

dr Lidija Stefanović

**INTEGRALI:
KRIVOLINIJSKI, DVOJNI,
TROJNI, POVRŠINSKI
ZA STUDENTE TEHNIČKIH FAKULTETA;
II DEO**



SKC Niš, 2009.

dr Lidija Stefanović

**INTEGRALI: KRIVOLINIJSKI, DVOJNI,
TROJNI, POVRŠINSKI
ZA STUDENTE TEHNIČKIH FAKULTETA; II DEO**

I izdanje, Niš, 2009.

Recenzenti:

dr Slađana Marinković, docent Elektronskog fakulteta u Nišu,
dr Vladimir Pavlović, docent PMFa u Nišu

Izdavač:

Studentski kulturni centar Niš

Za izdavača:

Miroslav Jović, direktor

Urednik:

Aleksandar Blagojević

Tehnička obrada:

dr Lidija Stefanović,
dipl. ing. Biljana Đorđević

Štampa:

”Petrograf” Niš

Tiraž:

100 primeraka

ISBN 978-86-7757-154-2

*Bilo kakvo umnožavanje ove knjige nije dozvoljeno bez pisanog
odobrenja autora.*

PREDGOVOR

Ovo je zbirka zadataka koja je prvobitno zamišljena kao sastavni i poslednji deo knjige "Integrali: krivolinijski, dvojni, trojni, površinski za studente tehničkih fakulteta; I deo", autora prof. dr Lidije Stefanović (Studentski kulturni centar Niš, Niš, 2008). Iako sa knjigom čini skoro neraskidivu celinu, oformljena je kao posebna celina zbog obimnosti i značaja prezentovane materije.

Zbirka u potpunosti podržava istoimenu knjigu, kako u pogledu sadržine, tako i u svakom drugom pogledu (navođenje oznaka formula i teorema, pozivanje na primere i napomene, citiranje bibliografskih jedinica i slično). Primedbe iznete u Predgovoru knjige, koje se odnose na prikazivanje prostornih objekata, važe i u ovom slučaju.

Tekst zbirke je urađen pomoću programskog paketa MIKTEX (verzija Amstex 2.0), a slike pomoću programskog paketa Corel Draw (verzija 11). Svi zadaci su testirani pomoću programskog paketa MATHEMATICA (verzija 6.0).

Autor se zahvaljuje asistentu Elektronskog fakulteta u Nišu, mr Marjanu Matejiću, koji je zadatke testirao i formulisao Prilog. Takođe se zahvaljuje recenzentima, doc. dr Slađani Marinković i doc. dr Vladimiru Pavloviću, a posebno prvom od njih, na predanom isčitavanju i ispravljanju materijalnih grešaka u tekstu, kao i na pomoći u izboru zadataka.

Niš, 2009. g.

Autor

SADRŽAJ

KRIVOLINIJSKI INTEGRALI 1

Krivolinijski integrali po luku (I vrste) 1

Zadaci 1 – 7

Krivolinijski integrali po koordinatama (II vrste) 9

Zadaci 8 – 18

VIŠESTRUKI INTEGRALI 27

Dvojni integrali 27

Zadaci 19 – 21

Trojni integrali 32

Zadaci 22 – 23

Smena promenljivih u dvojnim integralima 35

Zadaci 24 – 37

Smena promenljivih u trojnim integralima 53

Zadaci 38 – 48

Green–Riemannova teorema 65

Zadaci 49 – 52

POVRŠINSKI INTEGRALI 71

Površinski integrali po površi (I vrste) 71

Zadaci 53 – 62

Površinski integrali po koordinatama (II vrste) 85

Zadaci 63 – 67

Veza između površinskih integrala I i II vrste 95

Zadaci 68 – 70

Teorema Ostrogradskog 102

Zadaci 71 – 77

Stokesova teorema	117
Zadaci 78 – 85	
Nezavisnost krivolinijskog integrala od puta integracije	126
Zadaci 86 – 90	
PRILOG	133

KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

Krivolinijski integrali po luku (I vrste)

Ako je

$$L : \quad x = x(t) , \quad y = y(t) , \quad z = z(t) ; \quad t \in [\alpha, \beta] ,$$

tada je

$$\int_L H(x, y, z) d\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} H(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt .$$

1. Izračunati dužinu dela krive L_1 , koja je presek površi

$$S_1 : \quad (x - y)^2 = 3(x + y) , \quad S_2 : \quad x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2 ,$$

između tačaka $O(0, 0, 0)$ i $B(3, 0, \sqrt{8})$.

Rešenje. Neka je $L = \widehat{OB}$ deo krive L_1 i l dužina za L .

Prvo nalazimo parametarske jednačine krive L . Svaka tačka $X(x, y, z) \in L_1$ pripada istovremeno i površi S_1 i površi S_2 , pa njene koordinate zadovoljavaju sistem jednačina

$$(x - y)^2 = 3(x + y) , \quad x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2 .$$

Smenom

$$u = x - y , \quad v = x + y$$

u prethodni sistem, dobija se novi sistem

$$u^2 = 3v , \quad uv = \frac{9}{8} z^2 .$$

Stavljajući $u = t$, iz prethodnog sistema je

$$v = \frac{1}{3} t^2, \quad z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} t\sqrt{t}$$

i, prema uvedenoj smeni,

$$x = \frac{1}{2}(u + v) = \frac{1}{6}(3t + t^2), \quad y = \frac{1}{2}(v - u) = \frac{1}{6}(t^2 - 3t), \quad z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} t\sqrt{t},$$

pa je

$$X\left(\frac{1}{6}(3t + t^2), \frac{1}{6}(t^2 - 3t), \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} t\sqrt{t}\right).$$

Za tačku $O(0, 0, 0)$ je $t = u = x - y = 0 - 0 = 0$, a za tačku $B(3, 0, \sqrt{8})$ je $t = u = x - y = 3 - 0 = 3$. Zato za tačke $X \in L \subset L_1$ važi $t \in [0, 3]$ i parametarske jednačine krive L glase

$$L: \quad x = \frac{1}{6}(3t + t^2), \quad y = \frac{1}{6}(t^2 - 3t), \quad z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} t\sqrt{t}; \quad t \in [0, 3].$$

Kako je

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{6}(3 + 2t), \quad y'(t) = \frac{1}{6}(2t - 3), \quad z'(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{t}; \\ x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) &= \frac{1}{18}(2t + 3)^2, \end{aligned}$$

dužina l krive L je

$$\begin{aligned} l &= \int_L d\lambda = \int_0^3 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{18}(2t + 3)^2} dt = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_0^3 (2t + 3) dt = \frac{1}{3\sqrt{2}} (t^2 + 3t) \Big|_0^3 = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Izračunati dužinu dela krive L_1 , koja je presek površi

$$S_1: \quad x^2 = 3y, \quad S_2: \quad 2xy = 9z,$$

između tačaka $O(0, 0, 0)$ i $B(3, 3, 2)$.

Rešenje. Neka je $L = \widehat{OB}$ deo krive L_1 , čiju dužinu l treba izračunati. Stavljajući $x = t$, iz jednačina površi S_1 i S_2 sledi

$$y = \frac{1}{3} t^2, \quad z = \frac{2}{27} t^3.$$

Za tačku $O(0, 0, 0)$ je $t = x = 0$, a za tačku $B(3, 3, 2)$ je $t = x = 3$. Zato su parametarske jednačine krive

$$L: \quad x = t, \quad y = \frac{1}{3} t^2, \quad z = \frac{2}{27} t^3; \quad t \in [0, 3]$$

ili, što je isto,

$$L: \quad y = \frac{1}{3}x^2, \quad z = \frac{2}{27}x^3; \quad x \in [0, 3].$$

Kako je

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{2}{3}x, \quad z'(x) = \frac{2}{9}x^2; \\ 1 + y'^2(x) + z'^2(x) &= 1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^4 = \frac{1}{81}(2x^2 + 9)^2, \end{aligned}$$

dužina l krive L je

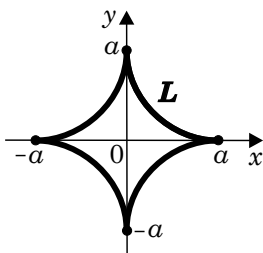
$$\begin{aligned} l &= \int_L d\lambda = \int_0^3 \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (2x^2 + 9) \, dx = \frac{1}{9} \left(2\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 5. \end{aligned}$$

3. Izračunati dužinu krive (*astroida*)

$$L: \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad z = 0,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Zamenom $y = 0$ u implicitnu jednačinu krive L sledi $x = \pm a$, pa L seče x -osu u tačkama $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$ i analogno, L seče y -osu ($x = 0, z = 0$) u tačkama $(0, a, 0)$, $(0, -a, 0)$. Astroida L je prikazana na sledećoj slici. Zbog simetrije u odnosu na x i y -osu, posmatramo samo deo u I kvadrantu xy -ravnini ($z = 0$) za koji je $x, y \geq 0$.



Da bismo odredili parametarske jednačine krive L , prelazimo na uopštene polarne koordinate pomoću

$$x = r \cos^3 \varphi, \quad y = r \sin^3 \varphi.$$

Smena je oblika (1.4.6) sa neparnim brojem $n = 3$, pa je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ maksimalni raspon koordinate φ . Zamenom ovako iskazanih x i y u zadatu implicitnu jednačinu krive, nalazimo $r^{2/3} = a^{2/3}$, $r^2 = a^2$ i $r = a > 0$, što ne nameće ograničenja koordinati φ . Zato su parametarske jednačine krive

$$L: \quad x = a \cos^3 \varphi, \quad y = a \sin^3 \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Kako je

$$\begin{aligned}x'(\varphi) &= -3a \cos^2 \varphi \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = 3a \sin^2 \varphi \cos \varphi, \quad z'(\varphi) = 0; \\x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi) &= 9a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

i kako za $x, y \geq 0$ iz uvedene smene sledi $\cos \varphi \geq 0$, $\sin \varphi \geq 0$, to je $\varphi \in [0, \pi/2]$ u I kvadrantu i za dužinu l krive L se dobija

$$\begin{aligned}l &= \oint_L d\lambda = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} d\varphi \\&= 4 \int_0^{\pi/2} 3a |\cos \varphi \sin \varphi| d\varphi = 12a \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\&= 12a \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d(\sin \varphi) = 12a \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 6a.\end{aligned}$$

Vrednosti parametra φ za deo krive L u I kvadrantu smo mogli da dobijemo kao u Zadacima 1 i 2, na osnovu graničnih tačaka $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ tog dela. Preciznije, za tačku $(a, 0, 0)$ iz parametarskih jednačina krive L sledi $a = a \cos^3 \varphi$, $0 = a \sin^3 \varphi$, tj. $1 = \cos^3 \varphi$, $0 = \sin^3 \varphi$ i $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$, pa ovoj tački odgovara $\varphi = 0$. Analogno, za tačku $(0, a, 0)$ je $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1$ i $\varphi = \pi/2$.

4. Izračunati dužinu dela krive L_1 , koja je presek površi

$$S_1: \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad S_2: \quad z = a^{1/3}(x^{2/3} + y^{2/3}),$$

za $x, y \geq 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Neka je L deo krive L_1 , čiju dužinu l treba izračunati. Zbog uslova $x, y \geq 0$, iz jednačine površi S_2 sledi $z \geq 0$, pa se kriva L nalazi u I oktantu. Površ S_1 je cilindrična, sa direktrisu u xy -ravni ($z = 0$) i izvodnicama paralelnim z -osi. Direktrisa ima "istu" jednačinu kao S_1 , pa je to astroida iz Zadatka 3. Čitava cilindrična površ, a time i kriva L koja joj pripada, projektuje se na direktrisu (3° iz Napomene 2.3.5). Zato je projekcija L_{xy} krive L na xy -ravan deo astroide u I kvadrantu te ravni.

Prema Zadatku 3, parametarske jednačine projekcije su

$$L_{xy}: \quad x = a \cos^3 \varphi, \quad y = a \sin^3 \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Tačke sa krive L i njihove projekcije sa krive L_{xy} imaju iste koordinate x i y . Kako kriva L pripada površi S_2 , koordinate njenih tačaka zadovoljavaju jednačinu ove površi. Zamenom x, y iz parametarskih jednačina za L_{xy} u jednačinu za S_2 dobija se

$$z = a^{1/3}(a^{2/3} \cos^2 \varphi + a^{2/3} \sin^2 \varphi) = a,$$

što je treća koordinata z tačaka sa krive L , pa su parametarske jednačine

$$L: \quad x = a \cos^3 \varphi, \quad y = a \sin^3 \varphi, \quad z = a; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Budući da je $z = a$ konstanta, to je $z'(\varphi) = 0$ i dužina

$$l = \frac{3}{2}a$$

se izračunava kao u Zadatku 3.

Prema rezultatu iz Zadatka 3, dužina projekcije L_{xy} je $6a/4 = 3a/2$. Sve tačke sa krive L imaju istu treću koordinatu $z = a$, što znači da se L nalazi u ravni $z = a$, koja je paralelna xy -ravni. Zato kriva L i njena projekcija L_{xy} imaju istu dužinu.

5. Izračunati površinu dela cilindrične površi

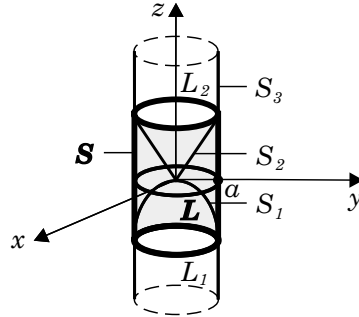
$$S_3 : \quad x^2 + y^2 = a^2$$

koji se nalazi između površi

$$S_1 : \quad z = -(x^2 + y^2) , \quad S_2 : \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

pri čemu je $a > 0$.

Rešenje. Neka je cilindrična površ S deo zadate cilindrične površi S_3 , čiju površinu m treba izračunati. Takođe, neka je L direktrisa, a L_1 i L_2 bazisi površi S koji nastaju u preseku S_3 sa S_1 i S_3 sa S_2 redom. Površ S_1 je paraboloid, a S_2 konus sa z -osom kao osovinom.



Površinu m izračunavamo kao zbir

$$m = m_1 + m_2 ,$$

gde je m_1 površina onog dela površi S koji se nalazi ispod xy -ravni ($z \leq 0$), a m_2 površina dela iznad xy -ravni ($z \geq 0$). Kako je bazis L_1 na paraboloidu, a bazis L_2 na konusu, uz oznake

$$S_1 : \quad z = f_1(x, y) = -(x^2 + y^2) \leq 0 , \quad S_2 : \quad z = f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

i prema geometrijskom tumačenju krivolinijskog integrala I vrste, dobijamo

$$m_1 = \left| \oint_L f_1(x, y) d\lambda \right| = \oint_L (x^2 + y^2) d\lambda , \quad m_2 = \oint_L f_2(x, y) d\lambda = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda .$$

Direktrisa

$$L: \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

je centralna kružnica u xy -ravni ($z = 0$) poluprečnika a . Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

iz jednačine kružnice sledi $r = a$ i njene parametarske jednačine glase

$$L: \quad x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Određujući

$$\begin{aligned} x^2(\varphi) + y^2(\varphi) &= a^2; \\ x'(\varphi) &= -a \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = a \cos \varphi, \quad z'(\varphi) = 0; \\ x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi) &= a^2, \end{aligned}$$

nalazimo dalje

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^{2\pi} [x^2(\varphi) + y^2(\varphi)] \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{a^2} \, d\varphi = a^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2a^3\pi, \\ m_2 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2(\varphi) + y^2(\varphi)} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} \sqrt{a^2} \, d\varphi = a^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2a^2\pi, \end{aligned}$$

pa je

$$m = 2a^3\pi + 2a^2\pi = 2a^2(a+1)\pi.$$

6. Izračunati krivolinijski integral I vrste

$$I = \oint_L |y| \, d\lambda,$$

gde je L kriva (*lemniskata*)

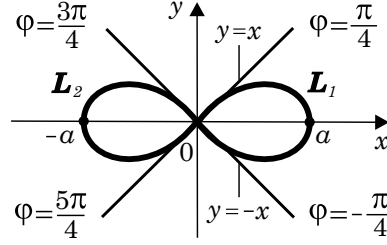
$$L: \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad z = 0$$

i $a > 0$.

Rešenje. U implicitnoj jednačini krive L je $(x^2 + y^2)^2 \geq 0$, pa mora da bude i $x^2 - y^2 \geq 0$, odakle je redom: $y^2 \leq x^2$, $|y| \leq |x|$, $-|x| \leq y \leq |x|$ i

$$-x \leq y \leq x, \quad x \geq 0; \quad x \leq y \leq -x, \quad x \leq 0.$$

Dakle, kriva L se nalazi u xy -ravni ($z = 0$) "iznad" prave $y = -x$ i "ispod" prave $y = x$ za $x \geq 0$, a obrnuto za $x \leq 0$. Dalje, za $y = 0$ iz jednačine krive L sledi $x^2(x^2 - a^2) = 0$ i $x = 0$, $x = \pm a$, pa L seče y -osu u tačkama $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$. Za $x = 0$ se dobija $y^4 = -a^2 y^2$ i $y = 0$, pa je $(0, 0, 0)$ presečna tačka krive L i y -ose. Kriva L je dobro poznata Bernoullieva lemniskata.



Sa slike vidimo da lemniskata L nije zatvorena prosta kriva u smislu Definicije 1.1.9. U stvari, lemniskata se sastoji od dve zatvorene krive L_1 i L_2 sa zajedničkom tačkom $(0, 0, 0)$. Ova tačka je singularna tačka implicitne jednačine i to *dvostruka tačka* ([2], str. 97).

Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

iz jednačine krive L sledi $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Kako je $r^2 \geq 0$, to mora da bude $\cos 2\varphi \geq 0$, a ovo važi za $2\varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/2]$, tj.

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right],$$

što je u skladu sa prethodnim zaključkom o položaju krive L u xy -ravni. Zbog $a > 0$, u navedenim segmentima je

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi},$$

pa je $L = L_1 \cup L_2$, gde L_1 i L_2 imaju parametarske jednačine

$$L_1 : \quad x = a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

$$L_2 : \quad x = a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Objedinjene, ove jednačine se smatraju parametarskim jednačinama krive

$$L : \quad x = a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Integral I postaje

$$I = I_1 + I_2,$$

gde je

$$I_1 = \oint_{L_1} |y| d\lambda, \quad I_2 = \oint_{L_2} |y| d\lambda.$$

Kako je

$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi) = \frac{a^2}{\cos 2\varphi} ; \quad d\lambda = \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} \, d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \, d\varphi$$

i $|y| = a|\sin \varphi| \sqrt{\cos 2\varphi}$,

$$\sin \varphi \geq 0 , \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] ; \quad \sin \varphi \leq 0 , \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right] ,$$

to je

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi/4}^0 -a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \, d\varphi + \int_0^{\pi/4} a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \, d\varphi \\ &= -a^2 \int_{-\pi/4}^0 \sin \varphi \, d\varphi + a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi = a^2 \cos \varphi \Big|_{-\pi/4}^0 - a^2 \cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} \\ &= (2 - \sqrt{2})a^2 , \\ I_2 &= \int_{3\pi/4}^{\pi} a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \, d\varphi + \int_{\pi}^{5\pi/4} -a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \, d\varphi \\ &= a^2 \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi - a^2 \int_{\pi}^{5\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi = -a^2 \cos \varphi \Big|_{3\pi/4}^{\pi} + a^2 \cos \varphi \Big|_{\pi}^{5\pi/4} \\ &= (2 - \sqrt{2})a^2 \end{aligned}$$

i konačno

$$I = I_1 + I_2 = 2(2 - \sqrt{2})a^2 .$$

7. Izračunati krivolinijski integral I vrste

$$I = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} \, d\lambda ,$$

gde je L kriva

$$L : \quad x^2 + y^2 = ax , \quad z = 0$$

i $a > 0$.

Uputstvo. U Primeru 2.3.2 smo već našli parametarske jednačine krive

$$L : \quad x = a \cos^2 \varphi , \quad y = a \cos \varphi \sin \varphi , \quad z = 0 ; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

i odredili

$$x^2(\varphi) + y^2(\varphi) = a^2 \cos^2(\varphi) ; \quad x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi) = a^2 .$$

Zato je

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a |\cos \varphi| a \, d\varphi = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi = a^2 \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2a^2 .$$

Krivolinijski integrali po koordinatama (II vrste)

Ako je

$$L : \quad x = x(t) , \quad y = y(t) , \quad z = z(t) ; \quad t \in [\alpha, \beta] ,$$

tada je

$$\begin{aligned} & \int_{L^+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) \right. \\ & \quad \left. + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right] dt . \end{aligned}$$

8. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L x^3 dx + 3y^2 z dy - x^2 y dz ,$$

gde je L deo prave između tačaka $A(1, 2, 3)$ i $B(-1, 2, 1)$, orijentisan od tačke A ka tački B .

Rešenje. Neka je L_1 prava koja prolazi kroz tačke A i B . Simetrični oblik jednačine prave kroz dve tačke (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) je ([3], str. 274)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} .$$

Stavljajući $(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3)$, $(x_2, y_2, z_2) = (-1, 2, 1)$ i označavajući razlomke sa t , dobija se

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 3}{-2} = t ,$$

odakle slede parametarske jednačine prave

$$L_1 : \quad x = 1 - 2t , \quad y = 2 , \quad z = 3 - 2t ; \quad t \in \mathbb{R} .$$

Za tačku A je $x = 1$, $z = 3$, pa je $t = 0$. Za tačku B je $x = -1$, $z = 1$, pa je $t = 1$. Zato L ima parametarske jednačine

$$L : \quad x = 1 - 2t , \quad y = 2 , \quad z = 3 - 2t ; \quad t \in [0, 1] .$$

S obzirom na orijentaciju od A ka B , parametar t se menja od $t = 0$ do $t = 1$.

Nalazeći

$$x'(t) = -2 , \quad y'(t) = 0 , \quad z'(t) = -2 ,$$

integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [x^3(t)x'(t) + 3y^2(t)z(t)y'(t) - x^2(t)y(t)z'(t)] dt \\ &= \int_0^1 [-2(1-2t)^3 + 4(1-2t)^2] dt = 2 \int_0^1 (1-2t-4t^2+8t^3) dt = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

9. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + (y-6)^2},$$

gde je L deo kružnice

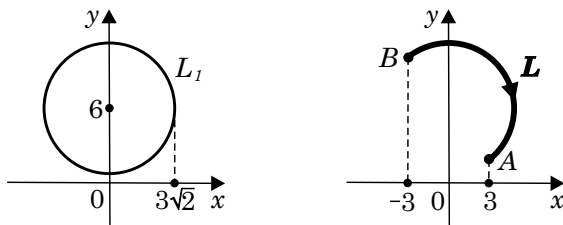
$$L_1: \quad x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0, \quad z = 0$$

između tačaka $A(3, 3, 0)$ i $B(-3, 9, 0)$, orijentisan od tačke B ka tački A .

Rešenje. Integral I je potpuni krivolinijski (2.2.3) sa $R(x, y, z) \equiv 0$. Kružnica

$$L_1: \quad x^2 + (y-6)^2 = 18, \quad z = 0$$

je u xy -ravni ($z = 0$), sa centrom u tački $(0, 6, 0)$ i poluprečnika $3\sqrt{2}$.



Kako je L_1 "pomerena" kružnica, uvodimo smenu

$$x = r \cos \varphi, \quad y - 6 = r \sin \varphi$$

i dobijamo $r = 3\sqrt{2}$, kao i parametarske jednačine

$$L_1: \quad x = 3\sqrt{2} \cos \varphi, \quad y = 6 + 3\sqrt{2} \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Za tačku $A(3, 3, 0)$ je

$$3 = 3\sqrt{2} \cos \varphi, \quad 3 = 6 + 3\sqrt{2} \sin \varphi,$$

odakle je $\cos \varphi = \sqrt{2}/2$, $\sin \varphi = -\sqrt{2}/2$, pa je $\varphi = -\pi/4$. Za tačku $B(-3, 9, 0)$ je

$$-3 = 3\sqrt{2} \cos \varphi, \quad 9 = 6 + 3\sqrt{2} \sin \varphi,$$

odakle je $\cos \varphi = -\sqrt{2}/2$, $\sin \varphi = \sqrt{2}/2$ i $\varphi = 3\pi/4$. Dakle, parametarske jednačine krive L su

$$L: \quad x = 3\sqrt{2} \cos \varphi, \quad y = 6 + 3\sqrt{2} \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

pri čemu se za zadatu orijentaciju parametar φ menja od $\varphi = 3\pi/4$ do $\varphi = -\pi/4$.

Nalazeći

$$x'(\varphi) = -3\sqrt{2} \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = 3\sqrt{2} \cos \varphi, \quad z'(\varphi) = 0$$

i sređujući podintegralni izraz, dobija se

$$I = \int_{3\pi/4}^{-\pi/4} \frac{-y(\varphi)x'(\varphi) + x(\varphi)y'(\varphi)}{x^2(\varphi) + [y(\varphi) - 6]^2} d\varphi = \int_{3\pi/4}^{-\pi/4} (1 + \sqrt{2} \sin \varphi) d\varphi = -(2 + \pi).$$

10. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y dx - 2x dy,$$

gde je $L = L_1 \cup L_2$, kriva L_1 je deo kružnice

$$L_3: \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0$$

koji se nalazi van kruga ograničenog kružnicom

$$L_4: \quad x^2 + y^2 = 2y, \quad z = 0,$$

a kriva L_2 je deo kružnice L_4 koji je van kruga ograničenog sa L_3 . Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je negativno orijentisana.

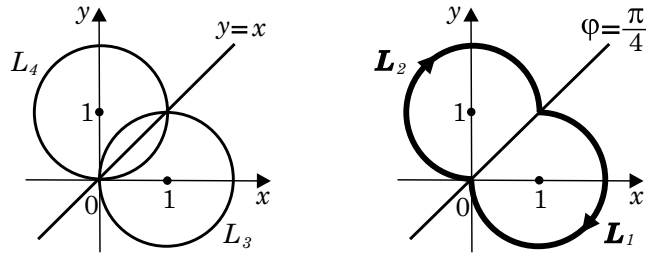
Rešenje. Kružnice L_3 i L_4 pripadaju xy -ravni ($z = 0$). Rešavanjem sistema

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 2y$$

nalazimo njihove presečne tačke $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, koje leže na pravoj $y = x$. S obzirom na

$$L_3: \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad L_4: \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

kružnica L_3 ima centar u tački $(1, 0, 0)$ na x -osi, a L_4 ima centar u tački $(0, 1, 0)$ na y -osi.



Obe kružnice imaju centar na nekoj od koordinatnih osa i prolaze kroz koordinatni početak, pa mogu direktno da se uvedu polarne koordinate smenom

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

posle koje se iz jednačina kružnica dobija $r = 2 \cos \varphi$ za L_3 i $r = 2 \sin \varphi$ za L_4 . Kako je L_1 deo kružnice L_3 "ispod", a L_2 deo kružnice L_4 "iznad" prave $y = x$ i kako pravoj $y = x$ odgovara ugao $\varphi = \pi/4$, dobijamo parametarske jednačine

$$L_1: \quad x = 2 \cos^2 \varphi, \quad y = 2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right],$$

$$L_2: \quad x = 2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad y = 2 \sin^2 \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

Zbog negativne orijentacije krive L , ugao φ se menja od $\varphi = \pi/4$ do $\varphi = -\pi/2$ za krivu L_1 i od $\varphi = \pi$ do $\varphi = \pi/4$ za krivu L_2 .

Kriva $L = L_1 \cup L_2$ nema jedinstvenu parametrizaciju. Zato integral I rastavljamo na dva integrala po delovima krive

$$I = I_1 + I_2,$$

gde je

$$I_1 = \int_{L_1} y \, dx - 2x \, dy, \quad I_2 = \int_{L_2} y \, dx - 2x \, dy.$$

Za krivu L_1 je

$$x'(\varphi) = -4 \cos \varphi \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = -2 \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi,$$

a za krivu L_2 je

$$x'(\varphi) = -2 \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi, \quad y'(\varphi) = 4 \cos \varphi \sin \varphi,$$

pa sređivanjem podintegralnih izraza sledi

$$I_1 = \int_{\pi/4}^{-\pi/2} [y(\varphi)x'(\varphi) - 2x(\varphi)y'(\varphi)] \, d\varphi = -8 \int_{\pi/4}^{-\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi,$$

$$I_2 = -4 \int_{\pi}^{\pi/4} (\sin^4 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \, d\varphi.$$

Sukcesivnom primenom jednakosti

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

transformišemo izraze

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi &= (\cos^2 \varphi)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \varphi &= (\sin^2 \varphi)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2\varphi) = \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \\ &= \frac{1}{4} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\varphi \end{aligned}$$

i za integrale I_1 , I_2 dobijamo

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -8 \int_{\pi/4}^{-\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) d\varphi \\
 &= -3 \int_{\pi/4}^{-\pi/2} d\varphi - 4 \int_{\pi/4}^{-\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi - \int_{\pi/4}^{-\pi/2} \cos 4\varphi d\varphi \\
 &= -3\varphi \Big|_{\pi/4}^{-\pi/2} - 2 \int_{\pi/4}^{-\pi/2} \cos 2\varphi d(2\varphi) - \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{-\pi/2} \cos 4\varphi d(4\varphi) \\
 &= \frac{9}{4} \pi - 2 \sin 2\varphi \Big|_{\pi/4}^{-\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_{\pi/4}^{-\pi/2} = 2 + \frac{9}{4} \pi , \\
 I_2 &= -4 \int_{\pi}^{\pi/4} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{4} \cos 4\varphi \right) d\varphi \\
 &= -4 \left(\frac{3}{4} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{16} \sin 4\varphi \right) \Big|_{\pi}^{\pi/4} = 1 + \frac{9}{4} \pi .
 \end{aligned}$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = 3 + \frac{9}{2} \pi .$$

11. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S : \quad x^2 + y + z^2 = 1$$

sa koordinatnim ravnima za $x, y, z \geq 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela x -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Ako jednačinu površi S zapišemo u obliku

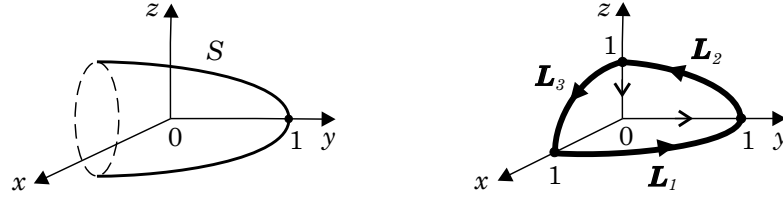
$$S : \quad y = -(x^2 + z^2) + 1 ,$$

vidimo da je S paraboloid sa y -osom kao osovinom, pomeren "udesno" za 1 duž y -ose. Kako su jednačine y -ose $x = 0$, $z = 0$, rešavanjem sistema

$$x^2 + y + z^2 = 1 , \quad x = 0 , \quad z = 0 ,$$

tj. zamenom $x = 0$, $z = 0$ u jednačinu $x^2 + y + z^2 = 1$, sledi $y = 1$ i presečna (zajednička) tačka y -ose i paraboloida $(0, 1, 0)$. Analogno, smenama $y = 0$, $z = 0$ i $x = 0$, $y = 0$ u $x^2 + y + z^2 = 1$ slede presečne tačke $(1, 0, 0)$ i $(0, 0, 1)$ paraboloida sa x i z -osom redom. Neka su L_1 , L_2 i L_3 presečne krive paraboloida S sa xy , yz i zx -koordinatnom ravni redom u I oktantu ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Paraboloid S i zatvorena kriva $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ su prikazani na sledećim slikama. Zadana orijentacija krive L se odnosi, u stvari, na

orijentaciju njene projekcije na yz -ravan, a kriva L je orijentisana samo saglasno projekciji (Slika 1.2.9 i komentar uz nju).



