АНАЛИЗА 3

предавања код проф. др. Милоша Арсеновића

Садржај:

→ дефиниције, теореме, ставови, леме, формулације, пропозиције...

→ докази и изведена формула

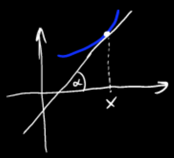
→ примери и задаци

1°) $n=1$ $\quad I=(a,b),\ [a,b],\ (a,+\infty)\ldots$

$n=2$

} области дефинисаности

2°)



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{1+e^{y}x^{2}} \qquad f'(a,b)=? \qquad \cancel{\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)}{(x,y)-(a,b)}} \quad \text{НЕ!}$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a),\ x\to a$$

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(h),\ h\to 0$$

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+L_1h+L_2k+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

⊛ У том случају извод није број као у $n=1$, већ линеарно пресликавање.

Даље: $f'(a,b):(h,k)\to L_1h+L_2k$

$$L_1=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \qquad L_2=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Метрика у $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

$$x=(x_1,\ldots,x_n),\ y=(y_1,\ldots,y_n)$$

Реални векторски простор где је могуће сабирање и множење скаларом.

$x+y,\ \lambda x \quad \lambda\in\mathbb{R}$

$n \rightsquigarrow \dim(\text{В.П.})$

<u>База:</u>

$e_1=(1,0,0,\ldots,0)$

$e_2=(0,1,0,\ldots,0)$

$e_3=(0,0,1,\ldots,0)$

$\vdots$

$e_n=(0,0,0,\ldots,1)$

Односно свака вектор се може представити као:

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$$

Скаларни производ:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j \qquad \langle x,x\rangle\geq 0,\quad \langle x,x\rangle=0\Rightarrow x=0$$

<u>Норма:</u>

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

↳ <u>Својства:</u>

1) $\|x\|=0 \iff x=0$
2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\| \quad \lambda\in\mathbb{R}$
3) $\|x+y\|\leq\|x\|\cdot\|y\|$
   ↳ $\|x^1+x^2+\cdots+x^n\|\leq\|x^1\|+\|x^2\|+\cdots+\|x^n\|$
4) $\|-x\|=\|x\|,\quad \|y-x\|=\|x-y\|$

<u>Коши - Шварц - Буњаковски</u>

$$|\langle x,x\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

Растојање у $\mathbb{R}^n$

Деф (Стандардно еуклидско растојање)

Растојање у $\mathbb{R}^n$ је функција $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ задата формулом

$$d(x,y) = \|y-x\| \quad \text{за} \quad x,y \in \mathbb{R}^n$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$

$y=(y_1,\dots,y_n)$

$y-x=(y_1-x_1,\dots,y_n-x_n)$

$$d(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$$

Став Својства растојања:

1°) $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

2°) $d(x,y)=d(y,x)$

3°) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ неједнакост троугла

$$\|z-x\| = \|(z-y)+(y-x)\| \le \|z-y\|+\|y-x\| = d(y,z)+d(x,y)$$

4°) $d(x,y)\ge 0$

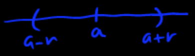
Специјалне класе подскупова од $\mathbb{R}^n$

Деф Лопта са центром у тачки $a\in\mathbb{R}^n$ и полупречника $r>0$ је скуп:

$B(a,r) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|<r\}$ ⇝ отворена лопта

$B[a,r] = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|\le r\}$ ⇝ затворена лопта

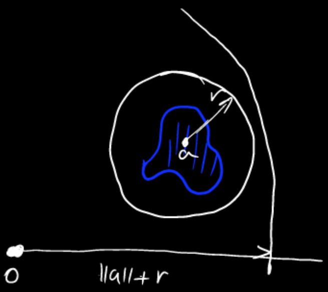
$n=1$ $\quad B(a,r)=(a-r,a+r)$



$n=2$ $\quad B(a,r) = x^2+y^2-r^2$

Деф Скуп $A\subset\mathbb{R}^n$ је ограничен ако постоји $a\in\mathbb{R}^n$ и $r>0$ такви да је $A\subset B(a,r)$

- Следи $A\subset B(0,\rho)$, $\rho=\|a\|+r$



Став Својства ограничених скупова:

- Подскуп ограниченог скупа је ограничен
- Ако су $A_1,\dots,A_k$ ограничени $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ ограничен

$r=\max\limits_{1\le j\le k} r_j$

Деф Подскуп U од $\mathbb{R}^n$ је отворен ако

$(\forall a\in U)(\exists r>0)\ B(a,r)\subset U$

Став Отворена лопта $(B(a,r))$ је отворен скуп.

$x\in B(a,r)$

$B(x,\rho)\subset B(a,r)$

$\rho=r-d(x,a)$

Тео

1°) Ако су $U_1,\dots,U_k$ отворени скупови онда је $\bigcap_{j=1}^{k} U_j$ отворен.

2°) Ако су U_α $(\alpha\in A)$ отворени онда је и $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ отворен.

3°) $\mathbb{R}^n$ и $\emptyset$ су отворени.

1°) $a\in\bigcap_{j=1}^{k} U_j = V$

$a\in U_1 \quad B(a,r_1)\subset U_1$ за неко $r_1>0$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a\in U_k \quad B(a,r_k)\subset U_k$ за неко $r_k>0$

$r=\min r_j>0$

$B(a,r)\subset V_1$

2°) $a\in\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = V \Rightarrow a\in U_{\alpha_0}$ за неко $\alpha_0\in A \Rightarrow (\exists r>0)\ B(a,r)\subset U_{\alpha_0}\subset V$

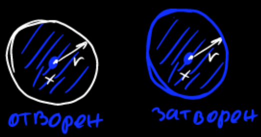
3°) тривијално

Деф Подскуп F од $\mathbb{R}^n$ је затворен ако је $F^c=\mathbb{R}^n\setminus F$ отворен.

примери:

1) $B[x,r]$ је затворен

2) $\mathbb{R}^n\setminus B(x,r)$



1) $B[x,r]^c=\{y\in\mathbb{R}^n \mid d(x,y)>r\}$

$\rho=\|y-x\|-r>0$

Тео

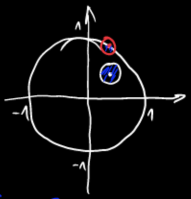
1°) Ако су $F_1,\dots,F_k$ затворени скупови онда је $\bigcup_{j=1}^{k} F_j$ затворен.

2°) Ако су F_α $(\alpha\in A)$ затворени онда је $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ затворен.

3°) $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ су затворени.

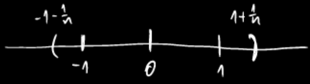
2°) $\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c \overset{\text{Де Морган}}{=\!=} \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c$

пример:



1°) $n=2$ $B[0,1]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ је затворен

2°) $n=1$ $V_n=\left(-1-\frac{1}{n},\,1+\frac{1}{n}\right)$



$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n=[-1,1]$

Проблем Дат је $A\subset\mathbb{R}^n$. Да ли постоји најмањи (по инклузији) затворен скуп који садржи A? (Одговор → Да)

$\mathcal{F}_A=\{F \mid A\subset F \text{ и } F \text{ је затворен}\}$

$\bigcap_{F\in\mathcal{F}_A} F = \bigcap_{\substack{F \text{ затворен}\\ A\subset F}} F = \overline{A}$ (деф ознака) → затворење скупа A

Проблем Дат је $A \subset \mathbb{R}^n$. Да ли постоји највећи (по инклузији) отворен скуп који је садржан у A?

$$\mathcal{O}_A = \{ V : V \text{ отворен и } V \subset A \} \qquad \bigcup_{V \in \mathcal{O}_A} V = A^\circ \text{ (унутрашњост)}$$

$$\operatorname{int} A = A^\circ = \bigcup_{\substack{V \subset A \\ V \text{ је отворен}}} V$$ унутрашњост скупа A (највећи отворен подскуп од A)

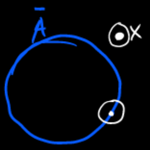
$$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$$

28.02. 2024.

Став За $A \subset \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$ су следећа тврђења еквивалентна.

1°) $x \in \bar{A}$

2°) $(\forall \varepsilon > 0)(B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$



$1° \Rightarrow 2°$ ППС $\rightsquigarrow$ За неко $\varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

Дакле $\underset{\text{затворен}}{B(x,\varepsilon)^c} \subset A \Rightarrow \bar{A} \subset B(x,\varepsilon)^c \Rightarrow x \notin \bar{A}$ ↯

$2° \Rightarrow 1°$ ППС $\rightsquigarrow$ $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{A}^c = U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ B(x,\varepsilon) \subset U$

$B(x,\varepsilon) \cap \bar{A} = \emptyset$ ↯

Подсетник $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq \sqrt{x_j^2} = |x_j|$

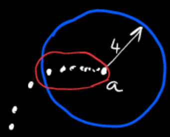
Низови у $\mathbb{R}^k$

Деф Кажемо да низ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ тачака $\mathbb{R}^k$ конвергира ка тачки $a \in \mathbb{R}^k$ и пишемо: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ уколико је $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$

тачније: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon)$

Став Сваки конвергентан низ у $\mathbb{R}^k$ је ограничен.

Доказ



Став (Јединственост граничне вредности)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a' \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'' \end{array}\right\} \Rightarrow a' = a''$$

Задатак Нека је $k=2$ $\quad a_n=\left(\frac{n+1}{n+3}, \frac{2n+7}{3n+2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\left(1, \frac{2}{3}\right)$$

Тео Нека је $a_n=(a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^k)$ низ у $\mathbb{R}^k$. и нека је $a=(a_1, a_2, \dots, a_k)$ из $\mathbb{R}^k$.

Тада су сл. тврђења еквивалентна:

1°) $\lim_{n\to\infty} a_n=a$

2°) $\lim_{n\to\infty} a_n^1=a^1, \lim_{n\to\infty} a_n^2=a^2, \dots, \lim_{n\to\infty} a_n^k=a^k$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^j=a^j, \quad 1\le j\le k$$

Доказ:

1° => 2° $\quad a_n = a = (a_n^1-a^1, a_n^2-a^2, \dots, a_n^k-a^k)$

$0<|a_n^1-a^1|$

2° => 1° $\quad 0\le \|a_n-a\| \le \underset{\downarrow\,0}{|a_n^1-a^1|}+\underset{\downarrow\,0}{|a_n^2-a^2|}+\dots+\underset{\downarrow\,0}{|a_n^k-a^k|}$

Следи $\lim_{n\to\infty}\|a_n-a\|=0$

Деф Низ a_n у $\mathbb{R}^k$ је Кошијев ако важи следеће:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(\varepsilon))(m,n\ge n_0 \Rightarrow \|a_m-a_n\|<\varepsilon)$$

Став Сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}^k$ је конвергентан.

Доказ $\quad 0<|a_n^j-a_m^j|\le\|a_n-a_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

Следи да је низ $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ Кошијев $\forall j=1,2,\dots,k$. Следи да $\forall j=1,2,\dots,k$ постоји $\lim_{n\to\infty} a_n^j=a^j$. Теорема 2° => 1° завршава доказ.

Тео Сваки ограничен низ у $\mathbb{R}^k$ садржи конвергентан подниз.

