# АНАЛИЗА 3И, ЈУН 2, 2020

① $\underbrace{(2xy-9x^2)}_{M}dx+\underbrace{(2y+x^2+1)}_{N}dy=0$ , $y(0)=-3$ ← решити ДЈ

једначина са тоталним диференцијалом

$M'_y=2x$
$N'_x=2x$ $\quad M'_y=N'_x \Rightarrow \exists f(x,y)$ тд. $f'_x=M$, $f'_y=N$ $\quad$ О.Р.: $f(x,y)=c$ - const

$f'_x=M=2xy-9x^2 \ / \int dx$

$f(x,y)=\int(2xy-9x^2)dx = x^2y-3x^3+\varphi(y) \quad /'_y$

$f'_y=\underbrace{\underline{x^2}+\varphi'(y)}=N(x,y)=\underbrace{2y+\underline{x^2}+1}$

$\varphi'(y)=2y+1$

$\Rightarrow \varphi(y)=y^2+y+c_1$

$\Rightarrow f(x,y)=x^2y-3x^3+y^2+y+c_1$

$\Rightarrow$ опште решење: $\boxed{x^2y-3x^3+y^2+y=C}$

уз услов $y(0)=-3$ : $x=0,\ y=-3$

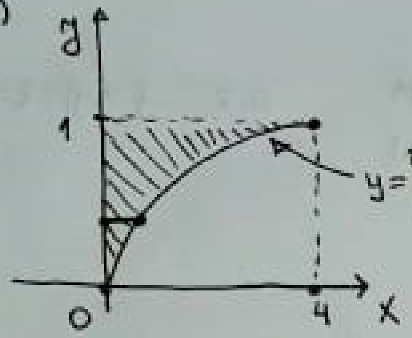
$0-0+9-3=C \Rightarrow C=6$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{решење: } x^2y-3x^3+y^2+y-6=0}$ □

② (а) Замените поредак интеграције: $\int_0^4 \int_{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}}^1 f(x,y)\,dy\,dx$

(б) $I = \int_0^4 \int_{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}}^1 \frac{\sin(2y^4)}{\sin^2(y^4)+1}\,dy\,dx$

(а)




за $x=4$: $\sqrt[3]{\frac{4}{4}}=1$

$y=\sqrt[3]{\frac{x}{4}}$ ← изразимо x: $y^3=\frac{x}{4}$

$\boxed{x=4y^3}$

$$\Rightarrow \int_0^4 \int_{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}}^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{4y^3} f(x,y)\,dx\,dy$$

(б)
$$I = \int_0^4 \int_{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}}^1 \underbrace{\frac{\sin(2y^4)}{\sin^2(y^4)+1}}_{\substack{f(x,y) \\ \text{не зависи од } x}}\,dy\,dx \overset{(а)}{=} \int_0^1 \int_0^{4y^3} \underbrace{\frac{\sin(2y^4)}{\sin^2(y^4)+1}}_{\text{const по } x}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin(2y^4)}{\sin^2(y^4)+1}\cdot 4y^3\,dy \qquad \begin{array}{l} t=y^4 \in [0,1] \\ dt = 4y^3\,dy \end{array}$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin 2t}{\sin^2 t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{2\cdot \sin t\cdot \cos t\,dt}{\sin^2 t+1}$$

$$\left(\begin{array}{l} x=\sin t \in [0,\sin 1] \\ dx = \cos t\,dt \end{array}\right) = \int_0^{\sin 1} \frac{\overset{d\alpha}{2x\,dx}}{\underset{\alpha}{x^2+1}}$$

$$= \ln(x^2+1)\Big|_0^{\sin 1} \qquad \ln 1=0$$

$$= \boxed{\ln(\sin^2 1+1)}$$

□

3. (а) Параметризовати: $x^2+2y^2=1$

(б) $I=\int\limits_\gamma x^2y\,dx + z\,dy + x\,dz$  $F(x,y,z)=(P,Q,R)=(x^2y,z,x)$

$\gamma = S_1\cap S_2$  $S_1:\ z=1+x^2+2y^2$  $\gamma$ орј. одз. из $(0,0,2020)$

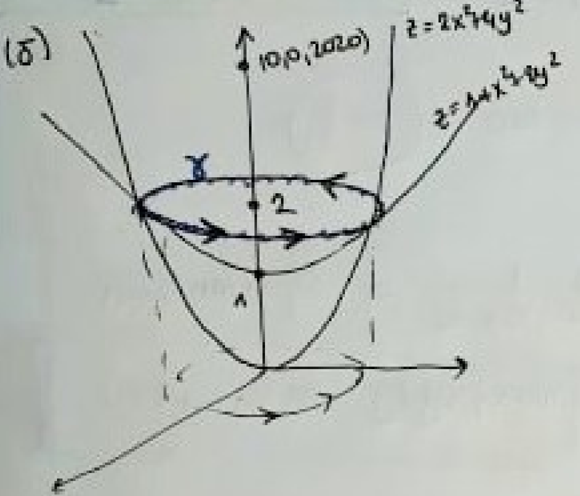
$S_2:\ z=2x^2+4y^2$

(а) $x^2+2y^2=1$

$x=\cos t$  $t\in[-\pi,\pi)$

$y=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\sin t$

(б)