Jednačina xy -ravni je $z = 0$, pa se jednačina krive L_1 nalazi zamenom $z = 0$ u jednačinu paraboloida $x^2 + y + z^2 = 1$. Pri tome je $x \geq 0, y \geq 0$. Takođe, zamenom $x = 0$ i $y = 0$ u $x^2 + y + z^2 = 1$, slede jednačine krivih L_2 za $y \geq 0, z \geq 0$ i L_3 za $x \geq 0, z \geq 0$. Dobijaju se implicitne jednačine:

$$L_1 : x^2 + y = 1, z = 0, \quad L_2 : y + z^2 = 1, x = 0, \quad L_3 : x^2 + z^2 = 1, y = 0.$$

Eksplcitne jednačine krivih L_1 i L_2 su

$$L_1 : y = 1 - x^2, z = 0, \quad L_2 : y = 1 - z^2, x = 0,$$

što znači da se radi o delovima parabola u xy i yz -koordinatnoj ravni redom. Kriva L_3 je deo centralne kružnice u xz -ravni. Imajući u vidu poslednju sliku i ograničenja $x \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$, kao i Napomenu 1.4.3, parametarske jednačine krivih L_1 i L_2 su

$$L_1 : y = 1 - x^2, z = 0; \quad x \in [0, 1],$$

$$L_2 : x = 0, y = 1 - z^2; \quad z \in [0, 1],$$

pri čemu je za parametar izabrana Descartesova koordinata x u slučaju L_1 i z u slučaju L_2 . Uvodeći polarne koordinate u xz -ravni sa

$$z = r \cos \varphi, \quad x = r \sin \varphi$$

i poštujući ograničenje $\varphi \in [0, \pi/2]$ u posmatranoj situaciji, iz jednačine krive L_3 sledi $r = 1$ i njene parametarske jednačine glase

$$L_3 : x = \sin \varphi, y = 0, z = \cos \varphi; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Za zadatau orijentaciju krive L , izabrani parametri x, z i φ se menjaju od $x = 1$ do $x = 0$, od $z = 0$ do $z = 1$ i od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi/2$.

Za krivu L_1 je

$$y'(x) = -2x, \quad z'(x) = 0,$$

za krivu L_2

$$x'(z) = 0, \quad y'(z) = -2z$$

i za krivu L_3

$$x'(\varphi) = \cos \varphi, \quad y'(\varphi) = 0, \quad z'(\varphi) = -\sin \varphi.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{L_1} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz \\
 &= \int_1^0 (y^2(x) - x^2 y'(x) + z^2(x) z'(x)) dx = \int_1^0 (1 - 2x^2 + x^4 + 2x^3) dx = -\frac{31}{30}, \\
 I_2 &= \int_{L_2} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz \\
 &= \int_0^1 (y^2(z) x'(z) - x^2(z) y'(z) + z^2) dz = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}, \\
 I_3 &= \int_{L_3} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz \\
 &= \int_0^{\pi/2} (y^2(\varphi) x'(\varphi) - x^2(\varphi) y'(\varphi) + z^2(\varphi) z'(\varphi)) d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} -\cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) = \left. \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

i, s obzirom na $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{31}{30}.$$

Krivu L_3 smo mogli da parametrizujemo kao i krive L_1 , L_2 , pomoću neke od Descartesovih koordinata x ili z , npr.

$$L_3 : \quad x = \sqrt{1 - z^2}, \quad y = 0; \quad z \in [0, 1],$$

pri čemu se parametar z za zadatu orijentaciju menja od $z = 1$ do $z = 0$.

Posmatrana u celini, kriva L je prostorna. Sastavljena je od delova L_1 , L_2 , L_3 sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 2.3.5). Svaki od delova pripada nekoj od koordinatnih ravni i poklapa se sa svojom projekcijom na tu koordinatnu ravan.

12. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz,$$

gde je kriva L presek površi

$$S : \quad y = 1 - \sqrt{x^2 + z^2}$$

sa koordinatnim ravnima za $x, y, z \geq 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela x -ose, L je pozitivno orijentisana.

Uputstvo. Koristeći iste oznake i postupajući kao u Zadatku 11, dobija se

$$\begin{aligned}
 L_1 : \quad & y = 1 - x, \quad z = 0; \quad x \in [0, 1], \\
 L_2 : \quad & z = 1 - y, \quad x = 0; \quad y \in [0, 1], \\
 L_3 : \quad & z = \cos \varphi, \quad x = \sin \varphi, \quad y = 0; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],
 \end{aligned}$$

pri čemu se izabrani parametri menjaju od $x = 1$ do $x = 0$, od $y = 1$ do $y = 0$ i od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi/2$. Dobija se

$$I_1 = -\frac{2}{3}, \quad I_2 = \frac{1}{3}, \quad I_3 = -\frac{1}{3}; \quad I = -\frac{2}{3}.$$

13. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

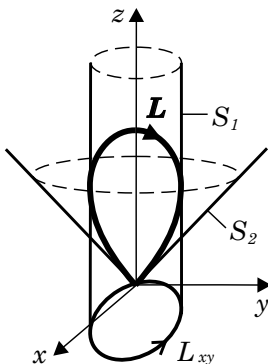
$$I = \oint_L y dx + x^2 dy + z dz,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1: \quad x^2 + y^2 = 2(x + y), \quad S_2: \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa direktrisom u xy -ravni ($z = 0$) i izvodnicama paralelnim z -osi. Površ S_2 je konus sa z -osom kao osovinom.



Direktrisa cilindrične površi je istovremeno i projekcija L_{xy} krive L na xy -ravan (3° iz Napomene 2.3.5). Zato je

$$L_{xy}: \quad x^2 + y^2 = 2(x + y), \quad z = 0,$$

što je "pomerena" kružnica

$$L_{xy}: \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2,$$

sa centrom u tački $(1, 1, 0)$ i poluprečnika $\sqrt{2}$. Uvođenjem smene

$$x - 1 = r \cos \varphi, \quad y - 1 = r \sin \varphi,$$

sledi $r = \sqrt{2}$ i parametarske jednačine glase

$$L_{xy}: \quad x = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi, \quad y = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Kriva L pripada konusu S_2 , pa koordinate njenih tačaka zadovoljavaju jednačinu konusa. Takođe, tačke na krivoj L i njihove projekcije na L_{xy} imaju iste koordinate x i y . Zamenom x, y iz parametarskih jednačina projekcije u jednačinu konusa dobijamo i z -koordinatu

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}(\cos \varphi + \sin \varphi)} .$$

Parametarske jednačine krive L su

$$L : \quad x = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi , \quad y = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi , \quad z = \sqrt{2 + \sqrt{2}(\cos \varphi + \sin \varphi)} ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Zadata orijentacija krive L , kao saglasna pozitivnoj orijentaciji njene projekcije L_{xy} , nameće promenu parametra φ od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$.

Nalazeći

$$x'(\varphi) = -\sqrt{2} \sin \varphi , \quad y'(\varphi) = \sqrt{2} \cos \varphi , \quad z'(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\sqrt{2 + \sqrt{2}(\cos \varphi + \sin \varphi)}}$$

i sređujući podintegralni izraz, integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [y(\varphi)x'(\varphi) + x^2(\varphi)y'(\varphi) + z(\varphi)z'(\varphi)] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \cos \varphi - \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \varphi + 4 \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi + 2\sqrt{2} \cos^3 \varphi \right) d\varphi . \end{aligned}$$

Kako je

$$\cos^3 \varphi = (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi = \cos \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

i, prema formulama navedenim u Zadatku 10,

$$4 \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi = 1 + 3 \cos 2\varphi ,$$

dobija se

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{7\sqrt{2}}{2} \cos \varphi - \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \varphi + 3 \cos 2\varphi - 2\sqrt{2} \cos \varphi \sin^2 \varphi \right) d\varphi \\ &= \left(\varphi + \frac{7\sqrt{2}}{2} \sin \varphi + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos \varphi + \frac{3}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} - 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d(\sin \varphi) \\ &= 2\pi - 2\sqrt{2} \frac{\sin^3 \varphi}{3} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi . \end{aligned}$$

14. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

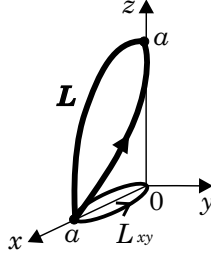
$$I = \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz ,$$

gde je kriva L (*Vivianieva*) presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 = ax , \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

za $z \geq 0$ i $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 i S_2 su iste kao u Primeru 2.3.2, pa je na sledećoj slici izdvojen samo onaj deo sa Slike 2.3.4 koji je značajan za ovaj zadatak. Sa L_{xy} je označena projekcija krive L na xy -ravan, koja je istovremeno i direktrisa cilindrične površi S_1 (3° iz Napomene 2.3.5).



Parametarske jednačine projekcije (kriva L iz Primera 2.3.2 i Zadatka 7) smo već odredili

$$L_{xy} : \quad x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \cos \varphi \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ovako iskazane x, y smenjujemo u jednačinu sfere i dobijamo

$$z^2 = a^2 - a^2 \cos^4 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = a^2 - a^2 \cos^2 \varphi = a^2 \sin^2 \varphi,$$

odakle je $z = a|\sin \varphi|$ zbog uslova $z \geq 0$. Parametarske jednačine krive L su

$$L : \quad x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \cos \varphi \sin \varphi, \quad z = a|\sin \varphi|; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Za zadatu orijentaciju krive L , tj. orijentaciju projekcije L_{xy} , parametar φ se menja od $\varphi = -\pi/2$ do $\varphi = \pi/2$.

Radi jednostavnosti zapisivanja, potpuni krivolinijski integral II vrste rastavljamo na integrale po koordinatama

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

gde je

$$I_1 = \oint_L y^2 dx, \quad I_2 = \oint_L z^2 dy, \quad I_3 = \oint_L x^2 dz.$$

Kako je

$$x'(\varphi) = -2a \cos \varphi \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = a(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

integrali I_1, I_2 postaju

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2(\varphi) x'(\varphi) d\varphi = -2a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi,$$

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z^2(\varphi) y'(\varphi) d\varphi = a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi.$$

Funkcija $\cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$ je neparna, funkcije $\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$ i $\sin^4 \varphi$ su parne, a segment $[-\pi/2, \pi/2]$ je simetričan. Zato je

$$I_1 = 0 ,$$

$$I_2 = 2a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi .$$

Koristeći formule izvedene u Zadatku 10, za integral I_2 dobijamo

$$I_2 = 2a^3 \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{4} \cos 4\varphi \right) d\varphi = -\frac{1}{4} a^3 \pi .$$

Iz $z = a|\sin \varphi|$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ sledi $z = -a \sin \varphi$ ako je $\varphi \in [-\pi/2, 0]$ i $z = a \sin \varphi$ ako je $\varphi \in [0, \pi/2]$. Još je

$$z'(\varphi) = -a \cos \varphi , \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] ; \quad z'(\varphi) = a \cos \varphi , \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] ,$$

pa integral I_3 postaje

$$I_3 = \int_{-\pi/2}^0 x^2(\varphi) z'(\varphi) d\varphi + \int_0^{\pi/2} x^2(\varphi) z'(\varphi) d\varphi$$

$$= -a^3 \int_{-\pi/2}^0 \cos^5 \varphi d\varphi + a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi d\varphi = 0 .$$

Poslednja jednakost je posledica činjenice da za parnu funkciju $\cos^5 \varphi$ važi

$$\int_{-\pi/2}^0 \cos^5 \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi d\varphi .$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{4} a^3 \pi .$$

15. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L z dx + x dy + y dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z = 4 , \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4z .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

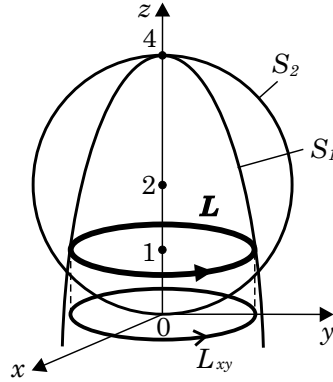
Rešenje. Površ S_1 je paraboloid

$$S_1 : \quad z = -(x^2 + y^2) + 4$$

sa z -osom kao osovinom, koji z -osu seče u tački $(0, 0, 4)$. Površ S_2 je sfera

$$S_2 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$$

sa centrom u tački $(0, 0, 2)$ i poluprečnika 2.



Kriva L se bijektivno projektuje samo na xy -ravan (1° iz Napomene 2.3.5). Jednačinu projekcije L_{xy} krive L na xy -ravan dobijamo eliminacijom z -koordinate iz jednačina površi S_1 i S_2 (Napomena 2.3.3). Iz jednačine paraboloida je

$$z - 2 = 2 - (x^2 + y^2) ,$$

što zamenom u jednačinu sfere daje

$$-3(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 = 0$$

i, deobom sa $x^2 + y^2 \neq 0$, jednačinu projekcije

$$L_{xy} : x^2 + y^2 = 3 , z = 0 .$$

Parametarske jednačine kružnice L_{xy} su

$$L_{xy} : x = \sqrt{3} \cos \varphi , y = \sqrt{3} \sin \varphi , z = 0 ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] ,$$

gde je $r = \sqrt{3}$ polarni radijus i φ polarni ugao. Povratkom u bilo koju od jednačina sfere ili paraboloida sledi $z = 1$, pa su parametarske jednačine krive

$$L : x = \sqrt{3} \cos \varphi , y = \sqrt{3} \sin \varphi , z = 1 ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] ,$$

pri čemu se za zadatu orijentaciju krive L parametar φ menja od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$.

Kako je

$$x'(\varphi) = -\sqrt{3} \sin \varphi , y'(\varphi) = \sqrt{3} \cos \varphi , z'(\varphi) = 0 ,$$

to je

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \sin \varphi + 3 \cos^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3} \sin \varphi + \frac{3}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = 3\pi .$$

16. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L z dx + x dy + y dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S : \quad z = x^2 + y^2$$

sa površima

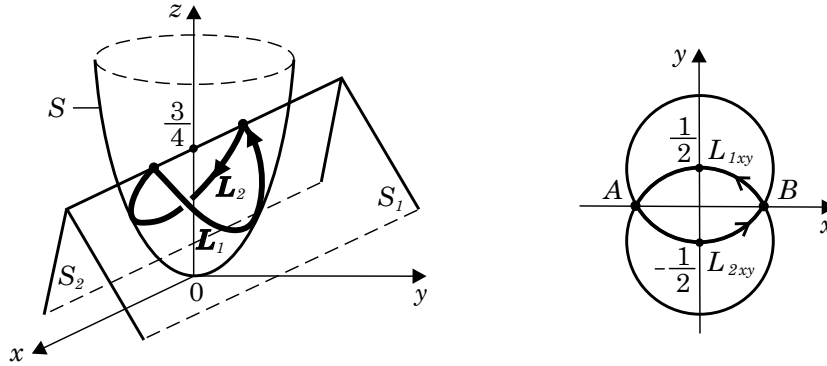
$$S_{1,2} : \quad z = \frac{3}{4} - |y| .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S je paraboloid sa z -osom kao osovinom. Iz jednačine $z = 3/4 - |y|$ slede jednačine površi S_1 za $y \geq 0$ i S_2 za $y \leq 0$,

$$S_1 : \quad z = \frac{3}{4} - y , \quad S_2 : \quad z = \frac{3}{4} + y ,$$

pa su S_1 i S_2 poluravni (cilindrične površi) paralelne x -osi. Ako su L_1 i L_2 presečne krive poluravni S_1 i S_2 sa paraboloidom S , tada je $L = L_1 \cup L_2$ zatvorena kriva. Sa L_{1xy} i L_{2xy} označimo projekcije za L_1 i L_2 na xy -ravan ($z = 0$).



Jednačinu projekcije L_{1xy} krive L_1 na xy -ravan nalazimo eliminacijom z -koordinate iz jednačina površi S i S_1 . Dobija se $3/4 - y = x^2 + y^2$, tj.

$$L_{1xy} : \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 , \quad z = 0 ,$$

pri čemu je $y \geq 0$. Analogno, iz jednačina površi S i S_2 za $y \leq 0$ sledi jednačina projekcije

$$L_{2xy} : \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 , \quad z = 0 .$$

Dakle, projekcije su delovi "pomerenih" kružnica sa centrima $(0, -1/2, 0)$, $(0, 1/2, 0)$ na y -osi i poluprečnika 1. Za $y = 0$ iz jednačina krivih L_{1xy} , L_{2xy} sledi $x^2 = 3/4$ i $x = \pm\sqrt{3}/2$, pa se radi o delovima između tačaka $A(-\sqrt{3}/2, 0)$, $B(\sqrt{3}/2, 0)$. Smenama

$$x = r \cos \varphi, \quad y + \frac{1}{2} = r \sin \varphi; \quad x = r \cos \varphi, \quad y - \frac{1}{2} = r \sin \varphi$$

u jednačine krivih L_{1xy} i L_{2xy} redom, dobijaju se njihove parametarske jednačine

$$\begin{aligned} L_{1xy}: \quad x &= \cos \varphi, \quad y = -\frac{1}{2} + \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right], \\ L_{2xy}: \quad x &= \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{2} + \sin \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \end{aligned}$$

Granice parametra φ su određene slično kao u Zadatku 9. U slučaju krive L_{1xy} , za tačku A je $\cos \varphi = -\sqrt{3}/2$, $\sin \varphi = 1/2$ i $\varphi = 5\pi/6$, a za tačku B je $\cos \varphi = \sqrt{3}/2$, $\sin \varphi = 1/2$ i $\varphi = \pi/6$. Analogno, u slučaju krive L_{2xy} , tački A odgovara vrednost $\varphi = -5\pi/6$, a tački B vrednost $\varphi = -\pi/6$. Kako je $L_1 \subset S_1$ i $L_2 \subset S_2$, iz jednačina površi S_1 i S_2 dalje sledi

$$z = \frac{3}{4} - y = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2} + \sin \varphi\right) = \frac{5}{4} - \sin \varphi, \quad z = \frac{3}{4} + y = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + \sin \varphi\right) = \frac{5}{4} + \sin \varphi,$$

pa su parametarske jednačine krivih L_1 i L_2 date sa

$$\begin{aligned} L_1: \quad x &= \cos \varphi, \quad y = -\frac{1}{2} + \sin \varphi, \quad z = \frac{5}{4} - \sin \varphi; \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right], \\ L_2: \quad x &= \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{2} + \sin \varphi, \quad z = \frac{5}{4} + \sin \varphi; \quad \varphi \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \end{aligned}$$

Kako je $L \subset S$, z -koordinate tačaka krivih L_1 i L_2 mogu da se odrede i iz jednačine paraboloida. Zadatoj orijentaciji krive L , odnosno krivih L_1 i L_2 , odgovara promena parametra φ od $\varphi = \pi/6$ do $\varphi = 5\pi/6$ za L_1 i od $\varphi = -5\pi/6$ do $\varphi = \pi/6$ za L_2 .

Izračunavanjem odgovarajućih izvoda i sređivanjem podintegralnih izraza, dobija se

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{L_1} z dx + x dy + y dz = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{5}{4} \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) d\varphi \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3} \pi, \\ I_2 &= \int_{L_2} z dx + x dy + y dz = \int_{-5\pi/6}^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{5}{4} \sin \varphi + \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

i, s obzirom na $L = L_1 \cup L_2$,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \pi.$$

Kriva L se sastoji od delova sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 2.3.5). Delove L_1 , L_2 nismo projektovali na yz -ravan iz sledećeg razloga. Projekcije krivih L_1 i L_2 na yz -ravan jesu poznate kao direktrise cilindričnih površi S_1 i S_2 (3° iz Napomene 2.3.5),

ali ovo projektovanje nije bijekcija ni za jednu od krivih. Krive L_1 , L_2 se bijektivno projektuju i na zx -ravan (2° iz Napomene 2.3.5). Njihove parametarske jednačine se nalaze slično kao u slučaju projektovanja na xy -ravan, samo unekoliko jednostavnije jer L_1 i L_2 imaju istu projekciju.

17. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

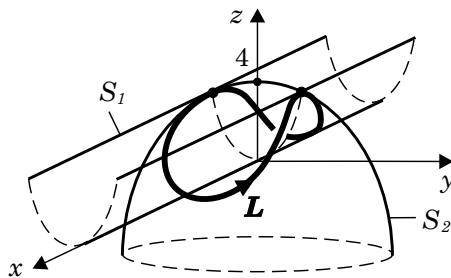
$$I = \oint_L 2(2y^2 + x^2) dx + (x + z) dy + y dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : z = y^2 , \quad S_2 : x^2 + y^2 = 4 - z .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa direktrisom u yz -ravni i izvodnicama paralelnim x -osi, a S_2 je paraboloid sa z -osom kao osovinom, koji z -osu seče u tački $(0, 0, 4)$. Direktrisa površi S_1 je parabola.



Kriva L se bijektivno projektuje samo na xy -ravan (1° iz Napomene 2.3.5). Jednačinu projekcije L_{xy} nalazimo eliminacijom z -koordinate iz jednačina površi S_1 i S_2 . Zamenom $z = y^2$ u $x^2 + y^2 = 4 - z$ dobija se $x^2 + 2y^2 = 4$, što je centralna elipsa

$$L_{xy} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

sa poluosama 2 i $\sqrt{2}$ po x i y -osi redom. Uvođenjem uopštenih polarnih koordinata sa

$$x = 2r \cos \varphi , \quad y = \sqrt{2} r \sin \varphi ,$$

iz implicitne jednačine elipse sledi $r = 1$, kao i parametarske jednačine

$$L_{xy} : x = 2 \cos \varphi , \quad y = \sqrt{2} \sin \varphi , \quad z = 0 ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Dalje, npr. iz jednačine površi S_1 je $z = y^2 = 2 \sin^2 \varphi$, pa su parametarske jednačine krive

$$L : x = 2 \cos \varphi , \quad y = \sqrt{2} \sin \varphi , \quad z = 2 \sin^2 \varphi ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] ,$$

pri čemu se φ menja od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$ za zadatu orijentaciju krive L .

Određivanjem $x'(\varphi)$, $y'(\varphi)$, $z'(\varphi)$ i sređivanjem podintegralnog izraza, dobija se

$$I = \int_0^{2\pi} (-16 \sin \varphi + 2\sqrt{2} \cos^2 \varphi + 6\sqrt{2} \cos \varphi \sin^2 \varphi) d\varphi = 2\sqrt{2} \pi .$$

18. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

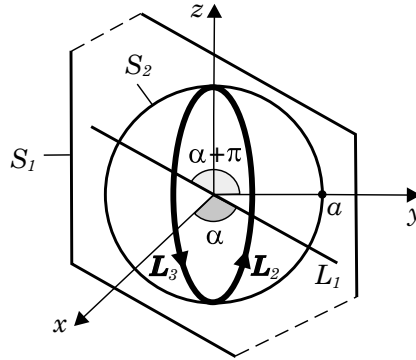
$$I = \oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : y = x \tan \alpha , \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

i $\alpha \in (0, \pi/2)$ konstantan ugao. Posmatrano sa pozitivnog dela x -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa direktrisom L_1 u xy -ravni ($z = 0$) i izvodnicama paralelnim z -osi, a S_2 je centralna sfera poluprečnika a . Direktrisa L_1 je prava $y = x \tan \alpha$ koja prolazi kroz koordinatni početak, pa je S_1 ravan koja prolazi kroz z -osu i seče sferu S_2 po kružnici L . Koefficient pravca pravce L_1 je $\tan \alpha$, što znači da je α ugao koji L_1 zaklapa sa pozitivnim delom x -ose.



Zadatak rešavamo na dva načina.

Eliminacijom x -koordinate iz jednačina površi S_1 , S_2 i korišćenjem jednakosti

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ,$$

dobija se jednačina projekcije kružnice L na yz -ravan

$$L_{yz} : \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \alpha} + \frac{z^2}{a^2} = 1 .$$

Kako je $\sin \alpha > 0$ za $\alpha \in (0, \pi/2)$, projekcija je centralna elipsa sa poluosama $a \sin \alpha$ i a po y i z -osi redom. Uvođenjem uopštenih polarnih koordinata sa

$$y = a \sin \alpha r \cos \varphi, \quad z = ar \sin \varphi,$$

iz jednačine elipse sledi $r = 1$, pa su parametarske jednačine

$$L_{yz}: \quad y = a \sin \alpha \cos \varphi, \quad z = a \sin \varphi; \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Povratkom, npr., u jednačinu ravni S_1 sledi izraz za x -koordinatu tačaka kružnice L i njene parametarske jednačine

$$L: \quad x = a \cos \alpha \cos \varphi, \quad y = a \sin \alpha \cos \varphi, \quad z = a \sin \varphi; \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Parametar φ se menja od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$ za zadatu orijentaciju krive L .

Određivanjem $x'(\varphi)$, $y'(\varphi)$, $z'(\varphi)$ i sređivanjem podintegralnog izraza, dobija se

$$I = \int_0^{2\pi} a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) d\varphi = 2a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) \pi.$$

Ako krivu L projektujemo na zx -ravan, slično se nalaze parametarske jednačine

$$L: \quad x = a \cos \alpha \sin \varphi, \quad y = a \sin \alpha \sin \varphi, \quad z = a \cos \varphi; \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

sa promenom parametra φ od $\varphi = 2\pi$ do $\varphi = 0$ (2° iz Napomene 2.3.5). Projektovanje na xy -ravan nije bijekcija.

Kako je L_{yz} centralna elipsa, prethodni postupak je isto što i nalaženje parametarskih jednačina krive pomoću odgovarajućih uopštenih cilindričnih koordinata (Napomena 2.3.4). U ovom slučaju uopštene cilindrične koordinate se uvode sa

$$x = x, \quad y = a \sin \alpha r \cos \varphi, \quad z = ar \sin \varphi.$$

Zamenom u sistem formiran od jednačina površi S_1 i S_2 , dobija se novi sistem

$$x = ar \cos \alpha \cos \varphi, \quad x^2 + a^2 r^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2,$$

čijim rešavanjem sledi $r = 1$ i $x = a \cos \alpha \cos \varphi$, a zatim i parametarske jednačine za L .

Drugi način rešavanja zadatka je zasnovan na upotrebi sfernih koordinata. Sferne koordinate uvodimo sa

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

i zamenom u jednačine površi S_1 , S_2 dobijamo

$$\tan \varphi = \tan \alpha, \quad r = a.$$

Kako je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ maksimalni raspon koordinate φ i $\alpha \in (0, \pi/2)$, iz prve jednakosti je $\varphi = \alpha$ ili $\varphi = \alpha + \pi$. Do istog zaključka se dolazi i na osnovu značenja sferne koordinate φ . Dve različite vrednosti za φ nameću deobu krive L na dva dela. Neka je $L = L_2 \cup L_3$, pri čemu $\varphi = \alpha$ odgovara delu L_2 , a $\varphi = \alpha + \pi = \beta$ delu L_3 . S obzirom na značenje sferne

koordinate θ , za oba dela θ uzima vrednosti iz maksimalnog raspona $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, pa parametarske jednačine krivih L_2 , L_3 glase

$$\begin{aligned} L_2 : \quad x &= a \cos \alpha \cos \theta, \quad y = a \sin \alpha \cos \theta, \quad z = a \sin \theta; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ L_3 : \quad x &= a \cos \beta \cos \theta, \quad y = a \sin \beta \cos \theta, \quad z = a \sin \theta; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Prema zadatoj orijentaciji krive L , parametar θ se menja od $\theta = -\pi/2$ do $\theta = \pi/2$ za L_2 i od $\theta = \pi/2$ do $\theta = -\pi/2$ za L_3 .

