{3}\pi \text{ i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= \iint\limits_{K^+} x^3dydz+y^3dzdx+z^2dxdy = \iint\limits_{K^+}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x^3+\frac{z^2}{\sqrt{5}}\right) dS \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\left(-2x^3+4x^2\right) dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi}\left(-2\rho^3\cos^3\varphi+4\rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho \\
&= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{64}{5}\cos^8\varphi+16\cos^6\varphi\right) d\varphi = \frac{3\pi}{2},
\end{aligned}
$$

gde je $\overrightarrow{n} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ neprekidno polje normala ravni $z = 2x$. Korišćena je veza površinskog integrala druge vrste sa površinskim integralom prve vrste, zatim izražavanje površinskog prve vrste preko dvojnog. Iz

$$z = 2x \Rightarrow z_x = 2,\ z_y = 0$$

je $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Onda je $I=\frac{11\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}=\frac{13\pi}{6}$. ▶

2.75 Koristeći formulu Gaus-Ostrogradskog izračunati:
$I=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, gde je S spoljašnja strana tetraedra

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1;$$

◀

$$\begin{aligned} I &= 2\iiint\limits_T (x+y+z)\,dxdydz = 6\iiint\limits_T zdxdydz \\ &= 6\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} zdz = 6\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}dy \\ &= 3\int_0^1\frac{(1-x)^3}{3}dx = \int_0^1 (1-x)^3\,dx = -\left.\frac{(1-x)^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$ ▶

2.76 Izračunati Gausov integral

$$I(\xi,\eta,\zeta)=\iint\limits_S \frac{\cos\varphi}{r^2}dS$$

gde je S granica proste zatvorene oblasti G, $N(\xi,\eta,\zeta)$ fiksirana tačka van oblasti G, $M(x,y,z)\in S$, $\overrightarrow{r}=(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\,, r=|\overrightarrow{r}|\,,$
$\overrightarrow{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ spoljašnja jedinična normala granice S u tački M i φ ugao između vektora $\overrightarrow{r}$ i $\overrightarrow{n}$.

◀

$$I=\iint\limits_S\left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha+\frac{y-\eta}{r^3}\cos\beta+\frac{z-\zeta}{r^3}\cos\gamma\right)dS,\ \text{jer je}$$

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{r}|}=\frac{(x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+(z-\zeta)\cos\gamma}{r}.$$

S obzirom da se tačka $N(\xi,\eta,\zeta)$ nalazi van oblasti G, to je $r\neq 0$ i onda su funkcije

$$P(x,y,z)=\frac{x-\xi}{r^3},\ Q(x,y,z)=\frac{y-\eta}{r^3},\ R(x,y,z)=\frac{z-\zeta}{r^3}$$

neprekidno diferencijabilne u oblasti G. Onda je

$$P_x=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-\xi)^2}{r^5},\ Q_y=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-\eta)^2}{r^5},\ R_z=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$$

i $P_x + Q_y + R_z = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$. Prema formuli Gaus-Ostrogradskog je

$$I = \iiint\limits_G (P_x + Q_y + R_z)\, dxdydz = \iiint\limits_G 0 \cdot dxdydz = 0. \;\blacktriangleright$$

2.77 Izračunati Gausov integral $I(0,0,0)$ (prethodni zadatak) ako je S granica kugle $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

◀ Ne može se primeniti formula Gaus-Ostrogradskog jer funkcije P, Q, R nisu neprekidno diferencijabilne ($O(0,0,0) \in G$). Kako je $\xi = \eta = \zeta = 0$, $\overrightarrow{n} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ i $r = a$, to je

$$\frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha + \frac{y-\eta}{r^3}\cos\beta + \frac{z-\zeta}{r^3}\cos\gamma = \frac{x^2+y^2+z^2}{ar^3} = \frac{1}{a^2} \text{ i}$$

$$I(0,0,0) = \frac{1}{a^2}\iint\limits_S dS = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi,$$

tj. Gausov integral $I(0,0,0)$ ne zavisi od poluprečnika sfere. ▶

2.78 Izračunati površinski integrale druge vrste

a)

$$\iint\limits_{S^+} (x-y+z)\, dydz + (y-z+x)\, dzdx + (z-x+y)\, dxdy$$

gde je S^+ spoljašnja strana površi

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1;$$

b)

$$\iint\limits_{S^+} \frac{x\left(y^2-z^2\right) dydz + y\left(z^2-x^2\right) dzdx + z\left(x^2-y^2\right) dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

gde je S^+ spoljašnja strana površi $|x| + |y| + |z| = 1$;

c)

$$\iint\limits_{S^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}$$

gde je S^+ spoljašnja strana površi $2|x| + 3|y| + 4|z| = 1$.

d)

$$\iint\limits_{S^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

gde je S^+ spoljašnja strana[1] površi $|x| + 2|y| + 3|z| = 7$.

◀ **a)** Kako su ispunjeni uslovi za primenu formule Gaus-Ostrogradskog to je

$$I = +\iiint\limits_T (P_x + Q_y + R_z)\,dxdydz = 3\iiint\limits_T dxdydz$$

gde je T telo čija je granica površ S. Smenom

$$x - y + z = u,\ y - z + x = v,\ z - x + y = w,$$

oblast $\tau = \{(u, v, w) : |u| + |v| + |w| \le 1\}$ preslikava se na oblast

$$T = \{(x, y, z) : |x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| \le 1\}.$$

Pošto je

$$\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u,v,w)}{\mathcal{D}(x,y,z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4},\ \text{to je}$$

$$I = \frac{3}{4}\iiint\limits_\tau dudvdw = \frac{3}{4}\cdot 8 \iiint\limits_{\substack{u+v+w\le 1\\ u,v,w\ge 0}} dudvdw = 6\int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw = \cdots = 1.$$

b) Pošto se ne može primeniti formula Gaus-Ostrogradskog (funkcije P, Q, R nisu definisane u $(0,0,0)$), to se može koristiti unutrašnja strana K^- jedinične kugle sa centrom u koordinatnom početku. Onda je

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S^+} &= \iint\limits_{S^+} + \iint\limits_{K^-} - \iint\limits_{K^-} = \iint\limits_{S^+\cup K^-} - \iint\limits_{K^-} = -\iiint\limits_T (P_x + Q_y + R_z)\,dxdydz \\
&\quad - \iint\limits_{K^-} x\left(y^2 - z^2\right)dydz + y\left(z^2 - x^2\right)dzdx + z\left(x^2 - y^2\right)dxdy \\
&= -\iiint\limits_T 0\cdot dxdydz + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \left(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2\right)dxdydz \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

[1] Zadatak sa ispita u februarskom ispitnom roku 2002. godine.

Pažljivim računom se dobija da je $P_x + Q_y + R_z = 0$. Prilikom računanja integrala

$$\iint\limits_{K^-} \frac{x\left(y^2 - z^2\right) dydz + y\left(z^2 - x^2\right) dzdx + z\left(x^2 - y^2\right) dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

koristili smo da je na $K^- : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Očigledno je $S^+ \cup K^-$ granica tela T ograničenog oktaedrom i sferom i površinski integral se onda uzima po unutrašnjoj strani tog tela. Otuda je znak minus ispred trostrukog integrala u formuli Gaus-Ostrogradskog.

c) Pošto su funkcije P, Q, R prekidne u tački $(0,0,0)$ ne može se primeniti formula Gaus-Ostrogradskog na telo $2|x| + 3|y| + 4|z| \leq 1$. Međutim može se primeniti na telo

$$T = \left\{(x, y, z) : 2|x| + 3|y| + 4|z| \geq 1 \wedge x^6 + y^6 + z^6 \leq 1\right\}.$$

Ako sa J označimo dati integral, onda je

$$J = \iint\limits_{S^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}} = \iint\limits_{S^+} + \iint\limits_{K^-} - \iint\limits_{K^-} = \iint\limits_{S^+ \cup K^-} - \iint\limits_{K^-},$$

gde je K^- unutrašnja strana zatvorene površi $x^6 + y^6 + z^6 = 1$. Dalje je

$$\begin{aligned} J &= -\iiint\limits_T \left(P_x + Q_y + R_z\right) dxdydz - \iint\limits_{K^-} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}} \\ &= -\iiint\limits_T 0 \cdot dxdydz - \iint\limits_{K^-} xdydz + ydzdx + zdxdy, \end{aligned}$$

jer je na površi $K^- : x^6 + y^6 + z^6 = 1$. Opet primenom formule Gaus-Ostrogradskog, dobijamo

$$J = -\left(-\iiint\limits_{T'} 3dxdydz\right) = 3\iiint\limits_{T'} dxdydz$$

gde je $T' = \left\{(x, y, z) : x^6 + y^6 + z^6 \leq 1\right\}$, tj. $J = 24 \iiint\limits_{T''} dxdydz$, gde je T'' deo tela T' koji pripada prvom oktantu. Formulama $x = u^{\frac{1}{6}}, y = v^{\frac{1}{6}}, z = w^{\frac{1}{6}}$

oblast $\{(u,v,w) : u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u+v+w \leq 1\}$ preslikava se na T'' i determinanta matrice prelaska je $\frac{1}{216}(uvw)^{-\frac{5}{6}}$, tako da je

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{9}\int_0^1 u^{-\frac{5}{6}}du \int_0^{1-u} v^{-\frac{5}{6}}dv \int_0^{1-u-v} w^{-\frac{5}{6}}dw \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 u^{-\frac{5}{6}}du \int_0^{1-u} v^{-\frac{5}{6}}(1-u-v)^{\frac{1}{6}}\,dv. \end{aligned}$$

Smenom $v = (1-u)\,t$ dalje sledi

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{3}\int_0^1 u^{\frac{1}{6}-1}(1-u)^{\frac{1}{3}-1}du \int_0^1 t^{\frac{1}{6}-1}(1-t)^{\frac{7}{6}-1}dt \\ &= \frac{2}{3}B\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)\cdot B\left(\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right) = \frac{2}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\right)^3}{3\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

d) Iz istog razloga kao u primerima **b)** i **c)** ne može se primeniti formula Gaus-Ostrogradskog. Zato ako sa J označimo dati površinski integral, sa K^- unutrašnju stranu sfere poluprečnika $r \geq 7$, slično primerima pod **b)** i **c)** dobijamo

$$\begin{aligned} J &= \iint\limits_{S^+\cup K^-} - \iint\limits_{K^-} = -\iiint\limits_{T} 0\cdot dxdydz - \iint\limits_{S^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq r^2} 3\cdot dxdydz = \frac{1}{r^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

Napomena. Neka student rešenja u primerima **b)**, **c)** i **d)** proprati crtežima.

2.5 Teorija polja

2.79 Naći linije istog nivoa skalarnog polja $u(x,y,) = x\cdot y$. Izračunati $grad u$ u tačkama $(1,1)$ i $(1,-1)$.

◀ Uzimajući $u = c$, c je konstanta, sledi da su linije istog nivoa polja, hiperbole $xy = c$, tj. $y = \frac{c}{x}$, kao i prave $x = 0$ ($y-$osa) i $y = 0$ ($x-$osa). Pošto je $u_x = y$ i $u_y = x$ to je

$$grad u\,(x, y) = y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$$

tj. $grad u\,(1,1) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ i $grad u\,(1,-1) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. ▶

2.80 Naći gradijent skalarnog polja $u\,(x, y, z) = xyz$ u tački $M\,(-2, 3, 4)$. Koliki je izvod tog polja u istoj tački, ali u smeru vektora $\overrightarrow{a} = (3, -4, 12)$?

◀ Prema definiciji gradijenta sledi

$$grad u\,(M) = (u_x\,(M)\,, u_y\,(M)\,, u_z\,(M)) = (yz, zx, xy)_{(-2,3,4)} = (12, -8, -6)\,.$$

Pošto je $\overrightarrow{a_0} = \left(\frac{3}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$ jedinični vektor vektora $\overrightarrow{a}$, to je izvod polja $u\,(x, y, z)$ u tački M, ali u pravcu vektora $\overrightarrow{a_0}$ jednak:

$$\frac{\partial u}{\partial a_0}\,(M) = \langle \overrightarrow{a_0}, grad u\,(M)\rangle = \frac{3}{13}\cdot 12 + \frac{4}{13}\cdot 8 - \frac{12}{13}\cdot 6 = -\frac{4}{13}. \ ▶$$

Napomena. Student mora najpre da nauči definicije pojmova vektorske analize iz [2], II ili [9], II.

2.81 Odrediti vektorske linije vektorskog polja $\overrightarrow{a}\,(M) = grad u$, gde je $u\,(x, y, z) = xyz$.

◀ Najpre je $\overrightarrow{a}\,(M) = (yz, zx, xy) = yz\,\overrightarrow{i} + zx\,\overrightarrow{j} + xy\,\overrightarrow{k}$ vektorsko polje. Vektorske linije imaju osobinu da je vektor tangente kolinearan vektoru polja u svakoj tački. Za njihovo određivanje rešava se sistem:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \Leftrightarrow xdx = ydy \wedge ydy = zdz$$

$$\text{tj.}\quad (L) : \begin{cases} x^2 = y^2 + C_1 \\ z^2 = y^2 + C_2 \end{cases}$$

su tražene vektorske linije (L) datog polja. Te vektorske linije su preseci familija hiperboličkih cilindara čije su generatrise paralelne $z-$osi, odnosno $x-$osi. ▶

2.82 Odrediti gradijent polja $u = \varphi\,(r)$, gde je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a φ diferencijabilna funkcija.

◀ Koristeći izvod složene funkcije sledi

$$grad u = (u_x, u_y, u_z) = \left(\varphi' \cdot \frac{x}{r}, \varphi' \cdot \frac{y}{r}, \varphi' \cdot \frac{z}{r}\right) = \varphi' \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

gde je $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = (x, y, z)$. ▶

Napomena. Za vektorsko polje $\overrightarrow{a}(M) = (P, Q, R)$ se kaže da je potencijalno, ako postoji skalarno polje $u = u(x, y, z)$ takvo da je $\overrightarrow{a}(M) = grad u$. Onda se $u(x, y, z)$ zove potencijal polja $\overrightarrow{a}(M)$. Iz prethodnog primera sledi da je vektorsko polje $\varphi' \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{r}$ potencijalno i da je njegov potencijal $\varphi(r) = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

2.83 Naći divergenciju vektorskog polja $\overrightarrow{a} = \left(x, y^2, z^3\right)$ u tački $M(-2, 4, 5)$.

◀ $div\,\overrightarrow{a} = P_x + Q_y + R_z = 1 + 2y + 3z^2$, te je

$$div\,\overrightarrow{a}(M) = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5^2 = 84. \ ▶$$

2.84 Naći divergenciju sfernog vektorskog polja

$$\overrightarrow{a} = f(r)\,\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r} = (x, y, z), \ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\overrightarrow{r}|.$$

Odrediti oblik funkcije $f(r)$ tako da polje $\overrightarrow{a}$ bude solenoidno.

◀ Dato polje $\overrightarrow{a}$ ima koordinate

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)x, \ Q(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)y, \\ R(x, y, z) &= f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)z. \end{aligned}$$

Saglasno definiciji divergencije dobija se

$$\begin{aligned} div\,\overrightarrow{a} &= P_x + Q_y + R_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f(r)\,x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)\,y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)\,z) \\ &= f(r) + x\frac{\partial}{\partial x}f(r) + f(r) + y\frac{\partial}{\partial y}f(r) + f(r) + z\frac{\partial}{\partial z}f(r) \\ &= 3f(r) + x \cdot f'(r) \cdot \frac{x}{r} + y \cdot f'(r) \cdot \frac{y}{r} + z \cdot f'(r) \cdot \frac{z}{r} \\ &= 3f(r) + f'(r)\left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r}\right) = 3f(r) + f'(r) \cdot r. \end{aligned}$$

Polje je solenoidno po definiciji, ako je njegova divergencija jednaka 0. Iz

$$3f(r) + f'(r) \cdot r = 0 \Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{3dr}{r}$$

tj. $f(r) = \frac{C}{r^3}$, C je konstanta, je traženi oblik funkcije $f(r)$. ▶

2.85 Naći rotor vektorskog polja $\overrightarrow{a} = \left(z^2, x^2, y^2\right)$ u tački $M(1, 2, 3)$.

◀ Koristeći formulu sledi da je

$$\begin{aligned}
rot\,\overrightarrow{a}\,(M) &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\,(2y-0)+\overrightarrow{j}\,(2z-0)+\overrightarrow{k}\,(2x-0)\Big|_M \\
&= 2y\,\overrightarrow{i}+2z\,\overrightarrow{j}+2x\,\overrightarrow{k}\Big|_M = (4,6,2)\,.
\end{aligned}$$ ▶

2.86 Naći rotor polja iz zadatka 2.84, tj. $\overrightarrow{a} = f\,(r)\,\overrightarrow{r}$.

◀

$$\begin{aligned}
rot\,\overrightarrow{a} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f\,(r)\,x & f\,(r)\,y & f\,(r)\,z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\,(r)\,z - \frac{\partial}{\partial z} f\,(r)\,y\right) \\
&\quad + \overrightarrow{j}\left(\frac{\partial}{\partial z} f\,(r)\,x - \frac{\partial}{\partial x} f\,(r)\,z\right) + \overrightarrow{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\,(r)\,y - \frac{\partial}{\partial y} f\,(r)\,x\right) \\
&= \overrightarrow{i}\,f'\,(r)\left(\frac{yz}{r}-\frac{zy}{r}\right)+\overrightarrow{j}\,f'\,(r)\left(\frac{zx}{r}-\frac{xz}{r}\right)+\overrightarrow{k}\,f'\,(r)\left(\frac{xy}{r}-\frac{yx}{r}\right) \\
&= \overrightarrow{0} = (0,0,0)\,.
\end{aligned}$$ ▶

2.87 Naći protok konstantnog vektorskog polja kroz proizvoljnu deo po deo glatku zatvorenu površ.

◀

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})\,dS &= \iint\limits_S (a_1\cos\alpha + a_2\cos\beta + a_3\cos\gamma)\,dS \\
&= \iiint\limits_T (div\,\overrightarrow{a})\,dxdydz = \iiint\limits_T 0\cdot dxdydz = 0
\end{aligned}$$

gde je $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ konstantno vektorsko polje, T oblast koju ograničava zatvorena površ. Korišćena je formula Gaus-Ostrogradskog. ▶

2.88 Naći protok radijus vektora $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ kroz spoljašnju stranu proizvoljne zatvorene deo po deo glatke površi S koja ograničava oblast G zapremine V.

◀ Prema formuli Gaus-Ostrogradskog sledi

$$\iint\limits_S (\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n})\,dS = \iiint\limits_T (div\,\overrightarrow{r})\,dxdydz = 3\iiint\limits_T dxdydz = 3V.$$ ▶

Napomena.

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S} (\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n})\,dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{S} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$$

je formula za nalaženje zapremine oblasti T koju ograničava zatvorena površ S, preko površinskog integrala.

2.89 Naći protok vektorskog polja $\overrightarrow{a} = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ kroz spoljašnju stranu konusa

$$S = \left\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le h\right\}$$

u smeru spoljašnje normale.

◀ Ako sa Π označimo protok polja, onda je

$$\begin{aligned}
\Pi &= \iint\limits_{S} (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})\,dS = \iint\limits_{S\cup K^+} (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})\,dS - \iint\limits_{K^+} (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})\,dS \\
&= 2\iiint\limits_{T} (x+y+z)\,dxdydz - \iint\limits_{K^+} z^2 dxdy \\
&= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} \rho d\rho \int\limits_0^{h} (\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)+z)\,dz - \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} h^2 dxdy \\
&= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^{h} \rho(h-\rho)(\cos\varphi+\sin\varphi) + \frac{h^2}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho - h^4\pi \\
&= \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.
\end{aligned}$$

Za nalaženje trojnog integrala $\iiint\limits_{T}(x+y+z)\,dxdydz$ korišćene su cilindrične koordinate: $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$. Jednačina konusne površi onda glasi $z = \rho$. Njima se oblast

$$\tau = \{(\rho,\varphi,z) : 0 \le \rho \le h, 0 \le \varphi \le 2\pi, \rho \le z \le h\}$$

preslikava u oblast T klasične kupe. Zbog primene formule Gaus-Ostrogradfskog površ S je zatvorena dodavanjem gornje strane K^+ kruga

$$K = \left\{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = h\right\}. \ ▶$$

Napomena. Trojni integral se može izračunati bez cilindričnih koordinata. Zaista

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_T (x+y+z)\,dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} (x+y+z)\,dz \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} \left(hx+hy-x\sqrt{x^2+y^2}-y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) dxdy.
\end{aligned}$$

Prelaskom na polarne koordinate zadatak se jednostavno završava.

2.90 Naći cirkulaciju konstantnog vektorskog polja $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ duž proizvoljne zatvorene deo po deo glatke krive.

◀ Cirkulacija vektorskog polja $\overrightarrow{a}$ u oznaci

$$\oint\limits_L (\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}) = \iint\limits_S (rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})\,dS = 0$$

jer je rotor konstantnog polja jednak nuli. Korišćena je Stoksova formula, gde je S bilo koja zatvorena površ koja se oslanja na krivu L. ▶

2.91 Naći cirkulaciju vektorskog polja $\overrightarrow{a}=(-y,x,0)$ duž proizvoljne deo po deo glatke konture L koja pripada ravni xOy i ograničava oblast G površine S.

◀ Najpre je

$$rot\,\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{k} = (0,0,1)\,.$$

Zatim je prema Stoksovoj formuli

$$\oint\limits_L (\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}) = \iint\limits_G \left(2\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k}\right) dS = 2\iint\limits_G dS = 2S.$$

Dobijena je istovremeno i formula za nalaženje površine G ravni xOy koja je ograničena zatvorenom konturom L :

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L (\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx. \ \blacktriangleright$$

2.92 Koristeći Stoksovu formulu naći cirkulaciju vektorskog polja $\overrightarrow{a} = (-y,x,z)$ duž zatvorene konture L sastavljene od dela linije

$$\overrightarrow{r}\,(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)\,,\ t\in[0,2\pi]$$

i duži koja je određena tačkama $A\,(a,0,0)$ i $B\,(a,0,2\pi b)$ u pozitivnom smeru.

◀ Imamo

$$rot\,\overrightarrow{a}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & z\end{vmatrix}=2\,\overrightarrow{k}=(0,0,2)\,.$$

Neka je površ S koja se oslanja na krivu L deo cilindra $S_1 : x^2+y^2=a^2$ i krug $S_2 : x^2+y^2\le a^2, z=2\pi b$. Na S_1 je $rot\,\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{n}$ i zato je $(rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})=0$. Na S_2 je $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{k}$ i zato je $(rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})=2\,\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k}=2$. Primenom Stoksove formule sledi

$$\oint\limits_L(\overrightarrow{a}\cdot d\,\overrightarrow{r})=\iint\limits_S(rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})\,dS=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}=0+2\cdot\iint\limits_{S_2}dS=2\pi a^2.$$ ▶

Napomena. Neka student reši prethodni zadatak direktno računajući krivolinijski integral $\int\limits_L -ydx+xdy+zdz$ i proveri rezultat.

2.93 Primenom Stoksove formule izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\overrightarrow{a}=(y,z,x)$ duž linije $C'CDABB'A'D'$.

◀ Neka je L_1 data linija. Onda je

$$\begin{aligned}\int\limits_{L_1}(\overrightarrow{a}\cdot d\,\overrightarrow{r}) &= \oint\limits_{L_1\cup D'C'}(\overrightarrow{a}\cdot d\,\overrightarrow{r})-\int\limits_{D'C'}(\overrightarrow{a}\cdot d\,\overrightarrow{r})\\ &= \iint\limits_S(rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n})\,dS-\int\limits_{D'C'}(\overrightarrow{a}\cdot d\,\overrightarrow{r})\end{aligned}$$

gde je $S=S_1\cup S_2\cup S_3$; S_1, S_2, S_3 su redom strane kvadrata $C'CDD'$, $D'DAA'$ i $A'ABB'$ sa orijentacijom saglasnom orijentaciji krive $L_1\cup D'C'$. Dalje je

$$\begin{aligned}&\int\limits_{L_1}(\overrightarrow{a}\cdot d\,\overrightarrow{r})\\ &=\iint\limits_{S_1}\left(rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{-i}\right)dS+\iint\limits_{S_2}\left(rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{j}\right)dS+\iint\limits_{S_3}\left(rot\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i}\right)dS\\ &-\int\limits_{D'C'}ydx+zdy+xdz=\iint\limits_{S_1}-\iint\limits_{S_2}-\iint\limits_{S_3}-\int\limits_0^1 dy=1-1-1-1=-2\end{aligned}$$

jer je $rot\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ i na duži $D'C'$ je $x = z = 1$ odakle sledi $dx = dz = 0, 0 \leq y \leq 1$. ▶

Napomena. Kod ovakvih zadataka (gde se zadaje da se primeni Stoksova formula) traže se najjednostavnije površi koje se "oslanjaju" na datu krivu. I ovde student treba da izračuna integrale $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$ direktno, gde je L redom $C'C$, CD, DA, AB, BB', $B'A'$, $A'D'$ i proveri rezultat.

2.94 Dokazati da je vektorsko polje $\overrightarrow{a} = \left(y^2, 2xy, z\right)$ potencijalno i naći potencijal polja.

◀ S obzirom da je $\overrightarrow{a}$ definisano u celom prostoru $\mathbb{R}^3$, a prostor $\mathbb{R}^3$ je prosto povezana oblast, to je $\overrightarrow{a}$ potencijalno ako i samo ako je $rot\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} = (0,0,0)$. Nalazi se da je

$$rot\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

Potencijal polja $\overrightarrow{a}$ je skalarna funkcija $u(x,y,z)$ koja se nalazi po formuli:

$$u(x,y,z) = \int\limits_0^x P(x,0,0)\,dx + \int\limits_0^y Q(x,y,0)\,dy + \int\limits_0^z R(x,y,z)\,dz$$

$$\text{te je } u(x,y,z) = \int\limits_0^x 0 \cdot dx + \int\limits_0^y 2xydy + \int\limits_0^z zdz = xy^2 + \frac{z^2}{2}. \ \blacktriangleright$$

2.95 Izračunati krivolinijski integral

$$I = \int\limits_L y^2dx + 2xydy + zdz$$

gde je L linija preseka cilindara $x^2 + z^2 = a^2$ i $y^2 + z^2 = a^2$, polazeći od tačke $A(-a,-a,0)$ kroz tačku $C(0,0,a)$ do tačke $B(a,a,0)$.

◀ Pošto je (prema prethodnom zadatku) vektorsko polje $\left(y^2, 2xy, z\right)$ potencijalno i $u(x,y,z) = xy^2 + \frac{z^2}{2}$ je njegov potencijal, to za dati krivolinijski integral važi

$$I = u(a,a,0) - u(-a,-a,0) = a^3 - \left(-a^3\right) = 2a^3. \ \blacktriangleright$$

2.96 Proveriti da li je vektorsko polje $\overrightarrow{a} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 2\right)$ potencijalno.

◀ Ako je $(x,y) \neq (0,0)$, onda je

$$rot\,\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

Pošto polje nije definisano na $z-$osi, onda je ono potencijalno u svakoj prosto povezanoj oblasti koja ne sadrži ni jednu tačku $z-$ose. Ono je potencijalno na primer u prvom oktantu i tada je potencijal

$$u\,(x,y,z) = \arctan\frac{y}{x} + 2z.$$

Neka je sada G oblast jedinične kugle sa centrom u koordinatnom početku. Ako se iz te oblasti odstrani prečnik kugle koji pripada $z-$osi, dobija se oblast u kojoj je polje $\overrightarrow{a}$ definisano i u kojoj je $rot\,\overrightarrow{a} = 0$. Kako dobijena oblast nije prosto povezana to se iz uslova $rot\,\overrightarrow{a} = 0$ ne može zaključiti potencijalnost polja. Može se pokazati da polje u toj oblasti nije potencijalno. Zaista, cirkulacija polja $\overrightarrow{a}$ duž kružnice

$$\begin{aligned} L &= \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\right\} \\ &= \{(x,y,z) : x = \cos t, y = \sin t, z = 0, 0 \leq t \leq 2\pi\} \text{ je} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_L (\overrightarrow{a} \cdot d\,\overrightarrow{r}) &= \oint_L -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \\ &= \int_0^{2\pi} ((-\sin t)\,(-\sin t)\,dt + \cos t \cdot \cos t dt) \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Pošto je cirkulacija vektorskog polja različita od nule, to ono u toj oblasti nije potencijalno. ▶

2.6 Zadaci za samostalni rad

2.97 Izračunati zapreminu tela određenog uslovima:
a) $x^2+y^2 \leq z$ i $x^2+y^2 \leq (z-2)^2$;
b) $x^2 \leq y+z$, $y^2 \leq x+z$ i $z^2 \leq x+y$;

c) $z - x - y \geq 0,\ z \geq 0$ i $z + x^2 + y^2 \leq 1$.

2.98 Izračunati zapreminu tela ograničenog površima

a)

$$x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2az \text{ i } z = 0.$$

b)

$$z = 2 - \left(x^2 + y^2\right) \text{ i } z = (x+1)^2.$$

c)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ i } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{h}.$$

2.99 Izračunati dvojni integral

$$I = \iint\limits_G \frac{dxdy}{(x^2+y^2)\left(1 + \sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}$$

gde je oblast G određena sa: $x^2 - y^2 \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4$.

2.100 Izračunati integrale

$$I_1 = \iint\limits_G ydxdy \text{ i } I_2 = \iint\limits_G xdxdy$$

gde je G oblast ograničena lukom cikloide: $x = a\,(t - \sin t)\,,\ y = a\,(1 - \cos t)\,,$ $t \in [0, 2\pi]$ i $x-$osom.

2.101 Izračunati integral

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha}$$

za one vrednosti $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje konvergira.

2.102 Ispitati konvergenciju sledećih nesvojstvenih dvojnih integrala:

a) $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$; **b)** $\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$;

c) $\iint\limits_{\substack{x\alpha+y\beta\leq 1\\ x\geq 0, y\geq 0}} \frac{dxdy}{(x\alpha+y\beta)^m}$; **d)** $\iint\limits_{\substack{x\alpha+y\beta\geq 1\\ x\geq 0, y\geq 0}} \frac{dxdy}{(x\alpha+y\beta)^m}$.

2. 103 Izračunati površinu lika ograničenog linijama:

a)

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ i } y = \frac{a}{n} \ \ (a > 0,\ n > 1)\,.$$

b)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ i } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ \ (a > 0,\ b > 0)\,.$$

c)

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \text{ i } x^2+(y-a)^2=a^2.$$

d)

$$x^2+y^2-2ax=0 \text{ i } x^2+y^2-ax=0.$$

2.104 Izračunati površinski integral

$$I=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$$

gde je S deo konusne površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ isečene cilindrom $x^2+y^2=2ax$.

2.105 Izračunati površinske integrale prve vrste

$$I_1=\iint\limits_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}dS \text{ i } I_2=\iint\limits_S \frac{dS}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

gde je S površ elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

2.106 Izračunati zapreminu tela određenog sa: $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\le 2a^2xy$.

2.107 Naći površinu onog dela površi $x^2+y^2+z^2=2Rz$ koji se nalazi u konusu $z^2=x^2+y^2$.

2.108 Odrediti površinu dela sfere $x^2+y^2+z^2=1$ koji se nalazi u konusu $x^2+(y-1)^2=z^2$.

2.109 Izračunati po definiciji površinski integral

$$I=\iint\limits_S (y-z)\,dydz+(z-x)\,dzdx+(x-y)\,dxdy$$

gde je S spoljašnja strana konusa $x^2+y^2=z^2$ za $0\le z\le H$ u prvom oktantu.

2.110 Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint\limits_L \left(y^2+z^2\right)dx+\left(z^2+x^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$$

gde je kriva L određena jednačinama $x^2+y^2+z^2=4x$ i $x^2+y^2=2x$.

2.111 Primenom Stoksove formule izračunati

$$\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz$$

ako je L krug $x^2+y^2=4$, $z=0$.