$\boxed{\gamma}$: $1+x^2+2y^2=2x^2+4y^2=z$

$\boxed{1=x^2+2y^2,\ z=2}$

елипса на висини $z=2$

параметризација

$x=\cos t$  $y=\frac{1}{\sqrt2}\sin t$  $z=2$

$\boxed{r(t)=(\cos t,\ \frac{1}{\sqrt2}\sin t,\ 2)}$

$t\in[-\pi,\pi]$  ✓ тражена оријентација

$\boxed{r'(t)=(-\sin t,\ \frac{1}{\sqrt2}\cos t,\ 0)}$

$$I=\int\limits_\gamma F\,d\vec r \underset{\substack{\text{крив.}\\ \text{II врсте}}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\overbrace{\cos^2 t\cdot\tfrac{1}{\sqrt2}\sin t}^{x^2y},\ \overbrace{2}^{z},\ \overbrace{\cos t}^{x}\Big)\cdot\Big(-\sin t,\ \tfrac{1}{\sqrt2}\cos t,\ 0\Big)\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(-\frac{1}{\sqrt2}\cos^2 t\cdot\sin^2 t+\frac{2}{\sqrt2}\cos t+0\Big)\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\Big(\frac{\sin 2t}{2}\Big)^2+\sqrt2\cos t\Big)\,dt$$

$\sin^2 2t=\frac{1-\cos 4t}{2}$

$$=-\frac{1}{4\sqrt2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt+\cancelto{0}{\sqrt2\cdot\sin t\Big|_{-\pi}^{\pi}}$$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos 4t\,dt=0$

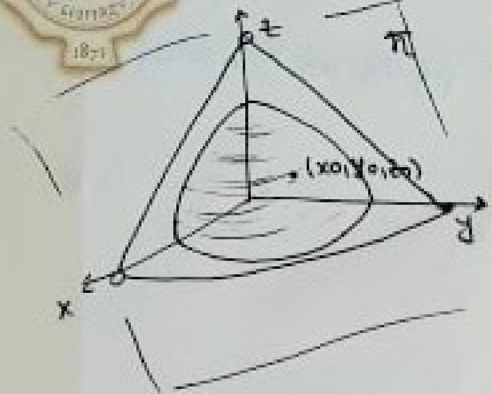
$$=-\frac{1}{4\sqrt2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\pi-(-\pi))=-\frac{\pi}{4\sqrt2}$$

□

$$=-\frac{\pi\sqrt2}{8}$$

④ S: $x^2+y^2+z^2=1$, $x>0, y>0, z>0$

тангентна раван која гради тетраедар најмање запремине са коорд равнима



Нађимо једн тан. равни $\pi$ у тачки $(x_0,y_0,z_0)\in S$ и где она сече осе:

вектор нормале: $(2x,2y,2z)$

у $(x_0,y_0,z_0)$ : $(2x_0,2y_0,2z_0)$

$\Rightarrow$ раван $\pi$: $2x_0\cdot x+2y_0\cdot y+2z_0\cdot z+d=0$

тј. $x_0\cdot x+y_0\cdot y+z_0\cdot z+d'=0$

из $\left.\begin{array}{l}(x_0,y_0,z_0)\in\pi\\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow d'=-1 \Rightarrow \boxed{\pi:\ x_0x+y_0y+z_0z-1=0}$

где сече осе: $\boxed{z}$ $x=y=0 \Rightarrow 0+0+z_0\cdot z-1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{z_0}$

слично $x=\frac{1}{x_0}$, $y=\frac{1}{y_0}$

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{y_0}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x_0y_0z_0}$ ← тражимо min

$\Rightarrow$ заправо тражимо $\boxed{\max\{x\cdot y\cdot z\} \text{ на } S,\ x,y,z>0}$

Лагранжова ф-ја: $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$$\left.\begin{array}{l}F'_x=yz+2\lambda x=0\\ F'_y=xz+2\lambda y=0\end{array}\right\} - \ (y-x)\cdot(z-2\lambda)=0 \qquad x=y \vee z=2\lambda \ (1)$$

слично: $\longrightarrow$ $x=z \vee y=2\lambda$ (2), $y=z \vee x=2\lambda$ (3)

$F'_z=xy+2\lambda z=0$

$F'_\lambda$: $x^2+y^2+z^2=1$ (4)

1° $x=y=z$

$\Rightarrow$ сви су $=\frac{1}{\sqrt3} \Rightarrow V=\frac{3\sqrt3}{6}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\Rightarrow$ једн. тан. равни: $\boxed{\frac{x}{\sqrt3}+\frac{y}{\sqrt3}+\frac{z}{\sqrt3}=1}$

тј. $\boxed{x+y+z=\sqrt3}$

2° $x=y\neq z$

(2) $\Rightarrow x=y=2\lambda$

из $F'_z=0 \Rightarrow 4\lambda^2+2\lambda z=0$

$\Rightarrow z=-2\lambda$

немогуће јер сви $x,y,z>0$ ↯

Пошто је све симетрично (по $x,y,z$) једини преостали случај је

$x\neq y\neq z\neq x$

немогуће из (1), (2), (3) ↯

$\Rightarrow$ ово је min

прецизније, ово је једина стационарна тачка, а да је min утврђујемо провером V у неког другој тачки, нпр. $(\frac12,\frac12,\frac{1}{\sqrt2}) \to V=\frac{4\sqrt2}{6}>\frac{\sqrt3}{2}$