Доказ $\quad k=2 \quad a_n=(x_n, y_n)$

$-M\le x_n\le M$

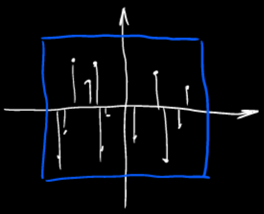
$-M\le y_n\le M$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

Постоји подниз x_{n_k} који конвергира

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x \qquad a_{n_{k_l}}\to a=(x,y)$

!! y_{n_k}



$x_2 \quad x_4 \quad x_6 \quad x_8 \dots x_{20}\dots x_{30} \longrightarrow x \qquad x_{n_{k_l}}\to x$

$y_2 \quad y_4 \quad y_6 \quad y_8 \dots y_{20}\dots y_{30} \longrightarrow y \qquad y_{n_{k_l}}\to y$

Став Нека је $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n=b$ (у $\mathbb{R}^k$)

Тада је $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$

Додатно, ако је $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$ (у $\mathbb{R}$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\lambda_n a_n=\lambda a$

Доказ

$\|(a_n+b_n)-(a+b)\| = \|(a_n-a)+(b_n-b)\| \leq \|a_n-a\| + \|b_n-b\| \,/\, \lim$

$\lim \|a_n-a\| = 0 \ \wedge\ \lim \|b_n-b\| = 0$

$\|\lambda_n a_n - \lambda a\| = \|(\lambda_n a_n - \lambda a_n) + (\lambda a_n - \lambda a)\| \leq \|\lambda_n a_n - \lambda a_n\| + \|\lambda a_n - \lambda a\| =$

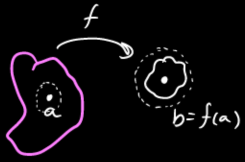
$= |\lambda_n - \lambda| \cdot \underbrace{\|a_n\|}_{\text{ограничено}} + |\lambda| \cdot \|a_n - a\| \leq M \cdot |\lambda_n - \lambda| + |\lambda| \cdot \|a_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Непрекидност функција

Деф Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ и нека $f: A \to \mathbb{R}^m$. Кажемо да је f непрекидна у у тачки a из A ако:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|x-a\| < \delta \wedge x \in A \Rightarrow \|f(a)-f(x)\| < \varepsilon)$

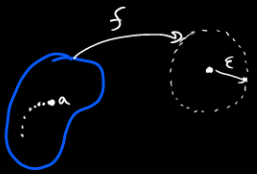
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(f(B(a,\delta) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon))$



Теф Нека $\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ и нека је $a \in A$.

А) Ако је f непрекидна у тачки a и ако је $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ низ тачака из A такав да је $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ онда је $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(a)$

Б) Претпоставимо да је $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(a)$ за сваки низ $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ тачака из A који конвергирају ка a.
Тада је f непрекидна у a.



А) Задајмо $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists \delta > 0$

$\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$

$\exists k_0: k \geq k_0 \Rightarrow \|a_k - a\| < \delta$

$\Downarrow$

$\|f(a_k) - f(a)\| < \varepsilon$

Б) ПМС $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x: \|x-a\| < \delta$ и $x \in A$ али $\|f(x)-f(a)\| \geq \varepsilon)$

$\delta = \frac{1}{k} \quad x_k \in A \quad \|x_k - a\| < \frac{1}{k} \quad \|f(x_k) - f(a)\| \geq \varepsilon$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ али $f(x_k) \not\to f(a)$

Деф Ако је f непрекидна у свакој тачки домена онда је она и непрекидна на домену.

Теф Композиција две непрекидне функције је непрекидна функција.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \supset A \ni a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h = g\circ f"'] & B \subset \mathbb{R}^m,\ B \ni f(a) = b \arrow[d, "g"] \\
& \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}$$

- f непрекидна у a, g непрекидна у b $\Rightarrow$ $h = g \circ f: A \to \mathbb{R}^p$ непрекидна у a.
- Специјално, ако су f и g непрекидне онда је и $g \circ f$ непрекидна.

$a_k \to a \Rightarrow f(a_k) \to f(a) \overset{A)}{\Rightarrow} \underbrace{g(f(a_k))}_{h(a_k)} \to \underbrace{g(f(a))}_{h(a)}$

Доказано је $a_k \to a \Rightarrow h(a_k) \to h(a)$

Б) даје h је непрекидна у a.

Примери непрекидних функција

- константна функција (за неко $\varepsilon > 0$ може било које $\delta > 0$)
- $|i|_A$ $(\delta = \varepsilon)$
- $\mathbb{R}^k \xrightarrow{pr_j} \mathbb{R}$ $\quad pr_j(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_j$

$$|pr_j x - pr_j a| = |x_j - a_j| \leq \|x - a\| \quad (\delta = \varepsilon)$$

Став: Нека су $f, g : (A \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ непрекидне. $f + g$ је непрекидна.

$a \in A \quad \underset{A}{a_k \to a} \quad \left.\begin{matrix} f(a_k) \to f(a) \\ g(a_k) \to g(a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a_k) + g(a_k) \Rightarrow f(a) + g(a)$

Став: Нека су $f, g : (A \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ непрекидне. $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ је непрекидна.

- Такође је $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ непрекидна уз услов $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$.

Примери непрекидних функција II

- $n = 3 \quad f(x, y, z) = xz$
- $n = 3 \quad f(x, y, z) = xz + y^2 zx$
- $n = 3 \quad g(x, y, z) = e^{x^2 - 1 + 3zx}$

непрекидне.

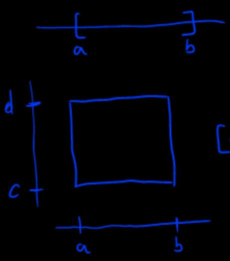
- $\|x\| \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрекидна

Деф: Скуп $K \subset \mathbb{R}^n$ је компактан ако је затворен и ограничен.

Пример

$n = 1$

$n = 2$



$[a, b] \times [c, d]$

Тео: $K \underset{\text{непр.}}{\xrightarrow{f}} \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ компактан. Тада је f ограничена и узима највећу и најмању вредност на K.

Пропозиција

Шта значи $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$?

$f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, a је тачка нагомилавања скупа A, $b \in \mathbb{R}^m$

$(\forall \varepsilon > 0)$ $B(a, \varepsilon) \cap A$ је бесконачан.

Деф (Гранична вредност) За свако $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тако да је $\|f(x)-b\|<\varepsilon$ кад год је $0<\|x-a\|<\delta$, $x\in A$.

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A/\{a\} \\ b, & x=a \end{cases}$$

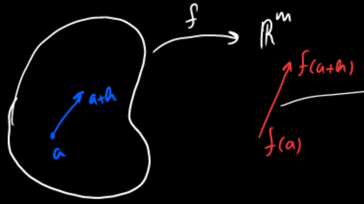
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \iff \tilde{f}$ је непрекидна у a

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \iff (\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty})(\forall n\in\mathbb{N} \land a_n\in A/\{a\})\left(\lim_{n\to\infty} a_n=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=b\right)$$

Диференцијални рачун у $\mathbb{R}^n$

Диференцијабилне функције

Деф Нека је $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и нека $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$. Кажемо да је f диференцијабилна у тачки a отвореног скупа Ω ако постоји линеарно пресликавање $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ такво да је $f(a+h)=f(a)+Lh+o(h)$, $h\to 0$



$$f(a+h)-f(a)=Lh+o(h),\quad h\to 0$$

$$f(a+h)-f(a)-Lh=o(h),\quad h\to 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-Lh\|}{\|h\|}=0$$

морамо додати због простора $\mathbb{R}^n$.

$L=f'(a)$ ⇝ после кад формулишемо изводе ово ће бити потпуно.

Тео Свака функција f која је диференцијабилна (у тачки a) је непрекидна (у тачки a)

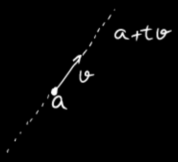
диференцијабилност $\Rightarrow$ непрекидност

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\left[f(a)+\overset{0}{\cancel{Lh}}+\overset{0}{\cancel{o(h)}}\right]=f(a)$$

Деф Нека је a из отвореног скупа $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и нека $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$. Затим, нека је $v\in\mathbb{R}^n$. Уколико постоји

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+tv)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

онда кажемо да f има извод у правцу вектора v и обележавамо га са $\frac{\partial f}{\partial v}(a)\in\mathbb{R}^m$



Посл Ако је $v=e_j$ (базни вектор) $\frac{\partial f}{\partial e_j}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ што називамо парцијалним изводима (ако постоје)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\dots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{t}$$

$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \qquad v \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a)+Ltv+o(tv)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tLv+o(tv)}{t} = Lv + \lim_{t\to 0}\frac{o(tv)}{t} = Lv$$

Ако је f диференцијабилна у $a\in\Omega$ онда $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ постоји за свако v из $\mathbb{R}^n$ и

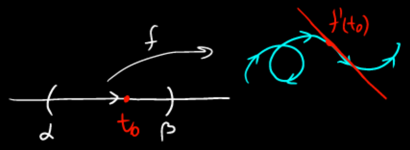
$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Lv = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

Дакле, L из дефиниције је јединствено одређено, зовемо га изводом од f у тачки a и означавамо са $f'(a)$. Дакле $f(a+h) = f(a)+f'(a)h+o(h), h\to 0$

$$f(a)+L_1h+o(h) = f(a+h) = f(a)+L_2h+o(h) \implies L_1 = L_2$$

$$f'(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) \qquad\qquad f'(a)e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

случај $n=1$: $\quad f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^m$



$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

Дакле ово је брзина у времену t_0 или у очима математике тангента на криву.

Примери.

1°) $f(x) = b,\ x\in\Omega,\ b\in\mathbb{R}^m \implies f'(x) = 0\ (\forall x\in\Omega)$

2°) $f(x) = Ax$ где је $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ линеарно. $\qquad f'(x) = A\ (\forall x\in\Omega)$

$f(x+h) = A(x+h) = Ax + Ah = f(x) + Ah$

3°) $pr_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \quad (x_1,\dots,x_n)\longmapsto x_j \qquad pr_j'(a) = pr_j$

СТАВ Нека су $f,g:\Omega\to\mathbb{R}^m$ диференцијабилна у $a\in\Omega$. Онда важи:

1) $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$

2) $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \quad , \lambda\in\mathbb{R}$

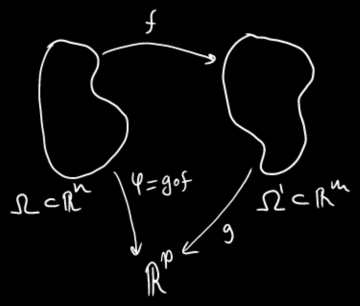
1) $\left.\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+o(h) \\ g(a+h) &= g(a)+g'(a)h+o(h)\end{aligned}\right\}\ (f+g)(a+h) = (f+g)(a) + \underbrace{[f'(a)+g'(a)]}_{(f+g)'(a)}h + o(h)$

Из А1 знамо: $[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$ Међутим у $\mathbb{R}^n$ нам смета што немамо класично множење ф-ја већ композицију.

ТЕО (Извод сложене функције)

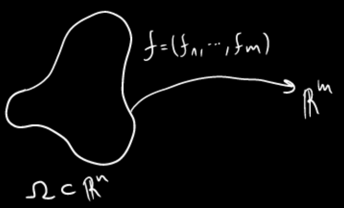
Нека су $f'(a)$ и $g'(b) = g'(f(a))$ постоје. Тада је $\varphi = g\circ f$ диференцијабилна у тачки a из Ω и важи:

$$\underset{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p}{\varphi'(a)} = \underset{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p}{g'(f(a))} \circ \underset{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m}{f'(a)}$$



$$\varphi(a+h) = g(f(a+h)) = g(\overbrace{f(a)}^{b}+\overbrace{f'(a)h+o(h)}^{k})$$

$$g(b+k) = g(b)+g'(b)k+o(k) = g(f(a))+g'(f(a))(f'(a)h+o(h)) + o(f'(a)h+o(h)) =$$
$$= \varphi(a) + g'(f(a))f'(a)h + g'(f(a))\,o(h) + o(f'(a)h+o(h))$$



$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega$

$f_j : \Omega \to \mathbb{R}$

Тео f је диференцијабилна (у тачки $a \in \Omega$) ако и само ако су све њене компоненте ($f_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le m$) диференцијабилне (у тачки $a \in \Omega$).

Доказ:

$\Rightarrow$) $f_j = pr_j \circ f$ за свако $1 \le j \le m$

$f_j'(a) = pr_j'(f(a)) \circ f'(a) \qquad f_j'(a) = pr_j \circ f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Leftarrow$)

$$f_1(a+h) = f_1(a) + f_1'(a)h + \sigma(h)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f_m(a+h) = f_m(a) + f_m'(a)h + \sigma(h)$$

$$f(a+h) = (f_1(a+h), \dots, f_m(a+h)) = (f_1(a) + f_1'(a)h + \sigma(h), \dots, f_m(a) + f_m'(a)h + \sigma(h)) =$$
$$= (f_1(a), \dots, f_m(a)) + (f_1'(a)h, \dots, f_m'(a)h) + (\sigma(h), \dots, \sigma(h))$$
$$= f(a) + f'(a)h + \sigma(h)$$

$$f_j'(a) = pr_j \circ f'(a) \qquad f'(a)h = (f_1'(a)h, \dots, f_m'(a)h),\ h \in \mathbb{R}^n$$

Форм $f'(a)$ се задаје матрицом од m врста и n колона.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathbb{R}^m \ni f'(a)e_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & & & f'(a)e_n \in \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ J_f(a) = & \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}(a) \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1(x), \dots, f_m(x))\Big|_{x=a} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a)\right)$$

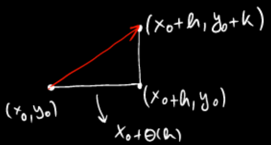
— И ово називамо Јакобијева матрица за f (у тачки a).