2.112 Izračunati krivolinijski integral

$$I=\int_L y^2dx+zdy+x^2dz$$

gde je L deo krive $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$, $z\geq 0$, $a>0$.

2.113 Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint_L ydx+zdy+xdz$$

ako je L kružnica: $x^2+y^2+z^2=1$, $x+z=1$ orijentisana u pozitivnom smeru posmatrano sa pozitivnog dela Ox ose.

2.114 Odrediti oblast u ravni xOy u kojoj je izraz

$$\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}dx+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}dy$$

totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$. Odrediti zatim tu funkciju.

2.115 Odrediti uslove pod kojima je izraz

$$x\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\right)dx+\frac{z}{xy^2}dy+\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz$$

totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y,z)$. Odrediti zatim tu funkciju.

2.116 Izračunati krivolinijski integral

$$\int_L \frac{yz\left(x^2-y^2-z^2\right)dx+zx\left(y^2-z^2-x^2\right)dy+xy\left(z^2-x^2-y^2\right)dz}{x^2y^2z^2}$$

gde je $L: x=t+\cos^2 t$, $y=1+\sin^2 t$, $z=1+\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2.117 Primenom krivolinijskog integrala druge vrste, naći površinu lika ograničenog sa:

a) $x^3+y^3=3axy$, $a>0$; **b)** $(x+y)^4=ax^2y$, $a>0$;

c) $(x+y)^{2n+1}=x^ny^n$, $n\in\mathbb{N}$; **d)** $x^3+y^3=x^2+y^2, x=0, y=0$.

2.118 Dato je vektorsko polje $\overrightarrow{a}=\left(4xy^2, x^2y, \frac{1}{3}z^3\right)$.

a) Izračunati cirkulaciju polja $\overrightarrow{a}$ duž krive

$$K: x^2+4y^2+z^2-4z=0,\ x^2+4y^2=\frac{1}{3}z^2, z\neq 0$$

orijentisane pozitivno kad se gleda iz tačke $(0,0,5)$.

b) Izračunati protok polja $\overrightarrow{a}$ kroz spoljašnju stranu površi Γ koja predstavlja rub tela

$$T : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4z,\ x^2 + 4y^2 \leq \frac{1}{3}z^2.$$

2.119 U kojim tačkama prostora $Oxyz$ je gradijent polja $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,

a) normalan na $z-$osu;

b) paralelan $z-$osi;

c) jednak nuli.

2.120 Izračunati dvojni integral $\iint\limits_D r^2 \sin\varphi dr d\varphi$, gde je D oblast ograničena linijama $r = R$ i $r = 2R\sin\varphi$.

2.121 Izračunati integral $\iint\limits_D r^3 dr d\varphi$, gde je D oblast ograničena polarnom osom i krivom $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ uz dopunski uslov: $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

2.122 Izračunati zapreminu skupa $T : x \geq |yz| \wedge y \geq |xz| \wedge z \geq x + y$.

2.123 Izračunati integral

$$\iint\limits_S (x + yz)\, dydz + (y + zx)\, dzdx + (z + xy)\, dxdy,$$

gde je S gornja strana površi zadate sa $z = 1 - x^2$, $z < x^2 + y^2$.

2.124 Izračunati $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ gde je $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(xz, x^2y, y^2z\right)$, a S spoljašnja strana površi u prvom oktantu sastavljena iz dela paraboloida $z = x^2 + y^2$, cilindra $x^2 + y^2 = 1$ i koordinatnih ravni.

2.125 Izračunati integral

$$\int\limits_\gamma \left(x^2 + yz\right) dx + \left(y^2 + zx\right) dy + \left(z^2 + xy\right) dz$$

gde je γ kriva, koja predstavlja deo preseka površi $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $S_2 : y^2 + z = 1$ u prvom oktantu, orijentisana od tačke $A(0, 1, 0)$ prema tački $B(0, 0, 1)$.

2.126 Izračunati integral $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{1 + y\cos x}$ gde je

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq a\right\},\ a \in \left]0, 1\right[.$$

2.127 Izračunati: $I = \iiint\limits_D \frac{dxdydz}{x^2 + 2y^2 + 3z^2 + a^2}$, gde je

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq a^2\right\}\ , a > 0.$$

2.128 Izračunati $I = \iiint\limits_{Q} xy^8 z^9 \omega^4 dxdydz$ gde je

$$\omega = 1 - (x + y + z)\,, Q = \{(x, y, z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}\,.$$

Glava 3

Ravnomerna konvergencija

3.1 Uvod

U ovom delu zbirke urađeni su primeri iz oblasti ravnomerne konvergencije familija funkcija, nizova i redova s jedne i parametarskih integrala, stepenih i Furijeovih redova i integrala s druge strane. Za proveravanje ravnomerne konvergencije familije fuinkcija (nizova, redova) često je korišćen stav:

Familija funkcija $f_y(x), x \in A$ konvergira ravnomerno ka funkciji f, u oznaci $\left(f_y \underset{A}{\rightrightarrows} f\right)$ kad $y \to y_0$, $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ako i samo ako je

$$\lim_{y \to y_0} \sup_{x \in A} |f_y(x) - f(x)| = 0.$$

Kao i kod ostalih delova zbirke, savetujemo studentu da se najpre iz [2], II ili [9], II upozna sa teorijskim osnovama ravnomerne konvergencije (definicije pojmova, stavovi i urađeni primeri) ne odvajajući posebno parametarske integrale, beta i gama funkciju od funkcionalnih nizova i redova. Urađeni zadaci u ovoj glavi se uglavnom odnose na ispitivanje osobina funkcija (granična vrednost, neprekidnost, diferencijabilnost, integrabilnost) koje se po pravilu ne mogu eksplicitno izraziti. Na primer funkcija zadata sa $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin nx$, definisana je za sve $x \in \mathbb{R}$, za koje dati red konvergira. Ova funkcija se ne može eksplicitno izraziti preko elementarnih funkcija. Isti je slučaj i sa funkcijom $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$, (gama funkcija). Ona je data integralom i ne može se za svako x eksplicitno izraziti. Ali, dokazuje se da je ne samo neprekidna na $\mathbb{R}^+$ nego i beskonačno diferencijabilna. Treba je shvatiti kao graničnu vrednost familije funkcija

$$\Gamma_{\beta}(x) = \int_0^{\beta} t^{x-1} e^{-t} dt, \ x > 0,$$

kad $\beta \to +\infty$. Za eksplicitno nalaženje nekih funkcija zadatih na ovaj način (parametarski integral) koristi se moćno sredstvo tzv. diferenciranje po parametru (zadaci 3.71 do 3.86).

3.2 Konvergencija familija funkcija,nizova i redova

3.1. Dokazati da familija funkcija $f_t(x) = e^{-\left(\frac{x}{t}\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kad $t \to 0$, konvergira na $\mathbb{R}$ ali ne ravnomerno.

◀ **I način.** Ako je $x = 0$, onda je $f_t(0) = e^0 = 1$ za svako $t \neq 0$ i tada je $\lim\limits_{t\to 0} f_t(0) = 1$. Za fiksirano $x \neq 0$ imamo $\lim\limits_{t\to 0} f_t(x) = \lim\limits_{t\to 0} e^{-\frac{x^2}{t^2}} = e^{-\infty} = 0$. Dakle, data familija neprekidnih funkcija f_t konvergira prosto (tačka po tačka) prekidnoj funkciji

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0, \end{cases}$$

odakle sledi da konvergencija nije ravnomerna na $\mathbb{R}$. Zaista, u slučaju ravnomerne konvergencije funkcija f_0 bila bi neprekidna.

II način. Da konvergencija familije funkcija f_t nije ravnomerna može se zaključiti i na sledeći način:

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_t(x) - f_0(x)| = 1 \neq 0.$$

Stvarno,

$$|f_t(x) - f_0(x)| = f_t(x) - f_0(x) = \begin{cases} f_t(x), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases}$$

odakle sledi da je interval $[0,1[$ skup vrednosti funkcije $x \mapsto f_t(x) - f_0(x)$. S obzirom da je $\sup [0,1[= 1$, to konvergencija nije ravnomerna.

III način. Neka student proveri da traka ravni xOy između grafika funkcija $y = f_0(x) + \varepsilon$ i $y = f_0(x) - \varepsilon$, $\varepsilon \in]0,1[$, ne sadrži ceo grafik ni jednog člana familije funkcija $x \mapsto f_t(x)$, što opet znači da konvergencija nije ravnomerna. ▶

U sledećim zadacima ispitati prostu i ravnomernu konvergenciju funkcionalnih familija.

3.2. $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ kad $y \to +\infty$, $x \in]0, +\infty[$.

◀ Kada x fiksiramo, dobijamo graničnu funkciju f familije f_y :

$$f(x) = \lim_{y \to +\infty} f_y(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Dakle, data familija prosto konvergira ka $f \equiv 0$. Pošto je $f_y(y) = \frac{1}{2}$, to konvergencija nije ravnomerna (prethodni zadatak, treći način). ▶

Napomena. Student mora da se navikne na ovakav način zaključivanja.

3.3. $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ kad $y \to 0^+$, $x \in]0, +\infty[$.

◀

$$f(x) = \lim_{y \to 0^+} f_y(y) = \lim_{y \to 0^+} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

(zašto?). Konvergencija nije ravnomerna iz istog razloga kao u prethodnom primeru, tj. $f_y(y) = \frac{1}{2}$. ▶

3.4. $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ kad $y \to 0^+$, $x \in]1, A[$.

◀ $f(x) = 0$. Zatim je

$$\sup_{1<x<A} \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| = \frac{A|y|}{x^2+y^2} \to 0$$

kad $y \to 0^+$, tj. konvergencija je ravnomerna. ▶

3.5. $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ kad $y \to 0^+$, $x \in]1, +\infty[$.

◀ $f(x) = 0$. Zatim je

$$\sup_{x>1} \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \le \sup_{1<x<A} \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| = \frac{A|y|}{x^2+y^2} \to 0$$

kad $y \to 0^+$, tj. konvergencija je ravnomerna. Korišćena je činjenica da za $y > 0$ funkcija $x \mapsto f_y(x)$ opada na $]1, +\infty[$. ▶

3.6. $f_y(x) = \tan \frac{\pi x}{2y}, x \in]0, 1[$,

a) kad $y \to 1$; **b)** kad $y \to 2$.

◀ **a)** $f(x) = \lim\limits_{y \to 1} \tan \frac{\pi x}{2y} = \tan \frac{\pi x}{2}$. Konvergencija nije ravnomerna jer je $f_y\left(\frac{y}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$.

b) $f(x) = \lim\limits_{y \to 2} \tan \frac{\pi x}{2y} = \tan \frac{\pi x}{4}$. Konvergencija nije ravnomerna jer je $f_y\left(\frac{y}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{8}$. ▶

3.7. $f_y(x) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}}$, $x \in]1, +\infty[$,

a) kad $y \to +\infty$; **b)** kad $y \to 0^+$.

◀ **a)**

$$f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}} \cdot \sin\left(x^2+y^2\right) = 0$$

(beskonačno mala puta ograničena veličina je beskonačno mala-često se koristi i u Analizi I). Konvergencija nije ravnomerna jer je

$$\sup_{x>1} \frac{\left|\sin\left(x^2+y^2\right)\right|}{\sqrt{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}} \geq \sup_{x>1, x=y} \frac{\left|\sin\left(2x^2\right)\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Granična funkcija je ista, ali konvergencija je ravnomerna jer je $|f_y(x)| \leq \sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}}$ te je

$$\sup_{x>1} |f_y(x)| \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+y^2}} \to 0$$

kad $y \to 0^+$. Funkcija $x \mapsto \sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}}$ opada za $x > 1$ i pri fiksiranom $y > 0$ iz okoline nule. ▶

3.8. $f_y(x) = \frac{1}{x}\left(e^{xy}-1\right),\ x \in \left]0,+\infty\right[$,

a) kad $y \to 0^-$; **b)** kad $y \to -\infty$; **c)** kad $y \to 1$.

◀ **a)**

$$f(x) = \lim_{y\to0^+} f_y(x) = \lim_{y\to0^+} y \cdot \frac{e^{xy}-1}{xy} = 0 \cdot \ln e = 0$$

(koji tablični limes je korišćen?). Konvergencija nije ravnomerna jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{e^{xy}-1}{x}\right| = +\infty,\ \text{tj.}\ \sup_{x>0} |f_y(x) - f(x)| = +\infty.$$

.

b) $\lim\limits_{y\to-\infty} f_y(x) = -\frac{1}{x} = f(x)$, ali konvergencija nije ravnomerna jer je

$$\lim_{x\to0^+} \left|\frac{e^{xy}-1}{x} - f(x)\right| = \lim_{x\to0^+} \left|\frac{e^{xy}}{x}\right| = +\infty.$$

c) $\lim\limits_{y\to1} f_y(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Konvergencija nije ravnomerna zbog

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{e^{xy}-1}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty} \left|\frac{e^{xy}-e^x}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \left|\left(e^x\right)^{y-1} - 1\right| = +\infty$$

tj. $\sup\limits_{x>0} |f_y(x) - f(x)| = +\infty.$ ►

3.9. $f_y(x) = \frac{y \arctan(xy)}{y+1}, x \in [1, +\infty[,$

a) kad $y \to 0^+$; **b)** kad $y \to +\infty$.

◄ **a)** $f(x) = \lim\limits_{y\to 0^+} f_y(x) = 0$ i konvergencija je ravnomerna jer je

$$\lim_{y\to 0^+} \sup_{x>1} \left| \frac{y \arctan(xy)}{y+1} \right| \le \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{y+1} \frac{\pi}{2} = 0.$$

b) $f(x) = \lim\limits_{y\to +\infty} f_y(x) = \frac{\pi}{2}$. Konvergencija je ravnomerna jer je funkcija $x \mapsto \frac{y \arctan(xy)}{y+1} - \frac{\pi}{2}$ rastuća i odatle je

$$\lim_{y\to +\infty} \sup_{x\ge 1} \left| \frac{y \arctan(xy)}{y+1} - \frac{\pi}{2} \right| = \lim_{y\to +\infty} \left| \frac{-\pi}{2(y+1)} \right| = 0. \ ►$$

3.10. $f_y(x) = y \ln(x^2 + y^2), x \in]0, 1[,$

a) kad $y \to 0$; **b)** kad $y \to 1$.

◄ **a)** $f(x) = \lim\limits_{y\to 0} f_y(x) = 0 \cdot \ln(x^2 + 0^2) = 0$. Zatim je

$$\lim_{y\to 0} \sup_{0<x<1} \left| y \ln(x^2 + y^2) \right| \le \lim_{y\to 0} y \ln(1 + y^2) = 0$$

što znači da je konvergencija ravnomerna.

b) $f(x) = \lim\limits_{y\to 1} f_y(x) = \ln(x^2 + 1)$. Iz $\sup\limits_{0<x<1} |f_y(x) - f(x)| = \left| y \ln y^2 \right|$ sledi ravnomerna konvergencija. Za nalaženje supremuma koristi se izvod razlike $f_y(x) - f(x)$. ►

3.11. Neka je $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$. Dokazati:

a) $f_n \rightrightarrows f \equiv 0$ na $\mathbb{R}$;

b) Funkcije f_n su diferencijabbilne u 0 i važi $f_n'(0) = \sqrt{n}$;

c) $\lim\limits_{n\to +\infty} f_n'(0) \ne f'(0) = 0$.

◄ **a)** Ako je x_0 fiksiran realan broj, onda je

$$0 \le \left| \frac{\sin nx_0}{\sqrt{n}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

kad $n \to +\infty$, odakle sledi da niz f_n datih funkcija prosto konvergira funkciji $f : f(x) = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Konvergencija je ravnomerna, jer je

$$\lim_{n\to +\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \right| = \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

b) f_n je diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ na osnovu teoreme o diferencijabilnosti složene funkcije i $f_n'(0) = \frac{n}{\sqrt{n}} \cos(n \cdot 0) = \sqrt{n}$.

c) Zatim je $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(0) = +\infty \neq 0 = f'(0)$. ▶

3.12. Neka je za $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{x}, & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Dokazati:

a) Niz f_n ne konvergira ravnomerno neprekidnoj funkciji kad $n \to +\infty$;

b) Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira za sve $x \in [0,1]$, ali ne konvergira ravnomerno na $[0,1]$.

◀ **a)** Ako je $x = 0$, onda je $f_n(0) = 0$ i $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$. Za $x \neq 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{1}{n_0+1} \leq x \leq \frac{1}{n_0}$ (zašto?). Onda je po pretpostavci u zadatku za $n > n_0 + 1$, $f_n(x) = 0$ tj. $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$. Dakle, dati niz funkcija prosto konvergira neprekidnoj fuinkciji $f(x) = 0$ za $x \in [0,1]$. Na ovom primeru student može da proveri da li je usvojio definiciju proste konvergencije niza (familije) funkcija. Kako je zatim

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to +\infty} \max_{x \in [0,1]} f_n(x) = 1$$

to konvergencija nije ravnomerna. Naravno, $\max\limits_{x \in [0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{2}{2n+1}\right) = 1$. Do istog zaključka se dolazi i primenom načina III iz zadatka 3.1. Naime, traka ravni xOy između pravih $y = -\varepsilon$, $y = \varepsilon, \varepsilon \in]0,1[$, ne sadrži ceo grafik ni jednog člana niza f_n.

b) S obzirom da je $f_n(x) \geq 0$ za sve $x \in [0,1]$ i $n = 1, 2, 3, ...$ to je konvergencija datog reda istovremeno i apsolutna. Prema dokazu za a) sledi da su svi članovi niza $f_n(x)$ jednaki nuli, izuzev njih konačno mnogo. Pošto konačno članova niza ne utiče na konvergenciju odgovarajućeg reda, onda je red konvergentan. Još se i kaže da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konvergira prosto svojoj sumi $S(x)$. Konvergencija nije ravnomerna, jer opšti član ne teži nuli ravnomerno. ▶

3.13. Koristeći Dinijev kriterijum dokazati da niz funkcija $f_n(x) = n(1 - \sqrt[n]{x})$, kad $n \to +\infty$ konvergira funkciji $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ ravnomerno na svakom segmentu $[a,b] \subset]0,1[$. Dokazati da f_n ne konvergira ka f ravnomerno na $]0,1]$.

◀ Kako je

$$f_n(x) = -\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \to -\ln x = \ln\frac{1}{x},\ n \to +\infty$$

(poznata granična vrednost iz Analize I, dobija se iz tabličnog limesa: $\frac{a^x-1}{x} \to \ln a,\ x \to 0$) to prema Dinijevom kriterijumu $f_n(x) \rightrightarrows \ln\frac{1}{x}$, ako je niz $f_n(x)$ monoton po n. Niz $f_n(x)$ je neopadajući po n. Stvarno,

$$n\left(1 - \sqrt[n]{x}\right) \le (n+1)\left(1 - \sqrt[n+1]{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{n+1} \le \frac{1 - \sqrt[n+1]{x}}{1 - \sqrt[n]{x}} = \frac{1-t^n}{1-t^{n+1}} = \frac{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}{1+t+t^2+\cdots+t^n}$$

gde je $x = t^{n(n+1)}$, $x \in\,]0,1[$ tj. $t \in\,]0,1[$. Za $x = 0$ ili $x = 1$ tvrđenje je očigledno. Poslednja nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$nt^n \le 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$$

koja je tačna za sve $t \in [0,1]$. Što se tiče ravnomerne konvergencije na skupu $]0,1]$ može se najpre posmatrati

$$\sup_{x\in]0,1]}\left|f_n(x) - \ln\frac{1}{x}\right| = \sup_{x\in]0,1]}\left|n\left(1-\sqrt[n]{x}\right) - \ln\frac{1}{x}\right| = +\infty$$

jer je $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|n\left(1-\sqrt[n]{x}\right) - \ln\frac{1}{x}\right| = +\infty$. Ovo znači da f_n ne konvergira ravnomerno na $]0,1]$. ▶

Napomena. O Dinijevom kriterijumu videti ([2], II, strana 20 ili [9], II, strana 73).

3.14. Neka je za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \lim\limits_{m\to+\infty}\cos^{2m}(n!\pi x)$. Dokazati:

a) f_n je integrabilna funkcija za svako n na svakom konačnom razmaku;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ je Dirihleova funkcija $x \mapsto \chi(x)$, pa nije integrabilna ni na jednom konačnom razmaku.

◀ **a)** Ako je $n!x$ ceo broj, onda je $f_n(x) = 1$. Ako $n!x$ nije ceo broj, onda je $f_n(x) = 0$ (tada je $-1 < \cos(n!\pi x) < 1$). To znači da f_n ima konačno tačaka prekida prve vrste na svakom konačnom razmaku, dakle, f_n je integrabilna funkcija.

b) Pošto je

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n!x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & n!x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

to je za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, $n!x$ ceo broj ako i samo ako je x racionalan broj. Zato je

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & n!x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & n!x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} = \chi(x)$$

Dirihleova funkcija za koju se zna da nema Rimanov integral ni na jednom konačnom segmentu. ►

3.15. Neka je dat niz f_n neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$ koji ravnomerno konvergira na intervalu $]a,b[$. Dokazati da f_n konvergira ravnomerno na $[a,b]$.

◄ Iz datih uslova se najpre dobija da postoje $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, gde je $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Prema ([2], II, Teorema 1.3.1 ili [9], II, Teorema 1.2.XI) sledi

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a+}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a+} f_n(x)\right) = A.$$

Slično se dobija i broj $B = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Uzimajući da je $f(a) = A$, $f(b) = B$, sledi da niz f_n neprekidnih funkcija ravnomerno konvergira neprekidnoj funkciji f na $[a,b]$. Zaista, za fiksirano $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} & \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} \\ = \ & \{|f_n(x) - f(x)| : x \in]a,b[\} \cup \{|f_n(a) - f(a)|\} \cup \{|f_n(b) - f(b)|\} \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n\to+\infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| = 0 \end{aligned}$$

za neko $x_0 \in [a,b]$. ►

3.16. Neka je f_n niz neprekidnih funkcija koji ravnomerno konvergira funkciji f na skupu $E \subset \mathbb{R}$. Dokazati da je onda $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$ za svaki niz $x_n \in E$ koji konvergira tački $x \in E$. Da li važi obrnuto?

◄ Neka je $\varepsilon > 0$. Onda postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tako da za sve $y \in E$ bude

$$f(y) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(y) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

kad god je $n > n_0(\varepsilon)$. Pošto niz $x_n \in E$, onda je tim pre ispunjeno

$$f(x_n) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x_n) < f(x_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

za sve $n > n_0(\varepsilon)$. S obzirom da niz x_n konvergira ka x, onda zbog neprekidnosti granične funkcije f postoji $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tako da je

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_n) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

kad god je $n > n_1(\varepsilon)$. Sada je jasno da za $\varepsilon > 0$ postoji $n_2 = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $n > n_2(\varepsilon)$

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x_n) < f(x) + \varepsilon$$

što znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

Obrnuto nije tačno. Može se uzeti na primer niz funkcija $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ koji konvergira funkciji $f(x) = 0$ ali ne ravnomerno i zadovoljava uslov da $f_n(x_n) \to f(x)$, kad god $x_n \to x$. Zaista, ako $x_n \to x$, $x \in \mathbb{R}$, onda je x_n ograničen niz i tada je

$$|f_n(x_n)| = \left|\sin\frac{x_n}{n}\right| \leq \left|\frac{x_n}{n}\right| \to 0,\ n \to +\infty.$$

Neka student obrazloži zašto f_n ne konvergira ravnomerno na $\mathbb{R}$. ►

U zadacima **3.17-3.24** ispitati ravnomernu konvergenciju funkcionalnih nizova na navedenim skupovima:

3.17. $f_n(x) = e^{-nx}$;

a) $x \in]0,1[$; **b)** $x \in [1,+\infty[$.

◄ **a)** Granična funkcija je $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, ali konvergencija nije ravnomerna, jer je $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}$. Dakle, grafik svakog člana niza f_n seče pravu $y = 1$, tj. konvergencija nije ravnomerna (vidi zadatak 3.1, III način).

b) Granična funkcija je ista, ali konvergencija je ravnomerna jer je

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 1} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{n\geq 1} e^{-nx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0. \ ►$$

3.18. $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$;

a) $x \in]0,1]$; **b)** $x \in [1,+\infty[$.

◄ **a)**

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 1 = f(x),$$

ali konvergencija nije ravnomerna iz istog razloga kao u prethodnom zadatku pod a). Naime, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

b) Granična funkcija je ista i

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 1}\left|\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}-1\right|=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 1}\frac{1}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+n^2}=0$$

tj. konvergencija je ravnomerna. ▶

3.19. $f_n(x)=\frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$;

a) $x\in\,]0,1]$; **b)** $x\in[1,+\infty[$.

◀ a) Granična funkcija je $f(x)=0$ (proveriti!). Konvergencija nije ravnomerna, jer je $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=-\sqrt{n}\ln n\to-\infty$ dakle, nije $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{0<x\leq 1}|f_n(x)|=0$.

b) Konvergencija nije ravnomerna jer je $\max\limits_{x\geq 1}f_n(x)=\frac{2}{e}$. ▶

3.20. $f_n(x)=\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}$, $x\in\,]0,1[$.

◀

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e=f(x).$$

Pošto je $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=2$ to konvergencija nije ravnomerna (3.1. III način). ▶

3.21. $f_n(x)=\int\limits_0^1\sin\left(\frac{xy^2}{n}\right)dy$;

a) $x\in\,]0,1[$; **b)** $x\in\,]0,+\infty[$.

◀ **a)** S obzirom da je

$$|f_n(x)|\leq\int_0^1\left|\sin\left(\frac{xy^2}{n}\right)\right|dy\leq\int_0^1\frac{y^2}{n}dy=\frac{1}{3n}\to 0=f(x)$$

to je konvergencija ravnomerna jer je

$$\sup_{0<x<1}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{0<x<1}|f_n(x)|\leq\frac{1}{3n}\to 0,\ n\to+\infty.$$

b) Na skupu $]0,+\infty[$ granična funkcija je ista, a dokaz sličan:

$$|f_n(x)|\leq\int_0^1\frac{xy^2}{n}dy\leq\frac{x}{3n}\to 0=f(x),\ n\to+\infty$$

ali konvergencija nije ravnomerna, zbog $f_n(n)=\int\limits_0^1\left(\sin y^2\right)dy\neq 0$ (opet kao zadatak 3.1, treći način). ▶

3.22. $f_n(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos(xy)dy}{y^2+n^2}$, $x \in \left]0,1\right[$.

◀ Pošto je

$$|f_n(x)| \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cdot 1}{n^2} dy = \frac{x^2\pi}{2n^2} \to 0,\ n \to +\infty$$

za sve $x \in \left]0,1\right[$, to je $f(x) = 0$ granična funkcija. Konvergencija je ravnomerna, jer

$$\sup_{0<x<1} |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{0<x<1} \frac{x^2\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2n^2} \to 0,\ n \to +\infty. \ ▶$$

3.23. $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \arctan \frac{k^2x}{n^2}$, $x \in \left]0,+\infty\right[$.

◀ Što se tiče obične konvergencije, prema ([10], strana 169) dobija se da je

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2x}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{x}{3}.$$

Ona nije ravnomerna jer je $\sup\limits_{0<x<+\infty} \left|f_n(x) - \frac{x}{3}\right| = +\infty$. Zaista,

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to+\infty} \left(\arctan\frac{x}{n^3} + \arctan\frac{4x}{n^3} + \cdots + \arctan\frac{n^2x}{n^3} - \frac{x}{3}\right) \\ = & \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{x}\arctan\frac{x}{n^3} + \frac{1}{x}\arctan\frac{4x}{n^3} + \cdots + \frac{1}{x}\arctan\frac{n^2x}{n^3} - \frac{1}{3}\right) \\ = & (+\infty) \cdot \left((+\infty) \cdot \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) = +\infty. \ ▶ \end{aligned}$$

3.24. $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{xn^2}\right)$, $x \in \left]0,1\right[$.

◀ Iz istog razloga kao u prethodnom zadatku je

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{xn^2} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2xn^2} = \frac{1}{2x}.$$

Konvergencija ni u ovom slučaju nije ravnomerna jer se dobija da je

$$\lim_{x\to0^+} \left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{xn^2}\right) - \frac{1}{2x}\right| = \lim_{t\to+\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{kt}{n^2}\right) - \frac{t}{2}\right|$$

$$= \lim_{t\to+\infty} |t| \left| \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{kt}{n^2}\right) - \frac{1}{2} \right| = (+\infty) \cdot \left| 0 - \frac{1}{2} \right| = +\infty.$$

Da je $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{kt}{n^2}\right) = 0$ sledi prema Lopitalovom pravilu. ▶

3.25. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ ravnomerno konvergira na svakom konačnom razmaku, ali nije apsolutno konvergentan ni za jedno $x \in \mathbb{R}$.

◀ Iz jednakosti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

sledi prvi deo tvrđenja (prvi red ravnomerno konvergira na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma:

$$\left| (-1)^n \frac{x^2}{n^2} \right| \le \frac{M}{n^2}, \quad |x| \le M,$$

a drugi red konvergira prema Lajbnicovom kriterijumu, samim tim i ravnomerno konvergira na proizvoljnom podskupu od $\mathbb{R}$ jer opšti član ne zavisi od x). Ako red apsolutno konvergira za neko $x \in \mathbb{R}$ onda iz jednakosti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \right| - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

sledi i konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, što je kontradikcija. ▶

3.26. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergira apsolutno i ravnomerno na $\mathbb{R}$, ali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ne konvergira ravnomerno.

◀ Ispitajmo najpre apsolutnu konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n} \right| = x^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1$$

za $x \neq 0$. Za $x = 0$ suma reda je 0. Dakle, za sve $x \in \mathbb{R}$ dati red apsolutno konvergira, a to znači i konvergira. Što se tiče ravnomerne konvergencije na

$\mathbb{R}$ sledi:

$$\begin{aligned}
&|S_n(x) - S(x)| \\
= \; & \left| S_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n} \right| = \left| \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \cdots \right| \\
= \; & \left| \frac{\frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 + \frac{1}{1+x^2}} \right| < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 + nx^2 + \cdots} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Zato je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, tj. red ravnomerno konvergira. Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergira za sve $x \in \mathbb{R}$ ali ne ravnomerno. Zaista,

$$|S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \max_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1,$$

što znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = 1 \neq 0$. ►

Napomena. Student treba da zna da kod konvergentnih redova, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ predstavlja upravo sumu reda.

3.27. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ ravnomerno konvergira na $\mathbb{R}$, ali nije apsolutno konvergentan ni za jedno $x \in \mathbb{R}$.

◄ Za sve $x \in \mathbb{R}$ dati red konvergira na osnovu :Lajbnicovog kriterijuma. Tako je za $x \in \mathbb{R}$ definisana funkcija $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ za koju je

$$|S_n(x) - S(x)| < \left| \frac{(-1)^n}{x^2+n+1} \right| = \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1},$$

odakle sledi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, tj. dati red je ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$. Korišćena je činjenica da je apsolutna vrednost ostatka alternativnog reda manja od apsolutne vrednosti sledećeg člana. Da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n}$ divergira za svako $x \in \mathbb{R}$ može se pokazati na primer koristeći Košijev integralni kriterijum:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t} = \ln\left(x^2+t\right)\Big|_1^{+\infty} = \ln\left(x^2+(+\infty)\right) - \ln\left(x^2+1\right) = +\infty. \;\; ►$$

3.28. Dokazati da sledeći stepeni redovi ne konvergiraju ravnomerno svojim sumama u oblasti konvergencije:

a) $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$; **c)** $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Zna se da dati stepeni redovi konvergiraju prosto (tačka po tačka) redom funkcijama $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$, za $x \in \mathbb{R}$, tj. poluprečnik njihove konvergencije je $R = +\infty$ (nalazi se primenom Dalamberovog kriterijuma). Da konvergencija nije ravnomerna proističe iz sledećeg opšteg stava:

Ako stepeni red $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ (sa beskonačno članova različitih od nule) ima poluprečnik konvergencije $R = +\infty$, onda on konvergira ali ne ravnomerno.