Imajući u vidu

$$\cos \beta = \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha, \quad \sin \beta = \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha,$$

iz nađenih parametarskih jednačina sledi

$$x'(\theta) = -a \cos \alpha \sin \theta, \quad y'(\theta) = -a \sin \alpha \sin \theta, \quad z'(\theta) = a \cos \theta$$

u slučaju krive L_2 i

$$x'(\theta) = a \cos \alpha \sin \theta, \quad y'(\theta) = a \sin \alpha \sin \theta, \quad z'(\theta) = a \cos \theta$$

u slučaju krive L_3 . Zato je, posle sređivanja podintegralnog izraza,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{L_2} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) d\theta = a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) \pi, \\ I_2 &= \int_{L_3} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \\ &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} -a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) d\theta = a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) \pi \end{aligned}$$

i, zbog $L = L_2 \cup L_3$,

$$I = I_1 + I_2 = 2a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) \pi.$$

VIŠESTRUKI INTEGRALI

Dvojni integrali

Ako je

$$D : \quad a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

tada je

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

19. Izračunati površinu manjeg dela kruga u xy -ravni ($z = 0$)

$$D_1 : \quad x^2 + y^2 \leq 2x,$$

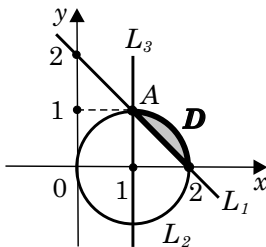
koji odseca prava

$$L_1 : \quad y = 2 - x.$$

Rešenje. Neka je D manji od dva kružna odsečka, čiju površinu d treba izračunati i

$$L_2 : \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad L_3 : \quad x = 1.$$

Kriva L_2 je kružnica $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, a L_3 je prava paralelna y -osi. Zamenom $y = 0$ u jednačinu prave L_1 sledi $x = 2$, pa je $(2, 0)$ presečna tačka prave L_1 sa x -osom. Analogno, za $x = 0$ se dobija presečna tačka $(0, 2)$ prave L_1 sa y -osom, a za $x = 1$ presečna tačka $A(1, 1)$ pravih L_1 i L_3 . Koordinate tačke A zadovoljavaju jednačinu kružnice L_2 , pa je $A \in L_2$, što je prikazano na sledećoj slici.



Prvo nalazimo opis oblasti D . Iz jednačine kružnice L_2 sledi $y = \pm\sqrt{2x-x^2}$ ili $x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$. Za deo kružnice, koji ulazi u sastav granice oblasti D , važi $y \geq 0$ i $x \geq 1$, pa taj deo L_2 ima eksplcitne jednačine

$$L_2: \quad y = \sqrt{2x-x^2}, \quad L_2: \quad x = 1 + \sqrt{1-y^2}.$$

Uzimajući, npr., promenljivu x u konstantnim, a promenljivu y u funkcionalnim granicama, opis oblasti D je

$$D: \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}.$$

Prelaskom sa dvojnog na dvostruki integral, za površinu d oblasti D se dobija

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} dy = \int_1^2 (\sqrt{2x-x^2} - 2 + x) dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{2x-x^2} dx - 2x \Big|_1^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + \int_1^2 \sqrt{2x-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} + \int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2} dx. \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$x-1 = \sin t.$$

Kako je $\sin t = 0$ i $t = 0$ za $x = 1$, $\sin t = 1$ i $t = \pi/2$ za $x = 2$ i $\cos t \geq 0$ za $t \in [0, \pi/2]$, to je

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2} dx &= \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \pi, \end{aligned}$$

pa je tražena površina

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

Ako je y u konstantnim, a x u funkcionalnim granicama, oblast D se opisuje sa

$$D: \quad 2-y \leq x \leq 1 + \sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

pri čemu je $x = 2-y$ jednačina prave L_1 . Odgovarajući dvostruki integral se rešava na isti način.

20. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D |\sin(x+y)| dx dy,$$

gde je D oblast u xy -ravni ($z = 0$) opisana sa

$$D : \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

Rešenje. Za tačke $(x, y) \in D$ je $0 \leq x + y \leq 3\pi$, pa za funkciju $\sin(x + y)$ važi

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &\geq 0, & x + y &\in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]; \\ \sin(x + y) &\leq 0, & x + y &\in [\pi, 2\pi]. \end{aligned}$$

Pošto funkcija $\sin(x + y)$ menja znak na oblasti D , zavisno od njenog znaka podintegralna funkcija je $|\sin(x + y)| = \pm \sin(x + y)$. Zato oblast D delimo na podoblasti tako da na svakoj od njih $\sin(x + y)$ ima stalan znak.

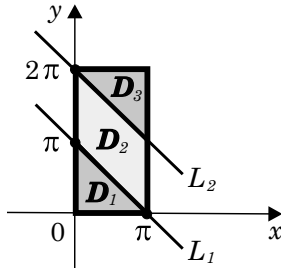
Neka je $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, gde je D_1 onaj deo oblasti D za koji je $0 \leq x + y \leq \pi$, D_2 deo za $\pi \leq x + y \leq 2\pi$ i D_3 deo za $2\pi \leq x + y \leq 3\pi$. Delovi D_1 i D_2 imaju zajedničke tačke $(x, y) \in D$ za koje je $x + y = \pi$, a to su tačke sa prave

$$L_1 : \quad y = -x + \pi.$$

Analogno, zajedničke tačke delova D_2 i D_3 pripadaju pravoj

$$L_2 : \quad y = -x + 2\pi.$$

Kako je, još, $y \leq -x + \pi$ za D_1 , $-x + \pi \leq y \leq -x + 2\pi$ za D_2 i $y \geq -x + 2\pi$ za D_3 , deo D_1 je ispod prave L_1 , deo D_2 između pravih L_1 i L_2 , a D_3 je iznad prave L_2 .



Prema prethodnom, opisi oblasti D_1 , D_2 i D_3 su:

$$\begin{aligned} D_1 : \quad & 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq -x + \pi, \\ D_2 : \quad & 0 \leq x \leq \pi, \quad -x + \pi \leq y \leq -x + 2\pi, \\ D_3 : \quad & 0 \leq x \leq \pi, \quad -x + 2\pi \leq y \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Za podintegralnu funkciju važi

$$\begin{aligned} |\sin(x + y)| &= \sin(x + y), & (x, y) &\in D_1 \cup D_3; \\ |\sin(x + y)| &= -\sin(x + y), & (x, y) &\in D_2, \end{aligned}$$

pa je

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

gde je

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} \sin(x+y) \, dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{-x+\pi} \sin(x+y) \, dy , \\ I_2 &= \iint_{D_2} -\sin(x+y) \, dx dy = - \int_0^\pi dx \int_{-x+\pi}^{-x+2\pi} \sin(x+y) \, dy , \\ I_3 &= \iint_{D_3} \sin(x+y) \, dx dy = \int_0^\pi dx \int_{-x+2\pi}^{2\pi} \sin(x+y) \, dy . \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \int \sin(x+y) \, dy &= \int \sin(x+y) \, d(x+y) = -\cos(x+y) , \\ \cos(x+2\pi) &= \cos x , \end{aligned}$$

dalje je

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^\pi \cos(x+y) \Big|_{y=0}^{y=-x+\pi} dx = - \int_0^\pi (\cos \pi - \cos x) \, dx \\ &= \int_0^\pi (1 + \cos x) \, dx = (x + \sin x) \Big|_0^\pi = \pi , \\ I_2 &= \int_0^\pi \cos(x+y) \Big|_{y=-x+\pi}^{y=-x+2\pi} dx = \int_0^\pi (\cos 2\pi - \cos \pi) \, dx = 2 \int_0^\pi dx = 2\pi , \\ I_3 &= - \int_0^\pi \cos(x+y) \Big|_{y=-x+2\pi}^{y=2\pi} dx = - \int_0^\pi [\cos(x+2\pi) - \cos 2\pi] \, dx \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos x) \, dx = (x - \sin x) \Big|_0^\pi = \pi \end{aligned}$$

i konačno

$$I = 4\pi .$$

21. Izračunati dvostruki integral

$$I = \int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} \frac{xy \ln(x+a)}{(x-a)^2} \, dx ,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Unutrašnji integral u zadatom dvostrukom integralu se teško rešava, pa prelazimo na odgovarajući dvojni integral.

Neka je D oblast u xy -ravni ($z=0$) opisana sa

$$D : \quad 0 \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2} , \quad 0 \leq y \leq a .$$

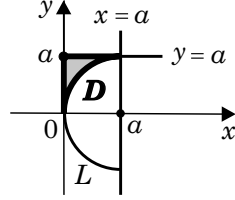
Tada važi jednakost

$$I = \iint_D \frac{xy \ln(x+a)}{(x-a)^2} \, dx dy .$$

Iz prethodnog opisa vidimo da je oblast D ograničena y -osom ($x = 0$), krivom

$$L : x = a - \sqrt{a^2 - y^2} ,$$

x -osom ($y = 0$) i pravom $y = a$. Kako iz $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ sledi $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, kriva L je polukružnica za koju je $x \leq a$.



Oblast D opisujemo drugačije, tako što promenljivu x uzimamo u konstantnim, a promenljivu y u funkcionalnim granicama. Za deo polukružnice L , koji ulazi u sastav granice oblasti D , važi $y \geq 0$, pa taj deo ima jednačinu

$$L : y = \sqrt{2ax - x^2}$$

i opis oblasti D glasi

$$D : 0 \leq x \leq a , \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq a .$$

Prema novom opisu, dvojni integral postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^a \frac{xy \ln(x+a)}{(x-a)^2} dy \\ &= \int_0^a \frac{x \ln(x+a)}{(x-a)^2} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{y=a} dx = \frac{1}{2} \int_0^a x \ln(x+a) dx . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava metodom parcijalne integracije

$$\int_0^a u dv = uv \Big|_0^a - \int_0^a v du$$

sa $u = \ln(x+a)$, $dv = x dx$, odakle je $du = dx/(x+a)$, $v = x^2/2$. Dobija se

$$\begin{aligned} \int_0^a x \ln(x+a) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x+a) \Big|_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{2(x+a)} dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \ln 2a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x+a-a)^2}{x+a} dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \ln 2a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2}{x+a} dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \ln 2a - \frac{1}{2} \int_0^a \left(x - a + \frac{a^2}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 \ln 2a - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - ax + a^2 \ln(x+a) \right] \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} a^2 \ln a = \frac{1}{4} a^2 (1 + 2 \ln a) \end{aligned}$$

i konačno

$$I = \frac{1}{8} a^2 (1 + 2 \ln a) .$$

Dakle, dvostruki integral koji se teško rešava smo mnogo jednostavnije rešili kao drugi dvostruki integral, sa izmenjenim redosledom integracije. Zahvaljujući dvojnog integralu i njegovoj vezi sa dvostrukim integralima, jedan dvostruki uvek može da se zameni odgovarajućim dvostrukim integralom (integralima) sa promenjenim redosledom integracije (Napomena 3.3.3). Međutim, to ne dovodi uvek i do jednostavnijeg rešavanja, što zavisi od oblika oblasti integracije u dvojnog integralu (Primer 3.3.3).

Trojni integrali

Ako je

$$D : \quad a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

tada je

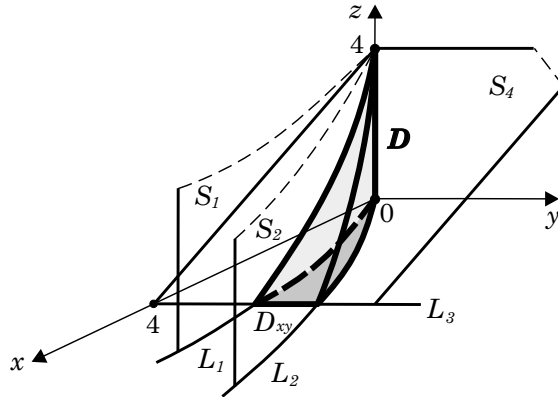
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz .$$

22. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1 : \quad y^2 = x, \quad S_2 : \quad y^2 = 4x, \quad S_3 : \quad z = 0, \quad S_4 : \quad x + z = 4$$

za $y \geq 0$.

Rešenje. Neka je D prostorna oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 i S_2 su cilindrične sa izvodnicama paralelnim z -osi. Direktrise ovih površi su parabole L_1 , L_2 u xy -ravni, simetrične u odnosu na x -osu. Površ S_3 je xy -ravan, dok je S_4 ravan paralelna y -osi. Ravan S_4 seče x i z -osu u tačkama $(4, 0, 0)$, $(0, 0, 4)$, a xy -ravan duž prave L_3 . Od dve ograničene oblasti između S_1 , S_2 , S_3 i S_4 , oblast D je ona za koju je $y \geq 0$. Projekcija oblasti D na xy -ravan je ravna oblast D_{xy} između L_1 , L_2 i L_3 .



S obzirom na uslov $y \geq 0$, delovi parabola L_1 , L_2 koji ograničavaju oblast D_{xy} i prava L_3 iz xy -ravni ($z = 0$) imaju jednačine

$$L_1 : y = \sqrt{x} , \quad L_2 : y = 2\sqrt{x} , \quad L_3 : x = 4 ,$$

pa je oblast D_{xy} opisana sa

$$D_{xy} : 0 \leq x \leq 4 , \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} .$$

Zapisujući jednačinu ravni S_4 u obliku

$$S_4 : z = -x + 4 ,$$

dobijamo i opis oblasti D ,

$$D : 0 \leq x \leq 4 , \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} , 0 \leq z \leq -x + 4 .$$

Prelaskom sa trojnog na trostruki integral, zapremina d oblasti D postaje

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{-x+4} dz \\ &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} z \Big|_{z=0}^{z=-x+4} dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (-x+4) dy \\ &= \int_0^4 (-x+4) y \Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (-x+4) \sqrt{x} dx . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$x = t^2 ,$$

za koju je $dx = 2t dt$ i $t = 0$ kad je $x = 0$, $t = 2$ kad je $x = 4$, pa je dalje

$$d = 2 \int_0^2 (-t^2 + 4) t^2 dt = 2 \left(-\frac{t^5}{5} + 4\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{2^7}{15} = \frac{128}{15} .$$

Tražena zapremina može da se odredi i na osnovu geometrijskog tumačenja dvojnog integrala

$$d = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{xy}} (-x + 4) dx dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (-x + 4) dy ,$$

gde je $z = f(x, y) = -x + 4$ jednačina ravni S_4 .

23. Izračunati trojni integral

$$I = \iiint_D y dx dy dz ,$$

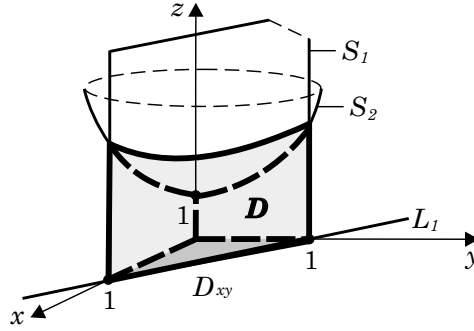
gde je D prostorna oblast ograničena koordinatnim ravnima i površima

$$S_1 : x + y = 1, \quad S_2 : z = 2x^2 + y^2 + 1.$$

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična površ čije su izvodnice paralelne z -osi, a direktrisa je prava

$$L_1 : x + y = 1, \quad z = 0.$$

Dakle, S_1 je ravan paralelna z -osi, a L_1 je presek S_1 sa xy -ravni. Još, L_1 seče x i y -osu u tačkama $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$. Površ S_2 je *eliptički paraboloid* sa z -osom kao osovinom ([4], str. 204–206). Paraboloid seče z -osu u tački $(0, 0, 1)$, pa za sve tačke $(x, y, z) \in S_2$ važi $z \geq 1$.



Projekcija oblasti D na xy -ravan je

$$D_{xy} : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq -x + 1,$$

gde je $y = -x + 1$ jednačina prave L_1 . Imajući u vidu jednačinu površi S_2 , oblast D ima opis

$$D : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq -x + 1, \quad 0 \leq z \leq 2x^2 + y^2 + 1.$$

Prevođenjem trojnog na trostruki integral i rešavanjem sledi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} y dy \int_0^{2x^2+y^2+1} dz = \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} y(2x^2 + y^2 + 1) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} (2x^2 + y^2 + 1) d(2x^2 + y^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x^2 + y^2 + 1)^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=-x+1} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left[(3x^2 - 2x + 2)^2 - (2x^2 + 1)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Sređivanjem podintegralne funkcije, za integral I se dobija

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 (5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 8x + 3) dx = \frac{1}{4} (x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Smena promenljivih u dvojnim integralima

Ako je

$$x = x(u, v) , \quad y = y(u, v) ; \quad J = J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} ,$$

tada je

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du dv .$$

Najčešće su polarne i uopštene polarne koordinate $u = r$, $v = \varphi$, za koje je redom:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi ; \quad J = r , \\ x &= ar \cos \varphi , \quad y = br \sin \varphi ; \quad J = abr . \end{aligned}$$

24. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D xy \, dx dy ,$$

gde je D oblast u xy -ravni ($z = 0$) ograničena krivama

$$L_1 : \quad xy = 1 , \quad L_2 : \quad xy = 2 , \quad L_3 : \quad y = x , \quad L_4 : \quad y = 4x$$

za $x > 0$.

Rešenje. Krive L_1 , L_2 su hiperbole, a L_3 , L_4 prave. Zbog uslova $x > 0$, iz jednačina krivih sledi $y > 0$, pa je oblast D u I kvadrantu.

Jednačine hiperbola L_1 , L_2 s jedne i pravih L_3 , L_4 s druge strane sugerišu smenu

$$u = xy , \quad v = \frac{y}{x} .$$

Iz ove smene je

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} , \quad y = \sqrt{uv} ,$$

i jakobijan postaje

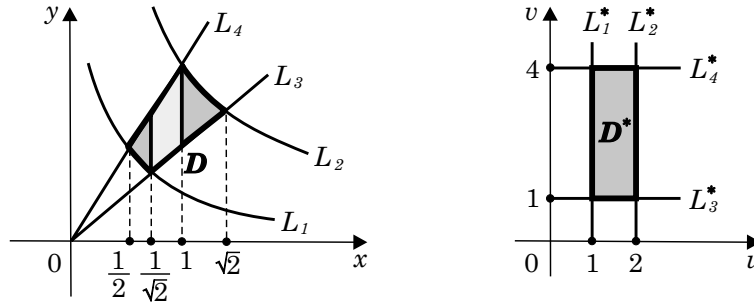
$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} .$$

Zbog $x, y > 0$ je $u, v > 0$, pa je J neprekidna funkcija i važi $J > 0$. Zato se granica $L = \bigcup_{i=1}^4 L_i$ oblasti D iz xy -ravnini preslikava u granicu $L^* = \bigcup_{i=1}^4 L_i^*$ oblasti D^* iz uv -ravnini, gde je

$$L_1^*: u = 1, \quad L_2^*: u = 2, \quad L_3^*: v = 1, \quad L_4^*: v = 4.$$

Oblast D^* je pravougaona, sa opisom

$$D^*: 1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 4.$$



Prelazeći prvo na dvojni integral po novoj oblasti D^* , a zatim na odgovarajući dvostruki integral, sledi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_{D^*} \frac{u}{v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u du \int_1^4 \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} \Big|_1^2 \ln |v| \Big|_1^4 = \frac{1}{4} (4-1)(\ln 4 - \ln 1) = \frac{3}{4} \ln 4 = \frac{3}{4} \ln 2^2 = \frac{3}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Zadatak može da se reši i direktno, pomoću promenljivih x, y , ali tada oblast D mora da se deli na $D = \bigcup_{i=1}^3 D_i$, što zahteva dodatna izračunavanja radi opisa oblasti D_i ($i = 1, 2, 3$), kao i rešavanje većeg broja dvostrukih integrala.

25. Izračunati dvojni integral

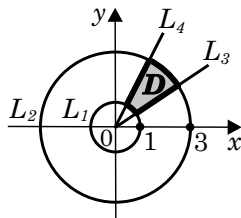
$$I = \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy,$$

gde je D oblast u xy -ravnini ($z = 0$) ograničena krivama

$$\begin{aligned} L_1: \quad x^2 + y^2 &= 1, & L_2: \quad x^2 + y^2 &= 9, \\ L_3: \quad y &= \frac{1}{\sqrt{3}} x, & L_4: \quad y &= \sqrt{3} x \end{aligned}$$

za $x > 0$.

Rešenje. Krive L_1, L_2 su kružnice, a L_3, L_4 prave. Iz jednačina pravih za $x > 0$ sledi $y > 0$, pa je oblast D deo kružnog isečka u I kvadrantu.



Zadatak rešavamo na dva načina.

Jednačine krivih L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sugerišu smenu

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{y}{x},$$

za koju je

$$x = \sqrt{\frac{u}{1+v^2}}, \quad y = v\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}; \quad J = \frac{1}{2(1+v^2)} > 0.$$

Zbog $J > 0$, granica oblasti D prelazi u granicu oblasti D^* , sastavljenu od

$$L_1^*: u = 1, \quad L_2^*: u = 9, \quad L_3^*: v = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad L_4^*: v = \sqrt{3},$$

a oblast D u pravougaonu oblast

$$D^*: \quad 1 \leq u \leq 9, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \leq v \leq \sqrt{3}.$$

Integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} \arctan v \frac{1}{2(1+v^2)} du dv = \frac{1}{2} \int_1^9 du \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \arctan v \frac{1}{1+v^2} dv \\ &= 4 \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \arctan v d(\arctan v) = 2 \arctan^2 v \Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2 \left[\left(\frac{\pi}{3} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 \right] = \frac{1}{6} \pi^2. \end{aligned}$$

Zadatak sada rešavamo pomoću polarnih koordinata, tj. pomoću smene

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

za koju je $J = r$. Oblast D ne sadrži tačku $(0, 0)$, kojoj odgovara $r = 0$, pa je $J > 0$.

Granica oblasti D prelazi u granicu oblasti D^* . Krive L_1, L_2 se preslikavaju u

$$L_1^*: r = 1, \quad L_2^*: r = 3.$$

Za pravu L_3 je koeficijent pravca $\tan \varphi = y/x = 1/\sqrt{3}$ i $\varphi = \pi/6$, a za pravu L_4 je $\tan \varphi = \sqrt{3}$ i $\varphi = \pi/3$, pa je

$$L_3^*: \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad L_4^*: \varphi = \frac{\pi}{3}$$

i oblast D prelazi u pravougaonu oblast

$$D^* : \quad 1 \leq r \leq 3, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} \arctan \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} r dr d\varphi = \iint_{D^*} \arctan(\tan \varphi) r dr d\varphi = \iint_{D^*} r \varphi dr d\varphi \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi d\varphi \int_1^3 r dr = \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{r^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{1}{6} \pi^2. \end{aligned}$$

Radeći sa Descartesovim koordinatama x, y , oblast D bi morala da se deli na $D = \bigcup_{i=1}^3 D_i$, a svaki od unutrašnjih integrala u odgovarajućim dvostrukim integralima da se rešava metodom parcijalne integracije.

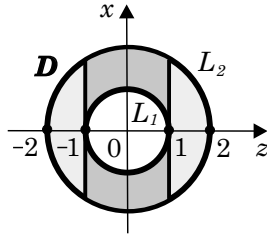
26. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D x^2 z^2 dz dx,$$

gde je D oblast u zx -ravni ($y = 0$) ograničena krivama

$$L_1 : \quad x^2 + z^2 = 1, \quad L_2 : \quad x^2 + z^2 = 4.$$

Rešenje. Oblast D je kružni prsten između kružnica L_1 i L_2 .



Zamenjujemo Descartesove z, x polarnim r, φ koordinatama pomoću

$$z = r \cos \varphi, \quad x = r \sin \varphi$$

i utvrđujemo $J = r > 0$ jer $(0, 0) \notin D$.

Kružnice L_1, L_2 se preslikavaju u

$$L_1^* : \quad r = 1, \quad L_2^* : \quad r = 2,$$

a oblast D iz zx -ravni u pravougaonu oblast D^* iz $r\varphi$ -ravni,

$$D^* : \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Prelaskom na dvojni integral po oblasti D^* i rešavanjem odgovarajućeg dvostrukog integrala, uz upotrebu formula izvedenih u Zadatku 10, dobija se

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} (r \sin \varphi)^2 (r \cos \varphi)^2 r dr d\varphi = \iint_{D^*} r^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi dr d\varphi \\ &= \int_1^2 r^5 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{r^6}{6} \Big|_1^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{21}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{21}{8} \pi . \end{aligned}$$

Kružni prsten D je dvostruko povezana oblast (Slika 1.1.1). Da bi se dvojni integral po ovakvoj oblasti rešavao bez smene promenljivih, oblast mora da se deli na više prosto povezanih podoblasti, konkretno na $D = \bigcup_{i=1}^4 D_i$. Smenom promenljivih je dvostruko povezana oblast D transformisana u prosto povezanu D^* . Takođe, smena promenljivih bitno pojednostavljuje rešavanje određenih integrala na koje se dvojni prevodi, u šta čitalac može i sam da se uveri. Slična je situacija i kod dvojnih integrala po višestruko povezanim oblastima.

Primećujemo da se granica $L = L_1 \cup L_2$ oblasti D preslikava u deo $L_1^* \cup L_2^*$, a ne u celu granicu $L = \bigcup_{i=1}^4 L_i^*$ oblasti D^* , gde je

$$L_3^* : \quad \varphi = 0 , \quad L_4^* : \quad \varphi = 2\pi .$$

Zato se na prvi pogled čini da uslov $J \neq 0$ kod dvostruko povezanih oblasti ne znači ništa. Međutim, oblast D možemo da tretiramo kao prosto povezanu ako je "rasečemo" duž pozitivnog dela z -ose i taj deo ose joj pridružimo kao delove L_3, L_4 granice. Tada se L_3, L_4 preslikavaju u L_3^*, L_4^* , što je omogućeno upravo uslovom $J \neq 0$. Inače, u zadatku smo do opisa oblasti D^* jednostavno došli na osnovu značenja polarnih koordinata, što ćemo i nadalje da radimo bez naglašavanja.

27. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy ,$$

gde je D deo xy -ravni ($z = 0$) ograničen lemniskatom

$$L : \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

za $x \geq 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Lemniskata L je ista kao u Zadatku 6, pa koristimo već dobijene rezultate. Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi ,$$

za koje je $J = r \geq 0$, kriva L se preslikava u

$$L^* : \quad r = a \sqrt{\cos 2\varphi} ,$$

a oblast D u oblast

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2} \, d(a^2 - r^2) \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (a^2 - r^2) \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= -\frac{1}{3} a^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\sqrt{2} \sin^2 \varphi |\sin \varphi| - 1) \, d\varphi \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^{\pi/4} \sin^3 \varphi \, d\varphi + \frac{1}{3} a^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi = \frac{1}{6} a^3 \pi - \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^{\pi/4} \sin^3 \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Koristeći jednakost

$$\sin^3 \varphi = (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi = \sin \varphi - \cos^2 \varphi \sin \varphi,$$

dalje je

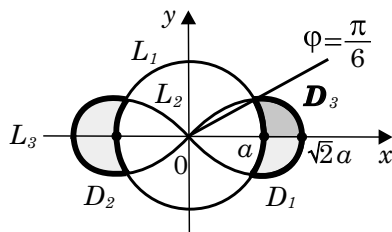
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6} a^3 \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \left(\cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi \, d(\cos \varphi) \right) \\ &= \frac{1}{6} a^3 \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/4} \right) = \frac{1}{6} a^3 \pi + \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6} a^3 \pi + \frac{2}{9} (5 - 4\sqrt{2}) a^3 = \left[\frac{1}{6} \pi + \frac{2}{9} (5 - 4\sqrt{2}) \right] a^3. \end{aligned}$$

28. Izračunati površinu dela xy -ravni ($z = 0$) ograničenog krivama

$$L_1 : \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad L_2 : \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

za $|x| \geq a$ i $a > 0$.

Rešenje. Neka je D deo xy -ravni čiju površinu d treba izračunati. Kriva L_1 je kružnica, a kriva L_2 lemniskata (Zadatak 6). Kako je $|x| \geq a$, D je van kružnice L_1 i sastoji se od oblasti D_1 za $x \geq a$ i D_2 za $x \leq -a$, tj. $D = D_1 \cup D_2$. Zbog simetrije u odnosu na x i y -osu, posmatramo samo deo D_3 oblasti D_1 u I kvadrantu.



Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

krive L_1, L_2 se transformišu u

$$L_1^*: \quad r = a, \quad L_2^*: \quad r = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Budući da smo se ograničili na I kvadrant za koji je $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, rešavanjem jednačine $a = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}$ dobija se redom: $\cos 2\varphi = 1/2$, $2\varphi = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$, pa se krive L_1^*, L_2^* seku u tački $(r, \varphi) = (a, \pi/6)$. Zato se oblast D_3 preslikava u oblast

$$D_3^*: \quad a \leq r \leq \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

Vrednost $\varphi = \pi/6$ smo mogli da nađemo i u xy -ravni. Rešavanjem sistema jednačina $x^2 + y^2 = a^2$, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ uz uslov $x, y > 0$, određuje se presečna tačka $(x, y) = (\sqrt{3}a/2, a/2)$ krivih L_1 i L_2 u I kvadrantu, pa je $\tan \varphi = y/x = 1/\sqrt{3}$, $\varphi = \arctan 1/\sqrt{3} = \pi/6$.

Tražena površina je sada

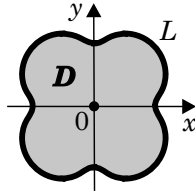
$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = 4 \iint_{D_3} dx dy = 4 \iint_{D_3^*} r dr d\varphi = 4 \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_a^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \\ &= 4 \int_0^{\pi/6} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=a}^{r=\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/6} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi \\ &= 2a^2 (\sin 2\varphi - \varphi) \Big|_0^{\pi/6} = 2a^2 \left(\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = 2a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. \end{aligned}$$

Primetimo da $(0, 0) \notin D$ i da je $J = r > 0$. Ako je L_3 oznaka x -ose, prethodni uslov garantuje da se granica $\bigcup_{i=1}^3 L_i$ oblasti D_3 preslikava u granicu $\bigcup_{i=1}^3 L_i^*$ oblasti D_3^* , gde je $\varphi = 0$ jednačina za L_3^* .

29. Izračunati površinu oblasti D u xy -ravni ($z = 0$) ograničenu zatvorenom krivom

$$L: \quad (x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4; \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Rešenje. Tačka $(0, 0)$, koja zadovoljava implicitnu jednačinu, je singularna tačka jednačine i to *izolovana tačka* ([2], str. 96). Uklonjena je iz jednačine uslovom $(x, y) \neq (0, 0)$. Implicitna jednačina nema drugih ograničenja, pa je L u svim kvadrantima, što znači da je $(0, 0) \in D$, iako $(0, 0) \notin L$. Kriva L i oblast D ograničena njome imaju izgled sa sledeće slike, dobijen upotrebom računara (Napomena 3.4.1).



Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

i imajući u vidu da je $r = 0$ za tačku $(0, 0) \in D$, $J = r \geq 0$, kriva L se preslikava u

$$L^*: \quad r = \sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi},$$

a oblast D u

$$D^*: \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Tražena površina je

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = \iint_{D^*} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}} r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) d\varphi = \frac{3}{4} \pi, \end{aligned}$$

pri čemu je poslednji određeni integral rešen pomoću formula iz Zadatka 10.

Da bismo izbegli ponavljanje u kasnijem tekstu, ovde napominjemo da su slike iz Zadataka 31–35, 37 takođe dobijene pomoću računara.

30. Izračunati površinu oblasti u xy -ravni ($z = 0$) ograničenu zatvorenom krivom

$$L: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = x + y,$$

gde je $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Kriva L sadrži tačku $(x, y) = (0, 0)$, pa je $(0, 0) \in D$.

Zadatak rešavamo na dva načina.

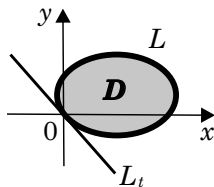
Transformišemo jednačinu krive L u

$$\frac{x^2 - a^2 x}{a^2} + \frac{y^2 - b^2 y}{b^2} = 0, \quad \frac{\left(x - \frac{a^2}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{b^2}{2}\right)^2}{b^2} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

i dobijamo

$$L: \quad \frac{\left(x - \frac{a^2}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{b^2}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} = 1.$$

Poslednja jednačina znači da je L "pomerena" elipsa koja prolazi kroz koordinatni početak.



Uvodeći smenu

$$x = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + b^2} r \cos \varphi, \quad y = \frac{b^2}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2} r \sin \varphi,$$

za koju je

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cos \varphi & -\frac{a}{2}\sqrt{a^2 + b^2} r \sin \varphi \\ \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \sin \varphi & \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2} r \cos \varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{4}ab(a^2 + b^2)r \geq 0,$$

elipsa L se preslikava u

$$L^*: \quad r = 1,$$

a oblast D u pravougaonu oblast

$$D^*: \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Površina d se lako izračunava,

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = \frac{1}{4}ab(a^2 + b^2) \iint_{D^*} r dr d\varphi = \frac{1}{4}ab(a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \\ &= \frac{1}{4}ab(a^2 + b^2)\pi. \end{aligned}$$

Zadatak rešavamo na drugi način. Pretpostavimo da krivu L ne prepoznamo kao elipsu na osnovu zadate jednačine, pa jednačinu ne dovodimo na uobičajeni oblik. Zadata jednačina sugerise smenu kojom se sa Descartesovih x, y prelazi na uopštene polarne koordinate r, φ . Kako nam značenje koordinate φ u xy -ravni nije poznato, komplikovanu diskusiju izbegavamo tako što ovu smenu realizujemo kao kompoziciju dve smene (Napomena 1.4.4).

Prva smena je

$$x = au, \quad y = bv,$$

za koju je

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab > 0$$

i kojom se kriva L preslikava u

$$L^*: \quad u^2 + v^2 = au + bv.$$

Kriva L^* prolazi kroz koordinatni početak $(u, v) = (0, 0)$ i zadovoljava uslov $au + bv \geq 0$, tj. $v \geq -(a/b)u$. Tangentu L_t^* krive L^* kroz tačku $(0, 0)$ tražimo u obliku $v = ku$. Neka je $v = ku$ jednačina bilo koje prave L_1 kroz tačku $(0, 0)$. Zamenom $v = ku$ u jednačinu krive L^* sledi

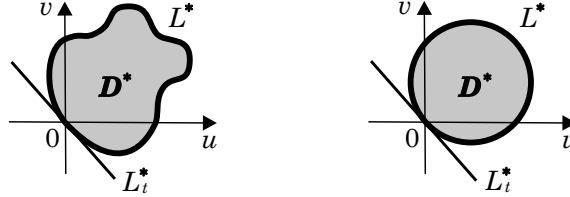
$$(1 + k^2)u^2 - (a + bk)u = 0,$$

odakle su $u_1 = 0$, $u_2 = (a + bk)/(1 + k^2)$ prve koordinate presečnih tačaka za L_1 i L^* . Da bi L_1 bila tangenta L_t^* , presečna tačka mora da bude dvostruka (tačka dodira), pa je $u_2 = u_1 = 0$, $a + bk = 0$ i $k = -a/b$. Dakle, jednačina tangente je

$$L_t^*: \quad v = -\frac{a}{b}u.$$

Na osnovu dosadašnjeg ispitivanja možemo da skiciramo krivu L^* i oblast D^* ograničenu njome (prva slika), što je dovoljno za dalji rad. Međutim, znamo i više. Kriva L^* je "pomerena" kružnica (druga slika)

$$L^* : \left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) .$$



Druga smena je

$$u = r \cos \varphi , \quad v = r \sin \varphi ,$$

kojom sa promenljivih u, v prelazimo na polarne koordinate r, φ u uv -ravni i za koju je $J(r, \varphi) = r \geq 0$. Kriva L^* se preslikava u

$$L^{**} : \quad r = a \cos \varphi + b \sin \varphi .$$

Označavajući sa $\varphi_0 \in [-\pi/2, 0]$ ugao između L_t^* i pozitivnog dela u -ose, dobijamo $\tan \varphi_0 = v/u = -a/b$ i

$$\varphi_0 = \arctan\left(-\frac{a}{b}\right) = -\arctan \frac{a}{b} .$$

Kako je L_t^* tangenta krive L^* koja prolazi kroz $(0, 0)$ i φ polarni ugao u uv -ravni, znamo da je $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \pi]$. Još je $(u, v) = (0, 0) \in L^*$, tj. $(0, 0) \in D^*$, pa se oblast D^* transformiše u

$$D^{**} : \quad 0 \leq r \leq a \cos \varphi + b \sin \varphi , \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \pi] .$$

Tražena površina je

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = ab \iint_{D^*} du dv = ab \iint_{D^{**}} r dr d\varphi \\ &= ab \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \pi} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi + b \sin \varphi} r dr = \frac{1}{2} ab \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \pi} (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} a^3 b \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \pi} \cos^2 \varphi d\varphi + a^2 b^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi + \frac{1}{2} ab^3 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4} ab(a^2 + b^2) \pi . \end{aligned}$$

Pri smeni granica u određenim integralima su korišćene jednakosti navedene u Zadatku 18, kao i

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha \quad (\alpha = 2\varphi_0) .$$

Drugi način rešavanja zadatka potvrđuje zapažanja iz Napomene 1.4.1, čak i u jednostavnijem slučaju kružnice L^* koja prolazi kroz koordinatni početak.

Primetimo i ovde da polarne i uopštene polarne koordinate tačaka nemaju isto značenje, a time ni iste vrednosti u xy -ravni. Uopštena polarna koordinata φ jeste polarni ugao, ali za tačke iz uv , a ne iz xy -ravni i za krivu L uzima vrednosti $\varphi \in [-\arctan(a/b), -\arctan(a/b) + \pi]$. Ako je ψ polarni ugao u xy -ravni, za krivu L je $\psi \in [-\pi/4, 3\pi/4]$, što sledi iz jednačine njene tangente

$$L_t : y = -x ,$$

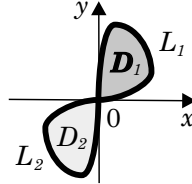
koja se dobija slično kao L_t^* . Opseg ugla ψ je isti za proizvoljne brojeve a, b , dok se opseg koordinate φ menja u zavisnosti od ovih brojeva.

31. Izračunati površinu dela xy -ravni ($z = 0$) ograničenog krivom

$$L : \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = 4xy ,$$

gde je $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D deo xy -ravni čiju površinu d treba izračunati. U jednačini krive L je $(x/a + y/b)^4 \geq 0$, pa mora da bude i $xy \geq 0$, tj. $x, y \geq 0$ ili $x, y \leq 0$. Ove nejednakosti važe u I i III kvadrantu i odnose se na dve zatvorene krive L_1 i L_2 , sa zajedničkom tačkom $(0, 0)$. Tačka $(0, 0) \in L$ je singularna i to dvostruka tačka jednačine. Slično lemniskati (Zadatak 6), L nije zatvorena prosta kriva u smislu Definicije 1.1.9, već je $L = L_1 \cup L_2$, a D se sastoji od oblasti D_1 i D_2 , tj. $D = D_1 \cup D_2$. Zbog simetrije u odnosu na koordinatni početak $(0, 0)$, oblasti D_1 i D_2 imaju jednake površine, pa posmatramo samo krivu L_1 i oblast ograničenu njome D_1 u I kvadrantu. Za D_1 važi $x, y \geq 0$ i $(0, 0) \in D_1$.



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = ar \cos^2 \varphi , \quad y = br \sin^2 \varphi ,$$

što je moguće zbog $x, y \geq 0$. Prethodna smena je oblika (1.4.6) sa parnim brojem $n = 2$, pa je $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ maksimalni raspon za φ . Zato važi $\cos \varphi \geq 0$, $\sin \varphi \geq 0$ i

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos^2 \varphi & -2ar \cos \varphi \sin \varphi \\ b \sin^2 \varphi & 2br \sin \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = 2abr \cos \varphi \sin \varphi \geq 0 ,$$

pri čemu J može i odmah da se odredi pomoću (3.4.8).

Kriva L_1 se preslikava u krivu

$$L_1^* : r = 2\sqrt{ab} \cos \varphi \sin \varphi ,$$

koja je definisana za svako $\varphi \in [0, \pi/2]$, a oblast D_1 u

$$D_1^* : \quad 0 \leq r \leq 2\sqrt{ab} \cos \varphi \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Koristeći jednakosti

$$\begin{aligned} 2 \cos \varphi \sin \varphi &= \sin 2\varphi, \\ \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi &= \frac{1}{8} \sin^3 2\varphi = \frac{1}{8} (1 - \cos^2 2\varphi) \sin 2\varphi = \frac{1}{8} \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

za traženu površinu se dobija

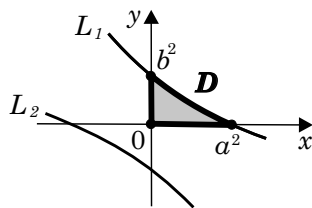
$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = 2 \iint_{D_1} dx dy = 4ab \iint_{D_1^*} r \cos \varphi \sin \varphi dr d\varphi \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\sqrt{ab} \cos \varphi \sin \varphi} r dr = 8a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \\ &= a^2 b^2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 2\varphi d(\cos 2\varphi) \right) \\ &= \frac{1}{2} a^2 b^2 \left(2 + \frac{\cos^3 2\varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{2}{3} a^2 b^2. \end{aligned}$$

32. Izračunati površinu oblasti u xy -ravni ($z = 0$) ograničene koordinatnim osama i jednom od krivih

$$L_{1,2} : \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = x^2 + y^2; \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

za $x, y \geq 0$ i $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Data implicitna jednačina objedinjuje jednačine dveju krivih, koje nemaju zajedničkih tačaka i simetrične su u odnosu na koordinatni početak $(0, 0)$. Tačka $(0, 0)$, koja zadovoljava implicitnu jednačinu, je singularna i to izolovana tačka jednačine. Odstranjena je uslovom $(x, y) \neq (0, 0)$. Zbog $x, y \geq 0$ treba imati u vidu samo krivu koja prolazi kroz I kvadrant, na slici označenu sa L_1 . Dakle, oblast D je ograničena koordinatnim osama i krivom L_1 .



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = ar \cos^2 \varphi, \quad y = br \sin^2 \varphi,$$

što je moguće zbog $x, y \geq 0$. Smena je ista kao u Zadatku 31, pa je $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\cos \varphi \geq 0$, $\sin \varphi \geq 0$ i

$$J = 2abr \cos \varphi \sin \varphi \geq 0 .$$

Iz jednačine krive L_1 sledi $r^2 = a^2 \cos^4 \varphi + b^2 \sin^4 \varphi$, pa se L_1 preslikava u krivu

$$L_1^* : \quad r = \sqrt{a^2 \cos^4 \varphi + b^2 \sin^4 \varphi} ,$$

koja je definisana za svako $\varphi \in [0, \pi/2]$. Tački $(0, 0) \in D$ odgovara $r = 0$ i oblast D prelazi u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq \sqrt{a^2 \cos^4 \varphi + b^2 \sin^4 \varphi} , \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

Tražena površina je

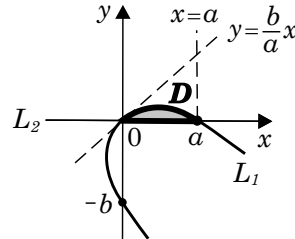
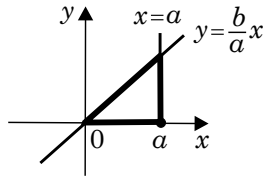
$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = 2ab \iint_{D^*} r \cos \varphi \sin \varphi dr d\varphi \\ &= 2ab \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{a^2 \cos^4 \varphi + b^2 \sin^4 \varphi}} r dr \\ &= ab \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi (a^2 \cos^4 \varphi + b^2 \sin^4 \varphi) d\varphi \\ &= -a^3 b \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi d(\cos \varphi) + ab^3 \int_0^{\pi/2} \sin^5 \varphi d(\sin \varphi) \\ &= -a^3 b \frac{\cos^6 \varphi}{6} \Big|_0^{\pi/2} + ab^3 \frac{\sin^6 \varphi}{6} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6} a^3 b + \frac{1}{6} ab^3 = \frac{1}{6} ab(a^2 + b^2) . \end{aligned}$$

33. Izračunati površinu oblasti u xy -ravni ($z = 0$) ograničene x -osom i krivom

$$L_1 : \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

za $y \geq 0$ i $a, b > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. U jednačini krive L_1 je $(x/a + y/b)^2 \geq 0$, pa mora da bude $x/a - y/b \geq 0$, tj. $y \leq (b/a)x$, odakle je $x \geq 0$ za $y \geq 0$. Kako L_1 seče x -osu ($y = 0$) samo u tačkama $(0, 0)$ i $(a, 0)$, oblast D se nalazi u I kvadrantu između x -ose i prave $x = a$, a ispod prave $y = (b/a)x$. Pozicija oblasti D je prikazana na prvoj od sledećih slika, a tačan izgled na drugoj slici.



Zadatak rešavamo na dva načina.

Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = ar \cos^2 \varphi, \quad y = br \sin^2 \varphi,$$

za koje je $\varphi \in [0, \pi/2]$ i

$$J = 2abr \cos \varphi \sin \varphi \geq 0.$$

Kriva L_1 se preslikava u

$$L_1^*: \quad r = \cos 2\varphi$$

i definisana je za $\cos 2\varphi \geq 0$, tj. $2\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, odnosno $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. S obzirom na maksimalni raspon $[0, \pi/2]$ promenljive φ , treba uzeti deo $\varphi \in [0, \pi/4]$. Oblast D se transformiše u

$$D^*: \quad 0 \leq r \leq \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Primenom jednakosti navedene u Zadatku 31, tražena površina postaje

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = 2ab \iint_{D^*} r \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 2ab \int_0^{\pi/4} \cos \varphi \sin \varphi \int_0^{\cos 2\varphi} r dr \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi \cos^2 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} ab \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi d(\cos 2\varphi) = \frac{1}{12} ab. \end{aligned}$$

Elegantniji, ali manje uobičajen način rešavanja zadatka se sastoji u uvođenju smene

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

iz koje je

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(u+v), \quad y = \frac{b}{2}(u-v), \\ J &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & a/2 \\ b/2 & -b/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} ab < 0 \end{aligned}$$

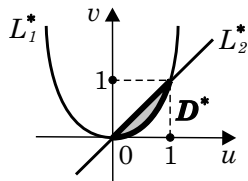
i $|J| = ab/2$.

Neka je L_2 oznaka x -ose ($y = 0$). Zbog $J \neq 0$, granica $L = L_1 \cup L_2$ oblasti D iz xy -ravni se preslikava u granicu $L^* = L_1^* \cup L_2^*$ oblasti D^* iz uv -ravni, gde je

$$L_1^*: \quad v = u^2, \quad L_2^*: \quad v = u.$$

Kriva L_1^* je parabola, a L_2^* je prava. Rešavanjem sistema jednačina $v = u^2$, $v = u$, dobijaju se presečne tačke ovih krivih $(u, v) = (0, 0)$ i $(u, v) = (1, 1)$, pa je opis oblasti D^* dat sa

$$D^*: \quad 0 \leq u \leq 1, \quad u^2 \leq v \leq u.$$



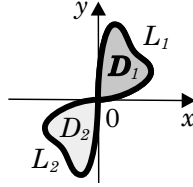
Tražena površina je

$$d = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} ab \iint_{D^*} du dv = \frac{1}{2} ab \int_0^1 du \int_{u^2}^u dv = \frac{1}{2} ab \int_0^1 (u - u^2) du = \frac{1}{12} ab .$$

34. Izračunati površinu dela xy -ravni ($z = 0$) ograničenog krivom

$$L : (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^{12} = xy .$$

Rešenje. Neka je D deo xy -ravni čiju površinu d treba izračunati. Slično kao u Zadatku 31, kriva L je definisana za $x, y \geq 0$ ili $x, y \leq 0$, tj. u I i III kvadrantu. Tačka $(0, 0)$ je singularna i to dvostruka tačka jednačine. Važi $L = L_1 \cup L_2$ i $D = D_1 \cup D_2$. Između L_1 i L_2 , odnosno D_1 i D_2 , postoji simetrija u odnosu na koordinatni početak, pa posmatramo samo D_1 u I kvadrantu za koji je $x, y \geq 0$ i $(0, 0) \in D_1$.



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = r \cos^4 \varphi , \quad y = r \sin^4 \varphi ,$$

za koje je $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\cos \varphi \geq 0$, $\sin \varphi \geq 0$ i

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^4 \varphi & -4r \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ \sin^4 \varphi & 4r \sin^3 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = 4r \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi \geq 0 .$$

Prethodna smena odgovara uslovu $x, y \geq 0$.

Za uvedenu smenu je $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = r^6 = r^2 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi$, pa kriva L_1 prelazi u

$$L_1^* : \quad r = \cos \varphi \sin \varphi$$

i oblast D_1^* ima opis

$$D_1^* : \quad 0 \leq r \leq \cos \varphi \sin \varphi , \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

Slično kao u Zadatku 31 nalazimo

$$\cos^5 \varphi \sin^5 \varphi = \frac{1}{32} (\sin 2\varphi - 2 \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi + \cos^4 2\varphi \sin 2\varphi)$$

i za površinu d dela xy -ravni D dobijamo

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = 2 \iint_{D_1} dx dy = 8 \iint_{D_1^*} r \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi \sin \varphi} r dr = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 2\varphi d(\cos 2\varphi) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 2\varphi d(\cos 2\varphi) \right) = \frac{1}{15} . \end{aligned}$$

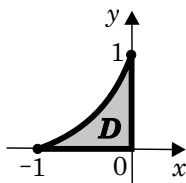
35. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D \sqrt{\sqrt{-x} + \sqrt{y}} \, dx dy ,$$

gde je D oblast u xy -ravni ($z = 0$) ograničena koordinatnim osama i krivom

$$L : \quad \sqrt{-x} + \sqrt{y} = 1 .$$

Rešenje. Kriva L je definisana za $x \leq 0$, $y \geq 0$, pa se oblast D nalazi u II kvadrantu.



Smenom Descartesovih koordinata uopštenim polarnim koordinatama pomoću

$$x = -r \cos^4 \varphi , \quad y = r \sin^4 \varphi ,$$

dobijamo $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\cos \varphi \geq 0$, $\sin \varphi \geq 0$,

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos^4 \varphi & 4r \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ \sin^4 \varphi & 4r \sin^3 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = -4r \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi \leq 0$$

i $|J| = 4r \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi$. Smena odgovara uslovu $x \leq 0$, $y \geq 0$.

Za uvedenu smenu je $\sqrt{-x} + \sqrt{y} = \sqrt{r} = 1$, pa kriva L prelazi u

$$L^* : \quad r = 1$$

i oblast D^* ima opis

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq 1 , \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

Postupajući kao u Zadatku 31, izračunavamo integral

$$\begin{aligned} I &= 4 \iint_{D^*} \sqrt[4]{r} \, r \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi \, dr d\varphi = 4 \int_0^1 r^{5/4} \, dr \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{16}{9} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{27} . \end{aligned}$$

36. Izračunati površinu oblasti u xy -ravni ($z = 0$) ograničene zatvorenom krivom (*petlja Descartesovog lista*)

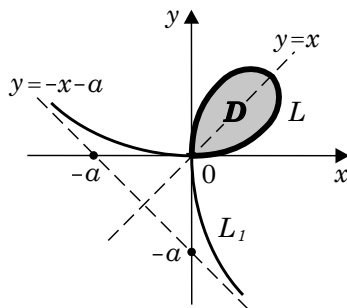
$$L : \quad x^3 + y^3 = 3axy ; \quad x, y \geq 0 ,$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Važi $(0, 0) \in L$ i $(0, 0) \in D$. Kriva L je deo (petlja) dobro poznatog *Descartesovog lista*

$$L_1 : x^3 + y^3 = 3axy .$$

Descartesov list L_1 je simetričan u odnosu na pravu $y = x$, kosa asimptota mu je prava $y = -x - a$ i ima izgled sa sledeće slike.



Uvodimo uopštene polarne koordinate sa

$$x = r \cos^{2/3} \varphi, \quad y = r \sin^{2/3} \varphi .$$

Smena je oblika (1.4.6) sa racionalnim brojem $n = 2/3$. Kako je $\cos^2 \varphi \geq 0$, $\sin^2 \varphi \geq 0$ za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$, ova smena može da se uvede samo za $x, y \geq 0$ i ponaša se kao (1.4.6) sa parnim brojem $n = 2$. Zato je $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ maksimalni raspon koordinate φ i važi $\cos \varphi \geq 0$, $\sin \varphi \geq 0$. Prema (3.4.8), dalje je

$$J = \frac{2}{3} r \cos^{-1/3} \varphi \sin^{-1/3} \varphi \geq 0 .$$

Vrednost $J = 0$ se dobija za $r = 0$ i $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi/2$. Za $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi/2$ i istovremeno $r = 0$ jakobijan je neodređen, dok za $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi/2$ i $r \neq 0$ nije definisan.

Kriva L se preslikava u

$$L^* : r = 3a \cos^{2/3} \varphi \sin^{2/3} \varphi$$

i definisana je za svako $\varphi \in [0, \pi/2]$, a oblast D u

$$D^* : 0 \leq r \leq 3a \cos^{2/3} \varphi \sin^{2/3} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

Tačke $(r, 0)$, $(r, \pi/2)$ za $r \neq 0$, u kojima jakobijan nije definisan, nas ne interesuju jer nisu iz oblasti D^* . Tačke $(r, 0)$, $(r, \pi/2)$ za $r = 0$ pripadaju granici oblasti D^* i u njima jakobijan može neprekidno da se produži tako da je $J(0, 0) = J(0, \pi/2) = 0$. Zato (3.4.5), (3.4.6) važi i u ovom slučaju ([1], str. 272–273), pa je površina

$$\begin{aligned} d &= \iint_D dx dy = \frac{2}{3} \iint_{D^*} r \cos^{-1/3} \varphi \sin^{-1/3} \varphi dr d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/3} \varphi \sin^{-1/3} \varphi d\varphi \int_0^{3a \cos^{2/3} \varphi \sin^{2/3} \varphi} r dr \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{3}{2} a^2 . \end{aligned}$$

Interesantno je da je površina dela xy -ravni između Descartesovog lista i njegove asimptote jednaka nađenoj površini $3a^2/2$ dela ograničenog petljom ([7], str. 104).

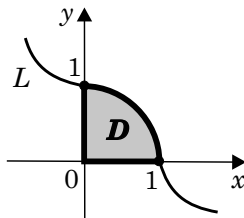
37. Izračunati dvojni integral

$$I = \iint_D x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3} \, dx dy ,$$

gde je D oblast u xy -ravni ($z = 0$) ograničena koordinatnim osama i krivom

$$L : \quad x^3 + y^3 = 1 .$$

Rešenje. Kriva L seče x -osu ($y = 0$) u tački $(1, 0)$, a y -osu ($x = 0$) u tački $(0, 1)$ i ima izgled sa sledeće slike. Oblast D je u I kvadrantu.



Uvodeći istu smenu i koristeći rezultate iz Zadatka 36, dobijamo

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq 1 , \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

i dalje

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \iint_{D^*} r^4 \cos^{4/3} \varphi \sin^{4/3} \varphi \sqrt{1 - r^3} \, r \cos^{-1/3} \varphi \sin^{-1/3} \varphi \, dr d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 r^5 \sqrt{1 - r^3} \, dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^1 r^5 \sqrt{1 - r^3} \, dr . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$1 - r^3 = t^2 ,$$

za koju je $r^3 = 1 - t^2$, $-3r^2 dr = 2t dt$ i $r^5 dr = r^3 r^2 dr = -(2/3)t(1 - t^2) dt$. Još je $t = 1$ za $r = 0$ i $t = 0$ za $r = 1$, pa je

$$I = -\frac{2}{9} \int_1^0 t^2 (1 - t^2) dt = \frac{4}{135} .$$

Zadatak može da se reši i pomoću Descartesovih koordinata. Kako je

$$L : \quad y = \sqrt[3]{1 - x^3} ,$$

$$D : \quad 0 \leq x \leq 1 , \quad 0 \leq y \leq \sqrt[3]{1 - x^3} ,$$

to je

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} x^2 y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} dy \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} \sqrt{1-x^3-y^3} d(1-x^3-y^3) \\
 &= -\frac{2}{9} \int_0^1 x^2 (1-x^3-y^3)^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt[3]{1-x^3}} dx = \frac{2}{9} \int_0^1 x^2 (1-x^3)^{3/2} dx \\
 &= -\frac{2}{27} \int_0^1 (1-x^3)^{3/2} d(1-x^3) = -\frac{4}{135} (1-x^3)^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{135} .
 \end{aligned}$$

Smena promenljivih u trojnim integralima

Ako je

$$x = x(u, v, w) , \quad y = y(u, v, w) , \quad z = z(u, v, w) ;$$

$$J = J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} ,$$

tada je

$$\begin{aligned}
 &\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\
 &= \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw .
 \end{aligned}$$

Najčešće su cilindrične i uopštene cilindrične koordinate $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$, sferne i uopštene sferne koordinate $u = r$, $v = \varphi$, $w = \theta$, za koje je redom:

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi , \quad z = z ; \quad J = r ,$$

$$x = ar \cos \varphi , \quad y = br \sin \varphi , \quad z = z ; \quad J = abr ,$$

$$x = r \cos \varphi \cos \theta , \quad y = r \sin \varphi \cos \theta , \quad z = r \sin \theta ; \quad J = r^2 \cos \theta ,$$

$$x = ar \cos \varphi \cos \theta , \quad y = br \sin \varphi \cos \theta , \quad z = cr \sin \theta ; \quad J = abcr^2 \cos \theta .$$

38. Izračunati trojni integral

$$I = \iiint_D xyz dx dy dz ,$$

gde je D prostorna oblast ograničena površima

$$\begin{aligned} S_1: \quad xy &= 1, & S_2: \quad xy &= 9, & S_3: \quad y &= x, & S_4: \quad y &= 2x, \\ S_5: \quad 2z &= x^2 + y^2, & S_6: \quad 4z &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

za $x, y > 0$ i $b > a > 0$.

Rešenje. Površ S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) su cilindrične sa izvodnicama paralelnim z -osi, a S_5, S_6 su paraboloidi sa z -osom kao osovinom. Zbog $x, y > 0$, iz jednačina površi S_5, S_6 sledi $z > 0$, pa je D u I oktantu.

Jednačine površi S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) sugerišu smenu

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{x^2 + y^2}{z},$$

iz koje je

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}, \quad z = \frac{u(1+v^2)}{vw}, \\ J &= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} & 0 \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & 0 \\ \frac{1+v^2}{vw} & \frac{u(v^2-1)}{v^2w} & -\frac{u(1+v^2)}{vw^2} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{u(1+v^2)}{vw^2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{u(1+v^2)}{2v^2w^2}. \end{aligned}$$

Kako je $x, y, z > 0$, to je $u, v, w > 0$, pa je J neprekidna funkcija i važi

$$|J| = \frac{u(1+v^2)}{2v^2w^2} > 0.$$

Zato se granica $S = \bigcup_{i=1}^6 S_i$ oblasti D iz xyz -sistema preslikava u granicu $S^* = \bigcup_{i=1}^6 S_i^*$ oblasti D^* iz uvw -sistema, gde je

$$\begin{aligned} S_1^*: \quad u &= 1, & S_2^*: \quad u &= 9, & S_3^*: \quad v &= 1, & S_4^*: \quad v &= 2, \\ S_5^*: \quad w &= 2, & S_6^*: \quad w &= 4. \end{aligned}$$

Oblast D^* je oblast kvadra, sa opisom

$$D^*: \quad 1 \leq u \leq 9, \quad 1 \leq v \leq 2, \quad 2 \leq w \leq 4.$$

Prelazeći prvo na trojni integral po novoj oblasti D^* , a zatim na odgovarajući trostruki integral, sledi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iiint_{D^*} \frac{u^2(1+v^2)}{vw} \frac{u(1+v^2)}{v^2w^2} du dv dw = \frac{1}{2} \iiint_{D^*} u^3 \frac{(1+v^2)^2}{v^3} \frac{1}{w^3} du dv dw \\ &= \frac{1}{2} \int_1^9 u^3 du \int_1^2 \frac{(1+v^2)^2}{v^3} dv \int_2^4 \frac{1}{w^3} dw \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^4}{4} \Big|_1^9 \left(-\frac{1}{2w^2} \right) \Big|_2^4 \left(-\frac{1}{2v^2} + 2 \ln |v| + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{615}{64} (15 + 16 \ln 2). \end{aligned}$$

39. Izračunati trojni integral

$$I = \iiint_D z \, dx \, dy \, dz ,$$

gde je D prostorna oblast ograničena površima

$$S_1 : \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 + y^2) , \quad S_2 : \quad z = c$$

i $a, c > 0$.