Кад имамо $m=1$ $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ „набла" (градијент функције)

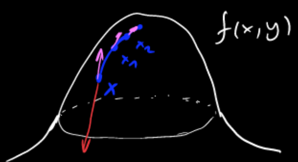
Тео Нека је $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (за $1 \le j \le n$ постоје у Ω) и непрекидни су у тачки a. Тада је f диференцијабилна у тачки a.

Доказ: $m = 1$, $n = 2$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(h), y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0 + \eta(k))k =$$
$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sigma(1)\right]h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \sigma(1)\right]k = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \dots + \sigma(\sqrt{h^2+k^2})$$

Деф Нека је $f:\Omega\to\mathbb{R}$ за $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Тада можемо $\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ означити као градијент функције у тачки x.



$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+o(h),\ h\to 0 \qquad h=(h_1,\dots,h_n)$$

$$f(x+h)=f(x)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n+o(h),\ h\to 0$$

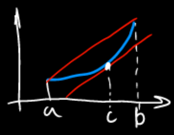
$$f(x+h)=f(x)+\langle\nabla f(x),h\rangle+o(h),\ h\to 0$$

$$\max_{\|v\|=1}\frac{\partial f}{\partial v}(x)=\max_{\|v\|=1}\langle\nabla f(x),v\rangle=\max\|\nabla f(x)\|\cdot\|v\|\cos\measuredangle(\nabla f(x),v)=\|\nabla f(x)\| \text{ за } v=\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

<u>Подсетник</u> (Лагранжова теорема о средњој вредности)

Нека је f непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Тада постоји $c\in(a,b)$, тако да

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



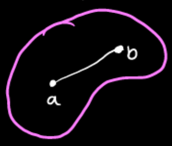
Тео (Лагранжова теорема о средњој вредности за дје више променљивих)

Нека је $\Omega\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ диференцијабилна у $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и нека су a,b из Ω такве да је $[a,b]\in\Omega$. $[a,b]=\{(1-t)a+tb,\ 0\le t\le 1\}$

Тада постоји c из $[a,b]$:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

$$f(b)-f(a)=\langle\nabla f(c),b-a\rangle$$



$$\varphi(t)=f((1-t)a+tb),\ 0\le t\le 1$$

$$\begin{tikzcd}[0,1] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dotted, "\varphi"'] & \Omega \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}\end{tikzcd}$$

$$f(\gamma(t)),\quad \gamma(t)=(1-t)a+tb,\quad \gamma'(t)=b-a$$

$$\varphi'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

$$\varphi'(t)=f'(\gamma(t))(b-a)$$

Лагранж за $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t)\cdot(b-a)$

$$f(b)-f(a)=f'(\gamma(t))(b-a)$$

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \ \blacksquare$$

Посл Ако је $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ повезан и $f:\Omega\to\mathbb{R}$ и $f'(x)=0$ за свако x из Ω онда је f константна.

<u>Пример</u> $n=1$ $\Omega=\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ $f(t)=(\cos t,\sin t)\rightsquigarrow f'(t)=(-\sin t,\cos t)$

$\|f'(t)\|=1$ за $t\in\mathbb{R}$

$$\left.\underset{(1,0)}{\underset{\parallel}{f(2\pi)}}-\underset{(0,1)}{\underset{\parallel}{f(0)}}=f'(c)\,2\pi\ \right\}\ (0,0)=(-\sin c,\cos c)\,2\pi\ \lightning$$

$$\|f(b)-f(a)\|_{\mathbb{R}^m}\le\sup\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n-\mathbb{R}^m}\cdot|b-a|$$

Парцијални изводи вишег реда

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ постоје за $x \in \Omega$

Изучем један $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}$

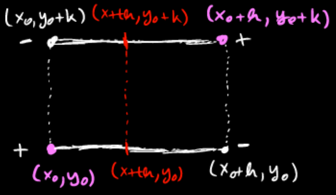
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) \quad \text{(по дефиницији)}$$

* Индуктивно се уводе изводи реда $k \geq 1$.

Нпр за $f(x,y,z) \rightsquigarrow \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial z}(x) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)(x)$

Тео (Шварцова) Радићемо у равни. Нека $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Претпоставимо да постоје $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ у Ω и да су непрекидни у тачки (x_0, y_0). Тада важи:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$



$$\Delta = f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0, y_0) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k)$$

$\varphi(t) = f(x_0+th, y_0+k) - f(x_0+th, y_0)$, $0 \leq t \leq 1$

$\varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$

$\varphi(0) = f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$, $\quad \varphi(1) - \varphi(0) = \Delta$

$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)(1-0) \rightsquigarrow$ лагранж

$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+k)h - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0)h$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\xi h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\xi h, y_0)\right]h \overset{\text{лагранж}}{=} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\xi h, y_0+\eta k)kh}_{\Delta}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \ 0 \leq \eta \leq 1$$

$\psi(t) = f(x_0+h, y_0+tk) - f(x_0, y_0+tk)$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\xi' h, y_0+\eta' k)hk$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underbrace{x_0+\xi h, y_0+\eta k}_{\to (x_0, y_0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underbrace{x_0+\xi' h, y_0+\eta' k}_{\to (x_0, y_0)}), \quad h \to 0, k \to 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \blacksquare$$

Важи и за n променљивих.

Може се пренети на векторску вредност.

Деф Класа $C^k(\Omega)$ сви парцијални изводи реда $\leq k$ су непрекидни

Подсетник

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(k+1)}(a+\xi h)}{(k+1)!}h^{(k+1)}$$ за неко $0 \leq \xi \leq 1$ (Тејлор)

Форм (Тејлоров развој за фје више променљивих)

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$$

$\varphi(t) = f(x_0+th, y_0+tk)$, $\varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k)$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}(1-0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1}$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+tk) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th, y_0+tk)$$

$$\varphi'(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0+th, y_0+tk)$$

$$\varphi''(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+th, y_0+tk)$$

$$\varphi''(t) = \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x_0+th, y_0+tk)$$

$$\varphi^{(j)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x_0+th, y_0+tk) \quad 0 \le j \le k+1 \qquad \frac{\partial}{\partial x}: C^j(\Omega) \to C^{j-1}(\Omega)$$

$$\underbrace{f(x_0+h, y_0+k)}_{n=2} = f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + \frac{1}{(k+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\xi h, y_0+\xi k)$$

$$\underbrace{f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n)}_{n \text{ произвољно}} = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j + \frac{1}{2!}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 f(x) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k f(x) + \frac{1}{(k+1)!}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{k+1} f(x+\xi h)$$

Локални екстремуми

Деф Нека је $\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. f има локални екстремум у тачки $a \in A$ ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $f(a) \le f(x)$ (локални минимум) или $f(a) \ge f(x)$ (локални максимум) за свако $x \in A \cap B(a, \varepsilon)$.

Деф Нека је $f \in C^1(\Omega)$. Критичне тачке обележавамо са:

$$\mathrm{Crit}(f) = \{a \in \Omega \mid f'(a) = 0\} = \left\{a \in \Omega \mid \frac{\partial}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a) = 0\right\}$$

Став Нека је $f \in C^1(\Omega)$ и $a \in \Omega$ је тачка локалног екстремума. Тада је a критична тачка. $f'(a) = 0$.

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \varphi'(0) = 0 \qquad \varphi(t) = f(a+tv)$$

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

$\blacksquare$

форм

$$[h,k]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k\end{bmatrix} = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2$$
$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ je позитивно дефинитно ако je >0 за $(h,k)\neq(0,0)$
je негативно дефинитно ако je <0 за $(h,k)\neq(0,0)$
знакопромењиво значи нит je min нит je max.

Помоћни резултати о квадратној форми

$A=[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ $a_{ij}=a_{ji}$ $\rightsquigarrow$ симетрична квадратна матрица

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n\end{bmatrix} = Q_A(h) = Q(h)$$

$Q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h=(h_1,\dots,h_n)$

$a_{23}h_2h_3 + a_{32}h_3h_2 = 2a_{23}h_2h_3$

$Q_A(h) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} a_{ij}h_ih_j$, $h=(h_1,\dots,h_n)\subseteq\mathbb{R}^n$

$Q_A(th) = t^2Q_A(h)$, $t\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}^n$

став Ако je квадратна форма Q позитивно/негативно дефинитна, онда постоји константа $\delta>0$ тако да:

$$Q(h)\ge\delta\|h\|^2 \;/\; Q(h)\le-\delta\|h\|^2$$

$S^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\} = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j^2 = 1\}$

$S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ $S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

$\rightsquigarrow$ S^{n-1} je ограничен подскуп од $\mathbb{R}^n$.

$S^{n-1} = B[0,1]\cap B(0,1)^c$

$\rightsquigarrow$ S^{n-1} je затворен подскуп од $\mathbb{R}^n$.

Дакле S^{n-1} je ограничен и затворен $\Rightarrow$ S^{n-1} je компактан подскуп од $\mathbb{R}^n$.

Q je непрекидна на $\mathbb{R}^n$ те дакле и на S^{n-1}:

$Q: S^{n-1}\to(0,+\infty)$ непрекидно а S^{n-1} je компакт.

$\delta = \min_{S^{n-1}} Q = \min_{\|h\|=1} Q(h) = Q(\bar h)$ где je $\|\bar h\|=1$

$Q(h)\ge\delta$ за свако $\|h\|=1$

$$Q(h) = Q\left(\|h\|\cdot\frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2\underbrace{Q\Big(\overbrace{\tfrac{1}{\|h\|}h}^{S^{n-1}}\Big)}_{\ge\delta} \ge \delta\|h\|^2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$Q_A = Q$

$\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = \det[a_{11}]$, $\Delta_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\Delta_3 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

итд .....

ТЕО (Критеријум Силвестера)

Q је позитивно дефинитна $\iff \Delta_j > 0$ за $0 \le j \le n$ $\quad + + + + + + \cdots$

Q је негативно дефинитна $\iff (-1)^j \Delta_j > 0$ за $0 \le j \le n$ $\quad + - + - + - \cdots$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен $f : \Omega \to \mathbb{R}$ припада $C^3(\Omega, \mathbb{R})$ и тачка a из Ω је критична тачка (стационарна тачка) за f, $f(a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$ за $1 \le j \le n$, $\nabla f(a) = 0$.

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{n \times n}$$

је квадратно симетрична (по Коши-Шварцу) матрица Хесијан од f.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(a) + \frac{1}{2!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f(a) + r_2(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!} \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + r_2(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!} Q_H(h) + \underbrace{\frac{1}{3!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^3 f(a + \xi h)}_{O(\|h\|^3)} \qquad H = H_f(a)$$

СТАВ Ако је Q_H позитивно дефинитна онда је a тачка локалног минимума.

$$f(a+h) - f(a) \ge \frac{1}{2}\delta \|h\|^2 + O(\|h\|^3) = \underbrace{\|h\|^2}_{\ge 0} \underbrace{\left[\frac{\delta}{3} + O(\|h\|) \right]}_{\ge 0 \text{ за } \|h\| \le \eta}$$

$f(a+h) - f(a) \ge 0$ за $0 \le \|h\| < \eta$

СТАВ Ако је Q_H негативно дефинитна онда је a тачка локалног максимума.

СТАВ Ако је Q_H знакопроменљива онда је a није тачка локалног екстремума.