Zaista, tada $a_n x^n$ ne teži nuli ravnomerno (neophodan uslov ravnomerne konvergencije reda), jer je $\left| a_n \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n} \right| = 1$ tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a_n x^n| \neq 0$. ►

Napomena. Što se tiče primera a), b) i c) može se razmišljati i na sledeći način. Razlike

$$e^x - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right), \quad \sin x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \cos x - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)$$

za fiksirano $n \in \mathbb{N}$, mogu se po apsolutnoj vrednosti učiniti proizvoljno velike, za dovoljno veliko x, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| \neq 0$$

što znači da konvergencija nije ravnomerna. Stvarno, u slučaju drugog reda imamo

$$\left|\sin x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| = |x| \left|\frac{\sin x}{x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2k-1)!}\right|$$

$$\geq |x| \left|\left|\frac{\sin x}{x}\right| - \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2k-1)!}\right|\right| \to +\infty \cdot |0 - (+\infty)| = +\infty.$$

Dakle, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin x - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| = +\infty$. Korišćena je nejednakost: $|a-b| \geq ||a| - |b||$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$. Neka student to uradi i za ostala dva reda i obavezno pogleda zadatke 116 strana 64 i 158 strana 88 iz [11], II.

3.29. Dokazati da stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ konvergira ali ne ravnomerno svojoj sumi u oblasti konvergencije.

◀ Lako se nalazi da je oblast konvergencije skup $]-1,1]$ i da je suma reda (granična vrednost parcijalne sume $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, kad $n \to +\infty$) funkcija $f(x) = \ln(1+x)$. Da konvergencija nije ravnomerna proističe (kao u prethodnom zadatku) iz opštijeg stava:

Ako stepeni red $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ divergira bar na jednom kraju konačnog intervala konvergencije (na primer levom) onda konvergencija nije ravnomerna na bilo kom podskupu $]-R, x_0] \subset\ ]-R, R]$. Slično važi i za desni kraj. Za dokaz videti ([9], II, Teorema 5.5.XII). ▶

Napomena. Stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ ne konvergira ravnomerno svojoj sumi na skupu $]-1,1]$. Zaista,

$$\sup_{-1<x\le 1} \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| = +\infty, \text{ jer je}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| = \left| \ln\left(0^+\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right| = +\infty.$$

Otuda je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{-1<x\le 1} |\ln(1+x) - S_n(x)| \ne 0$.

Za ispitivanje konvergencije nekih brojnih redova student može da koristi sledeća dva teorijska zadatka (dokaz se može naći u $[11], II$, strane 18 i 41):

a) Ako je za članove reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ sa pozitivnim članovima ispunjeno

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to +\infty,$$

onda je $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$, gde je ε proizvoljno malo;

b) Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$, $b_n > 0$ konvergira, ako je

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to +\infty, \ p > 0.$$

(Iz a) sledi da $b_n \downarrow 0$, jer je $p > 0$).

3.30. Ispitati ravnomernu konvergenciju stepenog reda $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ za razne vrednosti parametra α.

◀ Zna se da je $\binom{0}{n}=0$ i $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ za $\alpha\neq 0$. Ako $\alpha\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ onda se dati stepeni red svodi na polinom, $R=+\infty$ i konvergencija ka tom polinomu je ravnomerna. Za $\alpha\notin\{0\}\cup\mathbb{N}$ red se može napisati u obliku:

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1-\alpha)\,(n-2-\alpha)\cdots(1-\alpha)\,\alpha}{n!}x^n$$

odakle se primenom Dalamberove formule za nalaženje poluprečnika dobija

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n-\alpha}\right|=1,\ \text{gde je}$$

$$a_n=(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1-\alpha)\,(n-2-\alpha)\cdots(1-\alpha)\,\alpha}{n!}.$$

Dakle, $]-1,1[$ je skup (oblast) apsolutne konvergencije. Zamenjujući krajeve intervala dobijaju se sledeća dva brojna reda:

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1-\alpha)\,(n-2-\alpha)\cdots(1-\alpha)\,\alpha}{n!}\ \text{i}$$

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1-\alpha)\,(n-2-\alpha)\cdots(1-\alpha)\,\alpha}{n!}.$$

Kod prvog reda je

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(n-1-\alpha)\cdots(1-\alpha)\,\alpha}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1-1-\alpha)\cdots(1-\alpha)\,\alpha}=\frac{n+1}{n-\alpha}\\ &= \frac{n-\alpha+\alpha+1}{n-\alpha}=1+\frac{\alpha+1}{n-\alpha}=1+\frac{\alpha+1}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}\\ &= 1+\frac{\alpha+1}{n}\left(1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ n\to+\infty,\ \text{tj.}\end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\alpha+1}{n}+\frac{(\alpha+1)\,\alpha}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\alpha+1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right),\ \delta>0.$$

Koristeći Gausov kriterijum može se zaključiti da za $x=-1$, red apsolutno konvergira ako je $\alpha>0$, odnosno divergira za $\alpha<0$. Drugi red na osnovu prethodnog razvoja $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ i primera b) konvergira za $\alpha>-1$. Znači za $-1<\alpha<0$ i $x=1$ red uslovno konvergira. Dakle, prema rečenom i na osnovu opšteg stava iz prethodnog zadatka dobija se da red uniformno konvergira na segmentu $[-1,1]$ ako je $\alpha > 0$ Za ostale vrednosti parametra α nema ravnomerne konvergencije, jer tada red divergira bar na jednom od krajeva segmenta $[-1,1]$. ►

3.31. Neka je c_n niz realnih brojeva. Dokazati da ako Dirihleov red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^x}$ konvergira za neko $x_0 \in \mathbb{R}$, tada on konvergira ravnomerno za $x \geq x_0$, pri čemu za $x > x_0 + 1$ konvergira apsolutno. Dokazati da je funkcija koju taj red definiše beskonačno diferencijabilna u svojoj oblasti definisanosti.

◄ Ako je $x \geq x_0$, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$ odakle sledi da red ravnomerno konvergira na osnovu Abelovog kriterijuma ($\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^{x_0}}$ konvergira, niz $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ je ograničen jedinicom i opada). Kada student proradjuje ovakav primer treba odmah da obnovi iz teorije Abel-Dirihleov kriterijum ravnomerne konvergencije redova, obične konvergencije redova i nesvojstvenih integrala i ravnomerne konvergencije parametarskih nesvojstvenih integrala $([2], I, II$, i $[9], I, II)$. Pošto je zatim $\left|\frac{c_n}{n^x}\right| = \left|\frac{c_n}{n^{x_0}}\right| \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}} \leq \frac{1}{n^{x-x_0}}$ onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^x}$ za $x > x_0 + 1$ apsplutno konvergira prema Vajerštrasovom kriterijumu. Korišćena je činjenica da je $\left|\frac{c_n}{n^{x_0}}\right| \leq 1$ za dovoljno veliko n, jer zbog konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^{x_0}}$, $\frac{c_n}{n^{x_0}} \to 0$ kad $n \to +\infty$. Treba još pokazati da je funkcija koju dati red definiše beskonačno diferencijabilna za $x \geq x_0$, ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^{x_0}}$ konvergira. Posmatranjem izvodnog reda: $-\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n \ln n}{n^x} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{\ln n}{n^{x-x_0}}$ na isti način se dokazuje njegova ravnomerna konvergencija, a to znači i diferencijabilnost funkcije. Pogledati rešeni primer 1.3.4 iz $[2], II$, strana 25. ►

3.32. Neka je $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Dokazati da tada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-n^2 x}$ ravnomerno konvergira na skupu $[\varepsilon, +\infty[\,, \varepsilon > 0$.

◄ Pošto je $\left|\frac{a_n}{e^{n^2 x}}\right| \leq \frac{|a_n|}{e^{n^2 x}}$ za sve $x \in [\varepsilon, +\infty[$ to je red ravnomerno konvergentan na datom skupu, ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{e^{n^2 \varepsilon}}$ konvergira. Medjutim, iz uslova $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ sledi da je sa izuzetkom konačno članova niza $a_n : |a_n| \leq 2^n$. Na osnovu Košijevog kriterijuma, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{e^{n^2 \varepsilon}}$ konvergira dakle dati red ravnomerno konvergira. ►

Napomena. Studenta ne treba da zbuni ocena: $|a_n| \le 2^n$. Zaista, pošto je $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (1 je najveća tačka nagomilavanja niza $\sqrt[n]{|a_n|}$), za svako $\delta > 0$ skoro svi članovi niza $\sqrt[n]{|a_n|}$ (sa izuzetkom konačno) su manji od $1+\delta$. Uzimajući na primer $\delta = 1$, dobijamo $|a_n| \le 2^n$ za sve članove niza $|a_n|$, sa izuzetkom njih konačno.

3.33. Dokazati da sledeći redovi konvergiraju ravnomerno na navedenim razmacima:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}, 0 \le x \le 1$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{n}, 0 \le x < +\infty$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, 0 \le x < +\infty$.

◄ Sva tri reda ravnomerno konvergiraju na datim skupovima po Dirihleovom kriterijumu. Da se podsetimo: funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ ravnomerno konvergira na skupu $A \subset \mathbb{R}$, ako je niz $S_n(x)$ parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ ravnomerno ograničen na A, tj. $\exists M > 0$ tako da je za svako $x \in A$ i za svako $n \in \mathbb{N}$:

$$|S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \right| \le M,$$

a niz $b_n(x)$ monotono ($b_{n+1}(x) \le b_n(x)$ za $n \ge n_0$) i ravnomerno teži nuli na A, kad $n \to +\infty$.

U svakom od primera je $a_n(x) = (-1)^n$, pa je $|S_n(x)| \le 2$. U primeru **a)** je

$$b_n(x) = \frac{1}{n} x^n \ge \frac{1}{n+1} x^{n+1} = b_{n+1}(x)$$

za $0 \le x \le 1$. Naravno $\frac{1}{n} x^n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$ jer je $\left|\frac{1}{n} x^n\right| \le \frac{1}{n} \to 0$, $n \to +\infty$. U primeru **b)** je

$$b_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx} \ge \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} = b_{n+1}(x)$$

za $x \ge 0$, a u **c)**

$$b_n(x) = \frac{1}{n+x} \ge \frac{1}{n+1+x} = b_{n+1}(x).$$

U oba slučaja, na skupu $[0, +\infty[$ je $0 < b_n(x) \le \frac{1}{n}$ što znači da $b_n(x) \rightrightarrows 0$, kad $n \to +\infty$. ►

Napomena. Red iz primera **b)** se smenom $e^{-x} = t$ svodi na red iz primera **a)**. Ravnomerna konvergencija onda sledi prema ([2], II, Stav 1.4.2 ili [9], II, teorema 6.5.XII).

3.34. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$ ravnomerno konvergira na $[a,b]$ tada i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ ravnomerno konvergira na $[a,b]$. Dokazati.

◀ Može se primeniti opšti Košijev kriterijum ravnomerne konvergencije ([2], II, Teorema 1.2.1 ili [9], II, Teorema 1.1.XII). Neka je $\varepsilon > 0$. Onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da ako $m, n \in \mathbb{N}$ $(n > m)$ i m, $n > n_0$ onda je

$$||u_m(x)| + |u_{m+1}(x)| + \cdots + |u_n(x)|| < \varepsilon.$$

Sada je za Košijev odsečak reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$|u_m(x) + \cdots + u_n(x)| \leq ||u_m(x)| + \cdots + |u_n(x)|| < \varepsilon$$

za $m, n > n_0$, tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ ravnomerno konvergira. ▶

3.35. Neka je $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$. Izračunati $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

◀ Nula nije singularitet. Zaista,

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0^+} f(x) \\ = \quad & \lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin nx}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \cdot a^{n-1}}{(n-1)!} = ae^a, \end{aligned}$$

jer je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x}$ ravnomerno konvergentan po x. Stvarno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x} = a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\sin nx}{nx}$$

i $\left| \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\sin nx}{nx} \right| \leq \frac{|a|^{n-1}}{(n-1)!}$ pa prema Vajerštrasovom kriterijumu sledi njegova ravnomerna konvergencija (a je fiksiran broj). Zato je

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x} \right) dx = \lim_{A\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^A \frac{\sin nx}{x} dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\int_0^{nA}\frac{\sin t}{t}dt\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\lim_{A\to+\infty}\int_0^{nA}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi\left(e^a-1\right)}{2}.$$

Treba opravdati razmenu "lim" i "$\sum$" u pretposlednjoj jednakosti. Ali $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\int\limits_0^{nA}\frac{\sin t}{t}dt$ je funkcionalni red po parametru A gde je a fiksiran broj. Pošto integral $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ konvergira, to postoji $L>0$ takvo da je $\left|\int\limits_0^{nA}\frac{\sin t}{t}dt\right| \leq L$ za svako $n\in\mathbb{N}$ i za svako $A>0$. To znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\int\limits_0^{nA}\frac{\sin t}{t}dt$ ravnomerno konvergira po Vajerštrasovom kriterijumu, jer je $\left|\frac{a^n}{n!}\int\limits_0^{nA}\frac{\sin t}{t}dt\right| \leq L\frac{|a|^n}{n!}$. ▶

3.36.a) Dokazati da je sa $f(x) = 1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+n^2}$ definisana neprekidna funkcija na $[-1,1]$;

b) Dokazati da je funkcija f neprekidno diferencijabilna na $[-1,1[$;

c) Dokazati da je $f'_-(1) = +\infty$.

◀ **a)** Dati stepeni red ima poluprečnik konvergencije $R=1$ jer je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$. Na krajevima segmenta $[-1,1]$ on konvergira apsolutno, jer je $\left|\frac{x^n}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ za sve $x\in[-1,1]$. Znači dati red ravnomerno i apsolutno konvergira na skupu $[-1,1]$. Pošto su funkcije $x\mapsto\frac{x^n}{1+n^2}$, $n=1,2,\ldots$neprekidne to je f neprekidna funkcija kao suma ravnomerno konvergentnog reda neprekidnih funkcija.

b) Suma $f(x)$ stepenog reda je u intervalu $]-1,1[$ beskonačno diferencijabilna prema osnovnom svojstvu stepenog reda ([2], II ili [9], II) i

$$f'(x) = \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{1+n^2},\ x\in\,]-1,1[\,.$$

Pošto stepeni red konvergira na levom kraju intervala $]-1,1[$ na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, a funkcija f je neprekidna u tački $x=-1$, to je

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{1+n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{+\infty}\lim_{x\to-1^+}\frac{nx^{n-1}}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f'_{-}(1) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+h)^n}{1+n^2}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}}{h} \\ &\geq \lim_{h\to 0^-}\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1+nh}{1+n^2}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{1+n^2}=+\infty \end{aligned}$$

jer red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{1+n^2}$ divergira $\left(\frac{n}{1+n^2}\sim\frac{1}{n},\ n\to+\infty\right)$. ►

3.37. Dokazati da je za $a_n(x)=ae^{-anx}-be^{-bnx}$ $(0<a<b)$ ispunjeno

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}a_n(x)\,dx\neq\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x)\right)dx.$$

◄ S obzirom da je

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{+\infty}a_n(x)\,dx\right| &\leq \int_0^{+\infty}|a_n(x)|\,dx\leq a\int_0^{+\infty}e^{-anx}dx+b\int_0^{+\infty}e^{-bnx}dx \\ &= -\frac{1}{n}e^{\ -anx}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{n}e^{\ -nbx}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n} \end{aligned}$$

to je integral $\int\limits_0^{+\infty}a_n(x)\,dx$ apsolutno konvergentan. Kako su i integrali $\int\limits_0^{+\infty}ae^{-anx}dx$ i $\int\limits_0^{+\infty}be^{-bnx}dx$ konvergentni, to je

$$\int_0^{+\infty}a_n(x)\,dx=-\frac{1}{n}e^{\ -anx}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{n}e^{\ -nbx}\Big|_0^{+\infty}=0.$$

Dakle, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}a_n(x)\,dx=0$. Red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x)$ takođe apsolutno konvergira i njegova suma je

$$\frac{a}{1-e^{-ax}}-\frac{b}{1-e^{-bx}}$$

jer redovi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}ae^{-nx}$ i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}be^{-bnx}$ konvergiraju za $x>0$. Red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x)$ ne konvergira ravnomerno, jer $a_n(x)$ ne konvergira ravnomerno nuli, kad

$n \to +\infty$, te se ne može opravdati integraljenje član po član. Treba dakle razmotriti integral $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x,a,b)\,dx$, gde je

$$\varphi(x,a,b) = \frac{a}{1-e^{-ax}} - \frac{b}{1-e^{-bx}}.$$

Međutim on je ili $-\infty$ (ako divergira) ili manji od nule (ako konvergira). Zaista, funkcija

$$\varphi(x,a,b) = \frac{a - ae^{-bx} - b + be^{-ax}}{1 - e^{-bx} - e^{-ax} + e^{-(a+b)x}}$$

je opadajuća jer je

$$\varphi'(x,a,b) = -\frac{a^2e^ax}{(e^{ax}-1)^2} - \frac{b^2e^{bx}}{(e^{bx}-1)^2} < 0.$$

Zatim je $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x,a,b) = \frac{a}{1-0} - \frac{b}{1-0} = a - b < 0$ i

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} \varphi(x,a,b) &= \lim_{x\to0^+} \frac{a - ae^{-bx} - b + be^{-ax}}{1 - e^{-bx} - e^{-ax} + e^{-(a+b)x}} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{abe^{-bx} - abe^{-ax}}{be^{-bx} + ae^{-ax} - (a+b)e^{-(a+b)x}} \\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{-ab^2e^{-bx} + a^2be^{-ax}}{-b^2e^{-bx} - a^2e^{-ax} + (a+b)^2e^{-(a+b)x}} \\
&= \frac{a^2b - ab^2}{(a+b)^2 - a^2 - b^2} = \frac{a-b}{2}.
\end{aligned}$$

Znači, dokazano je da je leva strana različita od desne strane, tj. da "$\sum$" i "$\int$" ne komutiraju. ►

3.38. a) Odrediti sve tačke realne prave u kojima je funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx - [nx]}{n^2}$$

neprekidna;

b) Izračunati $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

◄ **a)** Zbog $\left|\frac{nx-[nx]}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ za sve $x \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R} \Rightarrow a - 1 < [a] \le a$) dati red konvergira ravnomerno na $\mathbb{R}$. Kako su u svakoj tački $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sve funkcije $x \mapsto \frac{nx-[nx]}{n^2}$ neprekidne, to je i f neprekidna u tim tačkama. Neka je x_0 racionalan broj. Funkcija f je u x_0 prekidna. Zaista,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{nx-[nx]}{n^2} = 0$$

pa je zbog (ravnomerne konvergencije reda) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$. Međutim, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) > 0$ jer su svi članovi reda nenegativni i bar jedan strogo pozitivan. Na primer

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{qx-[qx]}{q^2} = \frac{1}{q^2} > 0.$$

b) Prema **a)** skup tačaka prekida funkcije f je Lebegove mere nula, pa je f integrabilna na $[0,1]$. Kako je

$$\int_0^1 \frac{nx-[nx]}{n^2} dx = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (nx-[nx])\, dx = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n^2}$$

i dati red ravnomerno konvergira, to je

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{nx-[nx]}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}. \blacktriangleright$$

3.39. Odrediti domen i ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.

$\blacktriangleleft$ Funkcija $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ je data u obliku funkcionalnog reda s pozitivnim članovima. Ona je definisana za $x \geq 0$, jer je tada red čiji je ona suma konvergentan, zbog $0 < \frac{e^{-nx}}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$, i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergira. Dati funkcionalni red tada i ravnomerno konvergira prema Vajerštrasovom kriterijumu. To znači da je funkcija f na skupu $[0,+\infty[$ neprekidna. Uzimajući da je $e^{-x} = t$, $t \in]0,1]$ kad $x \in [0,+\infty[$, dobija se stepeni red

$$g(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2+1}.$$

Funkcija g je diferencijabilna na skupu $]0,1[$ i $g'(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{nt^{n-1}}{n^2+1}$ na osnovu svojstava stepenog reda. Ovo znači da je funkcija $x\mapsto f(x)$ diferencijabilna na skupu $]0,+\infty[$ kao složena funkcija ($f(x)=g(e^{-x})$). Što se tiče diferencijabilnosti u nuli, sledi $f'_+(0)=-g'_-(1)=-\infty$ prema zadatku 3.36. c). Znači $f\in C[0,+\infty[\cap\mathcal{D}]0,+\infty[$. ►

3.40. Dokazati da je

a) Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2-1}$ konvergentan za $x\geq 0$, a divergentan za $x<0$;

b) Funkcija $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2-1}$ neprekidna na $[0,+\infty[$, a diferencijabilna na $]0,+\infty[$;

c) Odrediti interval konvergencije i sumirati stepeni red $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n^2-1)}$;

d) Izračunati integral $\int\limits_0^{+\infty}f(x)\,dx$.

◄ a) Ako je $x\geq 0$, red konvergira prema Vajerštrasovom kriterijumu, jer je $0<\frac{e^{-nx}}{n^2-1}\leq\frac{1}{n^2-1}$, $n\geq 2$, i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ konvergira. Za $x<0$ red divergira jer tada opšti član ne teži nuli. Zaista,

$$\frac{e^{-nx}}{n^2-1}>\frac{e^{-nx}}{n^2}>\frac{n^2x^2}{2n^2}=\frac{x^2}{2}>0\ \ (n>2)\,.$$

b) Kako je za sve $x\geq 0$, $\frac{e^{-nx}}{n^2-1}\leq\frac{1}{n^2-1}$ i kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ konvergira, to je prema Vajerštrasovom kriterijumu dati funkcionalni red ravnomerno konvergentan na skupu $[0,+\infty[$. Drugim rečima, f je neprekidna funkcija na $[0,+\infty[$, jer su takve funkcije $x\mapsto\frac{e^{-nx}}{n^2-1}$, $x\geq 0$, $n\geq 2$.

Smenom $e^{-x}=t$, odnosno $x=\ln\frac{1}{t}$, funkcionalni red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2-1}$ po promenlji voj $x>0$ postaje stepeni red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n}{n^2-1}$ po promenljivoj $t\in]0,1[$. Kako se dobijeni stepeni red može diferencirati član po član za $t\in]0,1[$, to je prema teoremi o izvodu složene funkcije

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2-1}\right)'_x=\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n}{n^2-1}\right)'(t)\cdot t'(x)\\ &= \left(-e^{-x}\right)\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{nt^{n-1}}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-ne^{-nx}}{n^2-1}, \end{aligned}$$

tj. f je diferencijabilna na skupu $]0,+\infty[$.

Napomena. Da je funkcija $x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2-1}$ diferencijabilna na skupu $]0,+\infty[$ može se pokazati i na sledeći način:

Neka je x_0 fiksiran pozitivan broj i neka je zatim $\varepsilon > 0$, takvo da 0 ne pripada segmentu $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. Tada je red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nx}}{n^2-1}\right)_x' = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{-ne^{-nx}}{n^2-1}$ ravnomerno konvergentan na segmentu $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ prema Vajerštrasovom kriterijumu, jer je $\left|\frac{-ne^{-nx}}{n^2-1}\right| \leq e^{-n(x_0-\varepsilon)}$ i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} e^{-n(x_0-\varepsilon)}$ konvergira. To znači da je za svako $x>0$, $f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{-ne^{-nx}}{n^2-1}$, odnosno da je f diferencijabilna na skupu $]0,+\infty[$.

c) Neposredno se dobija da je poluprečnik konvergencije reda $R=1$, kao i da red apsolutno konvergira na segmentu $[-1,1]$. Iz jednakosti

$$\frac{1}{n(n^2-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1},$$

sledi da je suma datog reda jednaka

$$-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1},\ x\in\,]-1,1[.$$

Kako je $\ln(1+y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n$, $y\in\,]-1,1]$, to je

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} &= -\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - x\right) = x - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(-x)^n}{n} = x + \ln(1-x),\\
\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} &= \frac{x}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{x}{2}\ln(1-x),\\
\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ln(1-x)\right),
\end{aligned}$$

za $x\neq 0$. S obzirom da je $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}+\ln(1-x)\right)\right) = 0$, to je za sve $x\in\,]-1,1[$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n^2-1)} = -\frac{(1-x)^2}{2x}\ln(1-x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2},$$

što predstavlja sumu reda u unutrašnjosti intervala konvergencije.

d)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2-1}\right)dx \\
&= \lim_{b\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{e^{-nx}}{n^2-1}dx = \lim_{b\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-e^{-bn}}{n\left(n^2-1\right)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1-e^{-bn}}{n\left(n^2-1\right)}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\left(n^2-1\right)} = S(1)\,,
\end{aligned}
$$

gde je $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n^2-1)}$. Prema Abelovoj teoremi imamo:

$$
\begin{aligned}
S(1) &= \lim_{x\to1^-} S(x) = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2x}\ln(1-x)\right) \\
&= \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2} - \lim_{x\to1}\frac{1-x}{2x}\cdot\lim_{x\to1}(1-x)\ln(1-x) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Korišćena razmena "$\int$" i "$\sum$" i "lim" i "$\sum$" je moguća jer redovi

$$
\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2-1},\ \ (x\ge0)\,,\ \text{ i }\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-e^{-bx}}{n^2-1},\ \ (b\ge0)\,,
$$

ravnomerno konvergiraju. ▶

3.41. Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}$ u svojoj oblasti definisanosti.

◀ Funkcija je definisana na skupu $]0,+\infty[$, jer je tada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}$ konvergentan ($\sqrt[n]{e^{-n^2x}} = e^{-nx} \to 0 < 1$ kad $n\to+\infty$ i $x>0$). Za $x\le0$, opšti član ne teži nuli. Neka je sada x_0 proizvoljan fiksiran pozitivan broj. Odaberimo $\varepsilon>0$, takvo da je $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\subset\,]0,+\infty[$. Kako na skupu $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ red

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-n^2x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-n^2\right)e^{-n^2x}
$$

ravnomerno konvergira ($\left|\left(-n^2\right)e^{-n^2x}\right| \leq n^2e^{-n^2(x_0-\varepsilon)}$ i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2e^{-n^2(x_0-\varepsilon)}$ je konvergentan) to je data funkcija diferencijabilna (a to znači i neprekidna) u tački x_0. Zbog proizvoljnosti tačke x_0, funkcija f je diferencijabilna u svojoj oblasti definisanosti i $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-n^2\right)e^{-n^2x}$. ►

Napomena. Vidimo da i ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-n^2x}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-n^2\right)e^{-n^2x}$ nije ravnomerno konvergentan na $]0,+\infty[$ (zašto?) to se polazni red može diferencirati član po član za svako $x > 0$.

3.42. Odrediti definicioni skup i ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}}$.

◄ Iz nejednakosti $\left|\frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, sledi apsolutna i uniformna konvergencija na $\mathbb{R}$ (prema Vajerštrasovom kriterijumu) što znači da je funkcija f definisana i neprekidna na $\mathbb{R}$.

Formirajmo red izvoda članova ispitivanog reda. On je oblika $-\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^{\frac{1}{2}}}$. Prema Dirihleovom kriterijumu ovaj red ravnomerno konvergira na svakom intervalu koji ne sadrži tačke oblika $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (obrazložiti detalje!). Pokaži mo da u tačkama $2k\pi$ funkcija nema izvod. Imamo za $p \in \mathbb{N}$

$$f(0) - f\left(\frac{1}{p}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\frac{n}{p}}{n^{\frac{3}{2}}} \geq \sum_{n=1}^{p} \frac{2\sin^2\frac{n}{2p}}{n^{\frac{3}{2}}} \geq 2\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{n}{2p}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\pi^2p^2}\sum_{n=1}^{p}\sqrt{n}$$

odakle sledi da je

$$\frac{f(0) - f\left(\frac{1}{p}\right)}{\frac{1}{p}} \geq \frac{2}{\pi^2 p}\sum_{n=1}^{p}\sqrt{n} \to +\infty, \ \ p \to +\infty,$$

tj. funkcija nema izod u nuli, pa zbog periodičnosti, ni u jednoj tački oblika $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Napomena. Korišćena je ocena: $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, kad god je $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

3.43. Ispitati neprekidnost funkcije $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{x}{n}} \ln\left(1+u^2\right)du.$$

◀ Pošto je $\ln\left(1+u^2\right) \leq u^2$ za sve $u \in \mathbb{R}$, to je

$$0 \leq a_n(x) = \int_0^{\frac{x}{n}} \ln\left(1+u^2\right) du \leq \int_0^{\frac{x}{n}} u^2 du = \frac{x^3}{3n^3} \leq \frac{A^3}{3n^3},$$

jer za fiksirano $x \geq 0$, postoji $A \in \mathbb{R}^+$ takvo da je $0 \leq x \leq A$. Prema Vajerštrasovom kriterijumu dati red ravnomerno konvergira na skupu $[0, A]$, što znači da je f neprekidna u tački x. Funkcija je dakle neprekidna u svom domenu $[0, +\infty[$. ▶

3.44. Naći $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

◀ Neka je $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. Funkcija f je definisana za $x > 0$, na osnovu Lajbnicovog kriterijuma. Stvarno, ako je x fiksiran pozitivan broj, tada $\frac{1}{n^x} \searrow 0$. Inače, na skupu $]0, +\infty[$ dati red nije ravnomerno konvergentan, jer opšti član $\frac{(-1)^n}{n^x}$ ne konvergira ravnomerno nuli kad $n \to +\infty$ (obrazložiti detalje!). Zato komutiranje "lim" i "$\sum$" nije obezbeđeno. Međutim, kako je za sve $n \in \mathbb{N} : (-1)^n = \frac{1}{2}\left((-1)^n - (-1)^{n-1}\right)$, to je

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left((-1)^n - (-1)^{n-1}\right) \cdot \frac{1}{n^x} \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) = -\frac{1}{2} + g(x). \end{aligned}$$

Nije teško proveriti da red definisan funkcijom g ravnomerno konvergira na $[0, +\infty[$ (Dirihleov kriterijum) i zato je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\frac{1}{2} + g(0) = -\frac{1}{2}. \ ▶$$

3.45. Odrediti poluprečnik konvergencije R stepenih redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(n \arcsin \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+3)(n+6)\dots 4n}{3^n} x^n$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n} \cdot (x-1)^n$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (x-2)^n$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan x)^{(n)}\big|_{x=0}}{n!} x^n$.

◀ **a)** Pošto je $a_n = \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, to je $\sqrt[n]{\left|\left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^n$. Kad $n \to +\infty$, imamo

$$n \tan \frac{1}{n} = n \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 + \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Zatim je

$$\left(n \tan \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \to 1$$

kad $n \to +\infty$. Znači $R = 1$. Zato stepeni red apsolutno konvergira za $|x-1| < 1$ odnosno za $0 < x < 2$. Na krajevima intervala konvergencije red divergira jer tada opšti član ne teži nuli Neka student obrazloži.

b) Iz $a_n = \left(n \arcsin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ sledi

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|a_n|} &= \left(n \arcsin \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)} \\ &= e^{n \ln\left(1+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \to 1\end{aligned}$$

kad $n \to +\infty$. Dakle, $R = 1$, tj. red apsolutno konvergira za $|x| < 1$. Na krajevima intervala $]-1, 1[$ red divergira iz istog razloga kao kod prethodnog primera. Ovde je korišćena formula

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),\ x \to 0.$$

c) Kako je $a_n = \frac{n(n+3)(n+6)...4n}{3^n}$ to je

$$\begin{aligned}R &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\,(n+3)\,(n+6)\,...4n}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{n\,(n+4)\,(n+6)\,...4n\,(4n+3)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n\,(n+3)\,...4n}{(n+1)\,(n+4)\,...4n\,(4n+4)} = 0\end{aligned}$$

jer imenilac ima veći stepen od brojioca. Dakle, red konvergira jedino za $x = 0$.

d)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \sin \frac{k}{n}} \to e^{\int\limits_0^1 \ln \sin x dx}$$

znači $R = e^{-\int\limits_0^1 \ln \sin x dx}$ je poluprečnik konvergencije stepenog reda.

e)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2 (2n-1)!!}{(2n)!\,(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)!\,(2n+2)!!}{((n+1)!)^2 \cdot (2n+1)!!} = \frac{(2n+2)^2 (2n+1)}{(n+1)^2 (2n+1)} = 4$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, znači red apsolutno konvergira za $|x-2| < 4$ odnosno za $-2 < x < 6$. Na krajevima intervala $]-2, 6[$ red divergira kao geometrijski red jer je tada količnik jednak jedinici.

f) Pogledati $[2], II$, zadatak 18, strana 38. ▶

3.46. Razložiti u stepeni red po x funkcije:

a) $x \mapsto \sin^4 x$; **b)** $x \mapsto \frac{x}{x^4+x^2+1}$; **c)** $x \mapsto e^{-x^2}\left(1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}\right)$.