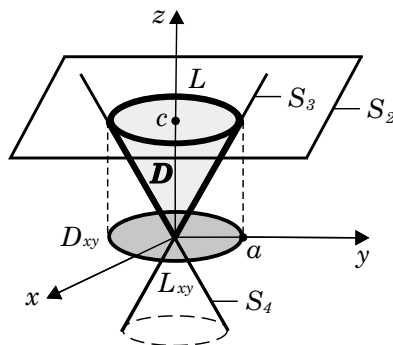
Rešenje. Površ S_1 je konusna sa z -osom kao osovinom i sastoji se od konusa

$$S_3 : \quad z = \frac{c}{a} \sqrt{x^2 + y^2} , \quad S_4 : \quad z = -\frac{c}{a} \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

dok je S_2 ravan paralelna xy -ravni. Zbog $c > 0$, ravan S_2 je iznad xy -ravni, pa je oblast D ograničena sa S_2 i S_3 . Neka je L presečna kriva površi S_2 i S_3 , a L_{xy} njena projekcija na xy -ravan. Eliminacijom z iz jednačina površi S_2 , S_3 nalazimo jednačinu projekcije

$$L_{xy} : \quad x^2 + y^2 = a^2 , \quad z = 0 .$$

Projekcija oblasti D na xy -ravan je oblast D_{xy} ograničena sa L_{xy} .



Descartesove koordinate zamenjujemo cilindričnim koordinatama pomoću

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi , \quad z = z .$$

Jakobijan za ove koordinate je $J = r \geq 0$.

Površ S_2 , S_3 i kružnica L_{xy} se preslikavaju u

$$S_2^* : \quad z = c , \quad S_3^* : \quad z = \frac{c}{a} r ; \quad L_{xy}^* : \quad r = a , \quad z = 0 .$$

Imajući u vidu značenje cilindričnih koordinata i Napomenu 3.4.3, za L_{xy} važi $\varphi \in [0, 2\pi]$, pa oblast D_{xy} prelazi u

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq a , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi ,$$

a oblast D u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{c}{a} r \leq z \leq c.$$

Integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{D^*} z r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{(c/a)r}^c z dz \\ &= 2\pi \int_0^a \frac{1}{2} r \left(c^2 - \frac{c^2}{a^2} r^2 \right) dr = \pi \left(c^2 \frac{r^2}{2} - \frac{c^2}{a^2} \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{4} a^2 c^2 \pi. \end{aligned}$$

40. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

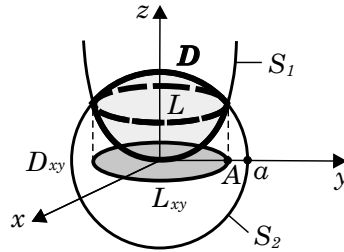
$$S_1 : \quad x^2 + y^2 = az, \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

za $z \geq 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je paraboloid sa z -osom kao osovinom, a S_2 je centralna sfera poluprečnika a . Zbog uslova $z \geq 0$, oblast D je iznad xy -ravni i predstavlja manju od dve oblasti koje S_1 i S_2 ograničavaju. Neka je L presečna kriva za S_1 i S_2 , a L_{xy} njena projekcija na xy -ravan. Smenjujući $z = (x^2 + y^2)/a$ iz jednačine paraboloida u jednačinu sfere sledi $(x^2 + y^2)^2 + a^2(x^2 + y^2) - a^4 = 0$. Za $t = x^2 + y^2 \geq 0$ poslednja jednačina je kvadratna $t^2 + a^2t - a^4 = 0$ i ima rešenje $t = a^2(\sqrt{5} - 1)/2$. Zato je projekcija L_{xy} kružnica

$$L_{xy} : \quad x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a^2, \quad z = 0.$$

Kružnica L_{xy} je granica projekcije D_{xy} oblasti D na xy -ravan.



Uvođenjem cilindričnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

za koje je $J = r \geq 0$, površi S_1 , S_2 i kriva L_{xy} se preslikavaju u

$$S_1^* : \quad z = \frac{1}{a} r^2, \quad S_2^* : \quad z = \sqrt{a^2 - r^2}; \quad L_{xy}^* : \quad r = a \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \quad z = 0.$$

Kako za L_{xy} važi $\varphi \in [0, 2\pi]$, D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq A, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

a oblast D u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq A, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{1}{a} r^2 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2},$$

gde je

$$A = a \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

Za zapreminu se dobija

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A r dr \int_{r^2/a}^{\sqrt{a^2 - r^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^A r \left(\sqrt{a^2 - r^2} - \frac{1}{a} r^2 \right) dr \\ &= -\pi \int_0^A \sqrt{a^2 - r^2} d(a^2 - r^2) - \frac{2\pi}{a} \int_0^A r^3 dr \\ &= -\frac{2}{3} \pi (a^2 - r^2) \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^A - \frac{\pi}{2a} r^4 \Big|_0^A \\ &= \left[-\frac{2}{3} (a^2 - A^2) \sqrt{a^2 - A^2} + \frac{2}{3} a^3 - \frac{1}{2} \frac{A^4}{a} \right] \pi = \frac{1}{12} (3\sqrt{5} - 8\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - 1) a^3 \pi. \end{aligned}$$

Uočavajući da je

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - 2,$$

poslednji rezultat se svodi na

$$d = \frac{5}{12} (3 - \sqrt{5}) a^3 \pi.$$

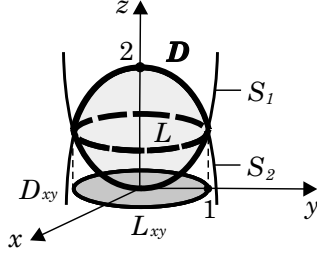
41. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 = 2 - z, \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 = z.$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površi S_1 i S_2 su paraboloidi sa z -osom kao osovinom. Paraboloid S_1 seče z -osu u tački $(0, 0, 2)$. Eliminacijom z iz jednačina za S_1 , S_2 sledi jednačina projekcije L_{xy} presečne krive L ,

$$L_{xy} : \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0.$$

Kružnica L_{xy} je granica projekcije D_{xy} oblasti D na xy -ravan.



Uvođenjem cilindričnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

dobija se $J = r \geq 0$ i

$$\begin{aligned} S_1^* : \quad z &= 2 - r^2, & S_2^* : \quad z &= r^2; \\ L_{xy}^* : \quad r &= 1, \quad z = 0, & D_{xy}^* : \quad 0 &\leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ D^* : \quad 0 &\leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & r^2 &\leq z \leq 2 - r^2. \end{aligned}$$

Zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{r^2}^{2-r^2} dz \\ &= 4\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr = \pi. \end{aligned}$$

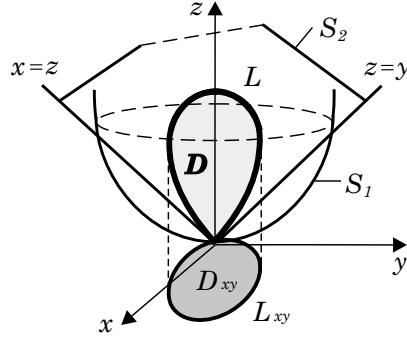
42. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1 : \quad z = x^2 + y^2, \quad S_2 : \quad z = x + y.$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je paraboloid sa z -osom kao osovinom, a S_2 je ravan koja prolazi kroz koordinatni početak $(0, 0, 0)$. Ravan S_2 seče yz -ravan ($x = 0$) duž prave $z = y$, zx -ravan ($y = 0$) duž prave $x = z$, a paraboloid S_1 duž krive L . Eliminacijom koordinate z iz jednačina za S_1 i S_2 sledi $x^2 + y^2 = x + y$, što je jednačina projekcije L_{xy} krive L na xy -ravan. Ovu jednačinu transformišemo i dobijamo

$$L_{xy} : \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad z = 0,$$

odakle vidimo da je L_{xy} "pomerena" kružnica sa centrom u tački $(1/2, 1/2, 0)$ i poluprečnika $1/\sqrt{2}$. Projekcija oblasti D na xy -ravan je oblast D_{xy} ograničena sa L_{xy} .



Uvođenjem smene

$$x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi, \quad z = z,$$

za koju je $J = r \geq 0$, površi S_1 , S_2 i kriva L_{xy} prelaze u

$$S_1^* : \quad z = \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) + r^2, \quad S_2^* : \quad z = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi);$$

$$L_{xy}^* : \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z = 0.$$

Kriva L_{xy}^* je definisana za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$, pa se oblast D_{xy} preslikava u

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

a oblast D u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z_1(r, \varphi) \leq z \leq z_2(r, \varphi),$$

gde je

$$z_1(r, \varphi) = \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) + r^2, \quad z_2(r, \varphi) = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Tražena zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}/2} r dr \int_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}/2} r \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) dr = \frac{1}{8} \pi. \end{aligned}$$

Uvedena smena je prostorni analogon smene (1.4.20) u xy -koordinatnoj ravni jer predstavlja kompoziciju smena

$$\begin{aligned} x &= u + \frac{1}{2}, \quad y = v + \frac{1}{2}, \quad z = w; \\ u &= r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi, \quad w = w, \end{aligned}$$

pri čemu je prva smena translacija xyz -sistema u uvw -sistem, a drugom se uvode cilindrične koordinate u uvw -sistemu.

43. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$S_1 : z = 3y^2, \quad S_2 : z = 4 - (x^2 + y^2).$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je cilindrična sa izvodnicama paralelnim x -osi i direktrisom koja je parabola u yz -ravni. Površ S_2 je paraboloid sa z -osom kao osovinom, koji z -osu seče u tački $(0, 0, 4)$. Eliminacijom z iz jednačina površi S_1 i S_2 sledi jednačina projekcije L_{xy} presečne krive L (slika iz Zadatka 17),

$$L_{xy} : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad z = 0.$$

Oblast D_{xy} , ograničena elipsom L_{xy} , je projekcija oblasti D na xy -ravan.

Uvodimo uopštene cilindrične koordinate sa

$$x = 2r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

i dobijamo $J = 2r \geq 0$,

$$S_1^* : z = 3r^2 \sin^2 \varphi, \quad S_2^* : z = 4 - r^2(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi); \quad L_{xy}^* : r = 1, \quad z = 0.$$

Kriva L_{xy}^* je definisana za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$, pa je

$$D_{xy}^* : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ D^* : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z_1(r, \varphi) \leq z \leq z_2(r, \varphi),$$

gde je

$$z_1(r, \varphi) = 3r^2 \sin^2 \varphi, \quad z_2(r, \varphi) = 4 - r^2(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi).$$

Zapremina je

$$d = \iiint_D dx dy dz = 2 \iiint_{D^*} r dr d\varphi dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} dz \\ = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4r(1 - r^2) dr = 16\pi \int_0^1 r(1 - r^2) dr = 4\pi.$$

44. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

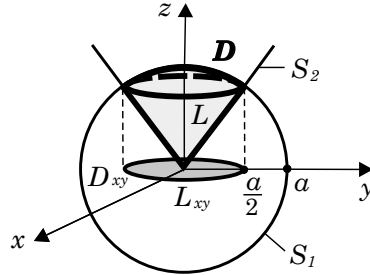
$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad S_2 : z = \sqrt{3(x^2 + y^2)},$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 je centralna sfera, a S_2 je konus sa z -osom kao osovinom, koji je iznad xy -ravni zbog $z \geq 0$. Projekcija presečne krive L površi S_1 i S_2 na xy -ravan je kružnica

$$L_{xy} : x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad z = 0,$$

a projekcija oblasti D je krug D_{xy} ograničen sa L_{xy} .



Zadatak rešavamo na dva načina.

Zamenom Descartesovih cilindričnim koordinatama pomoću

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

sledi $J = r \geq 0$ i

$$\begin{aligned} S_1^* : \quad z &= \sqrt{a^2 - r^2}, & S_2^* : \quad z &= \sqrt{3}r; \\ L_{xy}^* : \quad r &= \frac{a}{2}, \quad z = 0, & D_{xy}^* : \quad 0 &\leq r \leq \frac{a}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ D^* : \quad 0 &\leq r \leq \frac{a}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & \sqrt{3}r &\leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}. \end{aligned}$$

Slično kao u Zadatku 40, za zapreminu se dobija

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a/2} r dr \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{a^2 - r^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^{a/2} r (\sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{3}r) dr = \frac{2 - \sqrt{3}}{3} a^3 \pi. \end{aligned}$$

Drugi način se sastoji u upotrebi sfernih koordinata. Descartesove koordinate zamenjujemo sfernim pomoću

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta.$$

Jakobijan za ove koordinate je $J = r^2 \cos \theta \geq 0$.

Iz jednačine površi S_1 je $r = a$. Iz jednačine površi S_2 je $r \sin \theta = \sqrt{3}r \cos \theta$, $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta = \sqrt{3}$ i $\theta = \pi/3$. Zato se S_1, S_2 preslikavaju u

$$S_1^* : \quad r = a, \quad S_2^* : \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Imajući u vidu značenje sfernih koordinata i Napomenu 3.4.3, za L_{xy} i D_{xy} je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Još, tački $(0, 0, 0) \in D$ odgovara $r = 0$, pa se oblast D se preslikava u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tražena zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_0^a \sin \theta \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 2\pi \frac{a^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{3} a^3 \pi . \end{aligned}$$

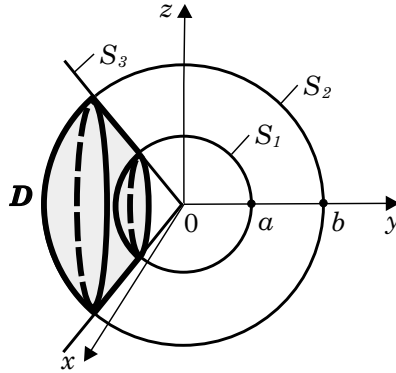
Rešavanje zadatka pomoću sfernih koordinata je jednostavnije jer su konusi i sfere koordinatne površi u sfernom koordinatnom sistemu, dok za cilindrični koordinatni sistem to nisu karakteristične površi.

45. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene površima

$$\begin{aligned} S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 , & S_2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 , \\ S_3 : \quad y &= -\sqrt{x^2 + z^2} , \end{aligned}$$

gde je $b > a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Površ S_1 i S_2 su centralne sfere, a S_3 je konus sa y -osom kao osovinom, za koji je $y \leq 0$.



Descartesove koordinate zamenjujemo sfernim pomoću

$$z = r \cos \varphi \cos \theta , \quad x = r \sin \varphi \cos \theta , \quad y = r \sin \theta ,$$

gde je r dužina potega tačke (x, y, z) , φ ugao između potega projekcije $(x, 0, z)$ na zx -ravan i pozitivnog dela z -ose, a θ ugao između potega tačke (x, y, z) i zx -ravni. Jakobijan za ovako uvedene sferne koordinate je

$$J = \begin{vmatrix} z_r & z_\varphi & z_\theta \\ x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta \geq 0 .$$

Površ S_i ($i = 1, 2, 3$) se preslikavaju u

$$S_1^* : \quad r = a , \quad S_2^* : \quad r = b , \quad S_3^* : \quad \theta = -\frac{\pi}{4} .$$

S obzirom na izneto značenje sfernih koordinata, oblast D se preslikava u

$$D^* : \quad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{4}.$$

Tražena zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b r^2 dr \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_a^b \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} (b^3 - a^3) \pi. \end{aligned}$$

46. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene zatvorenom površi

$$S : \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2),$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Iz jednačine površi S sledi $z \geq 0$ i $(0, 0, 0) \in S$, što znači da se D nalazi iznad xy -ravni, tj. u I, II, III, IV oktantu, kao i da je $(0, 0, 0) \in D$.

Za sferne koordinate, uvedene sa

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta,$$

u navedenim oktantima važi $\varphi \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi/2]$. Do istog zaključka se dolazi i diskusijom uslova $z = r \sin \theta \geq 0$, tj. $\sin \theta \geq 0$. Jakobijan je $J = r^2 \cos \theta \geq 0$.

Površ S se preslikava u površ

$$S^* : \quad r = a \sin \theta \cos^2 \theta,$$

koja je definisana za svako $\theta \in [0, \pi/2]$. Takođe, u jednačini površi S^* ne figuriše koordinata φ , pa je S^* definisana i za svako $\varphi \in [0, 2\pi]$. Još, tački $(0, 0, 0) \in D$ odgovara $r = 0$. Oblast D se preslikava u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq a \sin \theta \cos^2 \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{a \sin \theta \cos^2 \theta} r^2 dr \\ &= \frac{2}{3} a^3 \pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^7 \theta d\theta = -\frac{2}{3} a^3 \pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \cos^7 \theta d(\cos \theta) \\ &= -\frac{2}{3} a^3 \pi \left(-\frac{1}{40} \right) = \frac{1}{60} a^3 \pi. \end{aligned}$$

47. Izračunati zapreminu prostorne oblasti ograničene zatvorenom površi

$$S : \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D oblast čiju zapreminu d treba izračunati. Jednačina površi S ne nameće nikakva ograničenja, pa se S , a time i D , nalazi u svim oktantima. Još je $(0, 0, 0) \in S$, tj. $(0, 0, 0) \in D$.

Prelaskom na sferne koordinate pomoću

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta,$$

površ S se preslikava u površ

$$S^* : \quad r = a \cos \theta,$$

koja je definisana za svako $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ i svako $\varphi \in [0, 2\pi]$. Kako je $(0, 0, 0) \in D$, oblast D se transformiše u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq a \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

S obzirom na $J = r^2 \cos \theta \geq 0$ i jednakost navedenu u Zadatku 10, zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{a \cos \theta} r^2 dr \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \cos^4 \theta d\theta = \frac{4}{3} a^3 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{4} a^3 \pi^2. \end{aligned}$$

48. Izračunati zapreminu elipsoidne oblasti ograničene elipsoidom

$$S : \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

gde je $a, b, c > 0$.

Rešenje. Neka je D elipsoidna oblast i d njena zapremina. Zapremina d ne zavisi od položaja oblasti D , već samo od njenog oblika, uslovljenog poluosama a, b, c . Zato oblast D ima istu zapreminu kao i oblast D_1 , ograničena centralnim elipsoidom (Slika 1.4.33)

$$S_1 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Umesto smene

$$x = x_0 + r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = y_0 + r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = z_0 + r \sin \theta$$

uvodimo uopštene sferne koordinate pomoću jednostavnije smene

$$x = ar \cos \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \cos \theta, \quad z = cr \sin \theta.$$

Za centralni elipsoid S_1 uvedene koordinate φ i θ imaju maksimalni raspon $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ i važi $J = abc r^2 \cos \theta \geq 0$. Takođe je $(0, 0, 0) \in D_1$.

Elipsoid S_1 se preslikava u

$$S_1^* : \quad r = 1,$$

a oblast D_1 u

$$D_1^* : \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tražena zapremina je

$$\begin{aligned} d &= \iiint_{D_1} dx dy dz = \iiint_{D_1^*} abc r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{4}{3} abc\pi, \end{aligned}$$

što je dobro poznati obrazac iz ranijih kurseva matematike.

Green–Riemannova teorema

Ako je D prosto povezana ravna oblast i L njena kontura, tada je

$$\oint_{L^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

49. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L (e^x \arctan y + 2y) dx + \left(\frac{e^x}{1+y^2} - 1 \right) dy,$$

gde je L deo negativno orijentisane kružnice

$$L_1 : \quad x^2 + y^2 = y, \quad z = 0$$

za $x \geq 0$.

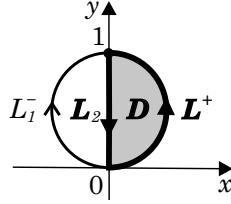
Rešenje. Kako je

$$L_1 : \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

kružnica L_1 ima centar na y -osi u tački $(0, 1/2)$ i poluprečnik $1/2$. Zbog uslova $x \geq 0$, deo L kružnice L_1 je polukružnica u I kvadrantu. Polukružnica L zadržava orijentaciju celine L_1 , što naglašavamo oznakom L^- . Posmatramo suprotno orijentisanu polukružnicu L^+ . Ako je L_2 deo y -ose između tačaka $(0, 0)$ i $(0, 1)$, orijentisan od tačke $(0, 1)$ ka tački $(0, 0)$, kriva

$$L_3 = L^+ \cup L_2$$

je pozitivno orijentisana kontura. Oblast D u xy -ravni, ograničena sa L_3 , je prosto povezana.



Sa I^+ , I_2 , I_3 označimo krivolinijske integrale duž L^+ , L_2 i L_3 redom, koji imaju isti podintegralni izraz kao integral I . Tada je $I = -I^+$, $I_3 = I^+ + I_2 = -I + I_2$ i

$$I = I_2 - I_3 .$$

Prvo izračunavamo integral I_3 primenom Green–Riemannove teoreme. Stavljajući

$$P(x, y) = e^x \arctan y + 2y , \quad Q(x, y) = \frac{e^x}{1 + y^2} - 1 ,$$

dobijamo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^x}{1 + y^2} + 2 , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^x}{1 + y^2} ,$$

pa su funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ neprekidne u celoj xy -ravni, a time i u oblasti D . Uslovi Green–Riemannove teoreme su ispunjeni, pa važi

$$\begin{aligned} I_3 &= \oint_{L_3^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_{L_3^+} (e^x \arctan y + 2y) dx + \left(\frac{e^x}{1 + y^2} - 1 \right) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = -2 \iint_D dx dy = -2d = -\frac{1}{4} \pi , \end{aligned}$$

gde je $d = R^2 \pi / 2 = \pi / 8$ površina polukruga D poluprečnika $R = 1/2$ (Primer 3.5.1).

Izračunavamo sada integral I_2 . Kako je

$$L_2 : \quad x = x(y) = 0 , \quad z = 0 ; \quad y \in [0, 1] ,$$

pri čemu se za uvedenu orijentaciju parametar menja od $y = 1$ do $y = 0$, to je $e^x = 1$, $dx = 0$ i

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{L_2} (e^x \arctan y + 2y) dx + \left(\frac{e^x}{1 + y^2} - 1 \right) dy \\ &= \int_1^0 \left(\frac{1}{1 + y^2} - 1 \right) dy = (\arctan y - y) \Big|_1^0 = -\frac{1}{4} \pi + 1 . \end{aligned}$$

Konačno je

$$I = I_2 - I_3 = -\frac{1}{4} \pi + 1 + \frac{1}{4} \pi = 1 .$$

Za razliku od rešavanja pomoću Green–Riemannove teoreme, direktno rešavanje integrala I kao krivolinijskog je izuzetno teško. Primena Green–Riemannove teoreme je olakšana time što je kriva L mogla da se dopuni do zatvorene krive L_3 delom L_2 y -ose (Napomena 3.5.1).

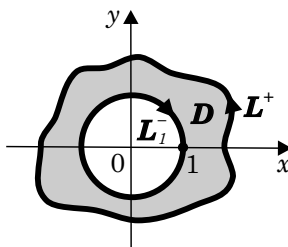
50. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} ,$$

gde je L pozitivno orijentisana spoljna kontura dvostruko povezane oblasti u xy -ravni ($z = 0$), čija je unutrašnja kontura

$$L_1 : \quad x^2 + y^2 = 1 , \quad z = 0 .$$

Rešenje. Dvostruko povezanu oblast označimo sa D i njenu unutrašnju konturu L_1 orijentišimo negativno.



Funkcije

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} , \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

su neprekidne u oblasti D jer $(0, 0) \notin D$. Zato može da se primeni Teorema 3.5.2 i sledi

$$\oint_{L+} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} + \oint_{L_1-} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 ,$$

odakle je

$$I = \oint_{L+} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = - \oint_{L_1-} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \oint_{L_1+} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} .$$

Parametarske jednačine kružnice L_1 su

$$L_1 : \quad x = \cos \varphi , \quad y = \sin \varphi , \quad z = 0 ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] ,$$

pa je

$$I = \oint_{L_1+} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi .$$

Pošto je kontura L proizvoljna, krivolinijski integral ima istu vrednost $I = 2\pi$ duž svake konture (zatvorena kriva) u xy -ravni za koju je $(0, 0) \in \text{int } L$. Ukoliko $(0, 0) \notin L \cup \text{int } L$, prema Green–Riemannovoj teoremi je $I = 0$. Dakle, I ne zavisi od oblika konture L , već samo od njenog položaja u koordinatnoj ravni, tj. od navedenog uslova.

51. Izračunati površinu oblasti u xy -ravni ($z = 0$) ograničene zatvorenom krivom

$$L: \quad x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad z = 0; \quad t \in [0, +\infty).$$

Rešenje. Neka je D oblast čiju površinu d treba izračunati. Kriva L je petlja Descartesovog lista (slika iz Zadatka 36 za $a = 1$). Oblast D je prosto povezana.

Kako je L zadata parametarski, površinu d nalazimo posredstvom Green–Riemannove teoreme (Napomena 3.5.2). Od jednakosti (3.5.5)–(3.5.8) najpogodnija je (3.5.8) zbog $y/x = t$, tj.

$$d = \frac{1}{2} \oint_{L+} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pozitivnoj orijentaciji krive L odgovara promena parametra od $t = 0$ do $t = +\infty$, što se lako proverava kretanjem po krivoj za konkretan izbor vrednosti parametra, npr. $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$. Zato je dalje

$$d = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^2} d(1+t^3) = -\frac{3}{2} \frac{1}{1+t^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{3}{2},$$

uz napomenu da je određeni integral, koji smo upravo rešili, nesvojstven ([4], str. 269–270).

Da je petlja Descartesovog lista zadata implicitno i da smo parametrizaciju vršili pomoću uopštenih polarnih koordinata r , φ (Zadatak 36), dobili bismo

$$L: \quad x = 3a \cos^{4/3} \varphi \sin^{2/3} \varphi, \quad y = 3a \cos^{2/3} \varphi \sin^{4/3} \varphi, \quad z = 0; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

odakle je očigledno da parametri t i φ nisu isti. Rešavanje zadatka pomoću bilo koje od formula (3.5.5)–(3.5.8) je značajno teže sa parametrom φ zbog neophodnosti sređivanja odgovarajućih podintegralnih izraza. Takođe, rešavanje pomoću dvojnog integrala (Zadatak 36) je prostije nego pomoću krivolinijskog sa parametrom φ (Napomena 3.5.2).

52. Izračunati površinu dela xy -ravni ($z = 0$) ograničenog krivom

$$L: \quad (x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - 3y^2), \quad z = 0,$$

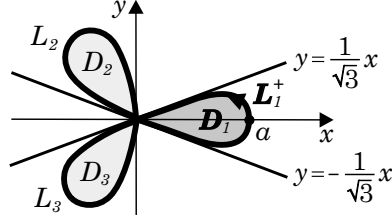
gde je $a > 0$.

Rešenje. Neka je D deo xy -ravni čiju površinu d treba izračunati. U jednačini krive L je $(x^2 + y^2)^2 \geq 0$, pa mora da bude i $x(x^2 - 3y^2) = x(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y) \geq 0$. Nešto dužom diskusijom se utvrđuje da poslednja nejednakost važi u slučajevima

$$x \geq 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x; \quad x \leq 0, \quad y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x; \quad x \leq 0, \quad y < \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Slično lemniskati (Zadatak 6), navedeni slučajevi se odnose na tri zatvorene krive L_1 , L_2 i L_3 , sa zajedničkom tačkom $(0, 0) \in L$, koja je singularna i to *trostruka tačka* jednačine

([2], str. 98). Dakle, L nije zatvorena prosta kriva u smislu Definicije 1.1.9, već je $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Oblasti D_i ograničene sa L_i ($i = 1, 2, 3$) imaju jednake površine, pa posmatramo samo krivu L_1 i oblast D_1 , znajući da je $(0, 0) \in D_1$.



Površinu d nalazimo pomoću jednakosti (3.5.5), koja je posledica Green–Riemannove teoreme,

$$d = \frac{3}{2} \oint_{L_1^+} x dy - y dx .$$

Uvodimo polarne koordinate sa

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi .$$

Za pravu $y = (-1/\sqrt{3})x$ je $\tan \varphi = -1/\sqrt{3}$ i $\varphi = -\pi/6$, a za pravu $y = (1/\sqrt{3})x$ je $\tan \varphi = 1/\sqrt{3}$ i $\varphi = \pi/6$. Takođe, iz jednačine krive L sledi

$$\begin{aligned} r &= a \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) = a \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) \\ &= a \cos \varphi (\cos 2\varphi - 2 \sin^2 \varphi) = a (\cos \varphi \cos 2\varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \varphi) \\ &= a (\cos \varphi \cos 2\varphi - \sin \varphi \sin 2\varphi) = a \cos 3\varphi , \end{aligned}$$

gde je upotrebljena adicijna formula

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\alpha = \varphi , \quad \beta = 2\varphi) .$$

Zato su parametarske jednačine krive L_1 date sa

$$L_1 : \quad x = a \cos \varphi \cos 3\varphi , \quad y = a \sin \varphi \cos 3\varphi , \quad z = 0 ; \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] .$$

Za pozitivnu orijentaciju krive L_1 parametar se kreće od $\varphi = -\pi/6$ do $\varphi = \pi/6$.

Kako je

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= -a(\sin \varphi \cos 3\varphi + 3 \cos \varphi \sin 3\varphi) , \\ y'(\varphi) &= a(\cos \varphi \cos 3\varphi - 3 \sin \varphi \sin 3\varphi) , \end{aligned}$$

posle sređivanja je

$$x dy - y dx = a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi$$

i za površinu se dobija

$$d = \frac{3}{2} a^2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{4} a^2 \pi .$$

Zadatak se rešava lakše pomoću dvojnog integrala (Napomena 3.5.2) jer nalaženje izvoda $x'(\varphi)$, $y'(\varphi)$ i sređivanje izraza $x dy - y dx$ nije potrebno. Tačnije, kriva L_1 i oblast D_1 se preslikavaju u

$$\begin{aligned} L_1^* : \quad & r = a \cos 3\varphi , \\ D^* : \quad & 0 \leq r \leq a \cos 3\varphi , \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

i odmah se dobija

$$d = 3 \iint_{D_1} dx dy = 3 \iint_{D_1^*} r dr d\varphi = 3 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_0^{a \cos 3\varphi} r dr = \frac{3}{2} a^2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi .$$

Primetimo da smo položaj krive L mogli jednostavnije da utvrdimo diskutujući njenu jednačinu u polarnim koordinatama

$$r = a \cos 3\varphi .$$

Za $\varphi \in [0, 2\pi]$ je $3\varphi \in [0, 6\pi]$, pa iz uslova $\cos 3\varphi \geq 0$ sledi $3\varphi \in [-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ ($k = 0, 1, 2$) i $\varphi \in [-\pi/6 + 2k\pi/3, \pi/6 + 2k\pi/3]$, tj.