Криве и површи у $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$)

ДЕФ Параметризована крива у $\mathbb{R}^n$ је пресликавање $\gamma : I \to \mathbb{R}$ где је $I \subset \mathbb{R}$ интервал такав да је:

1°) $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ $\to$ непрекидно диференцијабилна

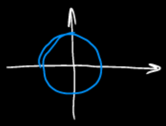
2°) $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ $\to$ битно нам је да никад не застане

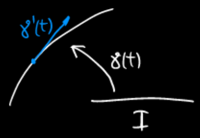
$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_n(t))$

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \cdots, \gamma_n'(t))$

пример: $\mathbb{R} \ni t \xmapsto{\gamma} (\underbrace{\cos t}_{\gamma_1(t)}, \underbrace{\sin t}_{\gamma_2(t)})$ $\rightsquigarrow$





Вектор тангенте на криву у t је $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$

$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Скуп свих решења једначине $F(x,y)=0$ је крива

$\{(x,y): F(x,y)=0\}$ је крива

$F(x,y)=x^2+y^2-25$ 

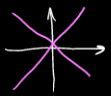
$F(x,y)=x^2-y$ 

$F(x,y)=xy-1$ 

$F(x,y)=x^2+y^2+25$ $\emptyset$

$F(x,y)=x^2+y^2$ $\{(0,0)\}$

$F(x,y)=xy$

$F(x,y)=x^2-y^2$ 

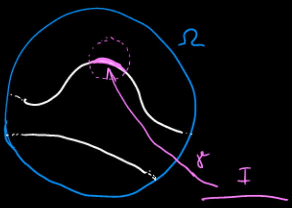
нису криве

Став $F\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. $l=\{(x,y): F(x,y)=0\}\subset\Omega$

1) $l\notin\emptyset$

2) $\nabla F(x,y)\neq 0$ за $(x,y)\in l$

Тада је l крива (може се локално параметризовати)



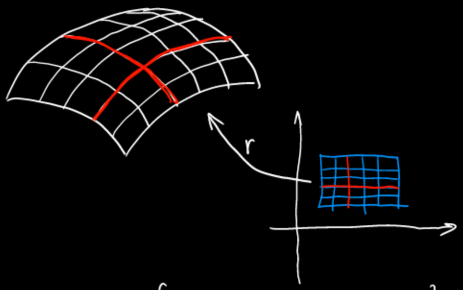
Деф $M\in\mathbb{R}^3$ је глатка површ ако $\forall p\in M$ постоји околина V од p на M и $r: \underset{\mathbb{R}^2}{W}\xrightarrow{\text{"1-1"}} V$ $\quad r: C^1(W,\mathbb{R}^3)$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$ и $\frac{\partial r}{\partial u}$ нису колинеарни.

Став $F(x,y,z)=0$ задаје површ ако:

1) $F\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$

2) $F(x,y,z)=0$ има решење

3) $\nabla F(x,y,z)\neq 0$ кад год је $F(x,y,z)\neq 0$



$r(u,v)=\{x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v)\}$

$$\mathcal{L}_n\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right)=\left\{\lambda_1\frac{\partial r}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial r}{\partial v}:\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\right\}\in T_R M$$

тангентна површ

Векторски производ је $\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}$

Став Вектор нормале је $\nabla F(x,y,z)$!

$$\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\neq 0 \rightsquigarrow \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

$$\nabla F\circ\frac{\partial r}{\partial u}=0 \Rightarrow \nabla F\perp\frac{\partial r}{\partial u}$$

$$\nabla F\circ\frac{\partial r}{\partial v}=0 \Rightarrow \nabla F\perp\frac{\partial r}{\partial v}$$

$$\nabla F\perp\mathcal{L}_n\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right)=T_pM$$

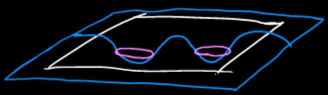
$S_1 \quad F_1(x,y,z)=0$

$S_2 \quad F_2(x,y,z)=0$ $\qquad F_1$ и F_2 класе C^1 и $\nabla F_1 \neq 0$ на S_1 и $\nabla F_2 \neq 0$ на S_2

сви парцијални изводи су непрекидне функције

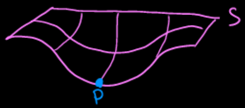
- $l = S_1 \cap S_2$ и услови $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, ∇F_1 и ∇F_2 су линеарно независни на l
- ови услови гарантују да је пресек $l = S_1 \cap S_2$ крива (или више кривих).

$$l = \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

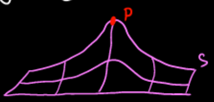


$l = \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases}$

Деф Нека је $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и нека је $S \subset \Omega$ površ. Тачка P на S је тачка условног минимума ако постоји $\varepsilon > 0$ тако да ако је $Q \in S \cap B(P,\varepsilon) \Rightarrow f(Q) \geq f(P)$.



Деф Нека је $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и нека је $S \subset \Omega$ površ. Тачка P на S је тачка условног максимума ако постоји $\varepsilon > 0$ тако да ако је $Q \in S \cap B(P,\varepsilon) \Rightarrow f(Q) \leq f(P)$.



Форм Нека је $f \in C^1(\Omega)$ и нека је тачка P тачка условног локалног минимума/максимума за f.

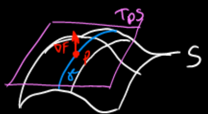
- S: $F(x,y,z)=0$ (F непрекидно диференцијабилна на Ω) $\nabla F \neq 0$ на S

T_pS је тангентна раван на S у тачки P.

$\nabla F(P) \perp T_pS$

$\gamma(t) \in S \quad -a \leq t \leq a$ крива γ на S

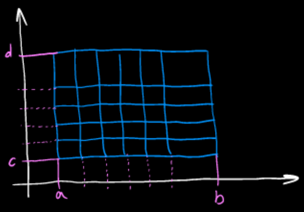
$\gamma(0) = P$



$\varphi(t) = f(\gamma(t))$, $\varphi:(-a,a) \to \mathbb{R}$ има локални минимум/максимум и то је $t=0$, $\varphi'(0)=0$.

Вишеструки интеграли

$[a,b]\times[c,d] = \Pi$ (правоугаоник)



$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$

$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$

$[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j] = \Pi_{ij} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \qquad |\Pi_{ij}| = (x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$

$$\lambda(p) = \max\left(\max_{1\leq i\leq m}(x_i - x_{i-1}), \max_{1\leq j\leq n}(y_j - y_{j-1})\right)$$

или

$$\lambda(p) = \max_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

$f:\Pi\to\mathbb{R}$ $\quad A_{ij}\in\Pi_{ij}$ $\quad \begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le n\end{matrix}$ $\quad A$

$$\sigma(f,P,A)=\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} f(A_{ij})\cdot|\Pi_{ij}|$$

Деф (Вишеструког интеграла) Уколико постоји $I\in\mathbb{R}$ такав да:

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall p\in P)(\lambda(p)<\delta \Rightarrow |\sigma(f,p,A)-I|<\varepsilon$ за све изборе $A)$

онда кажемо да је f риман интеграбилна на Π и (будући да се лако види јединственост I) пишемо $\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy=I$

Деф (Класа Риман-интеграбилних функција)

$R(\Pi)=\{f:\Pi\to\mathbb{R}\mid f$ је риман-интеграбилна на $\Pi\}$

Став $R(\Pi)$ је векторски простор и важи:

а) $\iint_\Pi [f(x,y)+g(x,y)]\,dx\,dy=\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy+\iint_\Pi g(x,y)\,dx\,dy$, $f,g\in R(\Pi)$

б) $\iint_\Pi \lambda f(x,y)\,dx\,dy=\lambda\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy$, $f,g\in R(\Pi)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

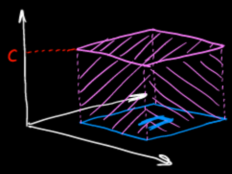
доказ: $\sigma(f+g,P,A)=\underbrace{\sigma(f,P,A)}_{\downarrow\ \iint f}+\underbrace{\sigma(g,P,A)}_{\downarrow\ \iint g}$

Став Нека су $f,g\in R(\Pi)$ и $f(x,y)\le g(x,y)$ за свако $(x,y)\in\Pi$, следи:

$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy\le\iint_\Pi g(x,y)\,dx\,dy$

$\sigma(f,P,A)\le\sigma(g,P,A)\ \Big/\lim_{\lambda(p)\to 0}$

Став $\iint_\Pi c\,dx\,dy=c|\Pi|$



$\sigma(c,P,A)=\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} c|\Pi_{ij}|=c|\Pi|$

Тео Свака непрекидна функција је Риман-интеграбилна. $(C(\Pi)\subset R(\Pi))$

Деф $A\subset\mathbb{R}^2$ је Лебегове мере нула, $m(A)=0$ ако:

$(\forall\varepsilon>0)(\exists(\Pi_n)_{n=1}^{\infty})\left(A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\Pi_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty}|\Pi_n|<\varepsilon\right)$

низ правоугаоника

Став Ако је $f\in R(\Pi)\Rightarrow f$ је ограничена на Π.

Тео $f\in R(\Pi)$ ако и само ако важе:

1) f је ограничена

2) D_f (дисконтинуитети) $=\{(x,y)\in\Pi\mid f$ има прекид у $(x,y)\}$ је мере нула.

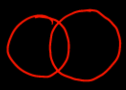
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , (x,y) \in K \\ 0 & , o \in \Pi / K \end{cases}$$

$\partial A = \bar{A} \setminus A^{\circ} \rightsquigarrow$ граница скупа A

$x \in \partial A \iff (\forall \varepsilon > 0)\ B(x,\varepsilon)$ сече и A и A^c

деф Нека је $A \subset \mathbb{R}^2$ је Жордан-Мерљив $\Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ и $A \triangle B$ су Жордан-Мерљиви

доказ (у одиику слике) $\rightsquigarrow$



$\partial(A \cap B) = \partial A \cup \partial B$

подскуп мере нула

деф Нека је $A \subset \mathbb{R}^2$ Жордан-Мерљив $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \Pi$, Кажемо да је f интеградилна на A ако је:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{на } A \\ 0 & \text{на } \Pi / A \end{cases}$$ интеградилна на Π и кажемо

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Pi \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

став f је непрекидна и ограничена на Жордан-Мерљивом скупу $A \Rightarrow f \in R$

форм Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ Жорданов скуп, $f \in R(D)$.

$m = \inf_D(f) \wedge M = \sup_D(f) \Rightarrow m \le f(x,y) \le M \quad (x,y) \in D$

$$\Rightarrow \iint_D m\,dx\,dy \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D M\,dx\,dy$$

(Средња вредност из области D се налази између супремума и инфимума)

$$\Rightarrow \left(\text{За } |D| = 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0\right)$$

$$\Rightarrow m|D| \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M|D|$$

$$\Rightarrow m \le \underbrace{\frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{средња вредност од } f \text{ на } D} \le M$$

– Ако још додатно претпоставимо да је D још и компактан.