◀ **a)**

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.\end{aligned}$$

Ako se u formuli

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R},$$

x zameni sa $2x$, odnosno $4x$, dobija se (prema teoremi o "zameni" reda u red $[9], II$)

$$\begin{aligned}&\sin^4 x \\ =\ & \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right) + \frac{1}{8}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (4x)^{2n}}{(2n)!}\right) \\ =\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{4^{2n}}{8} - \frac{4^n}{2}\right)}{(2n)!} x^{2n}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{x^4+x^2+1} = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2 - x^2} = \frac{x}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} \\ &= \frac{x(x-1)(x+1)}{x^6-1} = -x\left(1-x^2\right) \cdot \frac{1}{1-x^6} = -x\left(1-x^2\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{6n}\right)\end{aligned}$$

$$= \quad x^3 - x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^{6n+3} - x^{6n+1}\right), \ \ |x| < 1.$$

c) Pošto je $e^{-x^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ za sve $x \in \mathbb{R}$, a red $1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}$ konvergira za $|x| < 2$, to je traženi stepeni red Košijev proizvod navedenih stepenih redova. ▶

3.47. Odrediti Maklorenove redove sledećih funkcija:
a) $x \mapsto \int\limits_0^1 \ln(1+xt)\,dt$; **b)** $x \mapsto \int\limits_0^1 \arctan(xt)\,dt$; **c)** $x \mapsto \int\limits_0^1 e^{-x^2t^2} dt$.

◀ **a)** Rešavanjem integrala $\int\limits_0^1 \ln(1+xt)\,dt$ dobija se funkcija

$$f(x) = \ln(1+x) - 1 + \frac{1}{x}\ln(1+x),$$

koju nije teško razviti u Maklorenov stepeni red za $-1 < x \leq 1$.

b) Pošto je

$$\int\limits_0^1 \arctan(xt)\,dt = \arctan x - \frac{1}{2x}\ln\left(1+x^2\right),$$

znajući da je

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

za $|x| < 1$ i

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

za $-1 < x \leq 1$, student može da završi zadatak. Naravno, za dobijene Maklorenove redove treba ispitati konvergenciju na krajevima intervala.

c) Za razvijanje funkcije $f(x) = \int\limits_0^1 e^{-x^2t^2} dt$ u Maklorenov stepeni red, najpre treba podintegralnu funkciju razviti u takav stepeni red, tj.

$$e^{-x^2t^2} = 1 - x^2t^2 + \frac{x^4t^4}{2!} - \frac{x^6t^6}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(x^2t^2\right)^n$$

odakle sledi, integraljenjem član po član, da je $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1}$ kao i da red konvergira za sve $x \in \mathbb{R}$. ▶

3.48. Naći primer funkcije f čiji Maklorenov red ima poluprečnik konvergencije $R > 0$, ali ni za jedno $x \neq 0$ ne konvergira ka $f(x)$.

◀ Neka je

$$f_1(x) = e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ i neka je

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Pokazuje se da da su svi izvodi funkcije f_2 u nulu jednaki nula, tako da je njen Maklorenov red oblika $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, gde je $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \cdots = 0$. Zato je Maklorenov red funkcije $f = f_1 + f_2$ jednak Maklorenovom redu funkcije f_1 i u svakoj tački $x \neq 0$ konvergira ka $f_1(x) \neq f(x)$. Dakle, jedan primer funkcije koja ispunjava zahteve u zadatku je

$$f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0. \ ▶ \end{cases}$$

3. 49. Izračunati:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cot t \cdot \ln \frac{1}{\cos t} dt$; **b)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \ln \sin x dx$. **c)** $\int\limits_1^2 \frac{\ln t}{t-1} dt$; **d)** $\int\limits_1^2 \left(\frac{\ln t}{t-1}\right)^2 dt$.

◀ **a)** i **b)** Tačke 0 i $\frac{\pi}{2}$ su prividni singulariteti kod oba integrala (neka to student pokaže). Šta više, integrali se razlikuju samo po znaku. Zaista,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot \ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) d\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \ln\sin x dx.$$

Treba dakle izračunati integral $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \ln\sin x dx$. Smenom $\sin x = e^t$, $I_2 = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{te^{2t}dt}{1-e^{2t}}$, a zatim smenom $2t = \ln z$, $I_2 = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{\ln z}{1-z} dz$ tj. $I_2 = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy$. Poslednji integral je nesvojstven sa stvarnim singularitetom u jedinici i prividnim singularitetom u nuli i rešava se razvijanjem podintegralne funkcije u stepeni red. Pošto je

$$\ln(1-y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-y)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$$

tj. $\frac{\ln(1-y)}{y} = -1 - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n}$ to je

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-y)}{y} dy = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \left(-1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n}\right) dy \\ &= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\varepsilon - 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^{1-\varepsilon} y^{n-1} dy\right) = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n^2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n^2} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = -\frac{\pi^2}{24}. \end{aligned}$$

Znači prvi integral je $\frac{\pi^2}{24}$, a drugi $-\frac{\pi^2}{24}$.

Napomena. Neka student obrazloži integraljenje član po član i razmenu "lim" i "$\sum$"

c) i **d)** Oba integrala su Rimanova, jer je tačka $x = 1$ prividni singularitet. Naime

$$\lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1 \text{ i } \lim_{t \to 1} \left(\frac{\ln t}{t-1}\right)^2 = 1.$$

Smenom $t - 1 = x$, prvi integral postaje $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. Razvijanjem podintegralne funkcije u stepeni red (koji na $[0,1]$ ravnomerno konvergira) sledi

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots. \end{aligned}$$

Znajući da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, najpre se nalazi

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{24},$$

a zatim i $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$. Zato je

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Dakle, $\int\limits_1^2\frac{\ln t}{t-1}dt=\frac{\pi^2}{12}$. Za drugi integral je

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_1^2\frac{\ln^2 t}{(t-1)^2}dt=-\frac{1}{t-1}\ \ln^2 t\Big|_1^2+\int\limits_1^2\frac{2\ln t}{t\,(t-1)}dt\\ &= -\ln^2 2+\lim_{t\to 1^+}\frac{\ln^2 t}{t-1}+2\int\limits_1^2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\ln t dt\\ &= -\ln^2 2+0+2\int\limits_1^2\frac{\ln t}{t-1}dt-2\int\limits_1^2\frac{\ln t}{t}dt\\ &= -\ln^2 2+2\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx-2\left.\frac{\ln^2 t}{2}\right|_1^2\\ &= -\ln^2 2+2\cdot\frac{\pi^2}{12}-\ln^2 2=\frac{\pi^2}{6}-2\ln^2 2.\ \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.50. Naći sume redova:
a) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$. **c)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2(n+1)}$;
d) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{(n-1)(n+2)}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(n+1)(n+3)(n+4)}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-nx},\ x>0$;
g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!}$.

◀ **a)** Neka je $f(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$, onda je $xf(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$. Zatim je

$$(x\cdot f(x))'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}\ \text{tj.}\ x^2\,(x\cdot f(x))'=g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Sada je $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$ za $|x|<1$. Inače, polazni stepeni red konvergira na segmentu $[-1,1]$. Zatim je

$$g(x)=\int\frac{x}{1-x}dx+C_1=-\int\frac{x-1+1}{x-1}dx+C_1=-x-\ln|x-1|+C_1.$$

Iz $g(0)=0$, sledi $C_1=0$, dakle

$$x^2\left(x\cdot f(x)\right)'=-x-\ln|x-1|=-x-\ln(1-x)$$

jer je $|x|<1$. Zatim je $(x\cdot f(x))'=-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{x}$ tj.

$$\begin{aligned}
x\cdot f(x) &= -\int\frac{1}{x^2}\ln(1-x)\,dx-\ln|x| \\
&= \frac{1}{x}\ln(1-x)-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{1-x}dx-\ln|x| \\
&= \frac{1}{x}\ln(1-x)-\left(\int\frac{1}{1-x}dx-\int\frac{1}{x}dx\right)-\ln|x| \\
&= \frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln|x-1|+\ln|x|-\ln|x|+C_2 \\
&= \frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln(1-x)+C_2.
\end{aligned}$$

Pošto je

$$\begin{aligned}
f(1) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,
\end{aligned}$$

onda u jednakosti

$$xf(x)=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+C_2$$

prelaskom na graničnu vrednost, kad $x\to 1^-$ sledi: $1=0+C_2$, tj. $C_2=1$. Dakle, $f(x)=\frac{1-x}{x^2}\ln(1-x)+\frac{1}{x}$ za $x\neq 0$ i $f(0)=\frac{1}{2}$. Time je određena suma reda.

b) I ovaj red konvergira za $x\in[-1,1]$. Neka to student dokaže. Ako je $f(x)$ suma reda u oblasti $|x|<1$, onda je

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}=x\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x\cdot g(x).$$

Zatim je za $|x| < 1$,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}$$

tj. $g(x) = \arctan x + C_1$. Iz $g(0) = 0$, sledi $C_1 = 0$, pa je $g(x) = \arctan x$. Dakle, $f'(x) = x \arctan x$, odnosno

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2} dx + C_2 \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} dx + C_2 \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C_2. \end{aligned}$$

Pošto je $f(0) = 0$, to je $C_2 = 0$. Suma reda je

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x.$$

c) Ako je $f(x)$ suma reda, onda je

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n-n}{n^2(n+1)} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= h_1(x) - h_2(x) + h_3(x). \end{aligned}$$

Dalje je

$$h_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} \text{ tj. } \left(x \cdot h_1'(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

odakle je $x \cdot h_1'(x) = -\ln(1-x) + C_1$. Iz $h_1'(0) = 0$ sledi $C_1 = 0$. Znači $h_1'(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$, odnosno

$$h_1(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt + C_2.$$

Kako je $h_1(0)=0$, to je $C_2=0$. Dakle, $h_1(x)=-\int\limits_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$. Dalje je

$$h_2'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

tj. $h_2(x)=-\ln(1-x)+C_3$, odnosno $h_2(x)=-\ln(1-x)$ jer je $C_3=0$. Na kraju

$$(x\cdot h_3(x))'=\sum_{n=1}^{+\infty} x^n=\frac{x}{1-x},\text{ tj.}$$

$$x\cdot h_3(x)=\int\frac{x}{1-x}dx+C_4=-\int\frac{x-1+1}{x-1}dx+C_4=-x-\ln(1-x)+C_4,$$

odakle sledi $C_4=0$, znači $h_3(x)=-1-\frac{1}{x}\ln(1-x)$. Suma polaznog reda je $f(0)=0$ i

$$f(x)=-1-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\ln(1-x)-\int\limits_0^x\frac{\ln(1-x)}{x}dx, x\neq 0.$$

d) Pošto je poluprečnik konvergencije

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n-1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+3)}{(n+1)^2}=1,$$

to je red apsolutno konvergentan za $|x|<1$. Na krajevima segmenta $[-1,1]$ red divergira, jer tada opšti član ne teži nuli. Neka je $f(x)$ suma reda u oblasti konvergencije. Onda je

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{n^2+n-2}x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+n-2-n+2}{n^2+n-2}x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}x^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2-n}{n^2+n-2}x^n=\frac{x^2}{1-x}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{A}{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{B}{n+2}x^n \\ &= \frac{x^2}{1-x}+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n-\frac{4}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+2}x^n=\frac{x^2}{1-x}+\frac{1}{3}g(x)-\frac{4}{3}h(x). \end{aligned}$$

Dalje je

$$g(x)=x\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}=x\cdot g_1(x), g_1'(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x},$$

tj. $g_1(x) = -\ln(1-x) + C_1$. Iz $g_1(0) = 0$, sledi $C_1 = 0$. Znači $g(x) = -x\ln(1-x)$. Za funkciju $h(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+2}x^n$ važi dalje $x^2 \cdot h(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+2}x^{n+2}$ odakle je $\left(x^2 \cdot h(x)\right)' = \frac{x^3}{1-x} + C_2$. Zbog $h(0) = 0$, dobija se $C_2 = 0$. Dakle,

$$\begin{aligned} x^2 \cdot h(x) &= \int \frac{x^3}{1-x}dx = -\int \frac{x^3-1+1}{x-1}dx \\ &= -\int \left(x^2+x+1\right)dx - \ln(1-x) + C_3 \\ &= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x) + C_3. \end{aligned}$$

Opet se dobija da je konstanta $C_3 = 0$. Onda je

$$h(x) = -\frac{x}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}.$$

Suma reda je $f(0) = 0$ i za $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{1-x} - \frac{1}{3}x\ln(1-x) + \frac{4}{3}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) \\ &= \frac{x^2}{1-x} - \frac{1}{3}x\ln(1-x) + \frac{4}{3x^2}\ln(1-x) + \frac{2}{3} + \frac{4}{3x} + \frac{4x}{9}. \end{aligned}$$

e) Oblast konvergencije je segment $[-1,1]$. Iz rastavljanja

$$\frac{n}{(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} + \frac{C}{n+4}$$

sledi $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = -\frac{4}{3}$. Onda je suma reda jednaka

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+3} - \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+4} \\ &= -\frac{1}{6}g(x) + \frac{3}{2}h(x) - \frac{4}{3}p(x). \end{aligned}$$

Dalje je

$$(x \cdot g(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Onda je

$$x \cdot g(x) = -\int \frac{x-1+1}{x-1}dx + C_1 = -x - \ln(1-x) + C_1$$

i pošto je $C_1 = 0$ to je $g(x) = -1 - \frac{1}{x}\ln(1-x)$. Zatim je

$$\left(x^3 \cdot h(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+3} = \frac{x^3}{1-x}$$

i onda

$$x^3 \cdot h(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x) + C_2,\ C_2 = 0.$$

Znači

$$h(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\ln(1-x),$$

za $|x| < 1$, $x \neq 0$. Imamo da je

$$\left(x^4 \cdot p(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+3} = \frac{x^4}{1-x}$$

te je $x^4 p(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)$, odnosno

$$p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\ln(1-x).$$

Dakle, suma reda je $f(0) = 0$ i za $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{6}\left(-1 - \frac{1}{x}\ln(1-x)\right) + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\ln(1-x)\right) \\ &\quad -\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\ln(1-x)\right) \\ &= -\frac{11}{36x} - \frac{5}{6x^2} + \frac{4}{3x^3} + \left(\frac{1}{6x} - \frac{3}{2x^3} + \frac{4}{3x^4}\right)\ln(1-x). \end{aligned}$$

f) Red konvergira za $x > 0$, a za $x \leq 0$ divergira. Smenom $e^{-x} = t$, dobija se stepeni red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 t^n$. Ako je $f(t)$ njegova suma, onda je

$$f(t) = t \cdot \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 t^{n-1}\right) = t \cdot g(t),$$

gde je $g(t) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n^2 t^{n-1}$. Uzimanjem integrala sledi

$$\int g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^n = t\left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n t^{n-1}\right) = t \cdot h(t),$$

gde je $h(t) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} nt^{n-1}$. Zatim je $\int h(t)\,dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$. Znači,

$$h(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)' = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2},$$

odnosno $\int g(t)\,dt = \frac{t}{(1-t)^2}$, odakle je

$$g(t) = \left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)' = \frac{(1-t)^2 - t\cdot 2(1-t)\cdot(-1)}{(1-t)^4} = \frac{t+1}{(1-t)^3},$$

tj. $f(t) = \frac{t(t+1)}{(1-t)^3}$. Dakle, imamo da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-nx} = \frac{e^{-x}(e^{-x}+1)}{(1-e^{-x})^3}.$$

g) Za nalaženje sume brojnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ koristi se stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$. On je konvergentan na segmentu $[-1,1]$ ($R = 1$, prema Lajbnicovom kriterijumu konvergira za $x = \pm 1$). Ako je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$$

onda je

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}$$

tj. $f(x) = \arctan x + C$. Iz $f(0) = 0$ sledi $C = 0$. Dakle, za sve $x \in]-1,1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x.$$

S obzirom da red konvergira i za $x = 1$, to je prema Abelovoj teoremi suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ jednaka $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

h) Ako sa S označimo traženu sumu, onda je

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + e - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 3e + e - 1 \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 5e - 1 = 6e - 1. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.51. Dokazati da je $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\alpha\cos x)\, dx$

◀ **I način.** Neka je

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)^2} \text{ i } g(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\alpha\cos x)\, dx.$$

Obe funkcije se mogu diferencirati na $[0,1[$: f zato što redovi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{2n+1}$ ravnomerno konvergiraju na $[0,r], r \in [0,1[$ (svojstvo stepenih redova), a g zato jer je izvod podintegralne funkcije $(\arcsin(\alpha\cos x))'_\alpha = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2 x}}$ neprekidna funkcija na $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [0,r]$, $r \in [0,1[$. Da je $f(\alpha) = g(\alpha)$ za sve $\alpha \in [0,1[$ dovoljno je pokazati da je $f'(\alpha) = g'(\alpha)$ za sve $\alpha \in]0,1[$ ($f(0) = g(0)$ je očigledno). Zaista iz $f'(\alpha) = g'(\alpha)$ sledi $f(\alpha) = g(\alpha) + C$. Kako je $f(0) = g(0) = 0$, to je $C = 0$, odnosno $f(\alpha) = g(\alpha)$ za sve $\alpha \in]0,1[$. Pošto su f i g neprekidne funkcije na $[0,1]$, to je

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{\alpha\to 1^-} f(\alpha) = \lim_{\alpha\to 1^-} g(\alpha) = g(1) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\cos x)\, dx \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Time je nađena i suma reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. Ostaje da se pokaže jednakost izvoda funkcija f i g na $]0,1[$.

$$\begin{aligned}
g'(\alpha) &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2 x}} = \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-\alpha^2(1-u^2)}} \quad (\ u=\sin x) \\
&= \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha u}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2}} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad \left(t=\frac{\alpha u}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}} = \cdots = \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}; \\
f'(\alpha) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

tj. $(\alpha f'(\alpha))' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha^{2n} = \frac{1}{1-\alpha^2}$, $0<\alpha<1$, sve vreme je ta pretpostavka. Dakle,

$$\alpha f'(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + C.$$

Uzimajući graničnu vrednost leve i desne strane dobija se $C=0$. Znači

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = g'(\alpha).$$

Drugi način. Prema formuli

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1}, \quad |x|\le 1$$

(razvija se najpre izvod funkcije $y=\arcsin x$ u stepeni red, a zatim integraljenjem i primenom Rabeovog kriterijuma dokaže da dobijeni red konvergira i za $x=\pm 1$) sledi

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\alpha\cos x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}\alpha^{2n+1}\cos^{2n+1}x\right)dx \\
&= \alpha\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}\alpha^{2n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)} \alpha^{2n+1} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)^2} = f(\alpha). \end{aligned}$$

Uzimajući da je $\alpha = 1$, dobija se

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Korišćena je formula za integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x dx,\ k \in \mathbb{N}$ i činjenica da se stepeni red može integraliti na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ član po član, ako na njemu konvergira. ►

3.52. Izračunati integrale:

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+e^x}$; **b)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sinh x}$; **c)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\cosh x}$; **d)** $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ i dokazati da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ razvijanjem podintegralne funkcije u stepeni red; **e)** $\int\limits_0^1 (\arctan x)(\ln x)\, dx$; **f)** $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x^2} dx$.

◄ **a)** Integral je očigledno nesvojstven samo u odnosu na razmak integraljenja. S obzirom da kad $x \to +\infty$ imamo: $\frac{x}{1+e^x} \sim \frac{x}{e^x}$, to je integral konvergentan, jer je takav integral $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x} dx$. Smeno $e^{-x} = t$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln t}{1+t} dt \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} \ln t \right) dt = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_\varepsilon^1 t^{n-1} \ln t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\varepsilon^n}{n^2}-\frac{\varepsilon^n\ln\varepsilon}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\varepsilon^n\ln\varepsilon}{n}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\varepsilon^n}{n^2}\\
&= \lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+0+0=\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Razmena “$\int$” i “$\sum$” odnosno “lim” i “$\sum$” je moguća, jer redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{n-1}\ln t$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^n\ln\varepsilon}{n}$, i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^n}{n^2}$ ravnomerno konvergiraju na $[0,1]$ na osnovu Dirihleovog kriterijuma. Naravno, funkcije $t\mapsto t^{n-1}\ln t$ i $\varepsilon\mapsto\varepsilon^n\ln\varepsilon$ su u nuli dodefinisane kao 0.

Napomena. Dati integral se može izračunati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x}{1+e^x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}xe^{-nx}\right)dx\\
&= \lim_{A\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_0^A xe^{-nx}dx\\
&= \lim_{A\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{Ae^{-nA}}{n}-\frac{e^{-nA}}{n^2}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-\lim_{A\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}Ae^{-nA}}{n}-\lim_{A\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{-nA}}{n^2}\\
&= \frac{\pi^2}{12}-0-0=\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Koristi se ravnomerna konvergencija redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}xe^{-nx}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{-nA}}{n^2}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}Ae^{-nA}}{n}$ na skupu $[0,+\infty[$ (prema Dirihleovom kriterijumu).

b) i **c)** Najpre je $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sinh x}=1$. Znači oba integrala su nesvojstvena u odnosu na razmak integraljenja. Imamo da je

$$\frac{x}{\sinh x}=2\sum_{n=1}^{+\infty}xe^{(2n-1)x}\ \text{i}\ \frac{x}{\cosh x}=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}xe^{-(2n-1)x}.$$

Kako je $\frac{x}{\sinh x} \sim \frac{2x}{e^x} \sim \frac{2x}{\cosh x}$, kad $x \to +\infty$, to su oba integrala konvergentna (pogledati prethodni zadatak). S obzirom da je nenegativan niz funkcija $x \mapsto xe^{-(2n-1)x}$ $(n = 1, 2, ...)$ integrabilan na $[0, +\infty[$ to je

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(2n-1)x} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Za drugi integral imamo da je

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{\cosh x} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \left(2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} xe^{-(2n-1)x} \right) dx \\ &= 2 \lim_{A \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^A xe^{-(2n-1)x} dx \\ &= 2 \lim_{A \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{Ae^{-(2n-1)A}}{2n-1} - \frac{e^{-(2n-1)A}}{(2n-1)^2} \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Korišćena je kao u zadatku pod a) ravnomerna konvergencija redova

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} xe^{-(2n-1)x}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{Ae^{-(2n-1)A}}{2n-1}, \text{ i } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)A}$$

na skupu $[0, +\infty[$ (Dirihleov kriterijum).

Napomena. Prvi integral je izračunat na osnovu stava:

Neka su članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(x)$ nenegatine i neprekidne funkcije na $[a, b[$ i neka je njegov zbir $f(x)$ na $[a, b[$ integrabilna funkcija. Tada se taj red može integraliti član po član na $[a, b[$, tj. važi

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b c_n(x) \, dx.$$

d) Pošto je

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! \, (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| \le 1,$$

(zadatak 3.51, drugi način), to je

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= -\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+1} t}{\cos t} \cos t dt \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.
\end{aligned}$$

Korišćena je formula za integral $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, činjenica da se funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ može integraliti član po član prema prethodnoj napomeni. S druge strane, smenom $x = \sin y$, $dx = \cos y dy$, sledi

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\sin y)}{\cos y} \cos y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

Dakle, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Zatim je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

tj. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

e) Najpre,

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ 0<\varepsilon<1}} \int_\varepsilon^1 (\arctan x)(\ln x)\, dx,$$

bez obzira, što je zbog

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)(\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} \cdot x\ln x = 1 \cdot 0 = 0,$$

dati integral je Rimanov (0 je znači otklonjiv singularitet).

Dalje je za $x \in [\varepsilon, 1]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ podintegralna funkcija jednaka

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \ln x. \tag{1}$$

Pošto je prema Abelovom kriterijumu red (1) ravnomerno konvergentan $\left(a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, b_n(x) = x^{2n-1} \ln x\right)$, to se može integraliti član po član. Imamo

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \int_{\varepsilon}^{1} x^{2n-1} \ln x dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot I_n(\varepsilon).$$

Nađimo $I_n(\varepsilon)$. Parcijalnim integraljenjem sledi

$$I_n(\varepsilon) = \frac{x^{2n}}{2n} \ln x \Big|_{\varepsilon}^{1} - \frac{1}{2n} \int_{\varepsilon}^{1} x^{2n-1} dx = -\frac{\varepsilon^{2n}}{2n} \ln \varepsilon - \frac{1}{4n^2} + \frac{\varepsilon^{2n}}{4n^2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(-\frac{\varepsilon^{2n}}{2n} \ln \varepsilon - \frac{1}{4n^2} + \frac{\varepsilon^{2n}}{4n^2} \right) \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} (\varepsilon \ln \varepsilon) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)\, 2n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\, n^2} + \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon^{2n}}{(2n-1)\, n^2} \\
&= -0 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)\, 2n} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n-1)\, n^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon^{2n}}{(2n-1)\, n^2} \\
&= 0 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n-1)\, n^2} + 0 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n-1)\, n^2}.
\end{aligned}$$

Koristili smo ravnomernu konvergenciju redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)2n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon^{2n}}{(2n-1)n^2}$ na $[0, 1]$.

f) I način. Lako se dobija da je 0 otklonjiv a 1 stvarni singularitet. Svakako je

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} \int_{\delta}^{1-\varepsilon} \frac{\ln^2(1-x)}{x^2} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} F(\delta, \varepsilon),\ 0 < \delta, \varepsilon < 1$$

i δ, ε teže 0^+ nezavisno jedan od drugog. Dalje je koristeći parcijalno integraljenje

$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{x}\ln^2(1-x)\Big|_\delta^{1-\varepsilon} - 2\int\limits_\delta^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\ln(1-x)\,dx \\
&= -\frac{1}{1-\varepsilon}\ln^2\varepsilon + \frac{1}{\delta}\ln^2(1-\delta) - 2\int\limits_\delta^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-x)}{x}dx - 2\int\limits_\delta^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-x)}{x^2}dx \\
&= -\frac{1}{1-\varepsilon}\ln^2\varepsilon + \frac{1}{\delta}\ln^2(1-\delta) + 2\int\limits_\delta^{1-\varepsilon}\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}dx + \frac{2\ln^2(1-x)}{2}\Big|_\delta^{1-\varepsilon} \\
&= -\frac{1}{1-\varepsilon}\ln^2\varepsilon + \frac{1}{\delta}\ln^2(1-\delta) + \ln^2\varepsilon - \ln^2(1-\delta) + 2\int\limits_\delta^{1-\varepsilon}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx \\
&= \left(1-\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\ln^2\varepsilon + \frac{1}{\delta}\ln^2(1-\delta) - \ln^2(1-\delta) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\int\limits_\delta^{1-\varepsilon}x^{n-1}dx \\
&= -\varepsilon\ln^2\varepsilon + \frac{1}{\delta}\ln^2(1-\delta) - \ln^2(1-\delta) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left((1-\varepsilon)^n - \delta^n\right).
\end{aligned}
$$

Sada je

$$
\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \delta\to 0^+}} F(\delta,\varepsilon) = -0 + 0 - 0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}(1-0) = 2\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.
$$

Koristili smo da se svaki stepeni red može integraliti član po član u intervalu konvergencije kao i da stepeni redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}(1-\varepsilon)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\delta^n$ ravnomerno konvergiraju na $[-1,1]$.

II način. Smenom $x = 1-t$ integral postaje

$$
I = \int\limits_0^1 \frac{\ln^2 t\,dt}{(1-t)^2} = \int\limits_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}\ln^2 t\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\int\limits_0^1 t^{n-1}\ln^2 t\,dt\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} nI_n,
$$

gde je $I_n = \int\limits_0^1 t^{n-1} \ln^2 t dt$. Parcijalnim integraljenjem dobijamo

$$\begin{aligned} I_n &= \left.\frac{t^n \ln^2 t}{n}\right|_0^1 - \frac{2}{n}\int\limits_0^1 t^{n-1}\ln t dt \\ &= \left.\frac{t^n \ln^2 t}{n}\right|_0^1 - \frac{2}{n}\left(\left.\frac{t^n \ln t}{n}\right|_0^1 - \left.\frac{t^n}{n^2}\right|_0^1\right) = \frac{2}{n^3}. \end{aligned}$$

Naravno svaki od izraza $\left.\frac{t^n \ln^2 t}{n}\right|_0^1$, $\left.\frac{t^n \ln t}{n}\right|_0^1$ jednak je 0 kao limes kad $x \to 0^+$.

Onda je $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nI_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

III način. Iz [11], II, zadatak 176 znamo da je

$$\ln^2(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}, |x|<1.$$

Na osnovu toga je

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x^2}dx = \int\limits_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{n-1}\right)dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\int\limits_0^1 x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ako sa S_n označimo parcijalnu sumu poslednjeg reda, imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{k-1}\right)+1-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}+1-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to \frac{\pi^2}{6}-0, \end{aligned}$$

$n \to +\infty$, jer je $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}(C+\ln n+\varepsilon_n)$, C je Ojlerova konstanta a $\varepsilon_n \to 0$ kad $n \to +\infty$. Znači, dati integral je jednak $\frac{\pi^2}{3}$. ▶

Napomena. U poslednja dva načina primenlili smo integraljenje reda član po član na osnovu stava datog u prethodnoj napomeni.

3.53. Data je funkcija $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

a) Razviti funkciju f u stepeni red po x;

b) Sumirati red $7 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

◀ **a)** Izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \ \ |x| < 1$$

jer je

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Uzimanjem integrala uz činjenicu da je $f(0) = 0$, dobija se

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} x^{2n+1}, \ \ |x| < 1.$$

Primenom Rabeovog kriterijuma sledi da dobijeni stepeni red konvergira apsolutno za $|x| \le 1$.

b) Za $x = 1$, dobija se

$$7 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} = 6 + f(1) = 6 + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right). \ \blacktriangleright$$

3.54. Naći granične vrednosti

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$, ako je $f_n(x) = \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{2x^2}}, x \neq 0$ i $f_n(0) = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t} dt$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^{1} \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1} dt$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \cdot \int\limits_1^{2} \sin\frac{1}{nx} dx$.

◀ **a)** Smenom $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{n}{2}} = t$ tj. $x = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}$, $dx = -\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{n}{2}} dt$ dati integral postaje

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} n \cdot \frac{2}{n} \cdot t^2 e^{-t^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} dt = \sqrt{2n} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \to +\infty$$

kad $n \to +\infty$, jer je $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Napomena. S obzirom da je $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$, neka student obrazloži zašto nije tačno sledeće

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^{+\infty} 0 \cdot dx = 0.$$

Koji uslovi teorema iz ([2], II ili [9], II) nisu ispunjeni? Da li $f_n \rightrightarrows 0$?

b) Smenom $2tx = z$ dati integral postaje

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{4x^2}} \sin z}{z} dz$$

koji konvergira ka $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$, kad $x \to +\infty$. Neka student za vežbu pokaže da su ispunjeni zahtevi o podintegralnoj funkciji i samom integralu za promenu redosleda računanja granične vrednosti i integrala ([2], II, Teorema 7.3.1 ili [9], II, Teorema 1.4.XIII).

c) Pošto familija neprekidnih funkcija $\frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1}$ konvergira ravnomerno na segmentu $[0, 1]$ funkciji $f(x) = 0$, to je

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1} dt = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0.$$

Konvergencija je ravnomerna jer je $f_t(x) - f(x) = \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1}$ opadajuća funkcija po t, te je

$$\sup_{0 \le t \le 1} |f_t(x) - f(x)| = e^{-x^2} \to 0,\ x \to +\infty.$$

d) Neka je $a_n(x) = n \sin \frac{1}{nx},\ x \in [1, 2]$. Onda je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n(x) = \frac{1}{x}$ (zašto?). Konvergencija je ravnomerna jer je

$$\sup_{1 \le x \le 2} \left| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| = \max_{1 \le x \le 2} \left| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| = \left| n \sin \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \right|.$$

Zaista, funkcija $x \mapsto n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x}$ je rastuća na $[1, 2]$ jer ima pozitivan izvod: $\frac{2}{x^2} \sin^2 \frac{1}{2nx}$. Dalje je

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{1\le x\le 2} \left| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| n \sin \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 0.$$

Sada je

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_1^2 \sin \frac{1}{nx} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^2 a_n(x)\, dx = \int_1^2 \left(\lim_{n\to+\infty} a_n(x) \right) dx = \ln 2. \ \blacktriangleright$$

3.3 Parametarski integrali

3.55 Odrediti realne brojeve x i y za koje funkcija

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} (t - x \cos t - y \sin 2t)^2\, dt$$

ima minimum.