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right] .$$

POVRŠINSKI INTEGRALI

Površinski integrali po površi (I vrste)

Ako je

$$S : \quad z = z(x, y) ; \quad (x, y) \in D_{xy} , \\ p = \frac{\partial z}{\partial x} , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} ,$$

tada je

$$\iint_S H(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} H(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy .$$

53. Izračunati površinu površi

$$S : \quad x = u \cos v , \quad y = u \sin v , \quad z = v ; \quad (u, v) \in D_{uv} ,$$

gde je

$$D_{uv} : \quad 0 \leq u \leq a , \quad 0 \leq v \leq 2\pi .$$

Rešenje. Neka je s površina površi S .

Iz zadatih parametarskih jednačina površi S nalazimo

$$x_u = \cos v , \quad x_v = -u \sin v , \quad y_u = \sin v , \quad y_v = u \cos v , \quad z_u = 0 , \quad z_v = 1 ;$$

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 , \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 1 + u^2 , \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0 .$$

Zato je

$$s = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{uv}} \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{D_{uv}} \sqrt{1 + u^2} du dv \\ = \int_0^a \sqrt{1 + u^2} du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \int_0^a \sqrt{1 + u^2} du .$$

Dobijeni određeni integral se rešava hiperboličkom smenom

$$u = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} .$$

Za $u = 0$ je $t = 0$, a za $u = a$ je $t = A = \operatorname{arcsinh} a = \ln(a + \sqrt{1 + a^2})$. Koristeći osobine hiperboličkih funkcija ([3], str. 299–300, [4], str. 27, 209), dalje je

$$\begin{aligned} s &= 2\pi \int_0^A \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cosh t \, dt = 2\pi \int_0^A \cosh^2 t \, dt = 2\pi \int_0^A \frac{1 + \cosh 2t}{2} \, dt \\ &= \pi \left(t + \frac{1}{2} \sinh 2t \right) \Big|_0^A = \pi(A + \sinh A \cosh A) = \pi(A + a \cosh A) . \end{aligned}$$

Zamenom $t = A = \ln(a + \sqrt{1 + a^2})$ u definicioni izraz za $\cosh t$ i sređivanjem sledi

$$\begin{aligned} \cosh A &= \frac{e^A + e^{-A}}{2} = \frac{a^2 + a\sqrt{1 + a^2} + 1}{a + \sqrt{1 + a^2}} = \frac{a(a + \sqrt{1 + a^2})}{a + \sqrt{1 + a^2}} + \frac{1}{a + \sqrt{1 + a^2}} \\ &= a + (-a + \sqrt{1 + a^2}) = \sqrt{1 + a^2} , \end{aligned}$$

pa je konačno

$$s = \pi \left[a\sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2}) \right] .$$

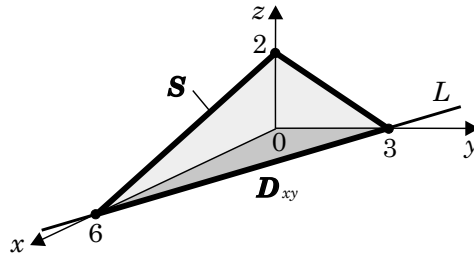
54. Izračunati površinu dela ravni

$$S_1 : \quad x + 2y + 3z = 6$$

za $x, y, z \geq 0$.

Rešenje. Neka je S deo ravni S_1 u I oktantu, čiju površinu s treba izračunati. Ravan S_1 seče x , y i z -osu redom u tačkama $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 2)$, a xy -ravan duž prave

$$L : \quad y = -\frac{1}{2}x + 3, \quad z = 0 .$$



Površ S se bijektivno projektuje na sve tri koordinatne ravni (2° iz Napomene 4.3.2). Projektujemo je, npr., na xy -ravan ($z = 0$). Projekcija je oblast D_{xy} ograničena x -osom, y -osom i pravom L , tj.

$$D_{xy} : \quad 0 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 3 .$$

S obzirom na $S \subset S_1$ i projektovanje na xy -ravan, iz jednačine ravni S_1 iskazujemo jednačinu njenog dela S u obliku

$$S: \quad z = z(x, y) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + 2; \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Kako je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{3}; \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{14}{9},$$

to je

$$s = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_{D_{xy}} dxdy.$$

Prema opisu oblasti D_{xy} , dalje je

$$s = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^6 dx \int_0^{-x/2+3} dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^6 \left(-\frac{x}{2} + 3\right) dx = 3\sqrt{14}.$$

Zadatak se rešava na isti način ako se S projektuje na yz ili zx -ravan.

55. Izračunati površinu zatvorene površi $S = S_1 \cup S_2$, gde je S_1 manji deo sfere

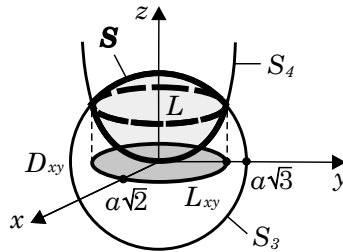
$$S_3: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

koji iseca paraboloid

$$S_4: \quad x^2 + y^2 = 2az,$$

a S_2 deo paraboloida S_4 koji je unutar sfere S_3 za $a > 0$.

Rešenje. Neka je s_1 površina za S_1 , a s_2 površina za S_2 . Sfera S_3 je centralna, a paraboloid S_4 ima z -osu za osovinu. Površ S_3 i S_4 se seku duž krive L , a njihovi delovi S_1 i S_2 su iznad xy -ravni ($z \geq 0$).



Površ S_1 i S_2 se bijektivno projektuju samo na xy -ravan ($z = 0$) u istu oblast D_{xy} . Da bismo odredili ovu oblast, određujemo projekciju L_{xy} krive L . Smenjujući $x^2 + y^2 = 2az$ u $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ sledi $z^2 + 2az - 3a^2 = 0$, odakle je $z_1 = a > 0$, $z_2 = -3a < 0$ i sve tačke krive L imaju istu treću koordinatu $z = a$. Za $z = a$ jednačine površi S_3 i S_4 postaju $x^2 + y^2 = 2a^2$, pa je L_{xy} kružnica

$$L_{xy}: \quad x^2 + y^2 = 2a^2, \quad z = 0.$$

Zato je projekcija krug

$$D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 2a^2 .$$

Za površi $S_1 \subset S_3$ i $S_2 \subset S_4$ je $z \geq 0$ i projektovanje se vrši na xy -ravan, pa jednačine ovih površi zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} S_1 : z &= z_1(x, y) = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} ; \quad (x, y) \in D_{xy} , \\ S_2 : z &= z_2(x, y) = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) ; \quad (x, y) \in D_{xy} . \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} , \quad q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} ; \\ p_2 &= \frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{x}{a} , \quad q_2 = \frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{y}{a} ; \\ 1 + p_1^2 + q_1^2 &= \frac{3a^2}{3a^2 - x^2 - y^2} , \quad 1 + p_2^2 + q_2^2 = \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2} , \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned} s_1 &= \iint_{S_1} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2} \, dxdy = \sqrt{3}a \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} , \\ s_2 &= \iint_{S_2} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2} \, dxdy = \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \, dxdy . \end{aligned}$$

Uvođenjem polarnih koordinata sa

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi ,$$

za koje je $|J| = r$, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^* : 0 \leq r \leq \sqrt{2}a , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i sledi

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{3}a \iint_{D_{xy}^*} \frac{r}{\sqrt{3a^2 - r^2}} \, drd\varphi = \sqrt{3}a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{r}{\sqrt{3a^2 - r^2}} \, dr \\ &= -\sqrt{3}a\pi \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{1}{\sqrt{3a^2 - r^2}} \, d(3a^2 - r^2) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)a^2\pi , \\ s_2 &= \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}^*} r\sqrt{a^2 + r^2} \, drd\varphi = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}a} r\sqrt{a^2 + r^2} \, dr \\ &= \frac{1}{a}\pi \int_0^{\sqrt{2}a} \sqrt{a^2 + r^2} \, d(a^2 + r^2) = \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1)a^2\pi , \end{aligned}$$

odakle je, zbog $S = S_1 \cup S_2$,

$$s = s_1 + s_2 = \frac{16}{3}a^2\pi .$$

Do projekcije L_{xy} može da se dođe na standardan način, eliminacijom z iz jednačina površi S_3 i S_4 . Zamenom $z = (x^2 + y^2)/2a$ iz jednačine za S_4 u jednačinu za S_3 sledi

$$L_{xy} : (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 4a^2) = 12a^4, \quad z = 0.$$

Krivu L_{xy} prepoznavamo zahvaljujući polarnim koordinatama r, φ za koje je iz prethodne jednačine $r^4 + 4a^2r^2 - 12a^4 = 0$, što je bikvadratna jednačina po r . Smenom $t = r^2 > 0$ ova jednačina postaje $t^2 + 4a^2t - 12a^4 = 0$ i ima rešenja $t_1 = 2a^2 > 0$ i $t_2 = -6a^2 < 0$, pa je $r^2 = t_1 = 2a^2$ i $r = \sqrt{2}a$. Dakle, L_{xy} je centralna kružnica poluprečnika $r = \sqrt{2}a$.

Primećujemo da se površ S sastoji od delova S_1 i S_2 sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 4.3.2), pri čemu se delovi bijectivno projektuju samo na xy -ravan (1° iz Napomene 4.3.2). Povoljna situacija je u tome što se oba dela projektuju u istu oblast.

56. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S y(x + z^2) d\sigma,$$

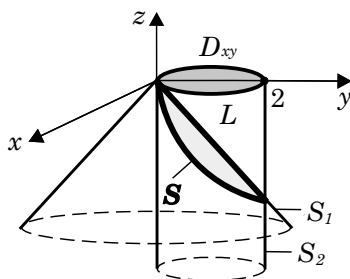
gde je S deo konusa

$$S_1 : \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

koji iseca cilindrična površ

$$S_2 : \quad x^2 + y^2 = 2y.$$

Rešenje. Konus S_1 ima z -osu za osovinu i nalazi se ispod xy -ravni ($z \leq 0$). Izvodnice cilindrične površi S_2 su paralelne z -osi, a direktrisa je kružnica L u xy -ravni sa centrom u tački $(0, 1, 0)$ poluprečnika 1.



Površ S se bijectivno projektuje na xy -ravan ($z = 0$) u oblast ograničenu sa L , tj. u krug

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \leq 2y$$

i kao deo konusa S_1 ima jednačinu

$$S : \quad z = z(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}; \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Određujući

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad 1 + p^2 + q^2 = 2,$$

integral I postaje

$$I = \iint_{D_{xy}} y[x + z^2(x, y)] \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} y(x + x^2 + y^2) \, dx dy.$$

Uvođenjem polarnih koordinata r, φ u xy -ravni, krug D_{xy} prelazi u oblast

$$D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

pa je dalje

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}^*} r^2 \sin \varphi (r \cos \varphi + r^2) \, dr d\varphi \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} (r^3 \cos \varphi \sin \varphi + r^4 \sin \varphi) \, dr \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi \left(4 \cos \varphi \sin^5 \varphi + \frac{32}{5} \sin^6 \varphi \right) d\varphi \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^\pi \sin^5 \varphi \, d(\sin \varphi) + \frac{32\sqrt{2}}{5} \int_0^\pi \sin^6 \varphi \, d\varphi = \frac{32\sqrt{2}}{5} \int_0^\pi \sin^6 \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Postupajući kao u Zadatku 10, nalazimo

$$\sin^6 \varphi = \frac{5}{16} - \frac{3}{8} \cos 2\varphi - \frac{1}{8} \cos^3 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi$$

i dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{32\sqrt{2}}{5} \left[\frac{5}{16} \int_0^\pi d\varphi - \frac{3}{8} \int_0^\pi \cos 2\varphi \, d\varphi - \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos^3 2\varphi \, d\varphi + \frac{3}{16} \int_0^\pi \cos 4\varphi \, d\varphi \right] \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{5} \left[\frac{5}{16} \pi - \frac{1}{16} \int_0^\pi (1 - \sin^2 2\varphi) \, d(\sin 2\varphi) \right] = \frac{32\sqrt{2}}{5} \frac{5}{16} \pi = 2\sqrt{2} \pi. \end{aligned}$$

Osim na xy -ravan, površ S se bijektivno projektuje i na zx -ravan u oblast

$$D_{zx}: \quad -2 \leq z \leq 0, \quad -\frac{z}{2} \sqrt{4 - z^2} \leq x \leq \frac{z}{2} \sqrt{4 - z^2}.$$

Međutim, odgovarajući dvojni integral po oblasti D_{zx} se znatno teže rešava, pa u opštem slučaju nije svejedno koje se bijektivno projektovanje koristi za prelazak sa površinskog na dvojni integral (2° iz Napomene 4.3.2).

57. Izračunati površinski integral I vrste

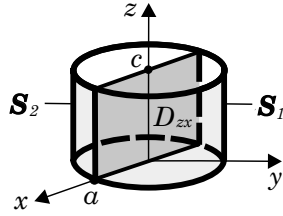
$$I = \iint_S (y + z + \sqrt{a^2 - x^2}) \, d\sigma,$$

gde je

$$S : x^2 + y^2 = a^2$$

cilindrična površ za $0 \leq z \leq c$ i $a, c > 0$.

Rešenje. Izvodnice cilindrične površi S su paralelne z -osi, a direktrisa je centralna kružnica u xy -ravni poluprečnika a .



Projektovanje površi S na bilo koju od koordinatnih ravni nije bijekcija (3° iz Napomene 4.3.2). Pri tome za projektovanje na yz ili zx -ravan postoje po dva bijektivna dela površi S , dok za projektovanje na xy -ravan površ S nema bijektivnih delova. Površ S projektujemo, npr., na zx -ravan ($y = 0$) i u tom cilju je posmatramo kao $S = S_1 \cup S_2$, gde je S_1 deo za $y \geq 0$, a S_2 deo za $y \leq 0$. Oba dela se bijektivno projektuju na istu pravougaonu oblast

$$D_{zx} : 0 \leq z \leq c, -a \leq x \leq a.$$

Budući da delove $S_1, S_2 \subset S$ projektujemo na zx -ravan, njihove jednačine zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} S_1 : y &= y_1(z, x) = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad (z, x) \in D_{zx}, \\ S_2 : y &= y_2(z, x) = -\sqrt{a^2 - x^2}; \quad (z, x) \in D_{zx}. \end{aligned}$$

Za površi S_1, S_2 je

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial z} = 0, \quad q_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \\ p_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial z} = 0, \quad q_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \\ 1 + p_1^2 + q_1^2 &= 1 + p_2^2 + q_2^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_{zx}} [y_1(z, x) + z + \sqrt{a^2 - x^2}] \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2} dz dx \\ &= a \iint_{D_{zx}} (z + 2\sqrt{a^2 - x^2}) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz dx = a \iint_{D_{zx}} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 2 \right) dz dx, \\ I_2 &= \iint_{D_{zx}} [y_2(z, x) + z + \sqrt{a^2 - x^2}] \sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2} dz dx = a \iint_{D_{zx}} \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz dx. \end{aligned}$$

Prema opisu oblasti D_{zx} , dalje je

$$\begin{aligned} I_1 &= a \int_{-a}^a dx \int_0^c \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 2 \right) dz = 4a^2c + ac^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 4a^2c + ac^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) = 4a^2c + ac^2 \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4a^2c + \frac{1}{2} ac^2 \pi, \end{aligned}$$

$$I_2 = a \int_{-a}^a dx \int_0^c \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz = ac^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} ac^2 \pi$$

i, zbog $S = S_1 \cup S_2$,

$$I = I_1 + I_2 = 4a^2c + ac^2\pi = ac(4a + c\pi).$$

Zadatak se slično rešava projektovanjem S na yz -ravan.

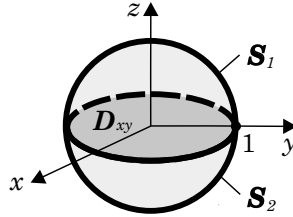
58. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma,$$

gde je

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Rešenje. Površ S je centralna sfera poluprečnika 1. Neka je S_1 deo sfere S za $z \geq 0$, a S_2 deo za $z \leq 0$.



Kako je S zatvorena površ, nijedno od projektovanja na koordinatne ravni nije bijekcija (3° iz Napomene 4.3.2). Zato S posmatramo kao $S = S_1 \cup S_2$, pri čemu se delovi S_1, S_2 bijektivno projektuju na xy -ravan ($z = 0$) u krug

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$$

i imaju jednačine

$$\begin{aligned} S_1: z &= z_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad (x, y) \in D_{xy}, \\ S_2: z &= z_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad (x, y) \in D_{xy}. \end{aligned}$$

Određujući $p_i = \partial z_i / \partial x$, $q_i = \partial z_i / \partial y$ ($i = 1, 2$), nalazimo

$$1 + p_i^2 + q_i^2 = \frac{1}{1 - x^2 - y^2},$$

pa je

$$I_i = \iint_{S_i} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} .$$

Uvođenjem polarnih koordinata r, φ u xy -ravni, oblast D_{xy} prelazi u

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i sledi

$$I_i = \iint_{D_{xy}^*} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr = -\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} d(1 - r^2) = 2\pi ,$$

dakle

$$I = I_1 + I_2 = 4\pi .$$

Slično je i rešavanje zadatka projektovanjem S na ostale koordinatne ravni.

Zadatak može da se reši i jednostavnije. Kako je podintegralna funkcija $x^2 + y^2 + z^2$ definisana na S , to mora da važi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 ,$$

pa je

$$I = \iint_S d\sigma = s ,$$

gde je s površina sfere S . Primenom dobro poznate formule

$$s = 4R^2\pi$$

za određivanje površine sfere poluprečnika R , u konkretnom slučaju $R = 1$ sledi rezultat.

59. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S x d\sigma ,$$

gde je S deo cilindrične površi

$$S_1 : \quad y = x^2 + 1$$

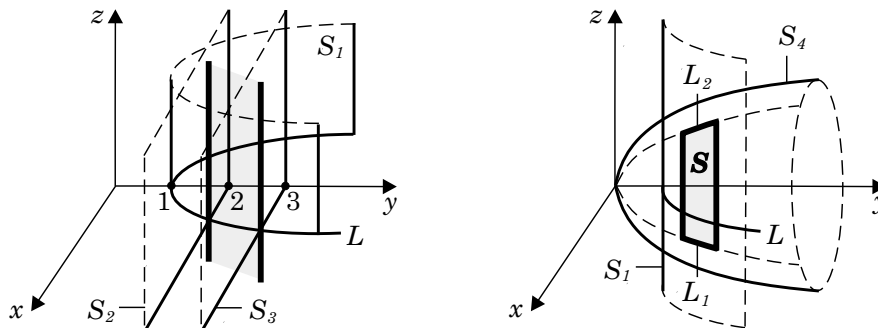
između površi

$$S_2 : \quad y = 2 , \quad S_3 : \quad y = 3 , \quad S_4 : \quad y = x^2 + z^2$$

za $x \geq 0$.

Rešenje. Cilindrična površ ima za direktrisu parabolu L u xy -ravni i izvodnice paralelne z -osi (prva slika). Površ S_2, S_3 su ravni paralelne zx -ravni i za $x \geq 0$ na S_1 isecaju "beskonačnu traku", osenčenu na prvoj slici. Površ S_4 je paraboloid sa y -osom

kao osovinom, koji tu traku seče duž krivih L_1 , L_2 i sa nje iseca konačni deo S (druga slika).



Pošto je S deo cilindrične površi čije su izvodnice paralelne z -osi, S mora da se projektuje na yz ili xz -ravan iz razloga navedenog u Zadatku 57. Oba projektovanja su bijekcije (2° iz Napomene 4.3.2). Neka je D_{yz} projekcija površi S na yz -ravan ($x = 0$). Eliminacijom x iz jednačina površi S_1 i S_4 dobijaju se jednačine projekcija L_{1yz} , L_{2yz} krivih L_1 i L_2 ,

$$L_{1yz}: z = -1, x = 0, \quad L_{2yz}: z = 1, x = 0.$$

Takođe, tačke sa površi S i njihove projekcije iz D_{yz} imaju istu y -koordinatu, pa je $2 \leq y \leq 3$ i opis projekcije D_{yz} glasi

$$D_{yz}: 2 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 1.$$

Kako je $S \subset S_1$ za $x \geq 0$ i kako se projektovanje vrši na yz -ravan, jednačinu površi S zapisujemo u obliku

$$S: x = x(y, z) = \sqrt{y-1}; \quad (y, z) \in D_{yz}.$$

Nalazeći

$$p = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, \quad q = \frac{\partial x}{\partial z} = 0; \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{4y-3}{4(y-1)},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{yz}} x(y, z) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dydz = \frac{1}{2} \iint_{D_{yz}} \sqrt{4y-3} \, dydz \\ &= \frac{1}{2} \int_2^3 \sqrt{4y-3} \, dy \int_{-1}^1 dz = \int_2^3 \sqrt{4y-3} \, dy. \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$4y-3 = t^2,$$

za koju je $t = \sqrt{5}$ kad je $y = 2$, $t = 3$ kad je $y = 3$ i $dy = t \, dt/2$, pa je

$$I = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{5}}^3 t^2 \, dt = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{6}.$$

U slučaju projektovanja površi S na zx -ravan za projekciju se dobija

$$D_{zx} : \quad -1 \leq z \leq 1, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{2},$$

pri čemu se granice promenljive x određuju iz jednačine površi S_1 za $y = 2$ i $y = 3$, a granice za z eliminacijom y iz jednačina površi S_1 i S_4 . Odgovarajući dvojni integral po oblasti D_{zx} se takođe jednostavno rešava.

60. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S (1 + x^2 + y^2)^{3/2} d\sigma,$$

gde je S deo površi

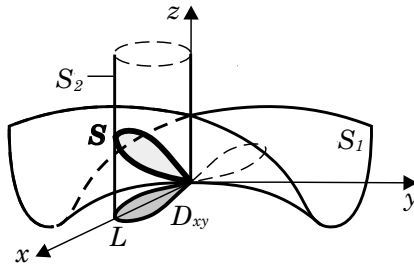
$$S_1 : \quad z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

koji iseca cilindrična površ

$$S_2 : \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

za $x \geq 0$ i $a > 0$.

Rešenje. Površ S_1 je *hiperbolički paraboloid* ([4], str. 205–206). Izvodnice cilindrične površi S_2 su paralelne z -osi, a direktrisa L je deo lemniskate (Zadatak 6) za $x \geq 0$.



Projektovanje površi S na xy -ravan je bijekcija. Pri tome je projekcija D_{xy} ograničena sa L , a S ima jednačinu

$$S : \quad z = z(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}; \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Određujući

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -y; \quad 1 + p^2 + q^2 = 1 + x^2 + y^2,$$

integral I postaje

$$I = \iint_{D_{xy}} (1 + x^2 + y^2)^{3/2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dxdy = \iint_{D_{xy}} (1 + x^2 + y^2)^2 \, dxdy.$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u xy -ravni i koristeći zaključke iz Zadatka 6, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

i za integral I se dobija

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{xy}^*} r(1+r^2)^2 dr d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r(1+r^2)^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} (1+r^2)^2 d(1+r^2) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} (a^6 \cos^3 2\varphi + 3a^2 \cos 2\varphi + 3a^4 \cos^2 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{6} a^6 \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 2\varphi) d(\sin 2\varphi) + \frac{1}{2} a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} a^4 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{9} a^6 + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{8} a^4 \pi = \frac{1}{72} a^2 (8a^4 + 9a^2 \pi + 36) . \end{aligned}$$

Površ S se bijektivno projektuje i na yz -ravan, ali je projekciju teško prepoznati i opisati (2° iz Napomene 4.3.2).

61. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) z d\sigma ,$$

gde je S deo sfere

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

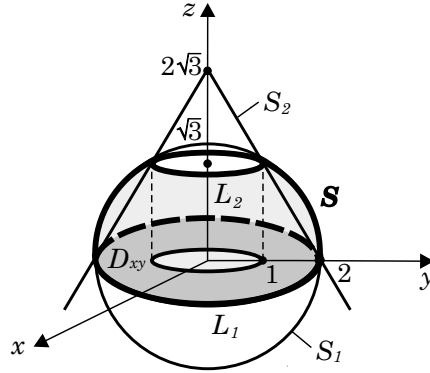
koji odseca konus

$$S_2 : \quad z = 2\sqrt{3} - \sqrt{3(x^2 + y^2)} .$$

Rešenje. Površ S_1 je centralna sfera poluprečnika 2, a S_2 je konus sa z -osom kao osovinom, koji z -osu seče u tački $(0, 0, 2\sqrt{3})$. Površ S_1 i S_2 seku xy -ravan ($z = 0$) po istoj kružnici

$$L_1 : \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0 ,$$

pa je L_1 jedna presečna kriva za S_1 i S_2 . Ako je L_2 druga presečna kriva, površ S je sferni prsten između krivih L_1 i L_2 .



Jednačinu krive L_2 nalazimo slično kao u Zadatku 55. Zamenom $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ iz jednačine za S_1 u jednačinu za S_2 i kvadriranjem sledi $z^2 - \sqrt{3}z = 0$, odakle je $z_1 = 0$ i $z_2 = \sqrt{3}$. Za $z_1 = 0$ je već određena presečna kriva L_1 . Za $z_2 = \sqrt{3}$ jednačine površi S_1 i S_2 postaju $x^2 + y^2 = 1$, pa je L_2 kružnica

$$L_2 : \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = \sqrt{3}.$$

Kružnica L_1 i njena projekcija na xy -ravan se poklapaju, dok je projekcija kružnice L_2 data sa

$$L_{2xy} : \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0.$$

Zato se S bijektivno projektuje na kružni prsten D_{xy} , koji je dvostruko povezana oblast sa spoljnom konturom L_1 i unutrašnjom L_{2xy} . Ostala projektovanja nisu bijekcije (1° iz Napomene 4.3.2). S obzirom na to što je površ $S \subset S_1$ iznad xy -ravni ($z \geq 0$), njena jednačina je

$$S : \quad z = z(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Kako je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}};$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{4}{4 - x^2 - y^2},$$

to je

$$I = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) z(x, y) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \, dx dy.$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u xy -ravni, D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^* : \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i sledi

$$I = 2 \iint_{D_{xy}^*} r^3 \, dr d\varphi = 2 \int_1^2 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 15\pi.$$

Sferni prsten S je primer dvostrane površi za koju je u Definiciji 1.1.19 $D_{uv} = D_{xy}$ dvostruko povezana oblast. Zato površ S ima dve granične konture L_1 i L_2 .

62. Izračunati površinski integral I vrste

$$I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3y^2 + 5z^2 + 1}} d\sigma ,$$

gde je S deo površi

$$S_1 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$$

između xy -koordinatne ravni i ravni

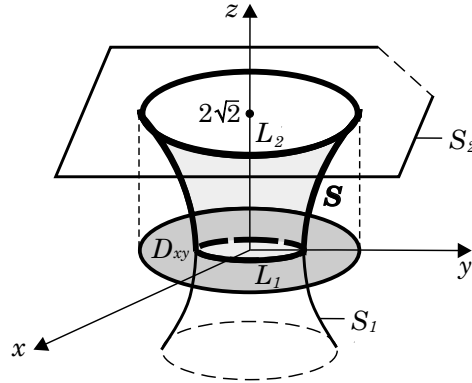
$$S_2 : \quad z = 2\sqrt{2} .$$

Rešenje. Površ S_1 je *jednograni hiperboloid* ([4], str. 202–203), a S_2 je ravan paralelna xy -ravni. Površ S_1 seče xy -ravan ($z = 0$) duž elipse

$$L_1 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 , \quad z = 0 ,$$

a ravan S_2 duž krive

$$L_2 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 9 , \quad z = 2\sqrt{2} .$$



Elipsa L_1 se poklapa sa svojom projekcijom na xy -ravan. Zbog paralelnosti S_2 sa xy -ravni, kriva L_2 i njena projekcija L_{2xy} su takođe elipse, tj.

$$L_{2xy} : \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 , \quad z = 0 .$$

Projektovanje površi S na xy -ravan je bijektivno, dok ostala projektovanja to nisu (1° iz Napomene 4.3.2). Projekcija D_{xy} površi S je dvostruko povezana oblast sa spoljnom konturom L_{2xy} i unutrašnjom L_1 . Za površ $S \subset S_1$ je $z \geq 0$, pa je

$$S : \quad z = z(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 4y^2 - 4} ; \quad (x, y) \in D_{xy} .$$

Kako je

$$\begin{aligned} 3y^2 + 5z^2(x, y) + 1 &= 3y^2 + \frac{5}{4}(x^2 + 4y^2 - 4) + 1 = \frac{1}{4}(5x^2 + 32y^2 - 16) ; \\ p = \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}} , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}} ; \\ 1 + p^2 + q^2 &= \frac{5x^2 + 32y^2 - 16}{4(x^2 + 4y^2 - 4)} , \end{aligned}$$

to je

$$I = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{3y^2 + 5z^2(x, y) + 1}} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}} .$$

Uvodeći uopštene polarne koordinate sa

$$x = 2r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi ,$$

za koje je $|J| = 2r$, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^* : \quad 1 \leq r \leq 3 , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi ,$$

a integral I postaje

$$I = \iint_{D_{xy}^*} \frac{2r}{\sqrt{4r^2 - 4}} \, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \, dr = 2\pi \int_1^3 \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \, dr = 4\sqrt{2} \pi .$$

Komentar iz Zadatka 61 važi i u ovom slučaju.