Онда важи $m = \min f = f(T_m)$ $\rightarrow$ Тачка за минимум.
$M = \max f = f(T_M)$ $\rightarrow$ Тачка за максимум

Означимо са $\mu = \frac{1}{|D|} \iint f(x,y)\,dx\,dy \rightsquigarrow f(T_m) \le \mu \le f(T_M)$

– Ако је додатно D и повезан, онда постоји $S \in D$ ткд $f(S) = \mu$. ("теорема повезаности")

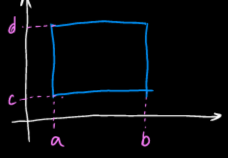
$$\boxed{\frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(S) \quad \text{за неко } S \in D}$$

(верзија теореме о средњој вредности за $n \ge 2$)

Тео (Фубинијева теорема)

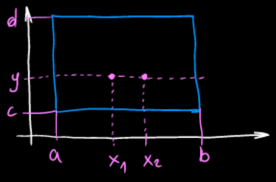
$\Pi = [a,b] \times [c,d]$ Нека је f непрекидна на Π $(f \in C(\Pi))$

$$\int_a^b \bigg(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\varphi(x)}\bigg) dx = \iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \bigg(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\psi(y)}\bigg) dy$$



Доказ (Докажимо прво $\varphi \in C[a,b]$ ($\psi \in C[c,d]$ иде аналогно))

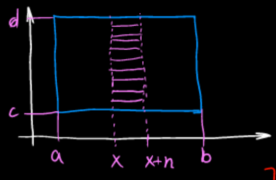
- Нека је $\varepsilon > 0$ (кључна реч је равномерно непрекидна)
- Постоји $\delta > 0$ (непрекидна на Π (компакту) $\Rightarrow$ равномерно непрекидна на Π) са својством $d(P,Q) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ $(P, Q \in \Pi)$
- Нека су $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$



$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left| \int_c^d f(x_2,y)\,dy - \int_c^d f(x_1,y)\,dy \right| =$$

$$= \left| \int_c^d [f(x_2,y) - f(x_1,y)]\,dy \right| \leq \int_c^d \varepsilon\,dy = (d-c)\varepsilon$$

(Аналогно и за ψ)



$$\Pi_x = [a,x] \times [c,d]$$

$$F(x) = \iint_{\Pi_x} f(u,v)\,du\,dv$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\iint_{\Pi_{x+h}} f(u,v)\,du\,dv - \iint_{\Pi_x} f(u,v)\,du\,dv \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \iint_{\Pi_{x,h}} f(u,v)\,du\,dv = \lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x,\xi_j)\,h\,(y_j - y_{j-1}) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$\iint_{\Pi_{x,h}} f(u,v)\,du\,dv \approx \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(x,\xi_j)\,h\,(y_j - y_{j-1})}_{\text{апроксимација}}$$

$$F'(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy, \quad F(a) = 0$$

$$G(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(u,v)\,dv \right) du \qquad G'(x) = \int_c^d f(x,v)\,dv = F'(x) \qquad G(a) = 0$$

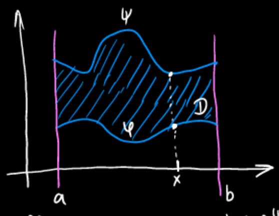
$\Rightarrow \forall x \;\; F(x) = G(x)$ (изводи су исти, разликују се за константу)

$$\underset{\displaystyle \iint_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy}{\overset{\parallel}{F(b)}} = G(b) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

(Прва једнакост је задовољена, аналогно и за другу) ∎

- Теорема Фубинија важи и за риман интеграбилне функције, са сложенијим доказима и формулацијама.
- Теорема Фубинија важи и у $n \geq 2$. $n = 3$ $\quad Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

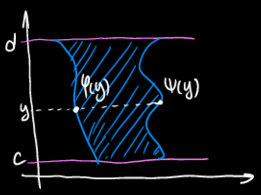


$\varphi, \psi \in C[a,b] \quad \varphi(x) \leq \psi(x) \quad a \leq x \leq b$

$D: \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

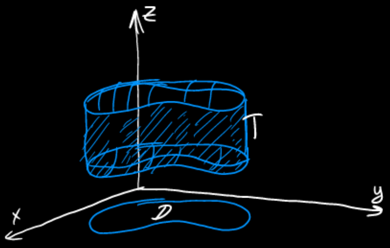
$f \in C(D) \rightarrow$ компактан, жордан мерљив

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



$\rightarrow$ исти услови као и горе.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$



$\varphi,\psi \in C(D)$

$\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ за $(x,y)\in D$

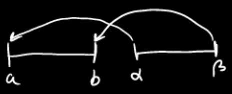
$T: \{(x,y,z) \quad (x,y)\in D \quad \varphi(x,y)\le z\le \psi(x,y)\}$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Смена променљиве у вишеструком интегралу

Случај $n=1$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=\!=\!=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

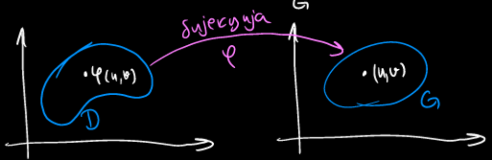


$\varphi(\alpha)=a\,,\ \varphi(\beta)=b$

$\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b] \to$ бијекција

случај $n=2$ $\quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad x=\varphi(t)$, $y=\psi(s) \qquad f(\varphi(t),\psi(s))$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{(x,y)=\varphi(u,v)}{=\!=\!=} \iint_G f(\varphi(u,v))\,|\det\varphi'(u,v)|\,du\,dv$$



φ – непрекидно диференцијабилна ($\varphi\in C^1$)

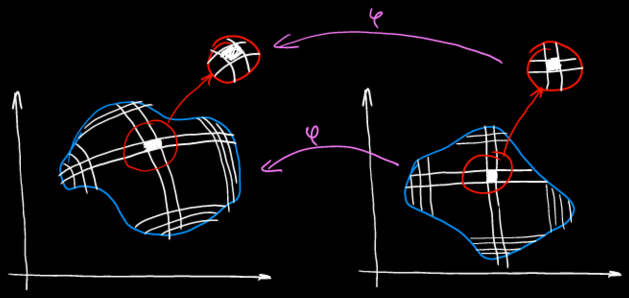
f – непрекидна на D

D и G Жорданова

φ – бијекција класе C^1

$A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ линеарно , $\det A\ne 0 \qquad A'(x)=A$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v\end{bmatrix} =$$



$f=1$

$A(G)=D$

$|D|=|\det A||G|$

$|A(G)|=|\det A||G|$

Подела на ситне лоптице G и D да апроксимирамо на малим деловима $\varphi\approx A$ и f – const

$$\iint_G \cdots\cdots = \sum_k \iint_{\Pi_k}\cdots\cdots$$

(Доказаћемо тачност апроксимација)

$$\iint_D \cdots\cdots = \sum_k \iint_{\varphi(\Pi_k)}\cdots\cdots$$

$$\iint_{\Pi_k} f(\varphi(u,v))\,|\det\varphi'(u,v)|\,du\,dv = \iint_{\varphi(\Pi_k)} f(x,y)\,dx\,dy \quad \forall k$$

$$\iint_{\Pi_k} f(\varphi(D_k))\,|\det\varphi'(D_k)|\,du\,dv = f(\varphi'(D_k))\det|\varphi(D_k)|\,|\Pi_k| = f(\varphi(D_k))$$

површина слике за Π_k при линеарној апроксимацији за φ

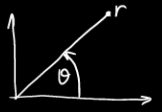
$$\approx f(\varphi(D_k))\cdot|\varphi(\Pi_k)| \approx \iint_{\varphi(\Pi_k)} f(x,y)\,dx\,dy$$

'апроксимација'

$n=2 \quad (r,\theta) \xmapsto{\varphi} (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$



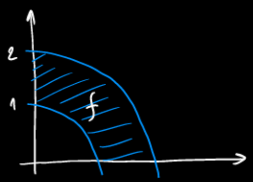
$-\pi \le \theta \le \pi \,,\ r>0$

$G = (0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x\le 0\}$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta \qquad „dxdy = r\,dr\,d\theta"$$

$$\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\sin\theta\end{bmatrix} = r$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,d\theta\,dr$$

$$\Pi = [1,2]\times[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

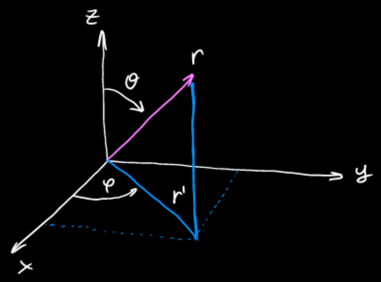
цилиндричне координате (смена)

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\\ z &= z\end{aligned}\right\}\ \text{цилиндричне}$$

$$\rho'(r,\theta,z) = \det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\det \rho' = r$

сферне координате (смена)



$z = r\cos\theta \quad \cdots\cdots \quad 0\le\theta<\pi$

$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad \cdots \quad 0<r<+\infty$

$y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \cdots \quad 0<\varphi<2\pi$

$$\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix} =$$

$$= r^2\left\{-\sin\theta\sin\varphi\begin{vmatrix}\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{vmatrix} - \sin\theta\cos\varphi\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{vmatrix}\right\} =$$

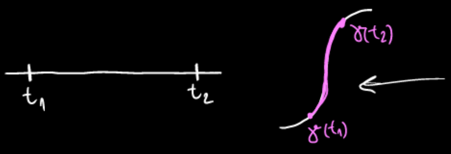
$$= r^2\left[-\sin\theta\sin\varphi(-\sin^2\theta\sin\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi) - \sin\theta\cos\varphi(-\sin^2\theta\cos\varphi - \cos^2\theta\cos\varphi)\right] =$$

$$= r^2\left[\sin\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\varphi\right] = r^2\sin\theta \qquad \boxed{\det J_f = r^2\sin\theta}$$

Интеграли по кривим и површима

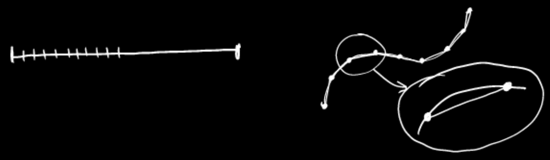
$\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$) $\quad I\subset\mathbb{R}$ је интервал

$\gamma\in C^1(I,\mathbb{R}^3) \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$



$$l = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|\,dt \quad \text{(по дефиницији)}$$

Како израчунати дужину? (за радознале)

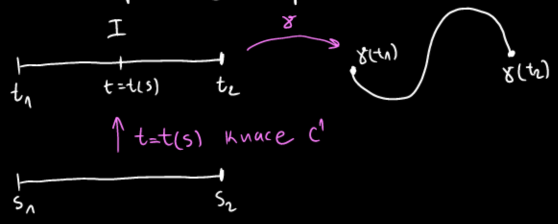


$P \to L_p$ → изломљење

подела интервала

$l = \sup L_p$

Репараметризација криве:



$\gamma(t(s)) = \bar{\gamma}(s) \qquad s_1 \le s \le s_2$

(у $\mathbb{R}^2$) $\quad \gamma(t) = (\sin t, \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

$t = s^2, \quad 0 \le s \le \sqrt{2\pi}$ „Нова крива" → дужина криве НЕ зависи од параметризације

$$\hat{l} = \int_{s_1}^{s_2} \|\tilde{\gamma}'(s)\| ds = \int_{s_1}^{s_2} \|\underbrace{\tilde{\gamma}(t(s))}_{\text{вектор}} \underbrace{t'(s)}_{\text{скалар}}\| ds = \int_{s_1}^{s_2} \|\tilde{\gamma}'(t(s))\| t'(s)\, ds \overset{t(s)=t}{=\!=} \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt = l$$

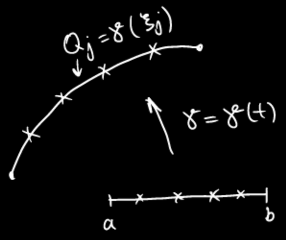
Уколико „обрашемо смену", односно промена оријентације

$s_1 \longmapsto t_1$

$s_2 \longmapsto t_2$ $\qquad t(s)$ строго опадајуће $\Rightarrow$ Опет је $\tilde{\gamma} = \gamma$

Криволинијски интеграли прве врсте

$\gamma: I \to \mathbb{R}^3 \quad I = [a,b] \quad \gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^3) \qquad \gamma^* = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^3$ (компактна), $f \in C(\gamma^*)$



$$\int_\gamma f(s) ds = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(s) ds \approx \sum_{j=1}^n f(Q_j)\, l(\gamma_j)$$
$$= \sum_{j=1}^n f(Q_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt$$
$$\approx \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| f(\underbrace{\gamma(\xi_j)}_{Q_j}) dt$$
$$\approx \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$
$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma(t)\| dt$$

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

$\gamma(t_j) = M_j \in \gamma^*$

$\gamma_j: [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^3 \qquad \gamma_j(t) = \gamma(t)$

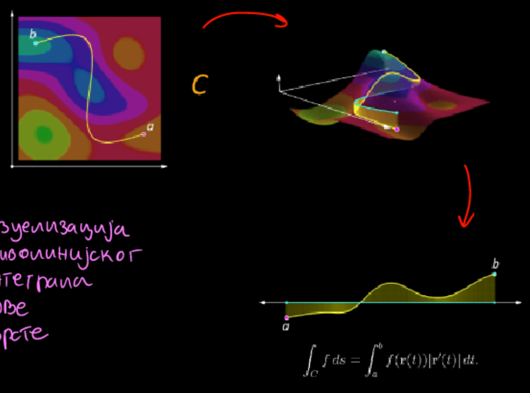
Деф $\displaystyle\int_\gamma f(s)|ds| \overset{\text{деф}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$ и не зависи од параметризације и оријентације.