$\blacktriangleleft$ Funkcija f je određen parametarski integral i može se eksplicitno izraziti preko elementarnih funkcija. Zaista

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} t^2 dt - 2x \int_0^{2\pi} t \cos t dt + x^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - 2y \int_0^{2\pi} t \sin 2t dt \\ &\quad + y^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt + 2xy \int_0^{2\pi} \cos t \sin 2t dt \\ &= \frac{8\pi^3}{3} - 2x \left(t \sin t|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t dt \right) + x^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &\quad - 2y \left(-\frac{t}{2} \cos 2\, t|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos 2t dt \right) + y^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &\quad + 2xy \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 t \sin t dt \\ &= \frac{8\pi^3}{3} + x^2\pi + 2y\pi + y^2\pi = \pi \left(x^2 + (y+1)^2 \right) + \frac{8\pi^3}{3} - \pi. \end{aligned}$$

Dakle, za $x = 0$, $y = -1$ funkcija ima minimum $f_{\min} = \frac{8\pi^3}{3} - \pi$. ▶

3.56 Uz potpuno obrazloženje postupka odrediti vrednost integrala

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(1 + x\sin^2 t\right)}{\sin^2 t} dt, \;\; x \geq 0.$$

◀ Pošto je $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln\left(1+x\sin^2 t\right)}{\sin^2 t} = x$, to nula nije singularitet, te je dati integral Rimanov. Iz neprekidnosti podintegralne funkcije i njenog izvoda po $x : \frac{1}{1+x\sin^2 t}$ na skupu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, +\infty[$ sledi da se može primeniti Lajbnicovo pravilo, odnosno

$$F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + x\sin^2 t} dt.$$

Uzimajući da je $1 = \sin^2 t + \cos^2 t$, smenom $\tan x = z$ dobijeni integral se lako rešava, tj.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+x)\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{(1+x)\tan^2 t + 1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+x)z^2 + 1} = \frac{1}{1+x} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x} \cdot \sqrt{x+1} \cdot \arctan\left(z\sqrt{x+1}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Odakle je $F(x) = \pi\sqrt{x+1} + C$. Iz $F(0) = 0$ sledi $C = -\pi$, te je

$$F(x) = \pi\left(\sqrt{x+1} - 1\right). \;\; ▶$$

3.57 Pokazati da ako $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, to je funkcija $F(x) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} f(x+t)\, dt$ ne samo neprekidna, nego i diferencijabilna na $\mathbb{R}$. Naći izvod funkcije F, i pokazati da $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

◀ Neka je $x \in \mathbb{R}$ fiksiran broj. Smenom $x + t = z$ dobija se

$$F(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(z)\, dz.$$

Kako podintegralna funkcija ne zavisi od parametra, to su ispunjeni svi uslovi za primenu Lajbnicovog pravila kada su granice integrala funkcije parametra ([2], II, Stav 7.1.4 ili [9], II, Teorema 2.2.XIII). Zato je

$$F'(x) = \frac{1}{2a}\left(f(x+a) - f(x-a)\right).$$

Pošto $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sledi da $F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ►

3.58 Ako je $F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$, gde $n \in \mathbb{N}$, a funkcija f je neprekidna na intervalu integraljenja, dokazati da je $F_n^{(n)}(x) = f(x)$.

◄ $F_n(x)$ je svojstven parametarski integral, gde granice (gornja) zavise od partametra x. Pošto su funkcija $(x,t) \mapsto (x-t)^{n-1} f(t)$ i njen izvod po x neprekidne, to se može primeniti Lajbnicovo pravilo $n-$puta (posle svakog koraka ispunjeni su uslovi za ponovno diferenciranje), tj.

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= (x-x)^{n-1} f(x)\cdot 1 - x^{n-1} f(0)\cdot 0 + \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-2} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-2} f(t)\,dt, \text{ i slično} \end{aligned}$$

$$F_n''(x) = \frac{1}{(n-3)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-3} f(t)\,dt, ..., F_n^{(n)}(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt,$$

odakle sledi $F_n^{(n)}(x) = f(x)$. Treba uočiti pravilnost dobijanja svakog sledećeg izvoda. ►

3.59 Ako je

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\left(1 - x^{\frac{1}{y}}\right) x^{\frac{1}{y}},\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ y \in \left]0,1\right]$$

dokazati da je $\lim\limits_{y\to 0^+}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x,y)\,dx \neq \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\lim\limits_{y\to 0^+} f(x,y)\right)dx$.

◄ Najpre je

$$L(y) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y}\left(1 - x^{\frac{1}{y}}\right) x^{\frac{1}{y}}\,dx = \frac{1}{y}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\frac{1}{y}}\,dx - \frac{1}{y}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\frac{2}{y}}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{y}\cdot\left.\frac{x^{\frac{1}{y}+1}}{\frac{1}{y}+1}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{y}\cdot\left.\frac{x^{\frac{2}{y}+1}}{\frac{2}{y}+1}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2}\\
&\quad +\frac{1}{y+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{y}+1} - \frac{1}{y+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{y}+1}\\
&\to 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0 - 1\cdot 0 = \frac{1}{2},\ y\to 0^{+}.
\end{aligned}$$

S druge strane je

$$\begin{aligned}
D &= \lim_{y\to 0^{+}}\frac{1}{y}\left(1-x^{\frac{1}{y}}\right)x^{\frac{1}{y}} = \lim_{t\to+\infty} tx^{t} - \lim_{t\to+\infty} tx^{2t}\\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{z^{t}} - \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{z^{2t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{z^{t}\ln z} - \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{z^{2t}2\ln z} = 0-0=0.
\end{aligned}$$

$(x=\frac{1}{z},\ z>1,\ \frac{1}{y}=t,\ t\to+\infty)$. Dakle, leva strana je različita od desne. ►

3.60 Dokazati da je integral $I(y)=\int\limits_0^1 sgn\,(x-y)\,dx$ prekidne funkcije $x\mapsto sgn\,(x-y)$ neprekidna funkcija od $y\in\mathbb{R}$.

◄ $I(y)$ se može dobiti u eksplicitnom obliku. Zaista, za $y\le 0$, $I(y)=\int\limits_0^1 1\cdot dx=1$. Ako je $y\ge 1$, $I(y)=\int\limits_0^1(-1)\cdot dx=-1$. Ako je $0<y<1$, onda se smenom $y-x=t$, $dx=dt$, $I(y)$ svodi na oblik:

$$\begin{aligned}
I(y) &= \int\limits_{-y}^{1-y} sgnt dt = \int\limits_{-y}^{0} sgnt dt + \int\limits_{0}^{1-y} sgnt dt\\
&= -\left.t\right|_{-y}^{0} + \left.t\right|_{0}^{1-y} = -y+1-y = 1-2y.
\end{aligned}$$

Dakle, za sve $y\in\mathbb{R}$ je

$$I(y)=\begin{cases} -1,\ y\ge 1,\\ 1-2y,\ 0<y<1,\\ 1,\ y\le 0,\end{cases}$$

odakle sledi neprekidnost funkcije $I(y)$. ►

3.61. Diferenciranjem po parametru izračunati integral

$$I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x},$$

ako je $|a| < 1$.

◀ Funkcija

$$f(x,a) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 2a, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

i njen izvod po parametru a

$$f'_a(x,a) = \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$$

su neprekidne funkcije na pravougaoniku $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, gde je ε fiksiran broj iz $[0,1[$. Zato je za $a \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ dozvoljeno diferenciranje pod integralom, tj

$$I'(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}.$$

Smenom $\tan x = t$ dobijamo da je $I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tj. $I(a) = \pi \arcsin a + C$. Pošto je $I(0) = 0$, to je $C = 0$. Znači polazni integral iznosi $\pi \arcsin a$. ▶

3.62 Obrazložiti postupak izračunavanja integrala

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a\cos x)}{\cos x} dx, \; a \in \mathbb{R}.$$

◀ Najpre je za $a \neq 0$

$$f(x,a) = \begin{cases} \frac{\arctan(a\cos x)}{\cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dakle, funkcija f je neprekidna na skupu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$. Zatim je

$$f_a(x,a) = \begin{cases} \frac{1}{1+a^2\cos^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

tj. f_a je takođe neprekidna na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$. Zato je dozvoljeno diferenciranje pod integralom, tj.

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+a^2)\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 + a^2 + \tan^2 x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + a^2 + t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \arctan \frac{t}{\sqrt{a^2+1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}}.$$

Sada je $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) + C$, tj. $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$ jer je $I(0) = 0$. ►

Napomena. Polazna funkcija $a \mapsto I(a)$ je očigledno neparna. Neka student to pokaže koristeći rešeni oblik.

3.63 a) Izračunati parametarski integral

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x\right) dx, \ \alpha > 0, \ \beta > 0;$$

b) Koristeći rezultat pod **a)** izračunati

$$K_1(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}, \ K_2(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x\right)^2}.$$

◄ **a)** Pošto su α, β pozitivni brojevi a $\sin x$ i $\cos x$ nisu istovremeno jednaki nuli, to je funkcija $f(x, \alpha, \beta) = \ln\left(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x\right)$ neprekidna na skupu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Smatrajući da je $\beta > 0$ fiksirano, onda se može reći da je funkcija $f(x, \alpha) = \ln\left(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x\right)$ neprekidna na skupu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}^+$. Takva je i funkcija

$$f_\alpha(x, \alpha) = \frac{2\alpha \cos^2 x}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}$$

na istom skupu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}^+$. Zato je

$$I_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha \cos^2 x}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x} dx$$

gde je $I(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x\right) dx$, $\alpha > 0$, β fiksiran pozitivan broj. Dalje je

$$I_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha dx}{\alpha^2 + \beta^2 \tan^2 x} = \frac{2\alpha}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(k^2 + t^2)(1 + t^2)}, \ k = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Zatim je

$$\begin{aligned}
I_\alpha(\alpha,\beta) &= \frac{2\alpha}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-k^2}\cdot\frac{1}{k^2+t^2}+\frac{1}{k^2-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\
&= \frac{2\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1-k^2}\cdot\frac{1}{k}\arctan\frac{t}{k}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{k^2-1}\cdot\arctan t|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{\alpha+\beta},\ \text{za } \alpha\neq\beta,
\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa $k\neq 1$. Ako je $\alpha=\beta$ $(k=1)$ to je

$$I_\alpha(\alpha,\beta)=\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\alpha}.$$

$$\text{Znači } I_\alpha(\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\pi}{\alpha+\beta}, & \alpha\neq\beta,\\ \frac{\pi}{2\alpha}, & \alpha=\beta.\end{cases}$$

Odatle je $I(\alpha,\beta)=\pi\ln(\alpha+\beta)+C$. Uzimajući da je $\alpha=\beta$ (β je fiksirano) sledi

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\alpha^2dx=2(\ln\alpha)\frac{\pi}{2},\ \text{tj. } 2\cdot\frac{\pi}{2}\ln\alpha=\pi\ln 2\alpha+C,$$

odakle se dobija da je $C=-\pi\ln 2$. Konačno je $I(\alpha,\beta)=\pi\ln\frac{\alpha+\beta}{2}$.

b)

$$\begin{aligned}
K_1(\alpha,\beta) &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x}=\frac{1}{2\alpha}I_\alpha(\alpha,\beta)+\frac{1}{2\beta}I_\beta(\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{\pi}{\alpha+\beta}+\frac{1}{2\beta}\cdot\frac{\pi}{\alpha+\beta}=\frac{\pi}{2\alpha\beta}, \\
K_2(\alpha,\beta) &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos^2x+\sin^2x\right)dx}{\left(\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x\right)^2} \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2xdx}{\left(\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x\right)^2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2xdx}{\left(\alpha^2\cos^2x+\beta^2\sin^2x\right)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\left(\alpha^2+\beta^2\tan^2 x\right)^2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}dx}{\left(\alpha^2\cot^2 x+\beta^2\right)^2} \\
&= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\alpha^2+\beta^2 t^2\right)^2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{\left(\alpha^2 z^2+\beta^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{\alpha^4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+k_1^2 t^2\right)^2} + \frac{1}{\beta^4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{\left(1+k_2^2 z^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{\alpha^4 k_1}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(1+y^2\right)^2} + \frac{1}{\beta^4 k_2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(1+y^2\right)^2} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha^3\beta}+\frac{1}{\alpha\beta^3}\right)\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(1+y^2\right)^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3\beta^3}\cdot\frac{\pi}{4}. \ \blacktriangleright
\end{aligned}
$$

3.64 Ispitati promenu redosleda integraljenja u uzastopnim integralima:

a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^1 \frac{\tan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dx$; **b)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dx$; **c)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$;

d) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$; **e)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$, $(a>b>0)$;

f) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}dx$; **g)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4}-\frac{2x^3}{y^3}\right)e^{-\frac{x^2}{y}}dx$.

h) $\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_a^b e^{-yx}dx, (y>0)$; **i)** $\int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x}dx, (y>0)$;

j) $\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_0^1 \left(pe^{-pxy}-qe^{-qxy}\right)dx, (p>0,\ q>0,\ p\neq q)$.

◀ **a)** Pošto je funkcija $(x,y)\mapsto \frac{\tan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ neprekidna na pravougaoniku $[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ to je promena redosleda integraljenja dozvoljena, tj.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{\int\limits_0^1 \frac{\tan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dx\right\}dy &= \int\limits_0^1 \left\{\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dy\right\}dx \\
&= \iint\limits_G \frac{\tan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dxdy,
\end{aligned}
$$

gde je $G=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

b) Podintegralna funkcija $(x,y)\mapsto \frac{\cos(xy)}{x+y}$ je pozitivna i neprekidna na skupu $]0,1]\times]0,1]$. Dvojni integral $\iint\limits_G \frac{\cos(xy)}{x+y}dxdy$, $G=[0,1]\times[0,1]$ je konvergentan, ako je integral $\iint\limits_K \frac{\cos(xy)}{x+y}dxdy$ konvergentan, gde je K deo jediničnog kruga u prvom kvadrantu. Prelaskom na polarne koordinate imamo

$$\iint\limits_K \frac{\cos(xy)}{x+y}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_r^1 \frac{\cos\left(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\right)}{\rho\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)}\rho d\rho$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_r^1 \frac{\cos\left(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\right)}{\cos\varphi+\sin\varphi}d\rho < \int\limits_r^1 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi} < +\infty \ \ (0<r<1)\,.$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_G \frac{\cos(xy)}{x+y}dxdy = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^1\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dxdy \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \left\{\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dy\right\}dx = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \left\{\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dx\right\}dy. \end{aligned}$$

Nizovi funkcija

$$f_n(x) = \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dy \ \text{i}\ f_n(y) = \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dx$$

ravnomerno konvergiraju ka funkcijama

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dy \ \text{i}\ f(y) = \int\limits_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dx$$

prema Dinijevom kriterijumu. Zato je

$$\iint\limits_G \frac{\cos(xy)}{x+y}dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y}dx,$$

tj. promena redosleda integraljenja je dozvoljena.

c) Primetimo da je funkcija $(\varphi, k) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$ neprekidna i pozitivna na skupu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\times [0,1[$. Zatim, funkcije

$$I(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \text{ i } J(\varphi) = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

su neprekidne, prva na $[0,1[$, a druga na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right\} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin \varphi} d\varphi$$

postoji (smena $t = k \sin \varphi$), te prema ([2], II, Teorema 7.3.5 ili [9], II, XIII, Teorema 3. Posledica) postoji i integral $\int_0^1 I(k)\, dk$ i važi njihova jednakost, tj.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 dk \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

odnosno, dozvoljena je promena redosleda integraljenja.

d) Podintegralna funkcija i parametarski integrali

$$x \mapsto \int_0^1 f(x,y)\, dy \text{ i } y \mapsto \int_0^1 f(x,y)\, dx$$

zadovoljavaju uslove iz ([2], II i [9], II). Pošto integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\, dt}{\left(1+y^2 \sin^2 t\right) \cos t} \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2 \sin^2 t} \right\} dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

postoji, to je dozvoljena promena redosleda integraljenja.

e) Kako je

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x} \right\} dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2 - b^2 y^2}} dy = \frac{\pi}{2ab} \arcsin \frac{b}{a},$$

to je iz istih razloga kao u slučajevima c) i d) dozvoljena pomena redosleda integraljenja.

f) Lako se dobija da je

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{1-x}{(x+y)^3} dx \right\} dy = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{1-x}{(x+y)^3} dy \right\} dx,$$

tj. promena redosleda integraljenja nije moguća.

g) Računanjem redom integrala dobijamo

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x,y)\, dx \right\} dy = -\frac{1}{e} \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x,y)\, dy \right\} dx,$$

tj. promena redosleda itegraljenja nije moguća.

h) Funkcija $f : (x,y) \mapsto e^{-xy}$ je pozitivna i neprekidna na skupu $[a,b] \times]0,+\infty[$. Integrali $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy$ i $y \mapsto \int_a^b e^{-xy} dx$ su takođe pozitivne i neprekidne funkcije, prva na $[a,b]$, a druga na $]0,+\infty[$. Promena redosleda integraljenja je moguća, tj. uzastopni integrali

$$\int_0^{+\infty} dy \int_a^b f(x,y)\, dx \text{ i } \int_a^b dx \int_0^{+\infty} f(x,y)\, dy$$

su jednaki ako bar jedan od njih postoji. Kako je

$$\int_a^b \left\{ \int_0^{+\infty} f(x,y)\, dy \right\} dx = \int_a^b \left(-\frac{e^{-xy}}{x} \Big|_0^{+\infty} \right) dx = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a},$$

to drugi integral postoji, znači promena redosleda integraljenja je moguća.

i) Kako je

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{\sin yx}{x} dy = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{\cos yx}{x^2} \Big|_a^b \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos ax - \cos bx)\, dx}{x^2} = \frac{\pi(b-a)}{2}$$

to je iz istog razloga kao u prethodnom primeru moguća promena redosleda integraljenja.

j) Pažljivim računom imamo

$$\int_0^1 dx \int_1^{+\infty} \left(pe^{-pxy} - qe^{-qxy}\right) dy - \int_1^{+\infty} dy \int_0^1 \left(pe^{-pxy} - qe^{-qxy}\right) dxdy = \ln \frac{p}{q} \neq 0,$$

znači promena redosleda integraljenja nije moguća. ▶

3.65 Dokazati da integral

$$I\left(y\right) = \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx$$

konvergira ravnomerno po y na celoj brojnoj pravoj.

◀ Najpre je

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx &= \int \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+y^2} - \int \frac{2x \cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{y} \arctan \frac{x}{y} - \left(-\frac{x}{x^2+y^2} + \int \frac{dx}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + C. \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran broj. Treba pokazati da postoji $A = A\left(\varepsilon\right)$ tako da za $B > A$ i sve $y \in \mathbb{R}$ važi:

$$\left| \int_B^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx \right| < \varepsilon.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \left| \int_B^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx \right| &= \left| \lim_{N \to +\infty} \int_B^{N} \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx \right| = \left| \lim_{N \to +\infty} \left. \frac{x}{x^2+y^2} \right|_B^N \right| \\ &= \left| -\frac{B}{B^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{B} < \frac{1}{A} = \varepsilon \end{aligned}$$

odakle sledi da je $A\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon}$. Ovo znači da dati integral ravnomerno konvergira na $\mathbb{R}$. ▶

3.66 Pokazati da svaki od integrala

$$I\left(x\right) = \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dy, \;\; I\left(y\right) = \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)} dx,$$

gde su α i β fiksirani pozitivni brojevi, konvergira ravnomerno na skupu $[0,+\infty[$.

◀ Za "ostatak" integrala $I(x)$ je

$$0 \le \int_B^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dy = \int_B^{+\infty} (xy)^\alpha e^{-(xy)} y^{\beta+1} e^{-y} dy < M_\alpha \int_B^{+\infty} y^{\beta+1} e^{-y} dy$$

gde je $M_\alpha = \max\limits_{0\le u\le+\infty} u^\alpha e^{-u}, (u = xy)$. Pošto integral $\int\limits_0^{+\infty} y^{\beta+1} e^{-y} dy$ konvergira (zašto?) to se njegov "ostatak" $\int\limits_B^{+\infty} y^{\beta+1} e^{-y} dy$ može učiniti manjim od unapred zadatog pozitivnog broja ε, ako je B dovoljno veliko. To znači da je parametarski integral $I(x)$ ravnomerno konvergentan. Za "ostatak" integrala $I(y)$ se dobija

$$0 \le \int_B^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dy = y^\beta e^{-y} \int_B^{+\infty} (xy)^\alpha e^{-(xy)} d(xy) < y^\beta e^{-y} \int_{By}^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du.$$

Kako je za $y \ge 0$

$$\int_{By}^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \le \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du < +\infty$$

i $y^\beta e^{-y} \to 0$, kad $y \to 0^+$, onda za svako $\varepsilon > 0$, postoji $y_0 > 0$, takvo da je za sve $y \in [0, y_0]$ i za sve $B \in [0,+\infty[$: $\int\limits_B^{+\infty} f(x,y)\,dx < \varepsilon$. Ako je $y \ge y_0 > 0$ onda zbog $M_\beta = \max\limits_{0\le y<+\infty} y^\beta e^{-y} < +\infty$ važi

$$0 \le \int_{By}^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \le \int_{By_0}^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \to 0$$

kad $B \to +\infty$, tj. sledi da je za dovoljno velikoe vrednosti $B \in [0,+\infty[$ i za $y \ge y_0 > 0$, "ostatak" integrala $I(y)$ manji od ε.

Objedinjujući oba slučaja $([0,y_0], [y_0,+\infty[)$ sledi da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $A = A(\varepsilon)$ takvo da je za svako $y \ge 0$ i za svako $B > A(\varepsilon)$ "ostatak" $\int\limits_B^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dx$ integrala $I(y)$ manji od ε. ▶

3.67 Ispitati neprekidnost sledećih funkcija u navedenim razmacima:

a) $y \mapsto \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{y}{y+1} \cdot \arctan(xy)\, dx,\ y > 0;$

b) $y \mapsto \int\limits_1^{+\infty} x \cdot \frac{\cos\left(x^2+y\right)}{x+y} dx,\ y > 0;$ **c)** $y \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+y)^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+1} dx, 1 \le y \le 2;$

d) $y \mapsto \int\limits_0^{1} \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+y}} dx,\ y \ge 1;$ **e)** $y \mapsto \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy^2} dx,\ y \in \mathbb{R};$

f) $y \mapsto \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx,\ y \in \mathbb{R}.$

Napomena. Parametarski integral $\int\limits_a^b f(x,y)\, dx,\ y \in [c,d]$ je neprekidna funkcija ako je podintegralna funkcija neprekidna na skupu $[a,b[\times [c,d]$ (b je singularitet), a integral ravnomerno konvergira.

◀ **a)** Dati parametarski integral je ravnomerno konvergentan na osnovu Abelovog kriterijuma. Stvarno, integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ je konvergentan, a funkcija $x \mapsto \frac{y}{y+1} \arctan(xy)$ je ograničena i monotona po x. Dakle, data funkcija je neprekidna na skupu $]0,+\infty[$.

b) Na osnovu Dirihleovog kriterijuma, sledi da su integrali

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x+y} \cos x^2 \cos y dx \text{ i } \int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x+y} \sin x^2 \sin y dx$$

ravnomerno konvergentni. Oni su i neprekidne funkcije jer su podintegralne funkcije neprekidne na skupu $[1,+\infty[\times]0,+\infty[$.

c) Kako je

$$0 < \frac{e^{-(x+y)^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+1} \le e^{-(x+y)^2}$$

to je funkcija neprekidna na $[1,2]$ jer je parametarski integral ravnomerno konvergentan (Vajerštrasov kriterijum), a podintegralna funkcija neprekidna na skupu $[0,+\infty[\times [1,2]$.

d) Kako je

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+y}} dx &= \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x+y}} dx + \ln y \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+y}} \\ &= \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x+y}} dx + 2(\ln y)\left.\sqrt{x+y}\right|_0^1\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x+y}} dx + 2\left(\sqrt{1+y} - \sqrt{y}\right) \ln y,$$

to je dovoljno ispitati neprekidnost funkcije $I(y) = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x+y}} dx$. Smenom $x = \frac{1}{t}$ poslednji integral postaje

$$I(y) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t^3 + t^4 y}} dy.$$

On ravnomerno konvergira na skupu $[1, +\infty[$ prema Vajerštrasovom kriterijumu, jer je

$$0 \le \frac{\ln t}{\sqrt{t^3 + t^4 y}} < \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{2}}}$$

i integral $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ konvergira. Zbog neprekidnosti podintegralne funkcije $(t, y) \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t^3(1+ty)}}$ na skupu $[1, +\infty[\times [1, +\infty[$ imamo neprekidnost funkcije $I(y)$, a samim tim i neprekidnost polazne funkcije.

e) Neka je $y \neq 0$. Tada je

$$\int_0^{+\infty} y e^{-xy^2} dx = y \cdot -\frac{1}{y^2} e^{-xy^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y},$$

odakle dobijamo da je

$$\int_0^{+\infty} y e^{-xy^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Znači, data funkcija je neprekidna za $y \neq 0$, a u nuli ima prekid druge vrste.

f) Smenom $x - y = t$ dati integral postaje funkcija donje granice, tj.

$$I(y) = \int_{-y}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-y}^{0} e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-y}^{0} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Funkcija $I(y)$ je diferencijabilna za sve $y \in \mathbb{R}$, $I'(y) = e^{-y^2}$, i kao takva je neprekidna. ▶

3.68 I) Neka je

$$I(a)=\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}}dx.$$

a) Ispitati konvergenciju integrala $I(a)$;

b) Ispitati ravnomernu konvergenciju integrala $\int\limits_{3}^{+\infty} f_a(x,a)\,dx$ gde je $f(x,a)$ podintegralna funkcija od $I(a)$.

II) Funkcije $F(x)$ i $G(x)$ definisane su za svako realno x na sledeći način:

$$F(x)=\left(\int\limits_{0}^{x}e^{-t^2}dt\right)^2, G(x)=-\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1}.$$

a) Uz obrazloženje postupka, dokazati da za svako realno x važi $F'(x)=G'(x)$, te odatle izvesti jednakost $F(x)=\frac{\pi}{4}+G(x)$;

b) Na osnovu a), izračunati $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt$.

◀ **I) a)** Najpre imamo da je

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-3)(x-2)(x-1).$$

Zatim je $I(a)=\int\limits_{3}^{4}+\int\limits_{4}^{+\infty}$ jer su tačke 3 i $+\infty$ singulariteti. Kad $x\to 3^+$ imamo da je

$$f(x)=\frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}}\sim\frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{\sqrt{2}\sqrt{x-3}},$$

odakle sledi da prvi integral konvegira. Kad $x\to+\infty$ imamo da je $f(x)\sim\frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{x^{\frac{3}{2}}}$. Kako je

$$\begin{aligned}\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{x^{\frac{3}{2}}}dx &= -\frac{2}{\sqrt{x}}\ln\left(a^2+x^2\right)\Big|_4^{+\infty}+2\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{2xdx}{\left(a^2+x^2\right)\sqrt{x}}\\ &= \ln\left(a^2+16\right)+4\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{a^2+x^2}dx\end{aligned}$$

to integral $\int\limits_4^{+\infty} f(x,a)\,dx$ konvergira (za svako $a \in \mathbb{R}$). Zaista, integral $\int\limits_4^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{a^2+x^2}dx$ konvergira, jer je $\frac{\sqrt{x}}{a^2+x^2} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ kad $x \to +\infty$ i $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergira. Znači, $I(a)$ je konvergentan integral za svako $a \in \mathbb{R}$.

b) Treba ispitati ravnomernu konvergenciju integrala

$$\int\limits_3^{+\infty} f_a(x,a)\,dx = \int\limits_3^{+\infty} \frac{2a}{(a^2+x^2)\sqrt{(x-3)(x-2)(x-1)}}dx.$$

Pošto je

$$\begin{aligned} |f_a(x,a)| &= \left|\frac{2a}{(a^2+x^2)\sqrt{(x-3)(x-2)(x-1)}}\right| \\ &= \left|\frac{1}{x}\cdot\frac{2ax}{(a^2+x^2)\sqrt{(x-3)(x-2)(x-1)}}\right| \\ &= \frac{1}{x}\cdot\frac{|2ax|}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-3)(x-2)(x-1)}} \le \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

jer je $\frac{|2ax|}{a^2+x^2} \le 1$ i $\frac{1}{\sqrt{(x-3)(x-2)(x-1)}} \le \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ zbog $x > 3$, to prema Vajerštrasovom kriterijumu dati integral $\int\limits_3^{+\infty} f_a(x,a)\,dx$ ravnomerno konvergira po a na celom $\mathbb{R}$.

II. a)

$$F'(x) = 2e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcije

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1} \text{ i } \varphi'_x(x,t) = -2xe^{-x^2\left(t^2+1\right)}$$

su neprekidne na skupu $[0,1]\times\mathbb{R}$, te $G'(x)$ se može naći diferenciranjem po parametru:

$$G'(x) = 2x\int\limits_0^1 e^{-x^2\left(t^2+1\right)}dt = 2e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{-u^2}du,\ x \in \mathbb{R}.$$

Iz $F'(x) = G'(x)$ sledi $F(x) = G(x) + C$, $x \in \mathbb{R}$, C je konstanta. Kako je $F(0) = 0$, $G(0) = -\frac{\pi}{4}$, to je $C = \frac{\pi}{4}$, odnosno, $F(x) = \frac{\pi}{4} + G(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Kako je

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2, \quad \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0,$$

jer je

$$0 \le G(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2t^2}}{t^2+1} dt \le e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt,$$

sledi da je $\frac{\pi}{4} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2$ tj. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ►

3.69. Ako je

$$\varphi(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)} dx, \ a > 0,$$

dokazati da funkcija φ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\varphi''(y) - a^2\varphi(y) = -\frac{\pi}{2}$$

i izvesti odatle da je $\varphi(y) = \frac{\pi}{2a^2}\left(1 - e^{-ay}\right)$ za $y > 0$.