Površinski integrali po koordinatama (II vrste)

Ako je

$$S : \quad z = z(x, y) ; \quad (x, y) \in D_{xy} ,$$

tada je

$$\iint_{S^+} R(x, y, z) \, dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dxdy .$$

63. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

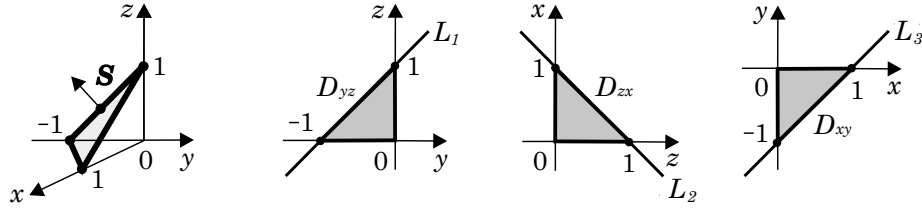
$$I = \iiint_S y \, dy dz + x \, dz dx + z \, dxdy ,$$

gde je S ograničeni deo ravni

$$S_1 : \quad x - y + z = 1$$

koji isecaju koordinatne ravni. Integracija se vrši po strani površi S vidljivoj sa pozitivnog dela z -ose.

Rešenje. Ravan S_1 je zadata u segmentnom obliku (Primer 3.3.2) iz kog se očitavaju njene presečne tačke $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sa koordinatnim osama. Zato je deo S u IV oktantu, za koji je $x, z \geq 0, y \leq 0$. Na stranu površi S po kojoj se vrši integracija je postavljen normalni vektor (prva slika). Projekcije D_{yz} , D_{zx} , D_{xy} dela S redom na yz , zx i xy -ravan su prikazane na ostalim slikama.



Potpuni površinski integral I rastavljamo na tri površinska integrala po koordinatama

$$I = I_1 + I_2 + I_3 ,$$

gde je

$$I_1 = \iint_S y \, dydz , \quad I_2 = \iint_S x \, dzdx , \quad I_3 = \iint_S z \, dxdy .$$

Svaki od ovih integrala rešavamo zasebno.

Integral I_1 je površinski po koordinatama y, z , pa S treba projektovati na yz -ravan. Ovo projektovanje je bijekcija. Ravan S_1 seče yz -ravan ($x = 0$) duž prave

$$L_1 : \quad z = y + 1 , \quad x = 0 .$$

Zato se S projektuje na

$$D_{yz} : \quad -1 \leq y \leq 0 , \quad 0 \leq z \leq y + 1 .$$

S obzirom na prethodno projektovanje, jednačinu površi S zapisujemo u obliku

$$S : \quad x = x(y, z) = y - z + 1 ; \quad (y, z) \in D_{yz} .$$

Integracija se vrši po strani koja se vidi sa pozitivnog dela x -ose, pa je to pozitivno orijentisana strana S^+ u odnosu na bijekciju $D_{yz} \leftrightarrow S$.

Integral I_1 postaje dvojni

$$I_1 = \iint_{S^+} y \, dydz = \iint_{D_{yz}} y \, dydz$$

i, prema opisu oblasti D_{yz} , važi

$$I_1 = \int_{-1}^0 y \, dy \int_0^{y+1} dz = \int_{-1}^0 y(y+1) \, dy = -\frac{1}{6} .$$

Integral I_2 je površinski po koordinatama z, x , pa S projektujemo na zx -ravan, pri čemu je projektovanje bijekcija. Ravan S_1 seče zx -ravan ($y = 0$) duž prave

$$L_2 : \quad z = -x + 1, \quad y = 0.$$

Zato je projekcija površi S na zx -ravan oblast

$$D_{zx} : \quad 0 \leq z \leq -x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

a odgovarajući oblik jednačine površi S je

$$S : \quad y = y(z, x) = x + z - 1; \quad (z, x) \in D_{zx}.$$

Integracija se vrši po strani koja se vidi sa negativnog dela y -ose, pa je to negativno orijentisana strana S^- u odnosu na bijekciju $D_{zx} \leftrightarrow S$.

Integral I_2 postaje dvojni

$$I_2 = \iint_{S^-} x \, dz \, dx = - \iint_{D_{zx}} x \, dz \, dx$$

i, prema opisu oblasti D_{zx} , sledi

$$I_2 = - \int_0^1 x \, dx \int_0^{-x+1} dz = - \int_0^1 x(-x+1) \, dx = -\frac{1}{6}.$$

Integral I_3 je po koordinatama x, y , pa S treba projektovati na xy -ravan. I ovo projektovanje je bijekcija. Kako S_1 seče xy -ravan ($z = 0$) duž prave

$$L_3 : \quad y = x - 1, \quad z = 0,$$

projekcija površi S na xy -ravan je

$$D_{xy} : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 0.$$

Odgovarajući oblik jednačine površi S je

$$S : \quad z = z(x, y) = -x + y + 1; \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Integracija se vrši po pozitivno orijentisanoj strani S^+ u odnosu na bijekciju $D_{xy} \leftrightarrow S$.

Integral I_3 prelazi u dvojni

$$I_3 = \iint_{S^+} z \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} z(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} (-x + y + 1) \, dx \, dy.$$

Prema opisu oblasti D_{xy} , dalje je

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (-x + y + 1) \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 \, dx = \frac{1}{6}.$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

64. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

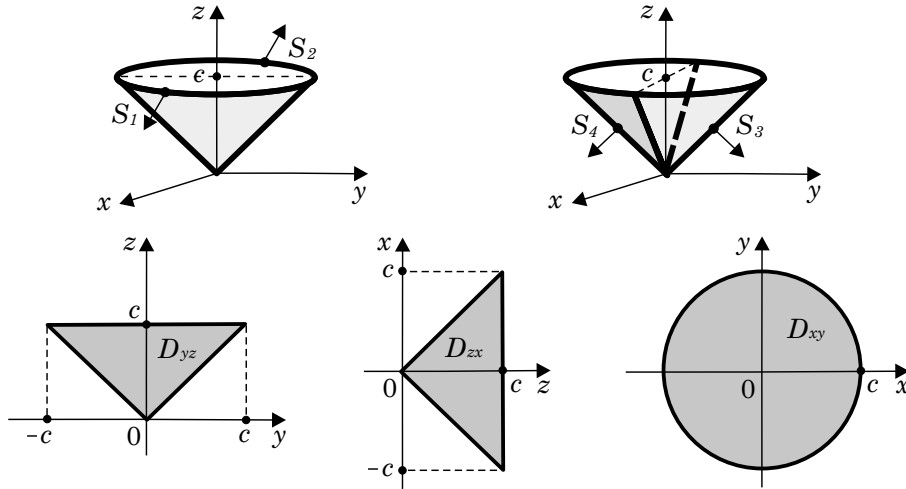
$$I = \iint_S x^2 dydz + y dzdx + z^2 dxdy ,$$

gde je

$$S : z^2 = x^2 + y^2$$

konus za $0 \leq z \leq c$. Integracija se vrši po strani površi S koja se vidi sa negativnog dela z -ose.

Rešenje. Konus S ima z -osu za osovinu i nalazi se iznad xy -ravni ($z \geq 0$). Neka je $S = S_1 \cup S_2$, gde je S_1 deo za $x \geq 0$, a S_2 deo za $x \leq 0$ (prva slika). Takođe, neka je $S = S_3 \cup S_4$, gde je S_3 deo za $y \geq 0$, a S_4 deo za $y \leq 0$ (druga slika). Na strane delova koje odgovaraju strani integracije površi S su postavljeni normalni vektori. Ostale slike prikazuju projekcije D_{yz} , D_{zx} , D_{xy} površi S na yz , zx i xy -ravan redom.



Potpuni površinski integral I rastavljamo na površinske integrale po koordinatama

$$I_1 = \iint_S x^2 dydz , I_2 = \iint_S y dzdx , I_3 = \iint_S z^2 dxdy$$

i svaki od njih rešavamo zasebno.

Integral I_1 je po koordinatama y, z , pa S treba projektovati na yz -ravan. Kako ovo projektovanje nije bijekcija, S rastavljamo na bijektivne delove S_1 i S_2 . Površ S seče yz -ravan ($x = 0$) po krivoj

$$L_1 : z = |y| , x = 0 .$$

Za $z = c$ iz $z = |y|$ je $|y| = c$ i $y = \pm c$. Zato se S_1 i S_2 projektuju na yz -ravan u oblast

$$D_{yz} : -c \leq y \leq c , |y| \leq z \leq c .$$

S obzirom na prethodno projektovanje, jednačine površi S_1 i S_2 zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} S_1 : \quad x &= x_1(y, z) = \sqrt{z^2 - y^2} ; \quad (y, z) \in D_{yz} , \\ S_2 : \quad x &= x_2(y, z) = -\sqrt{z^2 - y^2} ; \quad (y, z) \in D_{yz} . \end{aligned}$$

Integracija se vrši po strani površi S_1 koja se vidi sa pozitivnog dela x -ose, pa je to pozitivno orijentisana strana S_1^+ u odnosu na bijekciju $D_{yz} \leftrightarrow S_1$. Takođe, strana površi S_2 po kojoj se vrši integracija se vidi sa negativnog dela x -ose, pa se radi o negativno orijentisanoj strani S_2^- u odnosu na bijekciju $D_{yz} \leftrightarrow S_2$.

Integral I_1 postaje

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1^+} x^2 dydz + \iint_{S_2^-} x^2 dydz = \iint_{D_{yz}} x_1^2(y, z) dydz - \iint_{D_{yz}} x_2^2(y, z) dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} (z^2 - y^2) dydz - \iint_{D_{yz}} (z^2 - y^2) dydz = 0 . \end{aligned}$$

Integral I_2 je po koordinatama z, x , pa S projektujemo na zx -ravan. Ni ovo projektovanje nije bijekcija, ali su S_3 i S_4 bijektivni delovi. Analogno prethodnom slučaju, površ S seče zx -ravan ($y = 0$) po krivoj

$$L_2 : \quad z = |x| , \quad y = 0 ,$$

odakle je $x = \pm c$ za $z = c$. Dakle, projekcije površi S_3 i S_4 na zx -ravan su ista oblast

$$D_{zx} : \quad |x| \leq z \leq c , \quad -c \leq x \leq c ,$$

a jednačine ovih površi u odgovarajućem obliku su

$$\begin{aligned} S_3 : \quad y &= y_3(z, x) = \sqrt{z^2 - x^2} ; \quad (z, x) \in D_{zx} , \\ S_4 : \quad y &= y_4(z, x) = -\sqrt{z^2 - x^2} ; \quad (z, x) \in D_{zx} . \end{aligned}$$

Integracija se vrši po pozitivno orijentisanoj strani S_3^+ površi S_3 u odnosu na bijekciju $D_{zx} \leftrightarrow S_3$ jer se ona vidi sa pozitivnog dela y -ose i po negativno orijentisanoj strani S_4^- površi S_4 u odnosu na bijekciju $D_{zx} \leftrightarrow S_4$ jer se ta strana vidi sa negativnog dela y -ose.

Integral I_2 postaje

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_3^+} y dzdx + \iint_{S_4^-} y dzdx = \iint_{D_{zx}} y_3(z, x) dzdx - \iint_{D_{zx}} y_4(z, x) dzdx \\ &= \iint_{D_{zx}} \sqrt{z^2 - x^2} dzdx - \iint_{D_{zx}} -\sqrt{z^2 - x^2} dzdx = 2 \iint_{D_{zx}} \sqrt{z^2 - x^2} dzdx . \end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg rešavanja dobijenog dvojnog integrala, a imajući u vidu da je $z = |x| = x$ za $x \in [0, c]$ i $z = |x| = -x$ za $x \in [-c, 0]$, oblast D_{zx} opisujemo drugačije sa

$$D_{zx} : \quad 0 \leq z \leq c , \quad -z \leq x \leq z .$$

Zato je

$$I_2 = 2 \int_0^c dz \int_{-z}^z \sqrt{z^2 - x^2} dx = 4 \int_0^c dz \int_0^z \sqrt{z^2 - x^2} dx ,$$

pri čemu je iskorišćena parnost funkcije $\sqrt{z^2 - x^2}$ po x . Unutrašnji integral se rešava smenom

$$x = z \sin t ,$$

za koju je $t = 0$ kad je $x = 0$ i $t = \pi/2$ kad je $x = z$. Dobija se

$$I_2 = 4 \int_0^c dz \int_0^{\pi/2} |z \cos t| z \cos t dt = 4 \int_0^c z^2 dz \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{3} c^3 \pi .$$

Integral I_3 je po koordinatama x, y , pa S projektujemo na xy -ravan. Ovo projektovanje jeste bijekcija. Ravan $z = c$ je paralelna xy -ravni i seče S po kružnici

$$L : \quad x^2 + y^2 = c^2 , \quad z = c ,$$

čija je projekcija na xy -ravan

$$L_{xy} : \quad x^2 + y^2 = c^2 , \quad z = 0 ,$$

pa je projekcija površi S krug

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \leq c^2 .$$

Odgovarajući oblik jednačine površi S glasi

$$S : \quad z = z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} ; \quad (x, y) \in D_{xy} .$$

Integracija se vrši po negativno orijentisanoj strani S^- površi S u odnosu na bijekciju $D_{xy} \leftrightarrow S$.

Integral I_3 postaje dvojni

$$I_3 = \iint_{S^-} z^2 dx dy = - \iint_{D_{xy}} z^2(x, y) dx dy = - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy .$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u xy -ravni, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq c , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i dobija se

$$I_3 = - \iint_{D_{xy}^*} r^3 dr d\varphi = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c r^3 dr = -\frac{1}{2} c^4 \pi .$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3} c^3 \pi - \frac{1}{2} c^4 \pi = \frac{1}{6} (2 - 3c) c^3 \pi .$$

65. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

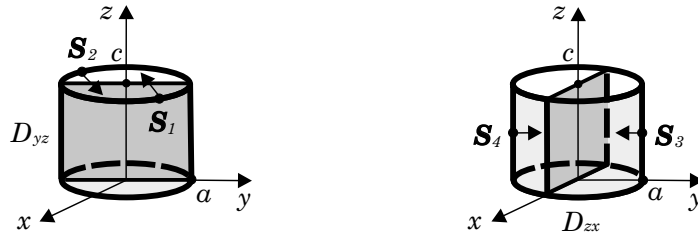
$$I = \iint_S x dy dz + y dz dx + R(x, y, z) dx dy ,$$

gde je

$$S : x^2 + y^2 = a^2$$

cilindrična površ za $0 \leq z \leq c$ i $a > 0$, a $R(x, y, z)$ je proizvoljna funkcija neprekidna na S . Integracija se vrši po "unutrašnjoj" strani površi S .

Rešenje. Površ S nije zatvorena, pa termin "unutrašnja" strana nije adekvatan i treba ga prihvatiti intuitivno. Bolji opis strane integracije ne može da se da jer S ne može bijektivno da se projektuje ni na jednu koordinatnu ravan. Neka su S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) delovi površi S redom za: $x \geq 0, x \leq 0, y \geq 0, y \leq 0$. Na strane delova koje odgovaraju strani integracije površi S su postavljeni normalni vektori.



Delovi S_1, S_2 se bijektivno projektuju na yz -ravan ($x = 0$), a delovi S_3, S_4 na zx -ravan ($y = 0$). Projekcije su pravougaone oblasti

$$D_{yz} : -a \leq y \leq a, 0 \leq z \leq c, \quad D_{zx} : 0 \leq z \leq c, -a \leq x \leq a,$$

a potrebne jednačine ovih delova su

$$\begin{aligned} S_{1,2} : x &= x_{1,2}(y, z) = \pm \sqrt{a^2 - y^2}; \quad (y, z) \in D_{yz}, \\ S_{3,4} : y &= y_{3,4}(z, x) = \pm \sqrt{a^2 - x^2}; \quad (z, x) \in D_{zx}. \end{aligned}$$

Orijentacije strana integracije su S_1^-, S_2^+ u odnosu na $D_{yz} \leftrightarrow S_1, D_{yz} \leftrightarrow S_2$ i S_3^-, S_4^+ u odnosu na $D_{zx} \leftrightarrow S_3, D_{zx} \leftrightarrow S_4$.

Za integral po koordinatama y, z se dobija

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1^-} x \, dydz + \iint_{S_2^+} x \, dydz = - \iint_{D_{yz}} x_1(y, z) \, dydz + \iint_{D_{yz}} x_2(y, z) \, dydz \\ &= -2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2} \, dydz = -2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \, dy \int_0^c dz \\ &= -4c \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \, dy = -4a^2 c \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = -a^2 c \pi, \end{aligned}$$

pri čemu je korišćena smena $y = a \sin t$.

Integral po koordinatama z, x se rešava slično kao I_1 i dobija se

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_3^-} y \, dzdx + \iint_{S_4^+} y \, dzdx = - \iint_{D_{zx}} y_3(z, x) \, dzdx + \iint_{D_{zx}} y_4(z, x) \, dzdx \\ &= -2 \iint_{D_{zx}} \sqrt{a^2 - x^2} \, dzdx = -a^2 c \pi. \end{aligned}$$

Površ S ima izvodnice paralelne z -osi, pa je bilo koji površinski integral po koordinatama x, y jednak nuli (osobina (4.2.4)), tj.

$$I_3 = \iint_S R(x, y, z) dx dy = 0 .$$

Vrednost integrala I je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -a^2 c\pi - a^2 c\pi + 0 = -2a^2 c\pi .$$

66. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

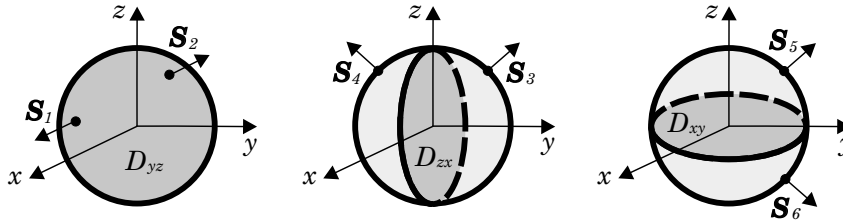
$$I = \iint_S \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

gde je

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

i $a > 0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Površ S je centralna sfera poluprečnika a . Sfera je zatvorena površ, pa ne može bijektivno da se projektuje ni na jednu od koordinatnih ravni. Neka su S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) delovi sfere S redom za: $x \geq 0, x \leq 0, y \geq 0, y \leq 0, z \geq 0, z \leq 0$. Na strane delova koje odgovaraju spoljnoj strani sfere su postavljeni normalni vektori.



Delovi S_1, S_2 se bijektivno projektuju na yz -ravan ($x = 0$), delovi S_3, S_4 na zx -ravan ($y = 0$) i S_5, S_6 na xy -ravan ($z = 0$). Projekcije su krugovi

$$D_{yz} : y^2 + z^2 \leq a^2 , \quad D_{zx} : z^2 + x^2 \leq a^2 , \quad D_{xy} : x^2 + y^2 \leq a^2 .$$

Jednačine delova su

$$\begin{aligned} S_{1,2} : x &= x_{1,2}(y, z) = \pm \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} ; & (y, z) &\in D_{yz} , \\ S_{3,4} : y &= y_{3,4}(z, x) = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} ; & (z, x) &\in D_{zx} , \\ S_{5,6} : z &= z_{5,6}(x, y) = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ; & (x, y) &\in D_{xy} . \end{aligned}$$

Orijentacije strana integracije u odnosu na odgovarajuća projektovanja su: $S_1^+, S_2^-, S_3^+, S_4^-, S_5^+, S_6^-$.

Površinski integrali po koordinatama sada postaju dvojni

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_{S_1^+} \frac{x \, dydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \iint_{S_2^-} \frac{x \, dydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 &= \iint_{D_{yz}} \frac{x_1(y, z) \, dydz}{\sqrt{x_1^2(y, z) + y^2 + z^2}} - \iint_{D_{yz}} \frac{x_2(y, z) \, dydz}{\sqrt{x_2^2(y, z) + y^2 + z^2}} \\
 &= \frac{1}{a} \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \, dydz - \frac{1}{a} \iint_{D_{yz}} -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \, dydz \\
 &= \frac{2}{a} \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \, dydz
 \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iint_{S_3^+} \frac{y \, dzdx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \iint_{S_4^-} \frac{y \, dzdx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{a} \iint_{D_{zx}} \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \, dzdx , \\
 I_3 &= \iint_{S_5^+} \frac{z \, dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \iint_{S_6^-} \frac{z \, dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{a} \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dxdy .
 \end{aligned}$$

Imajući u vidu opise oblasti integracije i podintegralne funkcije u dobijenim dvojnim integralima, lako se uočava da je

$$I_1 = I_2 = I_3 .$$

Zato je dovoljno izračunati samo jedan od njih, npr. I_1 . Uvodeći polarne koordinate sa

$$y = r \cos \varphi , \quad z = r \sin \varphi ,$$

oblast D_{yz} prelazi u

$$D_{yz}^* : \quad 0 \leq r \leq a , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i sledi

$$I_1 = \frac{2}{a} \iint_{D_{yz}^*} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr d\varphi = \frac{2}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr = \frac{4}{3} a^2 \pi .$$

Integral I je zbir integrala po koordinatama

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3I_1 = 4a^2 \pi .$$

67. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S xy \, dydz + yz \, dzdx + xz \, dxdy ,$$

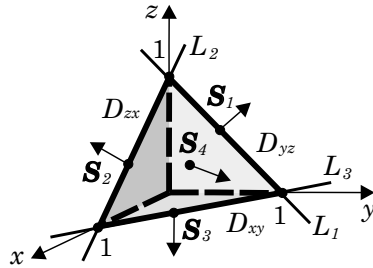
gde je $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ tetraedar sastavljen od delova S_i ($i = 1, 2, 3$) koordinatnih ravni koje iseca ravan

$$S_5 : \quad x + y + z = 1$$

za $x, y, z \geq 0$ i ograničenog dela S_4 ravni S_5 između koordinatnih ravni. Integracija se vrši po spoljnoj strani tetraedra S .

Rešenje. Prema tekstu zadatka, tetraedar S se nalazi u I oktantu. Neka su S_i ($i = 1, 2, 3$) delovi yz , zx i xy -koordinatne ravni redom. Na strane delova, koje odgovaraju spoljnoj strani tetraedra, postavljeni su normalni vektori. Ravan S_5 seče koordinatne ose u tačkama $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, a koordinatne ravni duž pravih

$$L_1: \quad z = -y + 1, \quad x = 0, \quad L_2: \quad x = -z + 1, \quad y = 0, \quad L_3: \quad y = -x + 1, \quad z = 0.$$



Potpuni površinski integral I rastavljamo na integrale po koordinatama

$$I_1 = \iint_S xy \, dydz, \quad I_2 = \iint_S yz \, dzdx, \quad I_3 = \iint_S xz \, dx dy.$$

Kako se površ S sastoji od delova S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sa različitom parametrizacijom, svaki od prethodnih integrala rastavljamo na integrale po delovima i dobijamo

$$I_1 = \sum_{i=1}^4 I_{1i}, \quad I_2 = \sum_{i=1}^4 I_{2i}, \quad I_3 = \sum_{i=1}^4 I_{3i},$$

gde je

$$I_{1i} = \iint_{S_i} xy \, dydz, \quad I_{2i} = \iint_{S_i} yz \, dzdx, \quad I_{3i} = \iint_{S_i} xz \, dx dy.$$

Površ S_1 može da se tretira dvojako, kao cilindrična površ sa direktrisom na z -osi i izvodnicama paralelnim y -osi ili kao cilindrična površ sa direktrisom na y -osi i izvodnicama paralelnim z -osi. Zato su površinski integrali po koordinatama z , x , odnosno x , y , po površi S_1 i sa proizvoljnom podintegralnom funkcijom jednaki nuli (osobina (4.2.4)). Konkretno, važi

$$I_{21} = I_{31} = 0.$$

Analognim razmatranjem u slučaju površi S_2 i S_3 se zaključuje

$$I_{12} = I_{32} = 0, \quad I_{13} = I_{23} = 0.$$

Površ S_i ($i = 1, 2, 3$) se poklapaju sa svojim projekcijama na odgovarajuće koordinatne ravni. Opis projekcija ne navodimo jer iz jednačina ovih površi

$$S_1: \quad x = 0, \quad S_2: \quad y = 0, \quad S_3: \quad z = 0$$

neposredno sledi

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = 0 .$$

Ostaje još da se izračunaju integrali I_{14} , I_{24} i I_{34} po površi S_4 . Površ S_4 se bijektivno projektuje na sve koordinatne ravni. Opis njenih projekcija glasi

$$\begin{aligned} D_{yz} : \quad & 0 \leq y \leq 1 , \quad 0 \leq z \leq -y + 1 , \\ D_{zx} : \quad & 0 \leq z \leq 1 , \quad 0 \leq x \leq -z + 1 , \\ D_{xy} : \quad & 0 \leq x \leq 1 , \quad 0 \leq y \leq -x + 1 , \end{aligned}$$

a potrebni oblici njene jednačine su

$$\begin{aligned} S_4 : \quad & x = x(y, z) = 1 - y - z ; \quad (y, z) \in D_{yz} , \\ S_4 : \quad & y = y(z, x) = 1 - x - z ; \quad (z, x) \in D_{zx} , \\ S_4 : \quad & z = z(x, y) = 1 - x - y ; \quad (x, y) \in D_{xy} . \end{aligned}$$

Spoljnoj strani tetraedra odgovara strana površi S_4 koja se vidi sa pozitivnih delova svih koordinatnih osa, pa je to pozitivno orijentisana strana S_4^+ u odnosu na svaku od bijekcija $D_{yz} \leftrightarrow S_4$, $D_{zx} \leftrightarrow S_4$, $D_{xy} \leftrightarrow S_4$.

Za integrale se dobija

$$\begin{aligned} I_1 = I_{14} &= \iint_{S_4^+} xy \, dydz = \iint_{D_{yz}} x(y, z)y \, dydz = \iint_{D_{yz}} (1 - y - z)y \, dydz \\ &= \int_0^1 y \, dy \int_0^{-y+1} (1 - y - z) \, dz = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned} I_2 = I_{24} &= \iint_{S_4^+} yz \, dzdx = \iint_{D_{zx}} y(z, x)z \, dzdx = \iint_{D_{zx}} (1 - x - z)z \, dzdx = \frac{1}{24} , \\ I_3 = I_{34} &= \iint_{S_4^+} xz \, dxdy = \iint_{D_{xy}} xz(x, y) \, dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1 - x - y) \, dxdy = \frac{1}{24} . \end{aligned}$$

Dakle, integral I je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} .$$

Veza između površinskih integrala I i II vrste

Ako su α , β , γ uglovi između normalnog vektora na stranu integracije površi i pozitivnih delova x , y i z -koordinatne ose redom, tada je

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) \, dydz + Q(x, y, z) \, dzdx + R(x, y, z) \, dxdy \\ &= \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] \, d\sigma . \end{aligned}$$

68. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

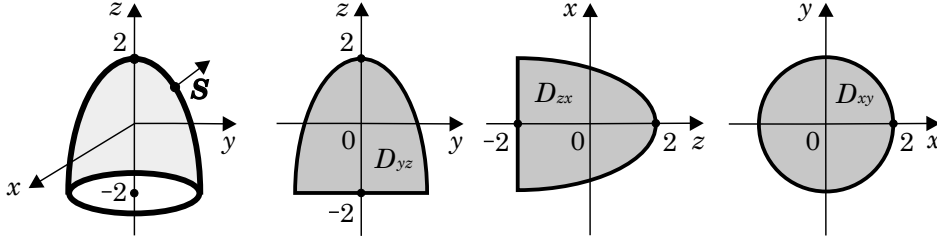
$$I = \iint_S x \, dydz + x \, dzdx + (1+z) \, dxdy ,$$

gde je

$$S : z = 2 - (x^2 + y^2)$$

paraboloid za $-2 \leq z \leq 2$. Integracija se vrši po strani površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z -ose.

Rešenje. Paraboloid S ima z -osu kao osovinu i nalazi se iznad ravni $z = -2$ ($z \geq -2$). Na stranu površi S po kojoj se vrši integracija je postavljen normalni vektor (prva slika). Na ostalim slikama su prikazane projekcije D_{yz} , D_{zx} , D_{xy} površi S na yz , zx i xy -ravan redom. Neka su S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) delovi paraboloidea S redom za: $x \geq 0$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 0$.



Zadatak rešavamo na dva načina, direktno i prelaskom na površinski integral I vrste.

Direktno rešavanje je postupak koji smo dosada primenjivali, a sastoji se u rešavanju pojedinačnih površinskih integrala po koordinatama

$$I_1 = \iint_S x \, dydz , \quad I_2 = \iint_S x \, dzdx , \quad I_3 = \iint_S (1+z) \, dxdy .$$

Delovi S_1 i S_2 se bijektivno projektuju na yz -ravan u oblast D_{yz} . Kako S seče yz -ravan ($x = 0$) po paraboli

$$L_1 : z = 2 - y^2 , \quad x = 0 ,$$

za $z = -2$ je $y^2 = 4$ i $y = \pm 2$, pa je

$$D_{yz} : -2 \leq y \leq 2 , \quad -2 \leq z \leq 2 - y^2 .$$

Odgovarajući oblik jednačina je

$$S_{1,2} : x = x_{1,2}(y, z) = \pm \sqrt{2 - y^2 - z} ; \quad (y, z) \in D_{yz} ,$$

a integracija se vrši po stranama S_1^+ , S_2^- u odnosu na $D_{yz} \leftrightarrow S_1$, $D_{yz} \leftrightarrow S_2$.