Доказ: (исти као за $l(\gamma)$)

Тео а) $f = c \qquad \displaystyle\int_\gamma c|ds| = c \cdot l(\gamma)$

б) $\displaystyle\int_\gamma (f+g)|ds| = \int_\gamma f|ds| + \int_\gamma g|ds|$

в) $\displaystyle\int_\gamma cf|ds| = c\int_\gamma f|ds|$



Визуелизација криволинијског интеграла прве врсте

СТАВ Нека је $f(x) \le g(x) \ \forall x \in \gamma^* \Rightarrow \int_\gamma f(x)|ds| \le \int_\gamma g(x)|ds|$

ТЕО Нека су $m = \min_{\gamma^*} f \le f(\gamma(t)) \le \max_{\gamma^*} f = M \ \Big/ \|\gamma'(t)\| \Big/ \int_a^b$

добијамо: $\int_a^b m\|\gamma'(t)\|dt \le \int_a^b f(\gamma(t)) \le \int_a^b M\|\gamma'(t)\|dt$

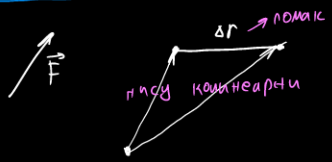
$$m\,l(\gamma) \le \int_\gamma f|ds| \le M\,l(\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \le \frac{1}{l(\gamma)}\int_\gamma f|ds| \le M$$ ⇝ средња вредност из γ^*

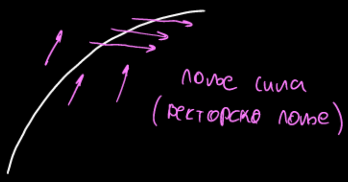
СТАВ $\frac{1}{l(\gamma)}\int_\gamma f\,ds = f(Q)$ за неке Q из γ^* (својство међувредности)

Криволинијски интеграл друге врсте

$A = l \cdot |\vec{F}|$
↘ рад



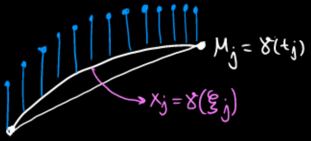
$A = \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$

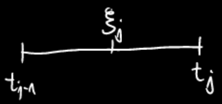


$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \le t \le b$

$\vec{F} = (P, Q, R) \quad P = P(x,y,z), \ Q = Q(x,y,z), \ R = R(x,y,z)$

$A = \sum_{j=1}^{n} A_j$ ⇝ A_j рад у временском интервалу $t_{j-1} \le t \le t_j$





$$A_j \approx \langle \vec{F}(x_j), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$$
$$\approx \langle \vec{F}(x_j), (t_j - t_{j-1})\gamma'(\xi_j) \rangle$$
$$\approx \langle \vec{F}(\gamma(\xi_j)), \gamma'(\xi_j) \rangle (t_j - t_{j-1})$$

подела се уситњава

$$\int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$
$$= \int_a^b \left[P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t) \right] dt$$

$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ⇝ 1-форма

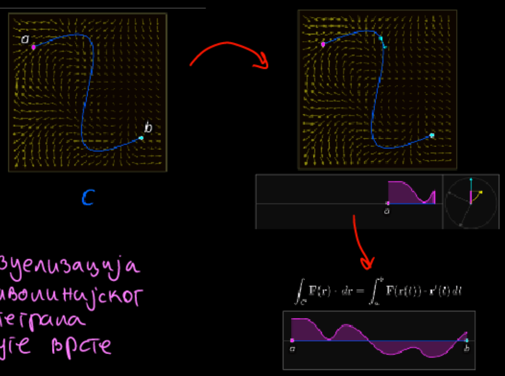
$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \overset{\text{деф}}{=\!=} \int_a^b \left[P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t) \right] dt$$

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

СТАВ (Особине)

1) $\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$

2) $\int_\gamma \lambda\omega = \lambda \int_\gamma \omega$



Визуелизација криволинијског интеграла друге врсте

Став Мења се оријентација $\Rightarrow$ мења се знак

$[\alpha,\beta]\ni s \longmapsto t(s)\in[a,b]$ $\quad t(\alpha)=a,\ t(\beta)=b$

$\tilde\gamma(s)=\gamma(t(s))$

$\tilde\gamma'(s)=\gamma'(t(s))\,t'(s)$

$\tilde x(s)=x(t(s))$

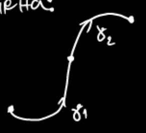
$\tilde x'(s)=x'(t(s))\,t'(s)$

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha^\beta \left[P(\gamma(t(s)))\,x'(t(s))\,t'(s)+\dots\right]ds \overset{t(s)=t}{=\!=} \int_a^b \left[P(\gamma(t))\,x'(t)+\dots\right]dt$$

→ У обрнутом случају биће $\int_\beta^\alpha$, те ће знак бити $-$.

→ $\int_\gamma \omega$ зависи од оријентације: $\int_{-\gamma}\omega = -\int_\gamma \omega$, али не зависи од репараметризације која чува оријентацију

Напомена:

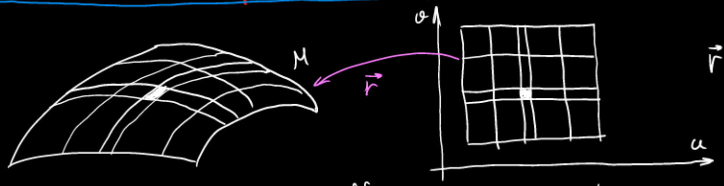


$\gamma=\gamma_1 \smile \gamma_2$

$$\int_\gamma f\,|ds| = \int_{\gamma_1} f\,|ds| + \int_{\gamma_2} f\,|ds| \qquad \text{I врсте}$$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega \qquad \text{II врсте}$$

Површински интеграл прве врсте



$\vec r=\vec r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

$\vec r$ је класе C^1

$$\sum\sum|\vec r_u\Delta u\times \vec r_v\Delta v| = \iint_\Pi \|\vec r_u\times\vec r_v\|\,du\,dv \overset{def}{=\!=} \text{area}(M)$$

Како увести $\iint_M f\,dS$? (нпр различите „густине", нехомоген материјал)

$f: M\to\mathbb{R}$ непрекидна (може се ослабити, али нећемо због општости)

$\vec r: D\to M$ параметризација, $D\subset\mathbb{R}^2$.

Деф $\iint_M f\,dS = \iint_D f(\vec r(u,v))\,\|\vec r_u\times\vec r_v\|$

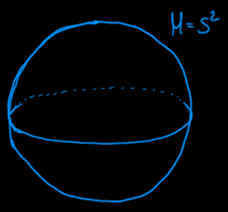
$$\sigma(P,f,\xi)=\sum_{j=1}^n f(\xi_j)\,\text{area}\,M_j = \sum_{j=1}^n f(\vec r(u,v))\iint_{\Pi_j}\|\vec r_u\times\vec r_v\|\,du\,dv \approx$$

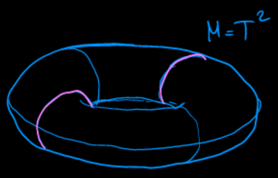
$$\approx \sum_{j=1}^n \iint_{\Pi_j} f(\vec r(u,v))\,\|\vec r_u\times\vec r_v\|\,du\,dv = \iint_\Pi f(\vec r(u,v))\,\|\vec r_u\times\vec r_v\|\,du\,dv$$

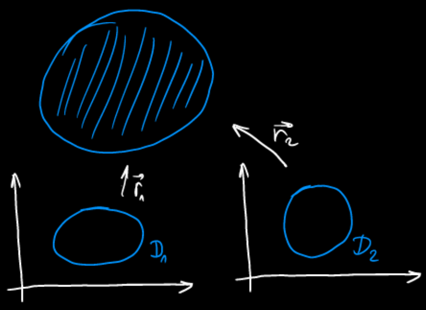
$f=1$ $\quad \iint_M dS = \text{area}\,M$

→ Скоро непотпуна дефиниција јер не могу све да се параметризују

Нпр. сфера (али може као унија 2 парчета)







Интеграл не зависи од начина параметризације.

(став) (Линеарност)

а) $\iint_M (f+g)\,dS = \iint_M f\,dS + \iint_M g\,dS$

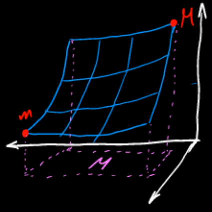
б) $\iint_M \lambda f\,dS = \lambda \iint_M f\,dS$

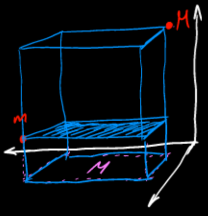
(став) Нека $f(P) \le g(P)\ \ \forall P \in M \Rightarrow \iint_M f\,dS \le \iint_M g\,dS$

(монотоност)

(тео) (о средњој вредности) Нека је M - компактна, $f \in C(M)$, $m = \min f \wedge M = \max f$

$\Rightarrow (\forall P \in M)\ \ m \le f(P) \le M$.





$m \le f(P) \le M \ \ / \iint_M dS$

$m \iint_M 1\,dS \le \iint_M f\,dS \le M \iint_M 1\,dS$

нису исте! ствари.

$m\,\text{area}(M) \le \iint_M f\,dS \le M\,\text{area}(M)$

$m \le \frac{1}{\text{area}\,M} \iint_M f\,dS \le M$

$f(P)$ за неке P из M (M повезан)

Површински интеграл друге врсте

(форм) Оријентација површи M, која је повезана (из једног комада) је непрекидно поље јединичних нормала на M.

$\vec n = \vec n(P)$, $P \in M$. Супротна оријентација $-\vec n$

Постоје неоријентабилне површи (Мебијусова трака нпр.)

$\vec F = (P, Q, R)$ $\quad \vec F = \vec F(x,y,z)$

$\langle \vec F, \vec n \rangle\,dS$

Укупан проток је $\iint_M \langle \vec F, \vec n \rangle\,dS$

$\vec n = \frac{\vec r_u \times \vec r_v}{\|\vec r_u \times \vec r_v\|}$ $\quad dS = \|\vec r_u \times \vec r_v\|\,du\,dv \xRightarrow{\text{правимо вектор}} d\vec S = (\vec r_u \times \vec r_v)\,du\,dv$ $\quad dS = \|d\vec S\|$

$\vec n\,dS = d\vec S$

→ Површински интеграл II врсте, векторског поља $\vec F$ (непрекидно) по оријентисаној површи $(M, \vec n)$ је $\iint_M \vec F\,d\vec S = \iint_M \vec F \circ \vec n\,dS$

↪ своди се на површински интеграл прве врсте.

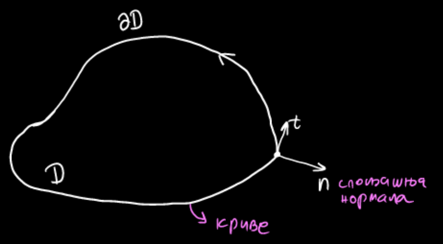
(став)

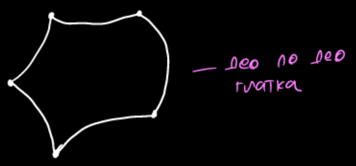
1) Важи линеарност

2) Промена оријентације $\iint_{M^*} \vec F\,d\vec S = -\iint_M \vec F\,d\vec S$

M супротно

Гринова формула





„Када се шетамо по граница, област остаје са леве стране"

(n,t) → позитивно поље у равни
оријентисана граница, део по део глатка.