◄ Formalnim diferenciranjem po y dva puta dobija se

$$\varphi'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+x^2} dx, \ \varphi''(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2+x^2} dx.$$

Kako su integrali $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+x^2} dx$ i $-\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2+x^2} dx$ za $y \ge y_0 > 0$, ravnomerno konvergentni po Vajerštrasovom i Dirihleovom kriterijumu, $\varphi(y)$ konvergentan integral, a podintegralne funkcije neprekidne na skupu $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ to je diferenciranje pod integralom dozvoljeno. Zamenjivanjem se dobija

$$\begin{aligned}
\varphi''(y) - a^2\varphi(y) &= -\int_0^{+\infty} \frac{x\sin xy}{a^2+x^2} dx - a^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)} dx \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{x^2\sin xy}{x(a^2+x^2)} dx - a^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)} dx \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = -\frac{\pi}{2} sgn y = -\frac{\pi}{2}, \ \text{za } y > 0.
\end{aligned}$$

Rešavajem nehomogene diferencijalne jednačine

$$\varphi''(y) - a^2\varphi(y) = -\frac{\pi}{2}$$

(sa konstantnim koeficijentima) uz uslov da je $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \frac{\pi}{2a}$, sledi $\varphi(y) = \frac{\pi}{2a^2}\left(1 - e^{-ay}\right), \ y > 0.$ ►

3.70. Dokazati da sledeća dva Laplasova integrala imaju navedene vrednosti:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ay}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2 + x^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-ay}, \ a, \ y > 0.$$

◄ Kako je $\varphi''(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2+x^2} dx$ to je

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2 + x^2} dx = a^2\varphi(y) - \frac{\pi}{2} = a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^2}\left(1 - e^{-ay}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} e^{-ay}.$$

Iz $\varphi''(y) = -\frac{\pi}{2} e^{-ay}$ je $\varphi'(y) = \frac{\pi}{2a} e^{-ay} + C$. Pošto je $\varphi'(0) = \frac{\pi}{2a}$, to je $C = 0$, dakle

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + x^2} dx = \varphi'(y) = \frac{\pi}{2a} e^{-ay}.$$

Ponovnim diferenciranjem se dobija i druga jednakost, jer integral $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2+x^2} dx$, $y \geq y_0 > 0$, ravnomerno konvergira, te je dozvoljeno diferenciranje pod integralom. ►

3.71 Koristeći jednakost $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (ili na neki drugi način) izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} dx.$$

◄ Uzimajući da je $u = \cos 2x - \cos x, dv = \frac{1}{x^2} dx$ dobija se

$$I = -\frac{1}{x}\left(\cos 2x - \cos x\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - 2\sin 2x}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos 2-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos 2x-\cos x}{x}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-2\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx\\
&= 0+\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin 2x+\sin x}{1}+\frac{\pi}{2}sgn1-2\cdot\frac{\pi}{2}sgn2=-\frac{\pi}{2}.\ \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Izračunati parametarske integrale:

3.72 $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx,\ a>0,\ b>0.$

◀ Pošto je

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2axe^{-a^2x}+2bxe^{-bx^2}}{2x}=b-a,$$

to nula nije singularitet. Iz predstavljanja $\int\limits_0^{+\infty}=\int\limits_0^{1}+\int\limits_1^{+\infty}$ i činjenice da je $\left|\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ sledi da integral konvergira. Neka je

$$I(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx,\ \ a>0,\ \ b>0.$$

S obzirom da integral

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(-e^{-ax^2}\right)dx=-\int\limits_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{a}x)^2}\frac{d\left(\sqrt{a}x\right)}{\sqrt{a}}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$$

ravnomerno konvergira na skupu $[\varepsilon,+\infty[\,,\varepsilon>0$ i da su funkcije

$$(x,a)\mapsto\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\ \text{ i }\ (x,a)\mapsto -e^{-ax^2}$$

neprekidne na $[0,+\infty[\times[\varepsilon,+\infty[$ (prva dodefinisana u nuli) to je dozvoljeno diferenciranje pod integralom, tj.

$$I'(a)=-\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx,\ \ a\ge\varepsilon>0,$$

odakle je $I(a)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}+\varphi(b)$. Iz $I(b)=0$, sledi $\varphi(b)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}$. Dakle,

$$I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right),\ \ a\ge\varepsilon>0.$$

Kako je ε proizvoljan pozitivan broj, to je dobijena vrednost integrala tačna za sve pozitivne vrednosti brojeva a i b. ▶

3.73 $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha t}{t(1+t^2)} dt,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

◀ Najpre je $I(0) = 0$ i $I(-\alpha) = -I(\alpha)$ ako $I(\alpha)$ postoji. Pošto je

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan \alpha t}{t(1+t^2)} = \lim_{t\to 0^+} \alpha \cdot \frac{\arctan \alpha t}{\alpha t} \cdot \frac{1}{1+t^2} = \alpha$$

to nula nije singularitet. Iz relacije $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$ i procene $\frac{\arctan \alpha t}{t(1+t^2)} \le \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ za $t \ge 1$, sledi da je polazni integral konvergentan ($\int\limits_0^1$ je Rimanov integral, a $\int\limits_1^{+\infty}$ konvergira prema Vajerštrasovom kriterijumu). Pošto su funkcije

$$(t,\alpha) \mapsto \frac{\arctan \alpha t}{t(1+t^2)} \text{ i } (t,\alpha) \mapsto \frac{1}{(1+\alpha^2 t^2)(1+t^2)}$$

neprekidne na skupu $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$ (prva dodefinisana u tački $t = 0$) i kako integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)}$ ravnomerno konvergira prema Vajerštrasovom kriterijumu, jer je $\frac{1}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)} \le \frac{1}{1+t^2}$ i integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ konvergira, to je dozvoljeno diferenciranje pod integralom i

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)},\ \alpha \ge 0.$$

Iz predstavljanja podintegralne funkcije u obliku

$$\frac{A}{1+\alpha^2t^2} + \frac{B}{1+t^2}$$

sledi $A = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$, $B = \frac{1}{1-\alpha^2}$, $\alpha \ne 1$, i dobija se

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\alpha^2t^2} + \frac{1}{1-\alpha^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \cdot \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(\alpha t)}{1+(\alpha t)^2} + \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(\alpha+1)},\ \alpha \ne 0, 1. \end{aligned}$$

Kako je

$$I'(1) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4} \text{ i } I'(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

to je $I'(\alpha)$ neprekidna funkcija na skupu $[0, +\infty[$ i na tom skupu je $I'(\alpha) = \frac{\pi}{2(\alpha+1)}$. Znači, za $\alpha \geq 0$ je $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1) + C$. Iz $I(0) = 0$ sledi $C = 0$. Dakle, za $\alpha \geq 0$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1).$$

Zbog neparnosti funkcije $\alpha \mapsto I(\alpha)$ dobija se formula za $I(\alpha)$ za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ u obliku

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(sgn\alpha)\ln(|\alpha|+1). \ \blacktriangleright$$

3.74 $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx, \ \alpha \geq 0.$

◀ **Prvi način.** Očigledno je $I(0) = 0$. Funkcije

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}, \ x \neq 0, \\ \alpha, \ x = 0, \end{cases} \quad \text{i } f'_\alpha(x,\alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha x^2}, \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0, \end{cases}$$

su neprekidne na skupu $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Iz predstavljanja $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$, sledi konvergencija integrala. Prvi je Rimanov, a drugi konvergentan integral po Vajerštrasovom kriterijumu, jer je $0 < f(x,\alpha) \leq \frac{1}{x^2}$. Neka je sada $\varepsilon > 0$ fiksiran broj. Onda integral $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ ravnomerno konvergira na skupu $[\varepsilon, +\infty[$ po Vajerštrasovom kriterijumu ($e^{-\alpha x^2} \leq e^{-\varepsilon x^2}$) i zato je dozvoljeno diferenciranje pod integralom. Znači

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2} \frac{d(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \ \alpha \geq \varepsilon.$$

Odatle je $I(\alpha) = \sqrt{\pi\alpha} + C$, za $\alpha \geq \varepsilon > 0$. Iz proizvoljnosti broja ε sledi da je $I(\alpha) = \sqrt{\pi\alpha} + C$ za sve $\alpha > 0$. Odatle je $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} \sqrt{\pi\alpha} + C = C$. Ali zbog

$$I(\alpha) = \sqrt{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-(x\sqrt{\alpha})^2}}{(x\sqrt{\alpha})^2} d(x\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt \to 0,$$

kad $\alpha \to 0^+$, jer je integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt$ konvergentan. Znači $C = 0$.

Napomena. Neka student pokaže da integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ nije ravnomerno konvergentan na skupu $]0, +\infty[$.

Drugi način. Parcijalnim integraljenjem se dobija

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\frac{1}{x}\left(1-e^{-\alpha x^2}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(2\alpha x e^{-\alpha x^2}\right) dx \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1-e^{-\alpha x^2}\right) - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(1-e^{-\alpha x^2}\right) + 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= 0 - 0 + 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2} \frac{d(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}} = 2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\alpha\pi}. \end{aligned}$$

Korišćen je Ojler-Poasonov integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ►

3.75 $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin\alpha x dx$.

◄ Ako se pođe od parametarskog integrala $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos\alpha x dx$ koji je ravnomerno konvergentan prema Vajerštrasovom kriterijumu:

$$\left|e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos\alpha x\right| \le e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ i } \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)^2} d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

to je $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin\alpha x dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} I'(\alpha)$ s jedne strane (gde je $I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin\alpha x dx$ takođe ravnomerno konvergentan po Vajerštrasovom kriterijumu:

$$\left|x e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin\alpha x\right| \le x e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

i $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ konvergira), i

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin\alpha x dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\sin\alpha x\right)\Big|_0^{+\infty} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x dx = \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}} I(\alpha)$$

s druge strane. Znači $\alpha \cdot I(\alpha) = -I'(\alpha)$, tj. $\frac{dI}{I} = -\alpha d\alpha$, odakle je

$$I(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}},$$

jer je $I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Dakle,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\alpha x dx = \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}}. \ \blacktriangleright$$

3.76 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos\alpha x dx.$

◀ Izvod prethodnog integrala po α je traženi integral. Zato je

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos\alpha x dx = \left(\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)'_\alpha = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - \alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left(1-\alpha^2\right).$$

Treba jedino pokazati da integral $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos\alpha x dx$ ravnomerno konvergira. Kako je $\left|x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos\alpha x dx\right| \le x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}$, a integral $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ konvergira (parcijalno integraljenje) to integral $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos\alpha x dx$ ravnomerno konvergira. ▶

3.77 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\alpha x dx.$

◀ Traženi integral jednak izvodu prethodnog integrala sa suprotnim znakom. Integral ravnomerno konvergira jer je $\left|x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\alpha x\right| \le x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}$, a integral $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ konvergira ($xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx = dv, x^2 = u$). Zato je

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\alpha x dx = -\left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left(1-\alpha^2\right)\right)'_\alpha = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left(\alpha^3+\alpha\right). \ \blacktriangleright$$

3.78 $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{1+x^2} dx.$

◀ Iz predstavljanja $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^{1} + \int\limits_1^{+\infty}$ se dobija da je integral konvergentan za sve $a \in \mathbb{R}$. Zaista, za $a \neq 0$, prvi integral je Rimanov, a drugi je konvergentan jer je

$$\frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{1+x^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \; x \to +\infty$$

i integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergira. Koristili smo da $\frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{\sqrt{x}} \to 0$ kad $x \to +\infty$, odakle i sledi navedena procena. Ako je $a = 0$, onda je

$$\left| \int\limits_0^1 \frac{\ln x^2}{1+x^2} dx \right| \leq \int\limits_0^1 2\left|\ln x\right| dx = -2 \int\limits_0^1 \ln x dx$$

dakle $\int\limits_0^1 \frac{\ln x^2}{1+x^2} dx$ je konvergentan integral. S druge strane je

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x^2}{1+x^2} dx = 2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \cdots = -\int\limits_0^1 \frac{\ln t^2}{1+t^2} dt \; \left(\text{smena } x = \frac{1}{t}\right)$$

i zato je

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x^2}{1+x^2} dx = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} = \int\limits_0^1 - \int\limits_0^1 = 0.$$

Znači $I(0) = 0$. Neka je sada $\varepsilon > 0$ fiksiran broj. Na skupu $[0, +\infty[\times [\varepsilon, +\infty[$ funkcije

$$(x, a) \mapsto \frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{1+x^2} \text{ i } (x, a) \mapsto \frac{2a}{\left(a^2+x^2\right)\left(1+x^2\right)}$$

su neprekidne, tako da je dozvoljeno diferenciranje pod znakom integrala, ako se pokaže ravnomerna konvergencija integrala

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{2a}{\left(a^2+x^2\right)\left(1+x^2\right)} dx.$$

Po Dirihleovom kriterijumu ([2], II, Stav 7.2.2 ili [9], II, Teorema 8.3.XIII) taj integral ravnomerno konvergira. Stvarno, sva tri uslova navedenog kriterijuma su ispunjena:

1. $\left|\int\limits_0^\beta \frac{1}{1+x^2}dx\right| = |\arctan\beta| < \frac{\pi}{2}$;
2. Familija funkcija $\frac{2a}{a^2+x^2} \rightrightarrows 0$ na skupu $\mathbb{R}$, kad $x \to +\infty$, jer je

$$\max_a \left|\frac{2a}{a^2+x^2}\right| = \frac{1}{x} \to 0,\ x \to +\infty.$$

3. Za svako $a > 0$ funkcija $\frac{2a}{a^2+x^2}$ je opadajuća po x.

Dakle,

$$I'(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2a}{(a^2+x^2)(1+x^2)}dx,$$

za $a \geq \varepsilon > 0$. Zatim je

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{2a}{a^2-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} - \frac{2a}{a^2-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} \\ &= \frac{\pi a}{a^2-1} - \frac{2a}{a^2-1}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{a+1} \end{aligned}$$

za $a \geq \varepsilon > 0$ i $a \neq 1$. Kako je $I'(1) = 2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$ to je $I'(a) = \frac{\pi}{a+1}$ za $a \geq \varepsilon > 0$. Odatle je $I(a) = \pi\ln(a+1) + C$ za $a \geq \varepsilon > 0$. Pošto je ε proizvoljan pozitivan broj to je $I(a) = \pi\ln(a+1) + C$ za sve $a > 0$. Iz

$$\begin{aligned} I(1) &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan^2 z)}{1+\tan^2 z}\cdot\frac{1}{\cos^2 z}dz \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin^2 z+\cos^2 z}{\cos^2 z}dz = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos z dz \\ &= -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin z dz = -2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\ln 2 = \pi\ln 2. \end{aligned}$$

Sledi da je $C = 0$. S obzirom da je $I(a) = I(-a)$ to je za sve $a \in \mathbb{R}$:

$$I(a) = \pi\ln(1+|a|)$$

jer je $I(0) = 0$. Time je zadatak u potpunosti rešen. ▶

3.79 $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} dx, \alpha > 0.$

◀ **I način.** Dati integral konvergira jer je $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$. Prvi integral je Rimanov (zašto?), a drugi konvergira prema Vajerštrasovom kriterijumu. Primenom parcijalnog integraljenja dobija se

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\frac{1}{x}\sin^2 \alpha x|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha x \cos \alpha x}{x} dx \\ &= 0 + \alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x}{2x} d(2x) = \frac{\alpha\pi}{2}, \end{aligned}$$

jer je $\alpha > 0$. ▶

3.80. $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} dx, \alpha > 0.$

◀ **II način.** Imamo da je

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\sin \alpha x \cos \alpha x}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x}{2x} d(2x) = \frac{\pi}{2},$$

jer je $\alpha > 0$. Onda je

$$I(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{2} + C.$$

Zbog $I(0) = 0$ sledi da je $C = 0$. Neka student opravda diferenciranje pod integralom. ▶

3.81 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x} dx,\ a \in \mathbb{R}.$

◀ Neka je $a \in \mathbb{R}$. Očigledno je $I(-a) = I(a)$. Zato se može uzeti $a \geq 0$. Onda je

$$f(x,a) = \begin{cases} \frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x},\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0, \end{cases} \quad \text{i } f_a(x,a) = \begin{cases} e^{-x}\sin ax,\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$$

Dakle, $f(x,a)$ i $f_a(x,a)$ su neprekidne funkcije na skupu $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Pošto je integral

$$\int\limits_0^{+\infty} f_a(x,a)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin ax dx$$

ravnomerno konvergentan na $[0,+\infty[$ (prema Vajerštrasovom kriterijumu) to je dozvoljeno diferenciranje pod integralom. Zatim je

$$\begin{aligned}
I'(a) &= -\frac{1}{a}e^{-x}\cos a\,x|_0^{+\infty} - \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos axdx \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{-x}\sin a\,x|_0^{+\infty} + \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin axdx\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}I'(a)\,,\ a\neq 0;\ I'(0)=0.
\end{aligned}$$

Dakle, $I'(a)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{a}$ odakle je $I'(a)=\frac{a}{a^2+1}$,tj. $I(a)=\frac{1}{2}\ln\left(a^2+1\right)+C$. Pošto $I'(0)$ postoji, to je $I(a)$ neprekidna funkcija u nuli, tj. $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a)=C$, odnosno, $I(0)=C$. Sada iz $I(0)=0$ sledi $C=0$. Znači $I(a)=\frac{1}{2}\ln\left(a^2+1\right)$ za sve $a\in\mathbb{R}$, jer je $I(a)$ parna funkcija. ▶

Napomena. Dati integral konvergira, jer za fiksirano $a\neq 0$ sledi

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty} 2e^{-x}\cdot\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{ax}{2}dx = \int\limits_0^{1} + \int\limits_1^{+\infty};$$

prvi integral je Rimanov ($x=0$ je prividni singularitet) a drugi konvergira zbog $0\leq\frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x}\leq 2e^{-x}$ i $\int\limits_1^{+\infty} 2e^{-x}dx = 2e^{-1}$.

3.82 $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\sin\alpha xdx,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

◀ **I način.** Ovo je nesvojstveni parametarski integral sa singularitetima u 0 i $+\infty$. Zato je

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int \varepsilon^1 x^{-\frac{3}{2}}\sin\alpha xdx + \lim_{\delta\to+\infty}\int\limits_1 \delta x^{-\frac{3}{2}}\sin\alpha xdx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\sin\alpha\,x|\,\varepsilon^1 + \int\varepsilon^1\frac{2\alpha}{\sqrt{x}}\cos\alpha xdx\right) \\
&\quad + \lim_{\delta\to+\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\sin\alpha\,x|_1\,\delta + \int\limits_1 \delta\frac{2\alpha}{\sqrt{x}}\cos\alpha xdx\right) \\
&= -2\sin\alpha + \int\limits_0^1\frac{2\alpha}{\sqrt{x}}\cos\alpha xdx + 2\sin\alpha + \int\limits_1^{+\infty}\frac{2\alpha}{\sqrt{x}}\cos\alpha xdx
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \alpha x dx.$$

Koristili smo

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sin \alpha\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = 0 \text{ i } \lim_{\delta \to +\infty} \frac{\sin \alpha\delta}{\sqrt{\delta}} = 0.$$

Uvodeći zatim smenu $\alpha x = t^2, \alpha > 0, dx = \frac{2t}{\alpha} dt$ dobija se

$$I(\alpha) = 4\sqrt{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} \cos t^2 dt = 4\sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi\alpha},$$

na osnovu poznate vrednosti Frenelovog integrala:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Pošto je $I(\alpha)$ neparna funkcija, to je $I(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{2\pi\alpha}, & \alpha \geq 0, \\ -\sqrt{2\pi|\alpha|}, & \alpha < 0. \end{cases}$ ▶

3.83. $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} \sin \alpha x dx,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

◀ **II način.** Neka je $\alpha > 0$ fiksiran. Uzmimo $\varepsilon > 0$, tako da je $\alpha \geq \varepsilon > 0$. Integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(x^{-\frac{3}{2}} \sin \alpha x\right) \alpha' dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}} dx = I'(\alpha)$$

ravnomerno konvergira na skupu $[\varepsilon, +\infty[$ na osnovu Dirihleovog kriterijuma, čime je dozvoljeno diferenciranje pod integralom. Istom smenom kao u prvom načinu dobija se $I'(\alpha) = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, odakle sledi $I(\alpha) = \sqrt{2\pi\alpha} + C$, tj. $I(\alpha) = \sqrt{2\pi\alpha}$ jer je $C = I(0) = 0$. ▶

Napomena. Pošto integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}} dx$ divergira za $\alpha = 0$, to on nije ravnomerno konvergentan na skupu $[0, +\infty[$, a ipak je moguće diferenciranje pod integralom.

3.84 Neka je $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$

a) Dokazati da je funkcija $y = f(x)$ rešenje diferencijalne jednačine $2y' + xy = 0$;

b) Koristeći poznatu vrednost integrala $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, izračunati $f(1)$.

◀ **a)** Formalnim diferenciranjem i zamenjivanjem dobija se da je $2y' + xy = 0$. Zaista,

$$\begin{aligned} y' &= -\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} t\sin(xt)\,dt = -\left(-\frac{e^{-t^2}}{2}\sin(xt)\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} x\frac{e^{-t^2}}{2}\cos(xt)\,dt \right) \\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-t^2}\cos(xt)\,dt, \text{ te je} \end{aligned}$$

$$2y' + xy = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-t^2}\cos(xt)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} xe^{-t^2}\cos(xt)\,dt = 0.$$

Diferenciranje pod znakom integrala je moguće, jer je integral $\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)\,dt$ ravnomerno konvergentan prema Vajerštrasovom kriterijumu:

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)\,dt\right| \leq \int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}dt < +\infty.$$

Neka student detaljno obrazloži ostale uslove.

b) Diferencijalna jednačina iz a) postaje: $y' + \frac{1}{2}xy = 0$, tj. $\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}xdx$. Odatle je $y = Ce^{-x^2}$. Kako je $f(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, to je $y = f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$. Dakle, $f(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}$. Koristili smo Ojler-Poasonov integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pogledati i sledeći zadatak. ▶

3.85 Dokazati jednakost $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2exdx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-e^2}$ znajući da je $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

◀ Neka je $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2e\alpha xdx, \alpha \in \mathbb{R}$ parametarski integral. Onda je formalnim diferenciranjem

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} 2ex\sin 2e\alpha xdx.$$

Pošto je

$$\left|e^{-x^2}\cos 2ex\right| \le e^{-x^2} \text{ i } \left|e^{-x^2} 2ex \sin 2e\alpha x\right| \le 2e\cdot e^{-x^2}x,\ x\ge 0,$$

to oba integrala $I(\alpha)$ i $I'(\alpha)$ ravnomerno konvergiraju po α (Vajerštrasov kriterijum) jer nesvojstveni integrali $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ i $\int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx$ konvergiraju. Znači da je diferenciranje pod integralom dozvoljeno jer su još i funkcije

$$(x,\alpha)\mapsto e^{-x^2}\cos 2e\alpha x \text{ i } (x,\alpha)\mapsto e^{-x^2}2ex\sin 2e\alpha x$$

neprekidne na skupu $[0,+\infty[\,\times\mathbb{R}$. Zatim je

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= -e\int\limits_0^{+\infty} 2e^{-x^2}x\sin 2e\alpha x dx \\ &= -e\left(-e^{-x^2}\sin 2\ e\alpha x\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}(2e\alpha)\cos 2e\alpha x dx\right) \\ &= -e\cdot 0 - 2e^2\alpha I(\alpha) = -2e^2\alpha I(\alpha)\,. \end{aligned}$$

Za nalaženje parametarskog integrala $I(\alpha)$ dobijena je diferencijalna jednačina prvog reda (razdvaja promenljive):

$$\frac{dI}{I} = -2e^2\alpha d\alpha \Leftrightarrow \ln I = -e^2\alpha^2 + \ln C,\ C>0.$$

Dakle, $I(\alpha) = Ce^{-e^2\alpha^2}$, gde je $I(0) = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Znači $I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-e^2\alpha^2}$. Uzimajući $\alpha = 1$, dobija se jednakost u zadatku. ►

3.86 Koristeći diferenciranje po pogodno uvedenom parametru, izračunati

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}dx.$$

◄ Neka je

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x - \alpha x\cos x}{x^3}dx.$$

Zbog $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\alpha x - \alpha x\cos x}{x^3} = \frac{\alpha^3}{3}$ nula nije singularitet integrala. Podintegralna funkcija (koja se dodefiniše za $x=0$) neprekidna je za $x\ge 0$ i $\alpha\ge 0$, a integral konvergira jer je $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$; prvi integral je Rimanov a drugi konvergentan zbog ocene

$$\frac{|\sin \alpha x - \alpha x \cos x|}{x^3} \leq \frac{1+\alpha x}{x^3} \sim \frac{\alpha}{x^2},\ x \to +\infty$$

i činjenice da $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergira. Neka je $\alpha_0 > 0$ i $\varepsilon > 0$ tako da je $\alpha_0 - \varepsilon > 0$. U okolini $]\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon[$ integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right) \alpha' dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

ravnomerno konvergira po Dirihleovom kriterijumu, jer je $\left| \int\limits_0 \beta \sin \alpha x dx \right| \leq \frac{2}{\alpha_0 - \varepsilon}$ za $\alpha \in]\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon[$ (neka student proveri ostale uslove Dirihleovog kriterijuma). Zato u toj okolini, pa i u tački $\alpha = \alpha_0$ važi

$$I'(\alpha) = \alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \alpha \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Odatle je $I(\alpha) = \frac{\pi}{4}\alpha^2 + C$ za $\alpha > 0$. Pošto je $I'(0) = 0$ ($I'(\alpha)$ je parna funkcija i očigledno je $I'(0^-) = I'(0^+) = 0$) to je $I(\alpha)$ neprekidna funkcija u tački $\alpha = 0$. Zato je $0 = I(0) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha) = C$, te je $I(\alpha) = \frac{\pi}{4}\alpha^2$ a vrednost polaznog integrala je $I(1) = \frac{\pi}{4}$. ▶

Napomena. Znajući da je $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, dati integral se može rešiti parcijalnim integraljenjem. Zaista,

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2x^2} (\sin x - x \cos x)\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{2x^2} dx \\
&= -\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{2x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Neka student obrazloži zašto su granične vrednosti jednake nuli.

3.4 Ojlerovi integrali-gama i beta funkcije

Funkcija $\Gamma : p \mapsto \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$, $0 < p < +\infty$, naziva se gama funkcijom. To je očigledno nesvojstveni parametarski integral. Ona je neprekidna i ima neprekidne izvode proizvoljnog reda u svojoj oblasti definisanosti i za njih važi:

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx, \ k \in \mathbb{N}.$$

Osnovne formule:

a) Ako je $p > 0$, onda je $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

b) Ako $n \in \mathbb{N}$, onda je $\Gamma(n) = (n-1)!$, kao i $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

c) Za $0 < p < 1$ je $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$.

Funkcija $B : (p, q) \mapsto \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$, $p > 0$, $q > 0$, naziva se beta funkcijom. Ona je takođe parametarski integral i neprekidna je u oblasti definisanosti i ima parcijalne izvode proizvoljnog reda, koji se dobijaju diferenciranjem po promenljivima p, q pod znakom integrala. Može se predstaviti i u obliku

$$B(p, q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$$

Gama i beta funkcija se jednim imenom zovu Ojlerovi integrali i povezane su formulom:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

3.87 Dokazati da je $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

◀

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

gde je uvedena smena $x = u^2$. Zatim je

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right) \cdot \left(2\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right) = 4\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(u^2+v^2\right)} du dv.$$

Prelazeći na polarne koordinate (ρ, φ), gde je $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, poslednji dvojni nesvojstveni integral postaje

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^{+\infty}\right)d\varphi = \pi,$$

odakle je $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ►

3.88 Izračunati integrale

a) $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y}e^{-y^3}dy$; **b)** $\int\limits_0^{+\infty} 3^{-4z^2}dz$; **c)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$.

◄ **a)** Stavljajući $y^3 = x$, integral postaje

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^{\frac{1}{3}}e^{-x}} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

b)

$$\int_0^{+\infty} 3^{-4z^2}dz = \int_0^{+\infty}\left(e^{\ln 3}\right)^{\left(-4z^2\right)}dz = \int_0^{+\infty} e^{-(4\ln 3)z^2}dz.$$

Smenom $(4\ln 3)\, z^2 = x$ integral postaje

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}d\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\ln 3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{4\ln 3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}.$$

c) Smenom $-\ln x = t$, odnosno $x = e^{-t}, dx = -e^{-t}dt$ sledi

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \ ►$$

3.89 Izračunati integral $\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-ax^n}dx$, gde su m, n i a pozitivne konstante.

◄ Uzimajući $ax^n = y$ integral postaje

$$\int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^m e^{-y}d\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int_0^{+\infty} y^{\frac{m+1}{n}}e^{-y}dy = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right). \ ►$$

3.90 Dokazati da je $I_{m,n}=\int\limits_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ ako je $n\in\mathbb{N}$ i $m>-1$.

◄ Smenom $x=e^{-y}$ integral postaje

$$(-1)^n\int\limits_0^{+\infty} y^n e^{-(m+1)y}dy,$$

tj. novom smenom $(m+1)\,y=u$ dobija se

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= (-1)^n\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^n}{(m+1)^n}e^{-u}\frac{du}{m+1}\\ &= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int\limits_0^{+\infty}u^n e^{-u}du\\ &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$ ►

3.91 Dokazati da je $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.

◄ Neka je $I=I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda$. Onda je

$$\frac{\partial I}{\partial\beta}=\int\limits_0^{+\infty}\left(-\lambda e^{-\alpha\lambda^2}\right)\sin\beta\lambda d\lambda=\frac{e^{-\alpha\lambda^2}}{2\alpha}\sin\beta\lambda\Big|_0^{+\infty}-\frac{\beta}{2\alpha}I=-\frac{\beta}{2\alpha}I.$$

Dakle, $\frac{1}{I}\cdot\frac{\partial I}{\partial\beta}=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ili $\frac{\partial}{\partial\beta}\ln I=-\frac{\beta}{2\alpha}$. Uzimajući neodređeni integral u odnosu na β sledi:

$$\ln I=-\frac{\beta^2}{4\alpha}+\ln C$$

tj. $I=I(\alpha,\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. Ali

$$C=I(\alpha,0)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha\lambda^2}d\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(gde je stavljeno $x=\alpha\lambda^2$). Znači $I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. Treba napomenuti da je $\alpha>0$. Očigledno je parametarski integral $\frac{\partial I}{\partial\beta}$ ravnomerno konvergentan prema Vajerštrasovom kriterijumu. ►

3.92 Izračunati:
a) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$; **b)** $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$.
◀ Iz rekurentne formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, gama funkcija se može definisati i za negativne vrednosti promenljive. Uzimajući $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$ sledi
a) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.
b)

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}. \blacktriangleright$$

3.93 Dokazati:
a) $B(m,n) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$ gde je B beta funkcija;
b) $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ gde je Γ gama funkcija.
◀ **a)** Smenom $x = \sin^2\theta$ (zašto je moguće?) sledi

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta\right)^{m-1}\left(\cos^2\theta\right)^{n-1} 2\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta. \end{aligned}$$

b) Smenom $z = x^2$, dobija se

$$\Gamma(m) = \int\limits_0^{+\infty} z^{m-1}e^{-z}dz = 2\int\limits_0^{+\infty} x^{2m-1}e^{-x^2}dx.$$

Slično je $\Gamma(n) = 2\int\limits_0^{+\infty} y^{2n-1}e^{-y^2}dy$. Onda je

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4\left(\int\limits_0^{+\infty} x^{2m-1}e^{-x^2}dx\right)\left(\int\limits_0^{+\infty} y^{2m-1}e^{-y^2}dy\right) \\ &= 4\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy. \end{aligned}$$

Prelaskom na polarne koordinate sledi

$$\begin{aligned}\Gamma(m)\Gamma(n) &= 4\left(\int\limits_0^{+\infty}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\varphi\sin^{2n-1}\varphi d\varphi\right)\\ &= \Gamma(m+n)\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\varphi\sin^{2n-1}\varphi d\varphi = \Gamma(m+n)\cdot B(m,n)\end{aligned}$$

odakle se dobija tražena jednakost. Da je $B(m,n) = B(n,m)$ sledi prostom smenom $1-x=y$. ▶

3.94 Izračunati:

a) $\int\limits_0^1 x^4(1-x)^3dx$; **b)** $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$; **c)** $\int\limits_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$.

◀ **a)**

$$\int\limits_0^1 x^4(1-x)^3dx = \int\limits_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}dx = B(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4!3!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

b) Stavljajući $x = 2v$, sledi

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = 4\sqrt{2}\int\limits_0^1 v^2(1-v)^{-\frac{1}{2}}dv = 4\sqrt{2}B\left(3,\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

c) Senom $y^2 = a^2x$ ili $y = a\sqrt{x}$ integral postaje

$$\frac{a^6}{2}\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{a^6}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^6}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\pi a^6}{32}.$$

3.95 Koristeći formulu

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

dokazati da je $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ ako je $0 < p < 1$.

◀ Smenom $\frac{x}{1+x} = y$ integral sleve strane date formule postaje

$$\int\limits_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}dy = B(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(p+1-p)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p).\ ▶$$

3.96 Izračunati

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; **b)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; **c)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ **a)** Smenom $x^3 = y$, dati integral postaje

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{-\frac{2}{3}}dy}{1+y} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{1}{3}-1}}{1+y}dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

b) Stavljajući $x^4 = z$ dobija se

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{z^{-\frac{3}{4}}dz}{1+z} = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

c)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\int\limits_0^{\infty} \frac{u^{-\frac{n-1}{n}}}{1+u}du = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{n}-1}}{1+u}du = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}. \ ▶$$

Napomena. U sva tri primera korišćena je formula

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = B\left(p, 1-p\right) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

iz prethodnog zadatka.

3.97 Dokazati formulu $2^{2p-1}\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(2p\right).$

◀ Neka je $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx$ i $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} 2x dx$. Onda je

$$I = \frac{1}{2}B\left(p+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(p+1\right)}$$

(opet prema zadatku 3.93.a)). Uzimajući smenu $2x = u$, dobija se

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^{2p} u du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} u du = I, \text{ ili}$$

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x\cos x)^{2p}\,dx = 2^{2p}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}x\cos^{2p}x dx \\ &= 2^{2p-1}B\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2p-1}\Gamma^2\left(p+\frac{1}{2}\right)}{2p\Gamma(2p)}, \end{aligned}$$

odakle sledi traženi rezultat. ▶

3.98 Dokazati da je

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; **b)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^2dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

◀ **a)** Smenom $x^2 = t$, integral postaje

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(korišćen je zadatak 3.96a)).

b) Smenom $y^4 = t$ $\left(y = t^{\frac{1}{4}}\right)$ integral postaje

$$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}dt}{1+t} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{4}-1}dt}{1+t} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$ ▶

3.99 Dokazati da je

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^p t dt = \frac{\pi}{2}\sec\frac{p\pi}{2}, 0 < p < 1$; **b)** $\int\limits_0^{a} \frac{dy}{\sqrt{a^4-y^4}} = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{4a\sqrt{2\pi}}$;

c) $\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m 2^m\sqrt{\pi}}{(2m-1)!!}$, $m \in \mathbb{N}$; **d)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s > 0$;

e) $\Gamma(p) = \int\limits_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx$, $p > 0$; **f)** $\int\limits_0^{1} x^p\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}}$, $p > -1$, $q > -1$.

◀ **a)** Smenom $t = \arctan z$, $dt = \frac{dz}{1+z^2}$, integral postaje

$$\int\limits_0^{+\infty} z^p\cdot\frac{1}{1+z^2}dz,$$

pa novom smenom $z^2 = x$ dobija se

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^p t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)-1}}{1+x}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sec\frac{p\pi}{2}.$$

b) Smenom $y^4 = a^4 t$ $\left(y = at^{\frac{1}{4}}\right), dy = \frac{1}{4} at^{-\frac{3}{4}} dt$, integral postaje

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{a^2\sqrt{1-t}} at^{-\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{4a}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4a} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4a}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{4a\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

c) Jednakost se može dokazati matematičkom indukcijom. Tvrđenje je tačno za 1 prema zadatku 3.92a). Ako se pretpostavi tačnost za m, onda je

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-(m+1)+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(-m-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\left(m+\frac{1}{2}\right)+1\right)}{-\left(m+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)}{-\frac{2m+1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^m 2^m\sqrt{\pi}}{(2m-1)!!}\cdot\frac{2}{-(2m+1)} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{m+1}\sqrt{\pi}}{(2m+1)!!} \end{aligned}$$

što predstavlja dokaz tvrđenja za $m+1$. Korišćena je formula $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ kojom se definiše gama funkcija (rekurentno) i za $x < 0$.

d) Smenom $t = y^2$, integral postaje

$$2\int_0^{+\infty} e^{-sy^2} dy = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

što je i trebalo pokazati.

e) Smenom $\ln\frac{1}{x} = t$, direktno se dobija gama funkcija. Neka student detaljno proveri vrste singulariteta i obrazloži navedenu smenu.

f) Smenom $\ln\frac{1}{x} = t$, integral postaje

$$\int_0^{+\infty} t^q e^{-(p+1)t} dt = \frac{1}{(p+1)^{q+1}}\int_0^{+\infty} z^{(q+1)-1} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}},$$

$(p+1)\, t = z$ je nova smena, čime je dokaz završen. ►

3.100 Dokazati da je:

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{ae^{3x}+b} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$, $a > 0$, $b > 0$; **b)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^{3x}+1)^2} dx = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

◄ **a)** Smenom $e^x = t$, dati integral postaje

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{at^3+b}\cdot\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{at^3+b} dt = \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\frac{a}{b}t^3+1} dt.$$

Novom smenom $t=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, dt=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy$ dobija se

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3b}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}}{1+y}dy=\frac{b^{-\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{2}{3}}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{2}{3}-1}}{1+y}dy \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{3}\right)}{3b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

što je dokaz jednakosti.

Napomena. Student treba da zna da je formula

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{t+1}dt=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\ 0<p<1,$$

jedna od najvažnijih i najčešće korišćenih za izračunavanje raznih nesvojstvenih integrala.

b) Ako je

$$I(b)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3x}}{ae^{3x}+b},\ a>0,\ b>0$$

parametarski (nesvojstven) integral, onda je

$$I'(b)=-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}},$$

s jedne strane i

$$I'(b)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2x}}{\left(ae^{3x}+b\right)^2}dx,$$

s druge strane. Odatle sledi vrednost integrala pod b). ►

3.101 Neka je $0<\alpha<1$, $g(\alpha)=\int\limits_0^1\frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx$, $h(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx.$

a) Dokazati: $h(\alpha)=g(\alpha)+g(1-\alpha)$, $g(\alpha)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha-n}$ i $h(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$;

b) Izračunati $h(\alpha)$ i $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha}\ln x}{1+x}dx.$

◀ **a)** S obzirom da je $0 < \alpha < 1$, to dati integrala konvergiraju. Iz

$$g(1-\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{x^{-(1-\alpha)}}{1+x}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{t^{-\alpha}}{1+t}dt \ \left(\text{smena } x = \frac{1}{t}\right)$$

dobija se tražena jednakost $h(\alpha) = g(\alpha) + g(1-\alpha)$. Kako je za $-1 < x < 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \text{ to je}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx &= \int\limits_0^1 \left(x^{-\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-\alpha}\right) dx \\
&= \frac{1}{1-\alpha} + \int\limits_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-\alpha}\right) dx.
\end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ fiksiran broj, onda je

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-\alpha}\right) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int\limits_0^\varepsilon x^{n-\alpha}dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\varepsilon^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1},
\end{aligned}$$

jer je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-\alpha}$ ravnomerno konvergentan na skupu $[0,\varepsilon]$. Sada je

$$\int\limits_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-\alpha}\right) dx = \lim_{\varepsilon\to 1^-} \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-\alpha}\right) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\varepsilon^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\alpha+1}.$$

Zato je

$$g(\alpha) = \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+2} + \frac{1}{-\alpha+3} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha-n}.$$

Poslednja razmena "lim" i "$\sum$" je moguća jer je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\varepsilon^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1}$ ravnomerno konvergentan na $[0,1]$ (obrazložiti prema kojem kriterijumu). Iz

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= g(\alpha)+g(1-\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha-n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-\alpha-n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha-n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\alpha+(n-1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right)+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}. \end{aligned}$$

b)

$$h(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx=B(1-\alpha,\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Korišćena je formula

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$$

odakle se upoređivanjem dobija da je $p+q=1$ i $p-1=-\alpha$. Sada je integral

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha}\ln x}{1+x}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{-x^{-\alpha}\ln x}{1+x}dx=-\frac{d}{d\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx \\ &= -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\right)=\frac{\pi}{\sin^2\alpha\pi}\cdot\pi\cdot\cos\alpha\pi=\frac{\pi^2\cos\alpha\pi}{\sin^2\alpha\pi}. \ \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.102 Neka je $I(a)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx,\ J(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ za $0<a<1$. Ispitati da li je

a) $I(a)=\Gamma(a)\Gamma(1-a)$; **b)** $I(a)=J(a)+J(1-a)$; **c)** $J(a)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-a+n}$.

◀ **a)** Smenom $e^x=t, dx=\frac{1}{t}dt$ sledi

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}dt=B(a,1-a)=\Gamma(a)\Gamma(1-a).$$

b)

$$I(a)=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx.$$

Treba pokazati da je $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{(1-a)x}}{1+e^{x}}dx$. Smenom $x=-t$ dobija se

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-at}}{1+e^{-t}}dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{(1-a)t}}{1+e^{t}}dt$$

tj. sledi dokaz jednakosti $I(a)=J(a)+J(1-a)$.

c) Smenom $e^{-x}=t$, integral $J(a)$ postaje

$$\begin{aligned}J(a) &= \int\limits_{0}^{1}\frac{t^{-a}}{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\limits_{0}^{1}\frac{t^{-a}}{1+t}dt=\int\limits_{0}^{1}t^{-a}\left(1-t+t^{2}-+\cdots\right)dt\\ &= \int\limits_{0}^{1}t^{-a}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}t^{n}\right)dt=\int\limits_{0}^{1}t^{-a}dt+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\int\limits_{0}^{1}t^{n-a}dt\\ &= \left.\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right|_{0}^{1}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left.\frac{t^{n-a+1}}{n-a+1}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{-a+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n-a+1}.\end{aligned}$$

Pošto je $x\geq 0$, to je $0<t\leq 1$. Korišćena su svojstva stepenog reda. ►

3.103 Izračunati sledeće parametarske integrale:

a) $\int\limits_{0}^{1}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a}\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$; **b)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a}x\ln(\sin x)\,dx$.

◄ **a)** Smenom $\ln\frac{1}{x}=t, dx=-e^{-t}dt$ dati integral postaje

$$-\int\limits_{+\infty}^{0}t^{a}(\ln t)\,e^{-t}dt=\int\limits_{0}^{+\infty}t^{a}(\ln t)\,e^{-t}dt=\frac{d}{dt}\left(\Gamma(a+1)\right).$$

b) Smenom $\sin x=t, \cos x dx=dt, dx=\left(1-t^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt$, integral postaje

$$\int\limits_{0}^{1}t^{a}(\ln t)\left(1-t^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

odnosno smenom $t^2 = u$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int_0^1 u^{\frac{a-1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\ln u du = \frac{1}{4}\cdot\frac{d}{da}\left(B\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{d}{da}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{d}{da}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\right). \ ▶ \end{aligned}$$

3.104 Neka je $\alpha > 0$ realan broj. Dokazati

$$B(\alpha,\alpha) = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{\alpha-1}dx.$$

◀ Pošto je $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, p>0, q>0$, to je

$$\begin{aligned} B(\alpha,\alpha) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}dx = \int_0^1 \left(x-x^2\right)^{\alpha-1}dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{\alpha-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{\alpha-1}dx \end{aligned}$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{\alpha-1}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{\alpha-1}dx,$$

jer su oba integrala jednaka $\int_0^1 \frac{1}{4^{\alpha-1}}\left(1-t^2\right)^{\alpha-1}dt$ (u prvom se uvodi smena $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}t$, a u drugom $\frac{1}{2}-x=-\frac{1}{2}t$). ▶

3.105 Dokazati:

a) $\Gamma(1)=\Gamma(2)$; **b)** $\exists x_0\in\,]1,2[\,:\Gamma'(x_0)=0$; **c)** Γ' raste na $]0,+\infty[$;

d) Γ opada na $]0,x_0[$ a raste na $]x_0,+\infty[$; **e)** integral $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{x-1}\ln\left(\ln\frac{1}{u}\right)du$ je jednak nuli za $x=x_0$;

f) $\Gamma(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}$ kad $\alpha\to 0^+$; **g)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$.

◀ **a)**

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -x\,e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Znači $\Gamma(1) = \Gamma(2)$.

b) Funkcija $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha)$ zadovoljava Rolovu teoremu na segmentu $[1,2]$. Obrazložiti detalje.

c) Pošto je

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)\,e^{-x}dx, \text{ to je}$$

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^2 e^{-x}dx > 0, \text{ tj. } \Gamma' \nearrow.$$

d) Sledi iz **b)** i **c)**.

e) Smenom $\ln\frac{1}{u} = t$, dobija se

$$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{u}\right)^{x-1} \ln\ln\frac{1}{u}du = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)\,e^{-t}dt = \Gamma'(x),$$

i tvrđenje onda sledi iz b).

f) Kako je $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, treba pokazati da je $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\Gamma(\alpha+1) = 1$. Pošto je funkcija $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha)$ neprekidna na skupu $]0,+\infty[$ to je

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\Gamma(\alpha+1) = \Gamma\left(\lim_{\alpha\to 0^+}(\alpha+1)\right) = \Gamma(1) = 1.$$

g) Smenom $x^n = u$ sledi $x = u^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du$, te dati integral postaje

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{n}-1}e^{-u}du = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Tvrđenje onda sledi iz f) jer $\frac{1}{n} \to 0$, kad $n \to +\infty$. ▶

3.5 Furijeovi redovi

Sistem funkcija

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ k\in\mathbb{N},\ x\in[-l,l],$$

se naziva osnovnim trigonometrijskim sistemom. On je ortogonalan na segmentu $[-l,l]$. Neka je $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ integrabilna funkcija na $[-l,l]$. Brojevi

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,\ a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

gde je $k\in\mathbb{N}$, se zovu Furijeovi koeficijenti funkcije f u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem. Trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

se zove Furijeov red funkcije f. Specijalno ako je funkcija f parna, onda Furijeov red ima oblik

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l};$$

u slučaju da je funkcija f neparna, Furijeov red glasi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Funkcija $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ je deo po deo neprekidna na $[-l,l]$, ako je neprekidna u svakoj tački $x\in[-l,l]$ sa izuzetkom konačnog broja tačaka u kojima ima prekide prve vrste. Skup tih funkcija se označava sa $C_0[-l,l]$.

Funkcija $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ je deo po deo glatka na $[-l,l]$, ako je na $[-l,l]$ deo po deo neprekidna i ima neprekidan izvod na tom segmentu sa izuzetkom konačno tačaka u kojima ima konačne jednostrane granične vrednosti.

Teoreme o razlaganju u Furijeov red:

T1. Neka je deo po deo glatka na $[-l,l]$, $2l-$periodična funkcija f proširena na celu brojnu pravu. Tada trigonometrijski Furijeov red funkcije f konvergira u svakoj tački $x\in\,]-\infty,+\infty[$ ka vrednosti $\frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)$.

T2. Ako neprekidna i deo po deo glatka funkcija f na $[-l,l]$ zadovoljava $f(-l)=f(l)$, onda njen trigonometrijski Furijeov red ravnomerno konvergira na tom segmentu i njegova suma je $f(x)$ za svako $x\in[-l,l]$.

T3. Neka $f \in C^m[-l,l]$, $f(-l) = f(l)$, $f^{(k)}(-l) = f^{(k)}(l)$ za $k = \overline{1,\ m}$ i neka funkcija f na $[-l,l]$ ima deo po deo neprekidan izvod reda $m+1$. Tada:

a) brojni red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^m (|a_k| + |b_k|)$ konvergira;

b) Furijeov red funkcije f se na $[-l,l]$ može m puta diferencirati član po član.

T4. Neka $f \in C_0[-\pi,\pi]$ i neka je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

njen Furijeov red. Tada (nezavisno od toga konvergira li taj red ili ne) za sve $x \in [-\pi,\pi]$ važi

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,dt,$$

pri čemu poslednji red konvergira ravnomerno na $[-\pi,\pi]$.

3.106 Neka je $c \in \mathbb{R}$, $l > 0$ i $0 < \xi_1 < ... < \xi_n < ...$niz rešenja jednačine $\tan l\xi = c\xi$. Dokazati da je sistem funkcija $\{\sin \xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ortogonalan u $C[0,l]$.

◀ Treba pokazati da je

$$\int_0^l \sin \xi_n x \sin \xi_m x dx = 0$$

za $n \neq m$ i da je $\int\limits_0^l \sin^2 \xi_n x dx \neq 0$. Pošto je

$$\sin \xi_n x \sin \xi_m x = \frac{1}{2} (\cos(\xi_n - \xi_m) x - \cos(\xi_n + \xi_m) x), \text{ to je}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l \sin \xi_n x \sin \xi_m x dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\xi_n - \xi_m} \sin(\xi_n - \xi_m) l - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\xi_n + \xi_m} \sin(\xi_n + \xi_m) l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(\xi_n-\xi_m)\,l}{\frac{2}{c}(\tan l\xi_n-\tan l\xi_m)}-\frac{\sin(\xi_n+\xi_m)\,l}{\frac{2}{c}(\tan l\xi_n+\tan l\xi_m)}\\
&= \frac{c}{2}\left(\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)\,l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m-\sin l\xi_m\cos l\xi_n}-\frac{\sin(\xi_n+\xi_m)\,l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m+\sin l\xi_m\cos l\xi_n}\right)\\
&= \frac{c}{2}\left(\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)\,l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin(\xi_n-\xi_m)\,l}-\frac{\sin(\xi_n+\xi_m)\,l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin(\xi_n+\xi_m)\,l}\right)\\
&= \frac{c}{2}(\cos l\xi_n\cos l\xi_m-\cos l\xi_n\cos l\xi_m)=0
\end{aligned}$$

za $\xi_m \neq \xi_n$. Ako je $\xi_m = \xi_n$, onda je $\int\limits_0^l \sin^2 \xi_n x dx > 0$ jer je na $[0, l]$ funkcija $\sin^2 ax \neq 0$, bar u jednoj tački x, ako je $a \neq 0$. ▶

3.107 Dokazati da sistem funkcija $\left\{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ (bez funkcije $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$!) nije potpun u prostoru $C_0[-\pi, \pi]$.

◀ Ako se pretpostavi da je dati sistem potpun u prostoru $C_0[-\pi, \pi]$ onda to prema $([2], II$, Teorema 8.2.1 ili $[9], II$, Teorema 6.1.XV) znači

$$(\forall f \in C_0[-\pi, \pi]) \;\; f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

gde su $\langle f, e_n \rangle$ Furijeovi koeficijenti funkcije $f \in C_0[-\pi, \pi]$ u odnosu na dati sistem. Ako je na primer $f \equiv 1$ (jedinična funkcija), onda su svi Furijeovi koeficijenti nula, odakle sledi $1 \equiv 0$, što je nemoguće. ▶

Napomena. Kod tumačenja jednakosti $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ student mora da bude oprezan.

3.108 a) Dokazati da trigonometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ (mada konvergentan za svako $x \in \mathbb{R}$) nije Furijeov red neke funkcije $f \in C_0[-\pi, \pi]$.

b) Da li je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx + \cos 2nx}{n^2}$ Furijeov red neke funkcije?

◀ **a)** Ako se pretpostavi suprotno, tj. da popstoji funkcija $f \in C_0[-\pi, \pi]$ čiji je Furijeov red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, onda prema $([2], II$, Teorema 8.2.1 ili $[9], II$, Teorema 6.1.XV) sledi

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

(Parsevalova jednakost) što je nemoguće, jer je leva strana konačna, a desna nije (f je Riman-integrabilna funkcija, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira). Ovo pokazuje da trigonometrijski red nije obavezno Furijeov red neke funkcije.

b) Kako je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin nx + \cos 2nx}{n^2} \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

sledi da taj red ravnomerno konvergira na $\mathbb{R}$ ka nekoj funkciji f za koju važi:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,\ a_{2n} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx = \frac{1}{n^2}, \\ a_{2n-1} &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2n-1) x dx = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Znači, dati trigonometrijski red jeste Furijeov red svoje granice $f(x)$. ►

3.109 Funkciju $f(x) = x - [x]$ razviti u Furijeov red. Kolika je suma dobijenog reda?

◄ Grafik funkcije $x \mapsto x - [x]$ je lako nacrtati. Ona je periodična ($T = 1$), neprekidno diferencijabilna izuzev u celobrojnim tačkama gde ima prekide prve vrste. Dakle, može se razviti u Furijeov red oblika

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x.$$

Ovaj red konvergira ka $f(x)$ za $x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno ka $\frac{1}{2}$ u celobrojnim tačkama. Zatim je

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2 \int\limits_0^1 (x - [x]) dx = 2 \frac{1}{2} x^{\ 2} \Big|_0^1 = 1,$$

$$a_n = 2 \int\limits_0^1 (x - [x]) \cos 2n\pi x dx = 2 \int\limits_0^1 x \cos 2n\pi x dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi\, x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x dx\right)\\
&= \frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi\, x\Big|_0^1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int\limits_0^1 (x-[x])\sin 2n\pi x dx = 2\int\limits_0^1 x\sin 2n\pi x dx\\
&= 2\left(\frac{-x}{2n\pi}\cos 2n\pi\, x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x dx\right)\\
&= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\sin 2n\pi\, x\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$x-[x] \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\pi x. \quad \blacktriangleright$$

3.110 Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna, parna i periodična s periodom 2π i neka za svaki nenegativan ceo broj n važi

$$\int\limits_0^\pi f(x)\cos^n x dx = 0.$$

Dokazati da je $f\equiv 0$.

◀ Može se pokazati da je $\cos nx$ $(n\in\mathbb{N})$ polinom stepena n po $\cos x$. Zaista, na osnovu jednakosti

$$\cos(n+1)x = 2\cos nx\cos x - \cos(n-1)x$$

i principa potpune matematičke indukcije: $n-1$, $n\to n+1$ sledi dokaz. Zato je za sve $n\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_0^\pi f(x)\cos nx dx = 0$$

jer je $\cos nx = A_0 + A_1\cos x + A_2\cos^2 x + \cdots + A_n\cos^n x$ i

$$\int\limits_0^\pi f(x)\cdot A_0\cdot dx = A_0\int\limits_0^\pi f(x)\cdot\cos^0 x\cdot dx = 0$$

po pretpostavci u zadatku, te su Furijeovi koeficijenti a_n funkcije f svi jednaki nuli. Koeficijenti b_n su jednaki nuli zbog parnosti. Na osnovu uslova zadatka, f se u svakoj tački predstavlja svojim Furijeovim redom, te je $f \equiv 0$. ▶

3.111 Funkciju $f(x) = x, 0 < x < 2$ razviti

a) u Furijeov sinusni red; **b)** u Furijeov kosinusni red;

c) Primeniti Parsevalovu jednakost na Furijeov red dobijen pod **b)** i na osnovu toga naći sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$;

d) Naći Furijeov red funkcije $x \mapsto x^2, 0 < x < 2$, integraljenjem Furijeovog reda pod **a)** i na osnovu toga naći sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

e) Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$ razviti u Furijeov red.

◀ **a)** Funkcija čiji je grafik lako nacrtati može se prema Dirihleovoj teoremi razviti u Furijeov red koji konvergira ka njoj za sve $x \in \mathbb{R}$. Kako je ona jednaka datoj funkciji na intervalu $]0, 2[$, to je taj Furijeov red istovremeno i Furijeov red date funkcije. Pošto je $T = 2l = 4$, to je $l = 2$, odnosno, $a_0 = a_n = 0$ jer je proširenje funkcije na $\mathbb{R}$ neparna funkcija. Zatim je

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f^{\star}(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{2}\int\limits_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ &= x\cdot\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \int\limits_{0}^{2}\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ &= \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}$$

za $0 < x < 2$.

b) Parno proširenje funkcije $f(x)$ na čitavom $\mathbb{R}$ je parna funkcija, neprekidna, deo po deo monotona, periodična $T = 4$, $l = 2$, i $b_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f^{\star}(x)\,dx = \int\limits_{0}^{2} x\,dx = 2,$$

$$a_n = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \cdots = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right).$$

Znači,

$$\begin{aligned} x &= 1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)\\ &= 1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2},\ 0<x<2. \end{aligned}$$

c) Parsevalova jednakost daje

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx = \frac{2^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}\left(\cos n\pi-1\right)^2,\ \text{ili}$$

$$\frac{8}{3} = 2+\frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots.\right)$$

odnosno $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$, jer je $\cos n\pi-1=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -2, & n=2k-1.\end{cases}$

Sada je

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots.\\ &= \left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)\\ &= \frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)=\frac{\pi^4}{96}+\frac{S}{16} \end{aligned}$$

odakle je $S=\frac{\pi^4}{90}$.

d) Pošto je

$$x=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right)$$

za $0<x<2$, to je

$$\int_0^x xdx=\int_0^x\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right)dx,\ \text{tj.}$$

$$x^2 = C - \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

gde je $C = \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$. Integraljenje je vršeno na segmentu $[0, x] \subset [0, 2]$.

Dobijeni Furijeov red je upravo Furijeov kosinusni red funkcije $x \mapsto x^2$ za $0 < x < 2$, zato je

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Znači $\frac{4}{3} = \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\cdot\right)$ tj.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Napomena. Treba napomenuti da se Furijeov red

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

funkcije $x \mapsto x$, $0 < x < 2$ ne može diferencirati član po član. Zaista, ako je to moguće onda bi red

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

konvergirao za $0 < x < 2$, što je kontradikcija. Opšti član $\cos\frac{n\pi x}{2} \nrightarrow 0$ ni za jedno $x \in \mathbb{R}$.

e) Iz jednakosti $1 - 2a\cos x + a^2 = (a - \cos x)^2 + \sin^2 x$, sledi da je za $a \notin \{-1, 1\}$ funkcija f definisana na $\mathbb{R}$, $2\pi-$periodična i neprekidno diferencijabilna. To znači da se može razviti u Furijeov red čija je suma $f(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Za $a = -1$ ili $a = 1$ imamo da je $f(x) = \frac{1}{2}$, $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Zato, neka je $|a| \neq 1$. Tada je

$$f(x) = g(a) = \frac{e^{ix}}{2(e^{ix} - a)} + \frac{e^{-ix}}{2(e^{-ix} - a)}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Sada razlikujemo dva slučaja: $|a| < 1$ i $|a| > 1$.

Ako je $|a| < 1$, onda je: $\left|ae^{ix}\right| = \left|ae^{-ix}\right| = |a| < 1$ i tada je

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{\frac{1}{2}}{1-ae^{-ix}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-ae^{ix}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-inx} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{inx} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(nx). \end{aligned}$$

Ako je $|a| > 1$, onda je: $\left|\frac{e^{ix}}{a}\right| = \left|\frac{e^{-ix}}{a}\right| = \frac{1}{|a|} < 1$ i tada je

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{e^{ix}}{2a}\cdot\frac{-1}{1-\frac{e^{ix}}{a}} + \frac{e^{-ix}}{2a}\cdot\frac{-1}{1-\frac{e^{-ix}}{a}} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i(n+1)x}}{a^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-i(n+1)x}}{a^{n+1}} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n+1)x}{a^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{a^n}. \end{aligned}$$

Znači, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n\cos(nx)$ i $-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{a^n}$ su razvoji funkcije f u Furijeov red. ►

Napomena. Treba imati na umu Ojlerovu formulu $\cos x + i\sin x = e^{ix}$, $x\in\mathbb{R}$ i na osnovu nje formule

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ i } \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

3.112 a) Razviti funkciju $x\mapsto \arcsin(\cos x)$ u Furijeov red i na osnovu toga odrediti sumu reda $\sum\limits_{n=}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

b) Razviti funkciju $\theta\mapsto\frac{1}{5+4\cos\theta}$ u Furijeov red i na osnovu toga odrediti vrednost integrala $I_n = \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$.

◄ **a)** S obzirom da je funkcija neprekidna, $2\pi-$periodična, deo po deo monotona, to se može razviti u Furijeov red koji za sve $x\in\mathbb{R}$ konvergira funkciji $f(x)$. Ako $x\in[0,\pi]$, onda $\frac{\pi}{2}-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, te je

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{\pi}{2}-x$$

prema formuli $\arcsin(\sin t) = t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zbog parnosti funkcije grafik je sada lako nacrtati. Furijeov red ima samo kosinuse.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = 0,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx dx = \int_0^{\pi}\cos nx dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx\\
&= \frac{1}{n}\sin nx|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)\\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0,\ n = 2k, \\ \frac{4}{\pi(2k-1)^2},\ n = 2k-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Znači, za sve $x \in \mathbb{R}$:

$$\arcsin(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Integraljenjem od 0 do x za neko $x \in [0, \pi]$ sledi

$$\int_0^x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}dx + C = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} + C,$$

$$\text{tj. } \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3},$$

jer se za $x = 0$ dobija $C = 0$. Ponovnim integraljenjem leve i desne strane od 0 do x dobija se

$$\frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^3}{6} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} + C_1.$$

Ako je $x = 0$, onda je $C_1 = 0$. Znači, za sve $x \in [0, \pi]$ je

$$\frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^3}{6} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Uzimajući $x = \frac{\pi}{2}$, dobija se suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ a zatim i reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ (videti prethodni zadatak).

Napomena. Nastavljajući postupak integraljenja mogu se dobiti sume redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}}$ za $s = 3, 4, 5, ...$ Iz jednakosti

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \ x \in [0, \pi]$$

se mogu dobiti sume redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s+1}}, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2s+1}}$ za $s = 1, 2, 3, ...$ uzimajući $x = \frac{\pi}{2}$ i uzastopnim integraljenjem.

b) Data funkcija je očigledno $2\pi-$periodična i neprekidno diferencijabilna, tako da se može razviti u Furijeov red čija je suma funkcija $f(\theta)$. Koristeći Ojlerovu formulu imamo da je za svako $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{5 + 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{2e^{i\theta} + 5e^{i\theta} + 2} \\ &= \frac{x}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{x}{(x+2)(2x+1)}, \ x = e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Prethodna racionalna funkcija po x je dalje jednaka

$$\frac{x}{(x+2)(2x+1)} = \frac{\frac{2}{3}}{x+2} - \frac{\frac{1}{3}}{2x+1},$$

odakle je

$$f(\theta) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}} - \frac{\frac{1}{6}e^{-i\theta}}{1 + \frac{1}{2}e^{-i\theta}}.$$

Znajući da je za svaki kompleksan broj z za koji je $|z| < 1$, $\frac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$, dobijamo

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} e^{in\theta} - \frac{e^{-i\theta}}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} e^{-in\theta} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} e^{in\theta} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{-i(n+1)\theta} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cos n\theta. \qquad (1) \end{aligned}$$

S obzirom da poslednji red konvergira apsolutno a i ravnomerno na $\mathbb{R}$ to se može zaključiti da je on Furijeov red funkcije $f(\theta)$. Stvarno,

$$\begin{aligned}\pi a_p(f) &= \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos p\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos p\theta d\theta + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\cos n\theta\cos p\theta d\theta\\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos p\theta d\theta + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n+p)\theta\cos(n-p)\theta\right]d\theta,\end{aligned}$$

jer red (1) ravnomerno konvergira. Iz poslednje formule slede Furijeovi koeficijenti, a zatim i da je $I_0 = \frac{\pi}{3}$ i $I_n = \frac{(-1)^n\pi}{3\cdot 2^n}$, $n \geq 1$. ►

3.113 Funkciju $f : x \mapsto sgn\sin 2x, x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ razviti u Furijeov red.

◄ $T = 2l = 1, l = \frac{1}{2}$, proširenje funkcije ima prekide prve vrste, i deo po deo je diferencijabilna, te se može razviti u Furijeov red. Zbog neparnosti funkcije je $a_0 = a_n = 0$. Dalje je

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}dx = 4\int_0^{\frac{1}{2}} 1\cdot\sin 2n\pi x dx\\ &= \frac{-4}{2n\pi}\cos 2n\,\pi x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k,\\ \frac{4}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1,\end{cases} \quad \text{i}\end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\sin 2(2n-1)\pi x}{2n-1},\ x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[. \ ►$$

3. 114 Funkcije $x \mapsto \cos^3 x$ i $x \mapsto \sin^3 x$ razviti u Furijeov red na $]-\pi, \pi[$.

◄ Pošto su ove funkcije periodične ($T = 2\pi$-zašto?) to iz poznatih formula

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \text{ i } \sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x, \text{ sledi}$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x \text{ i } \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

što i predstavlja tražene Furijeove redove. ►

Napomena. Neka student pokaže da Furijeov red funkcija $x \mapsto \cos^k x$ i $x \mapsto \sin^k x$, $k \in \mathbb{N}$ na $]-\pi, \pi[$, ima konačno mnogo članova različitih od nule.