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$

$$\left.\begin{aligned} dx \wedge dx &= 0 \\ dx \wedge dy &= -dy \wedge dx \\ dy \wedge dy &= 0 \end{aligned}\right\}$$ „клинасто множење диференцијала" је антикомутативно

$$\omega = Pdx + Qdy \to \boxed{1\text{-форма}}$$

$$d\omega = d(Pdx+Qdy) = d(Pdx) + d(Qdy) = (dP)\wedge dx + dQ \wedge dy =$$

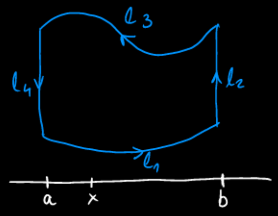
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy \quad \boxed{2\text{-форма}}$$

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad P, Q \in C^1(\bar{D})$$

Доказ Гринове формуле

случај $Q=0$ Желимо $\int_{\partial D} Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$



$\varphi \in C^1[a,b]$ $\quad \psi \in C^1[a,b]$

$\varphi(x) \le \psi(x) \quad a \le x \le b$

$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

$$\int_{\partial D} Pdx = \int_{l_1} Pdx + \underbrace{\int_{l_2} Pdx}_{0} + \underbrace{\int_{l_3} Pdx}_{0} + \underbrace{\int_{l_4} Pdx}_{0} = \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx = L \text{ (лево)}$$

→ јер је x - const

l_2: $\gamma(y) = (b,y)$, $\varphi(b) \le y \le \psi(b)$

$$\int_{l_2} P(x,y)dx = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} P(b,y)\cdot 0 \cdot dy = 0$$

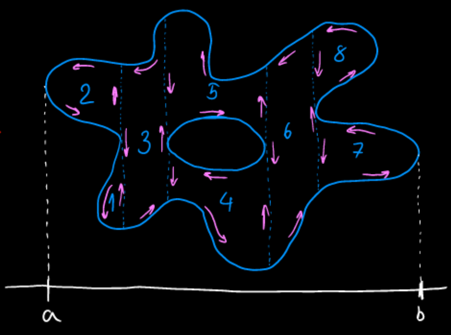
l_1: $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$, $a \le x \le b$ $\qquad -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy \overset{\text{фубини}}{=\!=} -\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy\right)dx \overset{\text{Њутн-Лајбниц}}{=\!=} \ldots$

$$\ldots \overset{\text{Њутн-Лајбниц}}{=\!=} \int_a^b \left[P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\right]dx = \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx = D \text{ (десно)}$$

$L = D$ „лево = десно"

случај $Q=0$ за произвољан облик

Свака од ових области је разматраног типа.

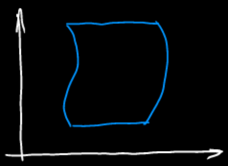


$$\int_{\partial D_j} Pdx = -\iint_{D_j} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$\sum_j \left(-\iint_{D_j} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right) = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \qquad \int_{\partial Q} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

$$\sum_j \left(\int_{\partial D_j} P\,dx\right) = \int_{\partial D} P\,d$$

Аналогно $P=0$



Грин се може применити и на $n=1$, али има чудан ефекат

$$D=[a,b] \qquad \int_{\partial D} f = \int_D df \Rightarrow f(b)-f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$\partial D = \{a,b\}$$

$$\int_{\partial D} x\,dy = \iint_D dx\,dy \qquad \int_{\partial D} -y\,dx = \iint_D -dy\wedge dx = \iint_D dx\,dy$$

$$\int_{\partial D} x\,dy = \text{area}(D) \qquad \int_{\partial D} -y\,dx = \text{area}(D)$$

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

$D = D_R \rightarrow$ диск полупречника R (круг) $\quad x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta \quad 0\le\theta\le 2\pi$

$$|D_R| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[R\cos\theta\cdot R\cos\theta - R\sin\theta\cdot R\sin\theta\right]d\theta = \frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = R^2\pi$$

Формула Гауса-Остроградског

$T\subset\mathbb{R}^3 \quad \partial T = M$ глатка граница

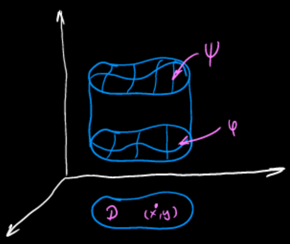
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$ класе C^1

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \rightarrow \text{дивергенција}$$

M је оријентисана пољем спољашњих јединичних нормала

$$\iint_M \vec{F}\,d\vec{S} = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dV, \quad dV = dx\,dy\,dz$$

Доказ: $P=0,\ Q=0 \quad \iint_M (0,0,R)\,d\vec{S} = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$



$D\subset\mathbb{R}^2 \quad \varphi,\psi\in C^1(D)$

$T = \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D \quad \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}$

$$\iint_M (0,0,R)\,d\vec{S} = \iint_M (0,0,R)\,\vec{n}\,dS = \left[\iint_{\text{дно}} + \iint_{\text{поклопац}} + \iint_{\text{омотач}}\right](0,0,R)\,\vec{n}\,dS = (*)$$

$dS = \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\,dx\,dy$ на „дну" $\quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}(\varphi_x,\varphi_y,-1)$

$dS = \sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}\,dx\,dy$ на „поклопцу" $\quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}}(-\psi_x,-\psi_y,1)$

$$(*) = \left(\iint_{\text{дно}} + \iint_{\text{поклопац}}\right)\left((0,0,R)\cdot\vec{n}\,dS\right)$$

$$\iint_{дно} (0,0,R)\,\vec n\, dS = \iint_D -R\,dx\,dy\;;$$

$$\iint_{поклопац} (0,0,R)\,\vec n\, dS = \iint_D \underbrace{(0,0,R)}_{\vec F}\underbrace{(-\psi_x,-\psi_y,1)\frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}}}_{\vec n}\underbrace{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}\,dx\,dy}_{dS} = \iint_D R\,dx\,dy$$

$$\iint_M (0,0,R)\,d\vec S = \iint_D R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy - \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy$$

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec F\,dV = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dV \overset{фубини}{=\!=} \iint_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy = \dots$$

$$\dots \overset{њутн-лајбниц}{=\!=} \iint_D\Big(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\Big)\,dx\,dy$$

$F(x,y,z)=0 \quad \vec n = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$

$F(x,y,z) = \psi(x,y) - z$

$\nabla F = (\psi_x, \psi_y, -1)$

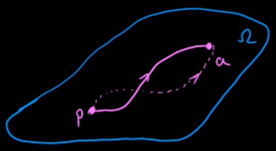
$\vec n = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}}(\psi_x, \psi_y, -1)$

∎

Независност интеграције од пута

форм Нека је $f := f(x,y)$ класе C^1 у $\Omega \subset \mathbb{R}$ (повезан, отворен)

$\omega = df = f_x\,dx + f_y\,dy \qquad$ 1 - форма



$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(q) - f(p)} \longrightarrow \text{Њутн - Лајбниц}$$

$$\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \int_a^b \Big[f_x(\gamma(t))\,x'(t) + f_y(\gamma(t))\,y'(t)\Big]dt = (*)$$

$\gamma : [a,b] \to \Omega \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f_y(x(t),y(t))\,y'(t)$$

$$(*) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(q) - f(p)$$

став Ако је $\omega = df$, $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \Rightarrow \int_\gamma \omega$ зависи само од $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$

проблем: Претпостављамо да $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ зависи од почетне и крајње тачке ($\gamma(a)$ и $\gamma(b)$), $P, Q \in C^1(\Omega)$. Тада постоји $f : P\,dx + Q\,dy = df$

$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$

став За $\omega = P\,dx + Q\,dy$ у Ω.

Независност од пута $\Leftrightarrow \int_\gamma \omega = 0$ за сваку петљу γ $(p = q)$

доказ: $(\Rightarrow)$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2^*} \omega = (\gamma_1 \simeq \gamma_2^*) = 0$$

$\gamma_2^* =$ супротно(γ_2)

$(\Leftarrow)$ $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^*$ јер $0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$

Став: $P, Q \in C^1(\Omega)$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \omega = Pdx + Qdy$.

$\int_\gamma \omega$ не зависи од пута $\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

мотивација $\quad P = \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad Q = \dfrac{\partial f}{\partial y} \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$0 = \int_{\partial C_r(a)} Pdx + Qdy = \iint_{C_r(a)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

следи: $\iint_{C_r(a)} \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$ кад год $C_r(a) \subset \Omega \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Хипот: $P, Q \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ у Ω. Да ли $\omega = Pdx + Qdy$ има своју „независност од пута"?

→ У општем случају не.

контрапример: $\Omega = \mathbb{R}^2 / \{0\}$ $\quad \omega = \dfrac{xdy}{x^2+y^2} - \dfrac{ydx}{x^2+y^2}$

$P = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \quad Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$P_y = -\dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad Q_x = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad P_y = Q_x$

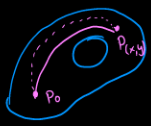
$$\int_0^{2\pi} [\cos^2 t - \sin t(-\sin t)]\,dt = 2\pi \qquad x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Хипотеза пала због „рупа" у повезаној области.

Став: Претпостављамо да $\int_\gamma Pdx + Qdy$ зависе само од $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$. $P, Q \in C^1(\Omega)$

не мора бити строго повезана

$\Rightarrow \exists f \quad Pdx + Qdy = df \qquad P = \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$



$f(x,y) = \int_\gamma Pdx + Qdy$ од p_0 до $p = (x,y)$

(коректно дефинисано због става о независности од пута)

Треба још доказати $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\gamma \cup L_{x,y}^{x+h,y}} Pdx + Qdy - \int_\gamma Pdx + Qdy \right]$$

линија $x,y \to x+h,y$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{L_{x,y}^{x+h,y}} Pdx + Qdy = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 hP(x+th,y)\,dt = \begin{pmatrix} l(t) = (x+th, y) & 0 \le t \le 1 \\ x(t) = x+th & y(t) = y \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_0^1 P(x+th,y)\,dt = \lim_{h\to 0} P(x+t_h \cdot h, y) = P(x,y)$$

због непрекидности

Теор Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ отворен и повезан. Нека су $P, Q \in C^1(\Omega)$ и нека је $\omega = Pdx + Qdy$. Уочимо својства:

1°) $\int_\gamma \omega$ зависи само од почетне и крајње тачке,

2°) $\int_\gamma \omega = 0$ за сваку петљу γ

3°) постоји $f \in C^2(\Omega)$ $df = \omega$ тј $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ и $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$

4°) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Тада важи $1° \Leftrightarrow 2° \Leftrightarrow 3° \Rightarrow 4°$.

$*$ ($\Leftarrow$) важи када је Ω просто повезана област (без рупа).

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (P, Q, R)$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(P,Q,R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F} \qquad \boxed{\vec{\nabla} \circ \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}}$$

оператор Лапласа
„Лапласијан од f"

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0 \quad \text{(Теорема Шварца)}$$

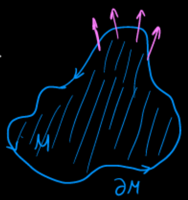
$$\operatorname{div}(\nabla F) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

$\Delta f = 0 \Rightarrow$ хармонијске функције

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0 \quad \left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P_{dx} & Q_{dy} & R_{dz} \end{vmatrix} = (\underbrace{\cdots}_{=0}) \cdots (\underbrace{\cdots}_{=0}) \cdots (\underbrace{\cdots}_{=0}) \right)$$

Формула Стокса

Форм Нека је $M \subset \mathbb{R}^3$ компактна површ са оријентацијом $\vec{n}$.
∂M је оријентисана тако да при обиласку, по горњој страни M, површ остаје са леве стране.

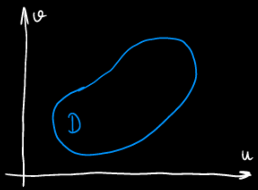


$\vec{F} = (P, Q, R) \quad \vec{F} = \vec{F}(x,y,z) \quad \vec{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad M \subset \Omega$

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 1 - форма у Ω

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} = \iint_M (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \circ d\vec{S} = \iint_M (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \circ \vec{n} \, dS$$

$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$
$\vec{F} \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$



$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in M$

$a \le t \le b$ $\quad (u(t), v(t))$ параметризација од ∂D

$(x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t)))$ за ∂M

Доказ: $Q=0,\ R=0$ (после тога случајеви $P=0, R=0$ и $P, Q=0$ на сабирке.

$$\int_{\partial M} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\partial M} P\, dx = \int_a^b P(x,y,z)\left(X_u \cdot u'(t) + X_v \cdot v'(t)\right) dt$$

$$= \int_{\partial D} P(x,y,z)\, X_u\, du + P(x,y,z)\, X_v\, dv = (*)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = j P_z + k(-P_y) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, P_z, -P_y)$$

$$d\vec{S} = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v)\, du\, dv = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv = \dots$$

$$\dots = \left(y_u z_v - y_v z_u,\ x_v z_u - x_u z_v,\ x_u y_v - x_v y_u\right) du\, dv$$

$$\iint_M (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S} = \iint_D \left[P_z (x_v z_u - x_u z_v) - P_y (x_u y_v - x_v y_u)\right] du\, dv = (**)$$

$(* = **)$

$$(*) = \int_{\partial D} P x_u\, du + P x_v\, dv \overset{\text{Грин}}{=\!=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}(P x_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P x_u)\right] du\, dv = \dots$$

$$\dots = \iint_D \left\{ x_v \left[P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u\right] - x_u \left[P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v\right] \right\} du\, dv = (**)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(P x_v) = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial u}}_{P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u} x_v + P \frac{\partial}{\partial u} x_v$$

Диференцијалне једначине

примери диференцијалних једначина:

- $y' = y$ .... $L_1 u = u' - u$
- $y' = 2xy$ .... $L_2 u = u' - 2xu$
- $y'' - 3y' + 2y = 0$ .... $L_3 u = u'' - 3u' + 2u$
- $y' = -y^2$ .... није линеаран
- $y' - y = e^{2x}$ .... $\left.\begin{array}{l} L_5 u = u'' - u \\ Lu = e^{2x} \end{array}\right\}$ није хомоген

$y' = y \quad y = C \cdot e^x$ је решење за свако реално C.