3.6 Furijeovi integrali

Ako je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$ i ima deo po deo neprekidan prvi izvod na svakom konačnom razmaku brojne prave, tada se njoj pridružuje Furijeov integral

$$\int_0^{+\infty}(a(y)\cos yx+b(y)\sin yx)\,dy,$$

gde je

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos xydx,\ \ b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin xydx.$$

On konvergira ka $f(x)$ za sve $x\in\mathbb{R}$ u kojima je funkcija f neprekidna, tj. ka $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ ako je x tačka prekida prve vrste.

3.115 Sledeće funkcije predstaviti Furijeovim integralom:

a) $f(x)=\begin{cases}1,|x|<1,\\0,|x|>1;\end{cases}$ **b)** $f(x)=sgn(x-\alpha)-sgn(x-\beta),\beta>\alpha;$

c) $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$; **d)** $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2},a\neq 0$; **e)** $f(x)=\begin{cases}\sin x,|x|<\pi,\\0,|x|>\pi;\end{cases}$

f) $f(x)=e^{-\alpha|x|},\alpha>0$; **g)** $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x,\alpha>0$;**h)** $f(x)=e^{-x^2}$.

◄ **a)** Data funkcija ispunjava sve uslove za predstavljanje Furijeovim integralom. Pošto je parna, to je $b(y)=0$ i

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\cos xydx=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos xydx=\frac{2\sin y}{\pi y}.$$

Dakle,

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\cos yxdy,|x|\neq 1.$$

Za $x=\pm 1$, Furijeov integral date funkcije konvergira ka $\frac{1}{2}$.

b) Očigledno je

$$f(x)=\begin{matrix}0,x<\alpha,\\1,x=\alpha,\\2,\alpha<x<\beta,\\1,x=\beta,\\0,x>\beta.\end{matrix}$$

Onda je

$$\begin{aligned} a(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos xy dx = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\cos xy dx = \frac{2}{\pi y}(\sin\beta y - \sin\alpha y),\\ b(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xy dx = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\sin xy dx = \frac{2}{\pi y}(\cos\alpha y - \cos\beta y),\end{aligned}$$

te je

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y(\beta - x) + \sin y(x-\alpha)}{y}dy$$

predstavljena Furijeovim integralom za sve $x \in \mathbb{R}$. U ovom primeru Furijeov integral konvergira ka $f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Obrazložiti!

c) Za $a \neq 0$ funkcija ispunjava uslove za predstavljanje Furijeovim integralom. Zbog parnosti funkcije f imamo da je $b(y) = 0$ i

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos yx}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{|a|}e^{-|a|y}$$

(zadatak 3.69), tako da je

$$f(x) = \frac{1}{|a|}\int_0^{+\infty} e^{-|a|y}\cos yx dy$$

predstavljanje funkcije f Furijeovim integralom.

d) Funkcija zadovoljava sve uslove predviđene za predstavljanje Furijeovim integralom. Zbog neparnosti je $a(y) = 0$ i $b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x\sin yx}{a^2+x^2}dx, a \neq 0$. Vidimo iz prethodnog zadatka da je $b(y) = -a'(y)$(mogućnost diferenciranja pod integralom obrazložena je u zadatku 3.69). Znači,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-|a|y}\sin yx dy,\ a \neq 0.$$

e) Očigledno je $a(y) = 0$ i

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin yx dx = \begin{cases}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\pi y}{1-y^2}, y \neq 1,\\ 1, y = 1,\end{cases}$$

$$\text{tj. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi y}{1 - y^2} \sin yx dy.$$

f) Funkcija ispunjava dovoljne uslove za predstavljanje Furijeovim integralom. Zbog parnosti je $b(y) = 0$ i

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos yx dx = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + y^2)}.$$

Zato je za sve $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{\alpha^2 + y^2} dy, \alpha > 0,$$

Furijeov integral date funkcije.

g) Nalazimo da je $a(y) = 0$ i

$$\begin{aligned} b(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \sin yx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta - y) x dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta + y) x dx \\ &= \frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2 + (\beta - y)^2\right)} - \frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2 + (\beta + y)^2\right)} \\ &= \frac{4\alpha\beta y}{\pi\left(\alpha^2 + (\beta - y)^2\right)\left(\alpha^2 + (\beta + y)^2\right)}. \end{aligned}$$

Dakle, za sve $x \in \mathbb{R}$ imamo da je

$$f(x) = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y \sin yx}{\left(\alpha^2 + (\beta - y)^2\right)\left(\alpha^2 + (\beta + y)^2\right)} dy, \alpha > 0.$$

h) Očigledno je $b(y) = 0$ (zbog parnosti funkcije) i

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos yx dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}$$

(zadatak 3.84), tako da je

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4}} \cos yx dy$$

Furijeov integral date funkcije. ▶

3.116 Funkciju $f(x) = e^{-x}, x > 0$ predstaviti Furijeovim integralom produžujući je na celom $\mathbb{R}$ tako da bude:

a) parna; **b)** neparna.

◀ **a)** U ovom slučaju imamo funkciju

$$F(x) = \begin{cases} e^x, x \leq 0, \\ e^{-x}, x > 0, \end{cases}$$

koja zadovoljava dovoljne uslove za predstavljanje Furijeovim integralom i za nju je $b(y) = 0$ i

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos yx dx = \frac{2}{\pi(y^2+1)}.$$

Onda njen Furijeov integral glasi

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{y^2+1} dy.$$

b) Neparno raširenje funkcije $f(x) = e^{-x}, x > 0$ je

$$G(x) = \begin{cases} -e^x, x \leq 0, \\ e^{-x}, x > 0, \end{cases}$$

i za nju je $a(y) = 0$ i

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin yx dx = \frac{2y}{\pi(y^2+1)}.$$

Furijeov integral je

$$G(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{y \sin yx}{y^2+1} dy. \quad ▶$$

Ako je funkcija $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ apsolutno integrabilna na $[0, +\infty[$ i ima deo po deo neprekidan prvi izvod na svakom konačnom razmaku poluprave $x > 0$, onda postoje integrali

$$\overline{f}_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin yx dx \text{ i } \overline{f}_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos yx dx,$$

i zovu se redom sinusna i kosinusna Furijeova transformacija funkcije f. Formulom

$$\overline{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx$$

data je direktna kompleksna Furijeova transformacija funkcije f.

3.117 Naći direktnu sinusnu transformaciju funkcija:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x \le 2, \\ 3, 2 < x \le 4, \\ 0, 4 < x < +\infty; \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ 0, 1 < x < +\infty; \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \pi, \\ 0, \pi < x < +\infty. \end{cases}$

◄ **a)** Data funkcija zadovoljava napred nevedene uslove i

$$\begin{aligned} \overline{f}_s(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin yx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int\limits_0^2 \sin yx dx + 3 \int\limits_2^4 \sin yx dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{y} (1 + 2\cos 2y - 3\cos 4y). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \overline{f}_s(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^1 x \sin yx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x \cdot \left(-\frac{1}{y} \cos yx|_0^1 \right) + \int\limits_0^1 \frac{1}{y} \cos yx dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{y} \cos y + \frac{1}{y^2} \sin y \right). \end{aligned}$$

c)

$$\overline{f}_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos x \sin yx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{y}{y^2-1}(a + \cos y\pi). \blacktriangleright$$

3.118 Naći direktnu kosinusnu transformaciju funkcija:
a) $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ e^{1-x}, 1 < x < +\infty; \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le \pi, \\ 0, \pi < x < +\infty; \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ e^{-x}, 1 < x < +\infty. \end{cases}$

◀ **a)** Kako funkcija f zadovoljava navedene uslove to je direktna kosinusna Furijeova transformacija jednaka

$$\begin{aligned}
\overline{f}_c(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos yx dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^1 x \cos yx dx + \int_1^{+\infty} e^{1-x} \cos yx dx \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin y}{y} + \frac{\cos y - 1}{y^2} + \frac{\cos y - y \sin y}{y^2+1} \right).
\end{aligned}$$

b)

$$\overline{f}_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos yx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos yx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin y\pi}{y}.$$

c)

$$\begin{aligned}
\overline{f}_c(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^1 x \cos yx dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} \cos yx dx \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin y}{y} + \frac{\cos y - 1}{y^2} + \frac{\cos y - y \sin y}{e(y^2+1)} \right). \blacktriangleright
\end{aligned}$$

3.119 Naći direktne kompleksne Furijeove transformacije funkcija:
a) $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \alpha > 0$; **b)** $f(x) = xe^{-\alpha|x|}, \alpha > 0$.

◀ **a)** Primenom navedene formule imamo da je

$$\begin{aligned}\overline{f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|-iyx}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\cos yxdx - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\sin yxdx\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos yxdx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{\alpha^2+y^2}, \alpha > 0,\end{aligned}$$

direktna kompleksna Furijeova transformacija date funkcije.

b) U ovom primeru je

$$\begin{aligned}\overline{f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|-iyx}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\alpha|x|}\cos yxdx - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\alpha|x|}\sin yxdx\\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x}\sin yxdx = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha y}{\pi\left(\alpha^2+y^2\right)^2}, \alpha > 0.\end{aligned}$$

Primetimo da je integral $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x}\sin yxdx$ (ravnomerno konvergira po $y > 0$) izvod funkcije $y \mapsto \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin yxdx$ iz prethodnog primera. ▶

3.120 Odrediti neprekidnu funkciju $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ koja zadovoljava:

a) $\int\limits_{0}^{+\infty} g(y)\sin yxdy = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x, 0 \le x \le \pi,\\ 0, x > \pi;\end{cases}$

b) $\int\limits_{0}^{+\infty} g(y)\sin yxdy = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x, 0 \le x < \pi,\\ -\frac{\pi}{4}, x = \pi,\\ 0, x > \pi.\end{cases}$

◀ **a)** Nepoznata funkcija g je sinusna Furijeova transformacija funkcije $\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)$, gde je f funkcija zdesne strane. Neposredno se dobija da je

$$g(y) = \begin{cases} \frac{\sin \pi y}{1-y^2}, y \ne 1,\\ \frac{\pi}{2}, y = 1.\end{cases}$$

b) Na isti način kao pod a) imamo da je

$$g(y)=\begin{cases}\frac{y(1+\cos\pi y)}{y^2-1}, y\neq 1,\\ 0, y=1.\end{cases}\quad \blacktriangleright$$

3.7 Zadaci za samostalni rad

3.121 Ispitati ravnomernu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$ na $\mathbb{R}$.

3.122 Naći: **a)** $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

3.123 Ispitati ravnomernu konvergenciju redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ na $[0,1]$.

3.124 Ispitati neprekidnost funkcija:

a) $F(y)=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{\frac{\pi}{4}}(x^2+y^2+1)}$; **b)** $F(y)=\begin{cases}\int\limits_0^{\pi}\frac{y^2dx}{(x+|y|)\sqrt{\tan\frac{y}{2}}},\ y\neq 0,\\ 0,\ y=0;\end{cases}$

c) $F(y)=\begin{cases}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y^2dx}{\arctan(x^2+y^2)\sin x},\ y\neq 0,\\ 0, y=0;\end{cases}$ **d)** $F(y)=\int\limits_0^2\frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}dx$.

3.125 Naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{y\to0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x+y)}{x^2y^2+xy+1}dx$; **b)** $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_1^2\frac{y}{x+y}e^{-x^2y}dx$;

c) $\lim\limits_{y\to0}\int\limits_{y^2}^{1+y^2}\frac{\arcsin x}{xy+(1+y^2)\frac{1}{y^2}}dx$; **d)** $\lim\limits_{y\to0^+}\int\limits_{[y]}^{sgn y}\frac{\sin(xy)}{(x+y)y+1}dx$.

3.126 Proveriti mogućnost razmene limesa i integrala u sledećim slučajevima:

a) $\int\limits_0^1\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}dx,\ y\to0^+$; **b)** $\int\limits_0^1\frac{x^2}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx,\ y\to0^+$;

c) $\int\limits_0^2\frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}+y^2}dx,\ y\to+\infty$; **d)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x}\sin\frac{x^2}{y}dx,\ y\to\infty$.

3.127 Diferenciranjem po parametru naći vrednost integrala

a) $I(\lambda)=\int\limits_0^{\lambda}\frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}dx$; **b)** $I(m)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin^2x+m^2\cos^2x\right)dx,\ m>0$.

c) $I(a,b)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x},\ a>b>0$. **d)** $I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2-\sin^2x\right)dx$, $a>1$.

3.128 Izračunati $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx$ bar na dva načina, ako je $|a|<1$.

3.129 Izračunati $\int\limits_0^{1} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2-x}{\ln x}dx$.

3.130 Znajući da je $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ izračunati $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

3.131 Za realne brojeve α; $p>0$, $q>0$ izračunati parametarske integrale:

a) $\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-qx}-e^{-px}\right)\cos\alpha x\cdot\frac{1}{x}dx$; **b)** $\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-qx}-e^{-px}\right)\sin\alpha x\cdot\frac{1}{x^2}dx$.

3.132 Izračunati sledeće integrale $(\alpha\in\mathbb{R})$:

a) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}dx$; **b)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$; **c)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}dx$; **d)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x}{x^4}dx$;

e) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin^2 x}{x^3}dx$; **f)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{\cosh x}dx$; **g)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}dx,\alpha\geq 0$.

3.133 Izračunati sledeće nesvojstvene integrale $(a,\ b>0)$:

a) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}dx$; **b)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{b\ln(1+ax)-a\ln(1+bx)}{x^2}dx$;

c) $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}dx$; **d)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx$.

3.134 Dokazati formulu

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{A_1\cos a_1x+A_2\cos a_2x+\cdots+A_k\cos a_kx}{x}dx=-\ln a_1^{A_1}a_2^{A_2}\cdots a_k^{A_k},$$

ako je $a_1,a_2,...,a_k>0$ i $A_1+A_2+\cdots+A_k=0$.

3.135 Pretpostavljajući da konvergira integral zdesne strane, dokazati formulu:

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right)dx=\frac{1}{A}\int\limits_0^{+\infty} f\left(y^2\right)dy,\ \ (A,\ B>0)\,,$$

i na osnovu nje izračunati integral

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx,\ \ (a,\ b>0)\,.$$

3.136 Dokazati da je za sledeće redove

$$\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\left(\frac{e^{-x}}{n+1}-\frac{1}{n}\right),x\in\,]0,1[\ \text{ i }\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n},\ x\in\,]0,1[$$

moguće diferenciranje član po član.

3.137 Odrediti oblast konvergencije i sumu sledećih redova:

a) $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$;

d) $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

3.138 Dokazati formulu

$$\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{x^{n+k}}{n+m}=-x^{k-m}\left(\sum_{n=1}^{p-1+m}\frac{1}{n}x^n+\ln(1-x)\right),(p,k,m\in\mathbb{N}),$$

i na osnovu nje naći zbir reda

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}\quad\left(=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}\right).$$

3.139 Razviti funkciju $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ u stepeni red pa zatim naći $f^{(1000)}(0)$.

3.140 Razviti funkciju $f(x)=\ln(1+x)^{1+x}+\ln(1-x)^{1-x}$ u Maklorenov red, a zatim odrediti interval konvergencije tog reda.

3.141 Dat je stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}x^n$.

a) Odrediti poluprečnik i oblast konvergencije; **b)** Sabrati dati red;

c) Izračunati $\int\limits_0^1\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}x^n\right)dx$.

3.142 Funkciju $f(x)=x(\pi-x)$, $x\in\,]0,\pi[$ razviti u Furijeov red po sinusima i na osnovu toga naći sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

3.143 Neka je $0<h\le\frac{\pi}{2}$ i $f_a(x)$ $2\pi-$periodična funkcija definisana sa

$$f_h(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{2h},|x|\le 2h,\\ 0,2h<|x|\le\pi.\end{cases}$$

a) Napisati Furijeov red funkcije f_h i naći njegovu sumu;

b) Na osnovu a), izračunati zbirove:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\text{ za }0<h\le\frac{\pi}{2}\text{ i }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

3.144 Napisati Furijeov red funkcije $t\mapsto\max\{\sin t,0\}$, naći njegovu sumu a zatim odrediti zbirove brojnih redova: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{16n^2-1}$.

3.145 1. Razviti u Furijeov red funkciju f čiji je period 2π i koja je za $-\pi \leq x \leq \pi$ data sa $f(x) = x^2$;

2. Koristeći 1. izračunati $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

3.146 Razviti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x, \ 0 \leq x \leq 1, \\ 1, \ 1 < x < 2, \\ 3 - x, \ 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

3.147 Razviti u Furijeov red funkciju $f(x) = e^{ax}$ na intervalu $]a, b[$. Odrediti zbir tog reda.

3.148 Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, x \in [0,1], \\ 0, x \in [1, \pi], \end{cases}$$

predstaviti kao sumu trigonometrijskog reda po kosinusima. Izračunati zatim zbir reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 \frac{n}{2} \cos 9n}{n^2 - \pi^2}$.

3.149 Razvijanjem funkcije

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$$

na $[-\pi, \pi]$ u Furijeov red, naći zbir reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{1+n^2}$.

3.150 Dokazati da je za $|x| < 1$

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^6}{6} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^{11}}{11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^{16}}{16} + \cdots$$

3.151 Dokazati da je za $|x| < 1$

$$\int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots$$

3.152 Metodom diferenciranja integrala po parametru izvesti nove integrale iz datih:

a) $\int\limits_0^1 e^{ax} dx = \frac{e^a - 1}{a}$; **b)** $\int\limits_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{2}$;

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$; **d)** $\int\limits_0^{\pi} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{-a\left(e^{-a\pi} \cos b\pi - 1\right)}{a^2+b^2}$.

3.153 Diferenciranjem integrala po parametru dokazati sledeće formule:

a) $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ za $|xy| < 1$;

b) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-y^2}\right)$ za $x^2 + y^2 < 1$.

3.154 Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ se može diferencirati integral $\int\limits_0^1 x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}$?

3.155 Dokazati da niz funkcija $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$ konvergira ka $f(x) \equiv 0$ na intervalu $[0,1]$, a niz integrala $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$ ne konvergira ka integralu $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$. Izvesti odatle zaključak o ravnomernoj konvergenciji niza $f_n(x)$ na skupu $[0,1]$.

3.156 Dokazati da niz funkcija $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ konvergira ka $f(x) \equiv 0$ na intervalu $[0,1]$ ali ne ravnomerno, a niz integrala $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$ konvergira ka integralu $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

3.157 Izračunati parametarski integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(1+p^2x^2\right) - \arctan\left(1+q^2x^2\right)}{x^2} dx$.

3.158 Neka je $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Izračunati $\int\limits_0^1 F(x)\,dx$ i $F'(0)$ ako postoji.

3.159 Razložiti u Furijeov red funkcije $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ i $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ na $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

3.160 Izračunati $\int\limits_0^1 \frac{\ln x \cdot \ln\left(1+x+x^2+x^3\right)}{x} dx$.

3.161 Razložiti u stepeni red funkcije $f(x) = \ln\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)$ i $g(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right)$.

◀ $f(x) = -2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, $g(x) = \ln\left(1-x^3\right) - \ln\left(1-x^2\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n}$. ▶

3.162 Predstaviti funkciju Furijeovim integralom:

a) $f(x) = \left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, $a \neq 0$; **b)** $f(x) = 1$ za $-1 < x < 1$ i $f(x) = 0$ za $|x| > 1$.

3.163 Razložiti funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin x - \cos x, \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$$

u kosinusni Furijeov red.

3.164 Razlaganjem funkcije $x \mapsto \frac{1}{\cos \frac{x}{4}}, x \in [-\pi, \pi]$ u Furijeov red izračunati sumu

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

3.165 Ispitati konvergenciju a zatim izračunati integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{2x}}$.

3.166 Razložiti funkciju

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$$

u stepeni red.

3.167 Dokazati u odnosu na $n \in \mathbb{N}$ ravnomernu konvergenciju integrala

$$\int\limits_0^1 \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right) \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$$

uključujući oba singulariteta 0 i 1.

3.168 Pokazati da je

$$\int\limits_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{1-x} dx = \Gamma(p+1) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}, \ p > 0.$$

3.169 Naći $\lim\limits_{x \to 0^+} x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$

Glava 4

Dodatak

4.1 Neki integrali, sume i proizvodi

Ojlerovi integrali: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

Ojler-Poasonov integral: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

Frenelovi integrali: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Dirihleov integral: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} sgn a.$

Rabeov integral: $\int\limits_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx = \ln \sqrt{2\pi}$, gde je Γ gama funkcija.

Frulanijeva formula: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, a > 0, b > 0$ ako je f neprekidna funkcija i integral $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ konvergira za svako $A > 0$.

Dva važna integrala: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, n = 2k \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, n = 2k+1. \end{cases}$

Valisova formula: $\frac{\pi}{2} = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$

Vijetova formula:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots$$

Stirlingova formula:

$n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$ $(0 < \theta_n < 1)$ tj. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to +\infty.$

Faktorijeli: $0! = 1$, $n! = n(n-1)(n-2)\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zatim je

$$\begin{aligned}
(2n)!! &= 2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2 = 2^n \cdot n!, \\
(2n+1)!! &= (2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 \\
&= \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}.
\end{aligned}$$

Ojlerova formula: Ako je x realan broj onda je $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Razvijanje nekih elementarnih funkcija u stepeni red

$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots, 0 < x < 2$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1$
$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots, 0 < x \leq 2$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, -1 \leq x \leq 1$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots, -1 \leq x \leq 1$
$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \cdots, -1 < x < 1$ [1]

Sume oblika: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k = 1, 2, 3, ...$
Podprogram "Maple" daje:
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{945}\pi^6$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{1}{9450}\pi^8$,
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{1}{93555}\pi^{10}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691}{638512875}\pi^{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{14}} = \frac{2}{18243225}\pi^{14}$,
....
....
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{38}} = \frac{30842\,04119\,83322}{2403\,46761\,84923\,75776\,34327\,68839\,84375}\pi^{38}$,
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{40}} = \frac{2\,61082\,71849\,64491\,22051}{2\,00804\,31172\,28963\,88267\,98401\,12839\,05566\,40625}\pi^{40}$,

[1] Konvergencija u $x = \pm 1$ zavisi od broja k.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{42}} = \frac{30\,40195\,28783\,61416\,05382}{230\,77891\,89818\,96012\,77125\,94427\,86466\,74277\,34375}\pi^{42},$

....

....

Vidimo da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = C \cdot \pi^{2k}$, gde je $C = \frac{p}{q}$, p, $q \in \mathbb{N}$. Da li je za svako $k > 1$ imenilac q deljiv sa 5?

4.2 Od S. Ramanuđana

Neke Ramanuđanove[2] formule

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= \sqrt{8}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1103 + 26390n)\,(2n-1)!!\,(4n-1)!!}{99^{4n+2}32^n\,(n!)^3} \\ \pi &= \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_{(n)}\left(\frac{1}{6}\right)_{(n)}\left(\frac{5}{6}\right)_{(n)}}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1} \end{aligned}$$

gde je $(x)_{(n)} = x\,(x+1)\,(x+2)\cdots(x+n-1)\,.$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26390n)}{(n!)^4\,396^{4n}}.$$

Ramanuđanova "najlepša" formula:

$$1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)!!} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{1+\frac{3}{1+\frac{4}{1+\cdots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Još neki **Ramanuđanovi** biseri:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{8}\sqrt{1 - \cdots}}}}} \\ -2 &= \sqrt[3]{-6 + \sqrt[3]{-6 + \sqrt[3]{-6 + \cdots}}} \\ \ln x + \gamma &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n!n} = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{96} + \cdots \end{aligned}$$

[2] Srinivasa Ramanuđan (1887-1920): "Jednačina za mene nema nikakvo značenje ako nije izraz Božje misli".

gde je $\gamma = 0.5772157....$**Ojler-Maskeronijeva** konstanta.

$$\frac{1}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-4\pi}}{1+\cdots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \cdot e\frac{2}{5^{\pi}},$$

primećujemo da se član u zagradi može svesti na $\sqrt{2+\varphi}-\varphi$, gde je φ zlatni presek.

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} - \frac{e^{-a^2}}{2a+\frac{1}{a+\frac{2}{2a+\frac{3}{a+\frac{4}{2a+\cdots}}}}}.$$

$$\begin{aligned} 1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right) + \cdots &= \frac{2}{\pi}. \\ \frac{1}{1^3\cdot 2^3} + \frac{1}{2^3\cdot 3^3} + \frac{1}{3^3\cdot 4^3} + \frac{1}{4^3\cdot 5^3}\cdots &= 1-\pi^2. \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{4^3-4} + \frac{1}{6^3-6} + \cdots &= \ln 2. \end{aligned}$$

Ujedinjujuća **Ramanuđanova** formula. Ovaj Ramanuđanov dragulj povezuje broj π, prirodni logaritam i zlatni presek.

$$\frac{\pi^2}{6} - 3\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)^2}$$

Neka čitalac proba da izvede sledeći **Ramanuđanov** biser:

$$\frac{x}{2x-1} = 1 - \frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

Ramanuđan i prosti brojevi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_n}{e^{nx}} = \frac{2}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}} + \frac{5}{e^{3x}} + \frac{7}{e^{5x}} + \cdots \approx -\frac{\ln x}{x^2}, x \to 0.$$

Vidimo da navedena formula povezuje konstantu e, logaritam i proste brojeve.

Koreni u gnezdu. Ramanuđan je predstavio ove korene u gnezdu u *Indijskom magazinu o matematici*:

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Beskonačan proizvod. Od **Ramanuđana**:

$$\prod_{p}^{+\infty} \frac{p^2+1}{p^2-1} = \frac{5}{2}.$$

U ovom beskonačnom proizvodu p prolazi kroz skup prostih brojeva.

Ramanuđan se posebno isticao u pronalaženju beskonačnih razlomaka. Evo jednog primera:

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1}{1+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{4+\cdots}}}}.$$

Landau-Ramanuđanova konstanta K iznosi 0.764223653....Neka $N(x)$ označava broj pozitivnih celih brojeva, ne većih od x, koji se mogu predstaviti kao zbir kvadrata. Edmund Landau i Srinivasa Ramanuđan su nezavisno dokazali da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} \cdot N(x) = K.$$

Na primer, $N(8) = 5$ jer je $1 = 0^2+1^2, 2 = 1^2+1^2, 4 = 0^2+2^2, 5 = 1^2+2^2$ i $8 = 2^2+2^2$. K je ovde dato kao

$$K = \sqrt{\frac{1}{2} \prod_{p=4k+3} \frac{1}{1-p^{-2}}} = 0.764223653...$$

gde je p prost broj oblika $4k+3$.

Ramanuđan i broj π. Ramanuđan je uživao u izračunavanju aproksimacije broja π. Evo jedne lepe:

$$\pi \approx \frac{99^2}{2206\sqrt{2}} \text{ (tačno do osam mesta).}$$

4.3 Ostale zanimljivosti

1. Funkcija $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ je neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ (neka student obrazloži), ali nije diferencijabilna u nijednoj tački $x \in \mathbb{R}$ (dokazao engleski matematičar G. H. Hardy, 1916 godine).

2. Koje brojeve predstavljaju sledeće dve formule:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}.$$

(Pogledati [16])

3. Dirihle je 1837 godine, primerom $f(x)=\sin x^2$, pokazao da $f(x)\to 0$ kad $x\to+\infty$ nije neophodan uslov konvergencije integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

4. Dirihle-Abelov kriterijum ravnomerne konvergencije funkcionalnih redova dokazao je G. H. Hardy, Proc. London. Math. Soc. (2), IV, 247-265 (1907).

5. Formula $e^{i\pi}+2\varphi=\sqrt{5}$, povezuje brojeve e,π,i sa zlatnim presekom $\varphi=1.61803......$

6. U jednakosti $\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ integral zdesne strane apsolutno konvergira a sleve ne!!!

7. L. Ojler je tvrdio da je suma reda

$$\cdots\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3$$

jednaka 0, na osnovu toga što je

$$\begin{aligned} x+x^2+x^3+\cdots &= \frac{x}{1-x}\\ \text{i }1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots &= \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

Neka student obrazloži zašto je dati red divergentan za svako x.

8. Trigonometrijski red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ konvergira za svako realno x, a ipak nije Furijeov red ni jedne funkcije (komunikacija između Lebega i Fatua-videti [24]).

9. Približna vrednost broja π. Uz pomoć sledeće malo poznate formule izračunat je tačan broj decimala na neverovatnih 42 milijarde decimala; ali ipak, to nije savršena formula za broj π, to je samo veoma tačna pretpostavka. Simbol $\approx$ označava približnu vrednost (Borvin i Borvin, *Neobični nizovi i obmana velike preciznosti*, 1992).

$$\pi\approx\left(\frac{1}{10^5}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{n^2}{10^{10}}\right)}\right)^2.$$

10. Definicija matematičara (Čarls Darvin): ”Matematičar je slep čovek u mračnoj sobi koji traži crnu mačku koja nije u njoj”.

Literatura

[1] Adamović D., Zbirka rešenih zadataka, Skriptarnica PMF, Beograd 1953.

[2] Adnađević D., Kadelburg Z., Matematička Analiza I-II, I-Naučna knjiga 1990., II-Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1991., Beograd.

[3] Ašić M., Vukmirović J., Zbirka zadataka iz matematičke Analize II, Naučna knjiga, Beograd 1975.

[4] Butuzov F.V., i ostali, Matematička Analiza kroz pitanja i zadatke, I, II, (na ruskom), Viša škola, Moskva, I-1984., II-1988.

[5] Demidovič B.P., Zbirka zadataka iz matematičke analize, (na ruskom), Nauka, Moskva 1972.

[6] Fihtengoljc G.M., Kurs diferencijalnog i integralnog računa, I-III, (na ruskom), Nauka, Moskva 1969.

[7] Gajić Lj., Pilipović S., Zbirka zadataka iz analize I-drugi deo, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1998.

[8] Lazarević I., Višedimenzionalna matematička analiza I, Orion Art 2003; II, Orion Art 2004; Orion Art 2005.

[9] Lažetić N., Matematika II/1,II/2, II/1-Naučna knjiga 1991., II/2-Naučna knjiga 1995.

[10] Lefort J., Algebra i Analiza, (na francuskom), Dunod, Paris 1964.

[11] Ljaško I.I., i ostali, Zbirka zadataka iz matematičke analize, (na ruskom), Viša škola, Kiev, I-1977., II-1979.

[12] Merkle M., Matematička analiza, pregled teorije i zadaci, Gros knjiga, Beograd 1994.

[13] Miličić P., Uščumlić M., Zbirka zadataka iz više matematike I, Naučna knjiga, Beograd 1988.

[14] Perišić D., Pilipović S., Stojanović M., Funkcije više promenljivih, diferencijalni i integralni račun, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997.

[15] Petrović Lj., Popović B., Matematika II, Rešeni ispitni zadaci, PMF Kragujevac, Kragujevac 1994.

[16] Pikover K., Strast za matematikom (prevod sa engleskog), NNK international, Beograd 2007.

[17] Radenović S., Matematička analiza I, Metodska zbirka zadataka, NAŠA KNJIGA D.O.O, Beograd 2007.

[18] Rosić N., Matematika II, Zbirka rešenih ispitnih zadataka, Mašinski fakultet, Kragujevac 1975.

[19] Rudin W., Osnovi matematičke analize, (na ruskom), Mir, Moskva 1976.

[20] Sadovniči V.A., Podkolzin A.S., Zadaci sa studentskih olimpijada iz matematike, (na ruskom), Nauka, Moskva 1978.

[21] Takači Đ., Radenović S., Takači A., Zbirka zadataka iz redova, PMF Kragujevac, Kragujevac 2000.

[22] Takači Đ., Takači A., Zbirka zadataka iz analize I, prvi deo, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997.

[23] Zorič V.A., Matematička analiza I-II, (na ruskom), Nauka, Moskva, I-1981., II-1984.

[24] Whittaker E.T., Watson G.N., A course of modern analysis, fourth edition, Cambridge, 1927.