Кошијев проблем: Наћи оно решење дате ДЈ које испуњава (Кошијев) услов.

$y(x_0) = y_0$

Кошијев услов $y(0) = -3 \quad y = -3e^x$

Деф. Линеарни диференцијални оператор n-тог реда је:

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}(x) u^{(n-1)} + \dots + a_1(x) u' + a_0(x) u \qquad a_j \in C(I),\ 0 \le j \le n-1$$

$L(u+v) = Lu + Lv \qquad L(\alpha u) = \alpha L u \rightarrow$ важи линеарност

$L : C^n(I) \longmapsto C(I)$

Деф Хомогена линеарна диференцијална једначина n-тог реда је $Lu=0$, односно:
$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0 \longrightarrow g(x) - \text{нехомогена}$$
Скуп V решења чини векторски простор.

Деф Једначине које раздвајају променљиве.

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \qquad \frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx \,/\int \qquad \Psi(y) = \Phi(x) + C \,/\, \Psi^{-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y) \qquad \int\frac{dy}{\psi(y)} = \int\varphi(x)dx \qquad y = \Psi^{-1}(\Phi(x)+C)$$

Форм Хомогена линеарна диференцијална једначина I реда.

$y' + Py = 0 \qquad p = p(x)$ непрекидна на интервалу I.

$$y' = -p(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)y, \quad \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \lambda$$
$$|y| = e^{\lambda}\cdot e^{-\int p(x)dx} \qquad \boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx}} \quad \text{(опште решење)}$$

→ Задавањем Кошијевог услова (бирањем C-а) добијамо конкретно решење.

$$y' = \underbrace{Ce^{-\int p(x)dx}}_{y}\cdot[-p(x)] \qquad y' + py = -py + py = 0$$

Нехомогена... $\underset{(**)}{y' + py = q} \qquad p, q \in C(I)$

Решавамо $(**)$ методом варијације константи.

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$
$$y'(x) = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$$
$$y' + py = c'e^{-\int p(x)dx} \cancel{-pc\cdot e^{-\int p(x)dx}} + \cancel{pc\cdot e^{-\int p(x)dx}} = c'e^{-\int p(x)dx} = q$$
$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \,/\int$$
$$c(x) = \int qe^{\int p(x)dx}dx \implies y = e^{-\int pdx}\left[\int qe^{\int pdx}dx + C\right]$$

Тео Размотримо Кошијев проблем.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Довољан услов за егзистенцију и јединственост:

1°) f је непрекидна

2°) $\exists$ константа $\underset{\text{Липшицова}}{L}$ тд је $\underbrace{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|}_{}$ „Липшицов услов"

$f_1(x,y) = y$

$f_2(x,y) = -2xy$

$f_3(x,y) = -y^2$ (нема L)

Проблем: Свести једначину n-тог реда на $(n-1)$-ви ред.

$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \rightarrow$ постоји цена, јер решење постаје векторска вредност.

$y'' - 3y' + 2y = 0$

$Y = (y_0, y_1)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $y = y_0$, $y_0' = y_1$

$y_1' = 3y' - 2y = 3y_1 - 2y_0$

$Y' = (y_0', y_1') = (y_1, 3y_1 - 2y_0)$ $\qquad Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$ $\qquad Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} Y$, $Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$

Тео Кошијев проблем (за хомогену)

$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \qquad a_j \in C(I)$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Тада постоји јединствено решење

$Lu = 0$ скуп V решења је векторски простор.

Тео $\dim V = n$

Фиксирајмо тачку $x_0 \in I$

Свакој тачки из решења $V \rightarrow u(x) \underset{\text{линеарно}}{\overset{A}{\longmapsto}} (u(x_0), u'(x_0), \dots, u^{(n-1)}(x_0)) \in \mathbb{R}^n$

Показујемо бијекцију A.

→ A је „1-1" ⇒ Кошијев проблем има јединствено решење

→ A је „НА" ⇒ Кошијев проблем има решење (због егзистенције) ∎

Став $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y$, $a_j \in C(I)$

$L : C^n(I) \rightarrow C(I)$ линеаран (из једног векторског простора у други)

Решења линеарне хомогене диференцијалне једначине n-тог реда $Ly = 0$ чине векторски простор $\operatorname{Ker} L \subset C^n(I)$

Тео $\dim \operatorname{Ker} L = n$. (када нађемо решења, она су и линеарно независна)

Надање: Све б-је $a_j(x)$ су константне, $a_j \in \mathbb{R}$. $I = \mathbb{R}$

Циљ: Наћи n линеарно независних решења (за $Ly = 0$)

$Ly = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$

Покушајмо $y = e^{\lambda x}$ $\quad y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^{(n)} e^{\lambda x}$

$L(e^{\lambda x}) = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x}$

$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x}$

$P_L(\lambda) = P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ ⤳ карактеристични полином за $Ly = 0$

$L(e^{\lambda x}) = 0 \iff P(\lambda) = 0$ (јер $e^{\lambda x} \neq 0$)

→ Свако решење λ^0 једначине $P(\lambda) = 0$ n-тог реда даје решење $y = e^{\lambda^0 x}$, једначине $Ly = 0$.

$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$P(\lambda) = 0$ даје $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

$y_1 = e^x, \; y_2 = e^{2x}$ $\rightsquigarrow$ линеарно независни, јер не постоји $h \in \mathbb{R}$ ткд $y_1 = h \cdot y_2$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Лема Нека су $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ међусобно различити реални бројеви. Тада су функције $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_k x}$ линеарно независне.

Претпоставимо да је $\to$ $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_k e^{\lambda_k x} = 0. \;/'$

После диференцирања k- пута:

$$C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_k \lambda_k e^{\lambda_k x} = 0.$$
$$C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x} = 0.$$
$$\vdots$$
$$C_1 \lambda_1^k e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^k e^{\lambda_2 x} + \dots + C_k \lambda_k^k e^{\lambda_k x} = 0.$$

Уврстимо $x = 0$

$$C_1 + C_2 + \dots + C_k = 0$$
$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_k C_k = 0$$
$$\lambda_1^2 C_1 + \lambda_2^2 C_2 + \dots + \lambda_k^2 C_k = 0$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1^k C_1 + \lambda_2^k C_2 + \dots + \lambda_k^k C_k = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$$ једино решење је тривијално

$\rightarrow$ Вандермондова детерминанта. ∎

Став Ако $P(\lambda) = 0$ има n различитих реалних решења $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ онда је свако решење y_h - једначине $Ly = 0$ облика $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$.

Доказ: На основу леме, разлагање векторског простора.

$y'' + y = 0 \qquad y_1 = \sin x, \; y_2 = \cos x \qquad y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$\lambda^2 + 1 = 0$ (из карактеристичних)

$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-x} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}\right] + = \; 2\cos x, \; 2i \sin x$$

Случај када су све нуле карактеристичног полинома просте (једноструке, вишеструке)

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ реалне

$\alpha_1 + i\beta_1, \; \dots, \; \alpha_l + i\beta_l$
$\alpha_1 - i\beta_1, \; \dots, \; \alpha_l - i\beta_l$
комплексна

$k + 2l = n$

$$\left.\begin{aligned} e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x} &= e^{\alpha_1 x} e^{i\beta_1 x} \\ &= e^{\alpha_1 x}(\cos \beta_1 x + i \sin \beta_1 x) \\ e^{(\alpha_1 - i\beta_1)x} &= e^{\alpha_1 x}(\cos \beta_1 x - i \sin \beta_1 x) \end{aligned}\right] +/-$$

$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \dots, e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x$ $\Rightarrow$ решења (након скраћивања константи)

$e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \dots, e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x$

$e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_k x}$

n линеарно независних решења

(фундаменталан систем решења

Пример: $P(\lambda)=\lambda^3$, $y'''=0$

$1, x, x^2 \sim$ фундаментални систем решења

Став: Нека је λ_0 корен вишеструкости k за $P(\lambda)=0$. Тада је:
$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ систем од k линеарно независних решења.

Став: Нека је $\alpha+i\beta$ корен вишеструкости l за $P(\lambda)=0$, тада је $\alpha-i\beta$ корен вишеструкости l за $P(\lambda)=0$.

$$\left.\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \dots, & x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \dots, & x^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}\right\} 2l \text{ линеарно независна решења}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

Нехомоген случај: $Ly=b$ $b=b(x)$ непрекидна на I.

Тео: Постоји решење y_p (партикуларно) за $Ly=b$ (теорема егзистенције)

Мотивација: $y'=b \Rightarrow$ тражење примитивне функције $\left(y=\int_a^b b(t)dt\right)$

$$Ly=b \iff Ly=Ly_p \iff L(y-y_p)=0 \quad (\text{јер } L \text{ линеарно})$$
$$\iff y-y_p=\sum_{j=1}^{n} c_j y_j \iff y=y_p+c_1y_1+\dots+c_ny_n$$

$\boxed{\text{Спец. сл.}}$ $b(x)=e^{\mu x}$ то јест $Ly=e^{\mu x}$

Пробамо $y_p=c\cdot e^{\mu x}$
$$Ly_p=L(ce^{\mu x})=cLe^{\mu x}=cP(\mu)e^{\mu x}$$
$$Ly_p=e^{\mu x}-cP(\mu)e^{\mu x} \qquad cP(\mu)=1$$

→ Значи, ако $P(\mu)\neq 0$ онда је $y_p=\frac{1}{P(\mu)}e^{\mu x}$ је партикуларно решење за $Ly=e^{\mu x}$.

→ Ако је $P(\mu)=0$ прост корен: $y_p=cxe^{\mu x}$.

Форм: Линеарна хомогена диференцијална једначина са константним коефицијентима, n-тог реда (општи метод)

$$y^{(n)}-a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$$

$$Y=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1}\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} y_0&=y \\ y'&=y_0'=y_1 \\ y''&=y_1'=y_2 \\ y'''&=y_2'=y_3 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}&=y_{n-2}'=y_{n-1} \\ y^{(n)}&=y_{n-1}'=-a_{n-1}y^{(n-1)}-\dots-a_1y'-a_0y=-a_{n-1}y_{n-1}-\dots-a_1y_1-a_0y_0 \end{aligned}$$

(из једначине)

$$Y'=\begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ -a_{n-1}y_{n-1}-\dots-a_1y_1-a_0y_0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1}\end{bmatrix}$$

$Y' = AY$ — векторско-вредносна функција $Y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$y' = ay \quad e^{ax}$

матрица

$Y(x) = c \cdot e^{Ax}$

$= c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} x^n$

$$e^B = I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \cdots$$

(конвергира брзо)

$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ али $e^{A+B} = e^A \cdot e^B \iff$ ($A \wedge B$ комутирају)

у општем случају

Тип једначине $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Уводимо смену $z = \frac{y}{x}$ $\quad y = x \cdot z$

$y' = z + xz'$

$z + xz' = f(z)$

раздваја променљиве

$xz' = f(z) - z$

$z' = \frac{1}{x}\left[f(z) - z\right]$

раздваја променљиве

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad /\int \quad \ldots$$

Форм (Бернулијева једначина)

$y' + Py = Qy^{\alpha}$ $\quad$ ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$ тривијално)

$\alpha \neq 0, 1$ $\quad y^{-\alpha} y' + P y^{1-\alpha} = Q$ $\quad z = y^{1-\alpha}$

$z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$

$y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} z'$

$\frac{z'}{1-\alpha} + Pz = Q \Rightarrow$ лин. нехомогена

$z' + (1-\alpha) P z = (1-\alpha) Q$

КРАЈ