Integral I_1 postaje dvojni

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1^+} x \, dydz + \iint_{S_2^-} x \, dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} x_1(y, z) \, dydz - \iint_{D_{yz}} x_2(y, z) \, dydz = 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{2 - y^2 - z} \, dydz . \end{aligned}$$

Prema opisu oblasti D_{yz} , dalje je

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_{-2}^2 dy \int_{-2}^{2-y^2} \sqrt{2-y^2-z} dz = -2 \int_{-2}^2 dy \int_{-2}^{2-y^2} \sqrt{2-y^2-z} d(2-y^2-z) \\ &= -\frac{4}{3} \int_{-2}^2 (2-y^2-z)^{3/2} \Big|_{z=-2}^{z=2-y^2} dy = \frac{8}{3} \int_0^2 (4-y^2)^{3/2} dy = \frac{128}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt \\ &= \frac{128}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) dt = 8\pi . \end{aligned}$$

Pri rešavanju određenih integrala je korišćena smena $y = 2 \sin t$, kao i formula izvedena u Zadatku 10.

Delovi S_3 i S_4 se bijektivno projektuju na zx -ravan u oblast D_{zx} . Kako S seče zx -ravan ($y = 0$) po paraboli

$$L_2 : \quad z = 2 - x^2, \quad y = 0,$$

za $z = -2$ je $x = \pm 2$, pa je

$$D_{zx} : \quad -2 \leq z \leq 2 - x^2, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Odgovarajući oblik jednačina je

$$S_{3,4} : \quad y = y_{3,4}(z, x) = \pm \sqrt{2 - x^2 - z}; \quad (z, x) \in D_{zx},$$

a integracija se vrši po stranama S_3^+ , S_4^- u odnosu na $D_{zx} \leftrightarrow S_3$, $D_{zx} \leftrightarrow S_4$.

Za integral I_2 se dobija

$$I_2 = \iint_{S_3^+} x dz dx + \iint_{S_4^-} x dz dx = \iint_{D_{zx}} x dz dx - \iint_{D_{zx}} x dz dx = 0.$$

Površ S se bijektivno projektuje na xy -ravan u oblast D_{xy} . Ravan $z = -2$ je paralelna xy -ravni i seče S po kružnici

$$L : \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = -2,$$

čija je projekcija na xy -ravan

$$L_{xy} : \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0,$$

pa je oblast D_{xy} krug

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Jednačina površi S u potrebnom obliku je

$$S : \quad z = z(x, y) = 2 - (x^2 + y^2); \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Integracija se vrši po strani S^+ u odnosu na $D_{xy} \leftrightarrow S$.

Za integral I_3 se dobija

$$I_3 = \iint_{S^+} (1+z) dx dy = \iint_{D_{xy}} [1+z(x, y)] dx dy = \iint_{D_{xy}} (3 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Uvođenjem polarnih koordinata r, φ u xy -ravni, D_{xy} prelazi u

$$D_{xy}^* : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i sledi

$$I_3 = \iint_{D_{xy}^*} r(3-r^2) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(3-r^2) dr = 4\pi.$$

Dakle, integral I ima vrednost

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 8\pi + 0 + 4\pi = 12\pi.$$

Drugi način rešavanja je zasnovan na vezi između površinskih integrala I i II vrste.

Već smo utvrdili da je projektovanje na xy -ravan jedina bijekcija $D_{xy} \leftrightarrow S$. Takođe, odredili smo projekciju D_{xy} i jednačinu površi S smo zapisali u odgovarajućem obliku. Normalni vektor na stranu integracije zaklapa oštar ugao γ sa pozitivnim delom z -ose, pa je $\cos \gamma > 0$ i važi

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos \beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Za posmatrani oblik jednačine površi je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -2x, q = \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Integral I postaje površinski I vrste, a zatim i dvojni

$$\begin{aligned} I &= \iint_S [x \cos \alpha + x \cos \beta + (1+z) \cos \gamma] d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} [-px - qx + 1 + z(x, y)] dxdy = \iint_{D_{xy}} (x^2 - y^2 + 2xy + 3) dxdy. \end{aligned}$$

Dvojni integral se rešava uvođenjem polarnih koordinata i korišćenjem već dobijenog opisa oblasti D_{xy}^* i sledi

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{xy}^*} [r^3(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + 3r] dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 [r^3(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + 3r] dr \\ &= \int_0^{2\pi} [4(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + 6] d\varphi = 12\pi. \end{aligned}$$

Vidimo da se zadatak mnogo jednostavnije rešava prelaskom na površinski integral I vrste jer je dovoljno projektovati površ samo na jednu koordinatnu ravan (Napomena 4.4.1). Ovde je to xy -ravan u odnosu na koju je projektovanje bijekcija (1° iz Napomene 4.3.2).

Analogno važi i za Zadatke 63–66, s tim što u Zadacima 65 i 66 površ ipak mora da se deli na bijektivne delove (3° iz Napomene 4.3.2), ali samo u odnosu na jedno od projektovanja.

69. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy ,$$

gde je $S = S_1 \cup S_2$ zatvorena površ, S_1 je manji deo sfere

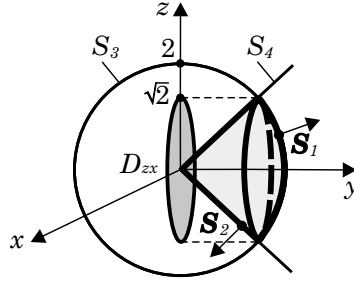
$$S_3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

koji iseca konus

$$S_4 : y = \sqrt{x^2 + z^2} ,$$

a S_2 deo konusa S_4 koji je unutar sfere S_3 . Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Sfera S_3 je centralna poluprečnika 2, a konus S_4 ima y -osu za osovinu. Na strane površi S_1 i S_2 , po kojima se vrši integracija, postavljeni su normalni vektori.



Površ S_1 i S_2 se bijektivno projektuju jedino na zx -ravan ($y = 0$). Projekciju L_{zx} presečne krive površi S_3 i S_4 nalazimo slično kao u Zadatku 55 i dobijamo

$$L_{zx} : x^2 + z^2 = 2 , y = 0 ,$$

pa je zajednička projekcija za S_1 i S_2 krug u zx -ravni

$$D_{zx} : x^2 + z^2 \leq 2 .$$

Kako je $y \geq 0$ za površ S , odgovarajuće jednačine za S_1 i S_2 su

$$S_1 : y = y_1(z, x) = \sqrt{4 - x^2 - z^2} ; \quad (z, x) \in D_{zx} ,$$

$$S_2 : y = y_2(z, x) = \sqrt{x^2 + z^2} ; \quad (z, x) \in D_{zx} .$$

Normalni vektor na površ S_1 zaklapa oštar ugao β_1 , a normalni vektor na S_2 tup ugao β_2 sa pozitivnim delom y -ose. Zato je $\cos \beta_1 > 0$, $\cos \beta_2 < 0$ i važi

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{-q_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} , \quad \cos \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} , \quad \cos \gamma_1 = \frac{-p_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} ; \\ \cos \alpha_2 &= \frac{q_2}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} , \quad \cos \beta_2 = \frac{-1}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} , \quad \cos \gamma_2 = \frac{p_2}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} . \end{aligned}$$

Određujemo

$$p_1 = \frac{\partial y_1}{\partial z} = \frac{-z}{\sqrt{4-x^2-z^2}}, \quad q_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-z^2}};$$

$$p_2 = \frac{\partial y_2}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad q_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

i izračunavamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} x \, dydz + y \, dzdx + z \, dx dy = \iint_{S_1} (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1) \, d\sigma \\ &= \iint_{D_{zx}} [-q_1 x + y_1(z, x) - p_1 z] \, dzdx = \iint_{D_{zx}} \frac{4}{\sqrt{4-x^2-z^2}} \, dzdx, \\ I_2 &= \iint_{S_2} x \, dydz + y \, dzdx + z \, dx dy = \iint_{S_2} (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2) \, d\sigma \\ &= \iint_{D_{zx}} [q_2 x - y_2(z, x) + p_2 z] \, dzdx = 0. \end{aligned}$$

Uvodeći polarne koordinate r, φ u zx -ravni sledi

$$D_{zx}^* : \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i za integral I_1 se dobija

$$I_1 = 4 \iint_{D_{zx}^*} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \, dr d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \, dr = 8(2-\sqrt{2})\pi.$$

Zbog $S = S_1 \cup S_2$, integral I je

$$I = I_1 + I_2 = 8(2-\sqrt{2})\pi.$$

Slično kao u Zadatku 55, površ S se sastoji od delova S_1, S_2 sa različitom parametrizacijom (4° iz Napomene 4.3.2), koji se projektuju na istu koordinatnu ravan. Kada bi se Zadatak 67 rešavao prelaskom na površinski integral I vrste, delovi S_i ($i = 1, 2, 3$) bi morali da se projektuju na različite koordinatne ravni.

70. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S (y-z) \, dydz + (z-x) \, dzdx + (x-y) \, dx dy,$$

gde je S deo sfere

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4ax$$

koji iseca cilindrična površ

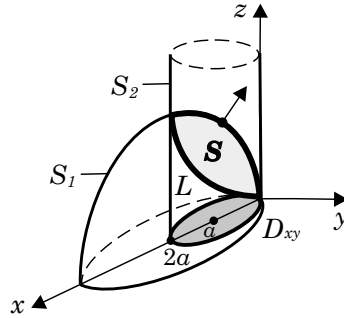
$$S_2 : \quad x^2 + y^2 = 2ax$$

za $z \geq 0$ i $a > 0$. Integracija se vrši po strani površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z -ose.

Rešenje. Neka je L presečna kriva površi S_1 i S_2 , a L_{xy} njena projekcija na xy -ravan. Iz jednačina

$$S_1 : (x-2a)^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \quad S_2 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

se vidi da sfera S_1 ima centar u tački $(2a, 0, 0)$ i poluprečnik $2a$, a cilindrična površ S_2 za direktrisu ima kružnicu L_{xy} sa centrom u tački $(a, 0, 0)$ i poluprečnika a . Na stranu integracije je postavljen normalni vektor.



Površ S se bijektivno projektuje na xy -ravan ($z = 0$) u krug D_{xy} ograničen sa L_{xy} ,

$$D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 2ax.$$

Zbog $z \geq 0$, odgovarajuća jednačina površi S glasi

$$S : z = z(x, y) = \sqrt{4ax - x^2 - y^2}; \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Normalni vektor na površ S zaklapa oštar ugao γ sa pozitivni delom z -ose, pa je $\cos \gamma > 0$ i sledi

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Određujući

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2a-x}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}},$$

integral I prevodimo u površinski I vrste, a zatim u dvojni

$$\begin{aligned} I &= \iint_S [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} [-p(y-z(x,y)) - q(z(x,y)-x) + (x-y)] dx dy \\ &= 2a \iint_{D_{xy}} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}} \right) dx dy \\ &= 2a \iint_{D_{xy}} dx dy - 2a \iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}} dx dy \\ &= 2a^3 \pi - 2a \iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}} dx dy, \end{aligned}$$

pri čemu je iskorišćena činjenica da je jedan od dvojnih integrala jednak površini kruga poluprečnika a (Primer 3.5.1). Ako oblast D_{xy} opišemo na način

$$D_{xy} : \quad 0 \leq x \leq 2a, \quad -\sqrt{2ax-x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax-x^2},$$

poslednji dvojni integral je

$$\iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}} dx dy = \int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{y}{\sqrt{4ax-x^2-y^2}} dy = 0$$

zbog neparnosti podintegralne funkcije po y i simetričnosti granica unutrašnjeg integrala.

Dakle, rezultat je

$$I = 2a^3 \pi.$$

Slično kao u Zadatku 56, osim na xy -ravan, površ S se bijektivno projektuje i na yz -ravan u oblast

$$D_{yz} : \quad -\frac{z}{2a} \sqrt{4a^2-z^2} \leq y \leq \frac{z}{2a} \sqrt{4a^2-z^2}, \quad 0 \leq z \leq 2a,$$

ali ovo projektovanje nije pogodno za rešavanje odgovarajućeg dvojnog integrala po oblasti D_{yz} (2° iz Napomene 4.3.2).

Teorema Ostrogradskog

Ako je D prosto povezana prostorna oblast i S njena granična površ, tada je

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

71. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S (5x + y^2 - z^3) dy dz + z^2 dz dx + (y - z) dx dy,$$

gde je

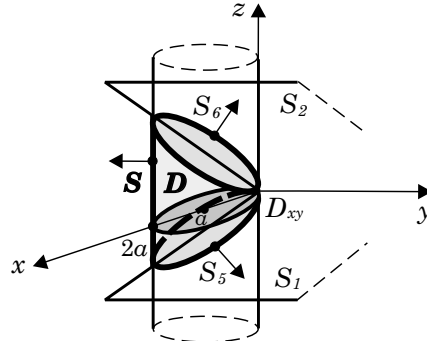
$$S : \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cilindrična površ između ravni

$$S_1 : \quad z = -x, \quad S_2 : \quad z = x$$

i $a, b > 0$. Integracija se vrši po "spoljnoj" strani površi S .

Rešenje. Direktrisa cilindrične površi je elipsa L sa centrom u tački $(a, 0, 0)$ i poluosama a i b . Neka je S_3 deo površi S za $y \geq 0$ i S_4 deo za $y \leq 0$. Takođe, neka su S_5 i S_6 delovi ravni S_1 i S_2 redom, koji su unutar cilindrične površi. Na strane integracije su postavljeni normalni vektori.



Zadatak rešavamo na dva načina, prelaskom na površinski integral I vrste i primenom Teoreme Ostrogradskog.

Delovi S_3, S_4 se bijektivno projektuju na zx -ravan ($y = 0$) u oblast

$$D_{zx} : -x \leq z \leq x, \quad 0 \leq x \leq 2a,$$

a njihove jednačine su

$$S_{3,4} : y = y_{3,4}(z, x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}; \quad (z, x) \in D_{zx}.$$

Normalni vektor na S_3 zaklapa oštar ugao β_3 , a normalni vektor na S_4 tup ugao β_4 sa pozitivnim delom y -ose. Zato je

$$\begin{aligned} \cos \alpha_3 &= \frac{-q_3}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}}, \quad \cos \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}}, \quad \cos \gamma_3 = \frac{-p_3}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}}; \\ \cos \alpha_4 &= \frac{q_4}{\sqrt{1 + p_4^2 + q_4^2}}, \quad \cos \beta_4 = \frac{-1}{\sqrt{1 + p_4^2 + q_4^2}}, \quad \cos \gamma_4 = \frac{p_4}{\sqrt{1 + p_4^2 + q_4^2}}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{\partial y_3}{\partial z} = 0, \quad q_3 = \frac{\partial y_3}{\partial x} = \frac{b}{a} \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}; \\ p_4 &= \frac{\partial y_4}{\partial z} = 0, \quad q_4 = \frac{\partial y_4}{\partial x} = -\frac{b}{a} \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}, \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{S_3} (5x + y^2 - z^3) dydz + z^2 dzdx + (y - z) dxdy \\
&= \iint_{S_3} [(5x + y^2 - z^3) \cos \alpha_3 + z^2 \cos \beta_3 + (y - z) \cos \gamma_3] d\sigma \\
&= \iint_{D_{zx}} [-q_3(5x + y_3^2(z, x) - z^3) + z^2 - p_3(y_3(z, x) - z)] dzdx \\
&= \iint_{D_{zx}} [-q_3(5x + y_3^2(z, x) - z^3) + z^2] dzdx , \\
I_4 &= \iint_{S_4} (5x + y^2 - z^3) dydz + z^2 dzdx + (y - z) dxdy \\
&= \iint_{S_4} [(5x + y^2 - z^3) \cos \alpha_4 + z^2 \cos \beta_4 + (y - z) \cos \gamma_4] d\sigma \\
&= \iint_{D_{zx}} [q_4(5x + y_4^2(z, x) - z^3) - z^2 + p_4(y_4(z, x) - z)] dzdx \\
&= \iint_{D_{zx}} [q_4(5x + y_4^2(z, x) - z^3) - z^2] dzdx .
\end{aligned}$$

Imajući u vidu $S = S_3 \cup S_4$, kao i $y_4(z, x) = -y_3(z, x)$, $q_4 = -q_3$, sabiranjem sledi

$$\begin{aligned}
I &= I_3 + I_4 = 2 \iint_{D_{zx}} -q_3(5x + y_3^2(z, x) - z^3) dzdx \\
&= 2 \frac{b}{a} \iint_{D_{zx}} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}} \left[5x + \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) - z^3 \right] dzdx = 2 \frac{b}{a} (J_1 + J_2) ,
\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
J_1 &= \iint_{D_{zx}} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}} \left[5x + \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) \right] dzdx , \\
J_2 &= - \iint_{D_{zx}} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}} z^3 dzdx .
\end{aligned}$$

Rešavamo dvojni integral J_1 i dobijamo

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{2a} \frac{x - a}{\sqrt{2ax - x^2}} \left[5x + \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) \right] dx \int_{-x}^x dz \\
&= 2 \int_0^{2a} \frac{x(x - a)}{\sqrt{2ax - x^2}} \left[5x + \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) \right] dx \\
&= 10 \int_0^{2a} \frac{x^2(x - a)}{\sqrt{2ax - x^2}} dx + 2 \frac{b^2}{a^2} \int_0^{2a} x(x - a) \sqrt{2ax - x^2} dx .
\end{aligned}$$

U oba određena integrala uvodimo smenu

$$x = a + a \sin t ,$$

za koju je $t = -\pi/2$ kad je $x = 0$ i $t = \pi/2$ kad je $x = 2a$. Još je $2ax - x^2 = a^2 \cos^2 t$, $dx = a \cos t dt$, pa je

$$\begin{aligned} J_1 &= 40a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt + 4a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= 10a^3 \pi + \frac{1}{4} a^2 b^2 \pi = \frac{1}{4} a^2 (40a + b^2) \pi . \end{aligned}$$

Zbog neparnosti podintegralne funkcije z^3 u unutrašnjem integralu, dvojni integral J_2 je

$$J_2 = - \int_0^{2a} \frac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}} dx \int_{-x}^x z^3 dz = 0 .$$

Tražena vrednost integrala I je

$$I = 2 \frac{b}{a} J_1 = \frac{1}{2} ab(40a + b^2) \pi .$$

Površ S smo rastavljali na delove S_3 , S_4 jer se ona u celini ne projektuje bijektivno ni na jednu od koordinatnih ravni (3° iz Napomene 4.3.2). Prednost je što se S_3 , S_4 projektuju na zx -ravan u istu oblast. Delovi površi S za $x \leq a$ i $x \geq a$ se bijektivno projektuju na yz -ravan, ali u različite oblasti, komplikovanijeg opisa od D_{zx} , čime se umnogome komplikuje i rešavanje integrala.

Zadatak rešavamo na drugi način. Površ $S_7 = S \cup S_5 \cup S_6$ je zatvorena i ograničava prostornu oblast D . Inače, S_7 je cilindar sa bazisima S_5 , S_6 i omotačem S (Napomena 3.1.1). Integracija se vrši po onim stranama površi S , S_5 , S_6 koje odgovaraju spoljnoj strani površi S_7 .

U integralu I je

$$P(x, y, z) = 5x + y^2 - z^3, \quad Q(x, y, z) = z^2, \quad R(x, y, z) = y - z,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 5 + 0 - 1 = 4 .$$

Funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ su neprekidne u oblasti D . Uslovi Teoreme Ostrogradskog su ispunjeni i njenom primenom sledi

$$I_7 = \iint_{S_7} (5x + y^2 - z^3) dydz + z^2 dzdx + (y - z) dxdy = 4 \iiint_D dxdydz .$$

Koristeći jednakost (3.3.21), dalje je

$$I_7 = 4 \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{-x}^x dz = 8 \iint_{D_{xy}} x dxdy ,$$

gde je D_{xy} projekcija oblasti D na xy -ravan ($z = 0$). Kako je D_{xy} ograničena elipsom L , to je

$$D_{xy} : \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 .$$

Uvodeći smenu

$$x = a + ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

za koju je $|J| = abr$, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Zato je

$$I_7 = 8 \iint_{D_{xy}^*} abr(a + ar \cos \varphi) dr d\varphi = 8a^2b \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} (1 + r \cos \varphi) d\varphi = 8a^2b\pi.$$

Površ S_5 i S_6 se bijektivno projektuju na xy -ravan u oblast D_{xy} i imaju jednačine

$$S_{5,6} : \quad z = z_{5,6}(x, y) = \mp x, \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Normalan vektor na S_5 zaklapa tup ugao γ_5 , a normalan vektor na S_6 oštari ugao γ_6 sa pozitivnim delom z -ose i važi

$$\begin{aligned} \cos \alpha_5 &= \frac{p_5}{\sqrt{1 + p_5^2 + q_5^2}}, \quad \cos \beta_5 = \frac{q_5}{\sqrt{1 + p_5^2 + q_5^2}}, \quad \cos \gamma_5 = \frac{-1}{\sqrt{1 + p_5^2 + q_5^2}}; \\ \cos \alpha_6 &= \frac{-p_6}{\sqrt{1 + p_6^2 + q_6^2}}, \quad \cos \beta_6 = \frac{-q_6}{\sqrt{1 + p_6^2 + q_6^2}}, \quad \cos \gamma_6 = \frac{1}{\sqrt{1 + p_6^2 + q_6^2}}. \end{aligned}$$

Kako je

$$p_5 = \frac{\partial z_5}{\partial x} = -1, \quad q_5 = \frac{\partial z_5}{\partial y} = 0; \quad p_6 = \frac{\partial z_6}{\partial x} = 1, \quad q_6 = \frac{\partial z_6}{\partial y} = 0,$$

to je

$$\begin{aligned} I_5 &= \iint_{S_5} (5x + y^2 - z^3) dydz + z^2 dzdx + (y - z) dxdy \\ &= \iint_{S_5} [(5x + y^2 - z^3) \cos \alpha_5 + z^2 \cos \beta_5 + (y - z) \cos \gamma_5] d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} [p_5(5x + y^2 - z_5^3(x, y)) + q_5 z_5^2(x, y) - (y - z_5(x, y))] dxdy \\ &= - \iint_{D_{xy}} (x^3 + y^2 + 6x + y) dxdy, \\ I_6 &= \iint_{S_6} (5x + y^2 - z^3) dydz + z^2 dzdx + (y - z) dxdy \\ &= \iint_{S_6} [(5x + y^2 - z^3) \cos \alpha_6 + z^2 \cos \beta_6 + (y - z) \cos \gamma_6] d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} [-p_6(5x + y^2 - z_6^3(x, y)) - q_6 z_6^2(x, y) + (y - z_6(x, y))] dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^3 - y^2 - 6x + y) dxdy \end{aligned}$$

i sabiranjem

$$\begin{aligned}
 I_5 + I_6 &= -2 \iint_{D_{xy}} (y^2 + 6x) \, dx dy = -2ab \iint_{D_{xy}^*} r(b^2 r^2 \sin^2 \varphi + 6a + 6ar \cos \varphi) \, dr d\varphi \\
 &= -2ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (b^2 r^3 \sin^2 \varphi + 6ar + 6ar^2 \cos \varphi) \, dr \\
 &= -2ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} b^2 \sin^2 \varphi + 3a + 2a \cos \varphi \right) d\varphi = -\frac{1}{2} ab(24a + b^2) \pi .
 \end{aligned}$$

Zbog $S_7 = S \cup S_5 \cup S_6$ važi

$$I = I_7 - (I_5 + I_6) = 8a^2 b \pi + \frac{1}{2} ab(24a + b^2) \pi = \frac{1}{2} ab(40a + b^2) \pi .$$

Na sličan način, "zatvaranjem" otvorene površi integracije i primenom Teoreme Ostrogradskog, mogu da se reše i Zadaci 64, 65, 68, s tim što se zatvaranje u njima vrši delovima ravni koje su paralelne xy -koordinatnoj ravni, pa je rešavanje jednostavnije nego u ovom zadatku (2° iz Napomene 4.6.1). Isto tako, zbog pomenute paralelnosti, Zadaci 64, 65, 68 se jednostavnije rešavaju pomoću Teoreme Ostrogradskog nego prelaskom na površinski integral I vrste. U ovom zadatku nema značajne razlike između ta dva načina.

72. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S \frac{x^3}{a^2} \, dy dz + \frac{y^3}{b^2} \, dz dx + \frac{z^3}{c^2} \, dx dy ,$$

gde je

$$S : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i $a, b, c > 0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Površ S je centralni elipsoid sa poluosama a, b, c (Slika 1.4.33). Neka je D prostorna oblast ograničena sa S .

U integralu I je

$$P(x, y, z) = \frac{x^3}{a^2} , \quad Q(x, y, z) = \frac{y^3}{b^2} , \quad R(x, y, z) = \frac{z^3}{c^2} ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) .$$

Uslovi Teoreme Ostrogradskog su ispunjeni i važi

$$I = 3 \iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \, dx dy dz .$$

Uvođenjem uopštenih sfernih koordinata sa

$$x = ar \cos \varphi \cos \theta , \quad y = br \sin \varphi \cos \theta , \quad z = cr \sin \theta ,$$

za koje je $|J| = abc r^2 \cos \theta$, oblast D prelazi u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

i integral I postaje

$$I = 3abc \iiint_{D^*} r^4 \cos \theta \, dr d\varphi d\theta = 3abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = \frac{12}{5} abc\pi.$$

Ako bi se integral I rešavao prelaskom na površinski I vrste, elipsoid S bi morao da se deli na dva dela, pa bi taj način rešavanja bio komplikovaniji (1° iz Napomene 4.6.1).

Primetimo da Zadatak 66, u kome je površ integracije S takođe zatvorena (sfera), ne može da se reši pomoću Teoreme Ostrogradskog. Uzrok je u tome što funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$, kao i cela podintegralna funkcija odgovarajućeg trojnog integrala nisu definisane u tački $(0, 0, 0)$, koja pripada prostornoj oblasti ograničenoj sa S .

73. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S x \, dydz + 2y \, dzdx + z \, dxdy,$$

gde je S zatvorena površ sastavljena od delova paraboloida

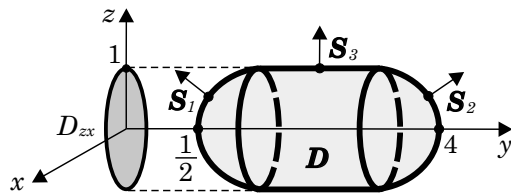
$$S_1 : \quad 2y - 1 = 2(x^2 + z^2), \quad S_2 : \quad 4 - y = x^2 + z^2$$

koji su unutar cilindrične površi

$$S_3 : \quad x^2 + z^2 = 1$$

i dela površi S_3 između S_1 i S_2 . Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Paraboloidi S_1 , S_2 imaju y -osu za osovinu, a cilindrična površ S_3 ima izvodnice paralelne y -osi i kružnicu u zx -ravni za direktrisu. Radi jednostavnosti, delove ovih površi, koji formiraju površ S , označimo isto sa S_1 , S_2 , S_3 . Površ S je cilindar sa bazuima S_1 , S_2 i omotačem S_3 . Na strane delova koje odgovaraju spoljnoj strani cilindra su postavljeni normalni vektori. Neka je D prostorna oblast ograničena sa S .



U integralu I je

$$P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = 2y, \quad R(x, y, z) = z,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 4.$$

Uslovi Teoreme Ostrogradskog su ispunjeni i važi

$$I = 4 \iiint_D dx dy dz.$$

Projekcija oblasti D na zx -ravan ($y = 0$) je krug

$$D_{zx}: \quad x^2 + z^2 \leq 1.$$

Uvođenjem cilindričnih koordinata sa

$$z = r \cos \varphi, \quad x = r \sin \varphi, \quad y = y,$$

za koje je $|J| = r$, oblast D_{zx} i površi S_1, S_2 se preslikavaju u

$$D_{zx}^*: \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ S_1^*: \quad y = r^2 + \frac{1}{2}, \quad S_2^*: \quad y = 4 - r^2,$$

pa se oblast D preslikava u

$$D^*: \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad r^2 + \frac{1}{2} \leq y \leq 4 - r^2$$

i trojni integral postaje

$$I = 4 \iiint_{D^*} r dr d\varphi dy = 4 \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r^2+1/2}^{4-r^2} dy = 4\pi \int_0^1 (7r - 4r^3) dr = 10\pi.$$

Površ S se sastoji od delova sa različitom parametrizacijom, pa bi izračunavanje integrala I prelaskom na površinski I vrste zahtevalo rešavanje bar četiri površinska umesto jednog trojnog integrala. Preciznije, delove S_1 i S_2 treba projektovati na zx -ravan, a deo S_3 na xy ili yz -ravan, s tim što S_3 mora da se deli na dva bijektivna dela (3°, 4° iz Napomene 4.3.2). Prednost Teoreme Ostrogradskog je u ovom slučaju očigledna (1° iz Napomene 4.6.1).

Slična je situacija i u Zadacima 67, 69.

74. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S bx^2 dy dz + ay^2 dz dx + abz^2 dx dy,$$

gde je S zatvorena površ sastavljena od delova površi

$$S_1 : \left(\frac{x}{a} + z\right)^2 + \left(\frac{y}{b} + z\right)^2 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + z\right)^2, \quad S_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + z = 1$$

i $a, b > 0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Za

$$P(x, y, z) = bx^2, \quad Q(x, y, z) = ay^2, \quad R(x, y, z) = abz^2$$

je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2(bx + ay + abz)$$

i primenom Teoreme Ostrogradskog sledi

$$I = 2 \iiint_D (bx + ay + abz) dx dy dz = 2ab \iiint_D \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + z\right) dx dy dz,$$

gde je D prostorna oblast ograničena sa S .

Uvodimo smenu

$$u = \frac{x}{a} + z, \quad v = \frac{y}{b} + z, \quad w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + z,$$

iz koje je

$$x = a(w - v), \quad y = b(w - u), \quad z = u + v - w.$$

Slično kao u Zadatku 38 određujemo $|J(u, v, w)| = ab$. Površi S_1 i S_2 se transformišu u

$$S_1^* : u^2 + v^2 = w^2, \quad S_2^* : w = 1.$$

U uvw -sistemu je S_1^* konus, S_2^* ravan paralelna uv -ravni, a D^* oblast ograničena sa S_1^* i S_2^* . Za sve tačke iz D^* važi $w \geq 0$. Uvodimo cilindrične koordinate sa

$$u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi, \quad w = w$$

i dobijamo $|J(r, \varphi, w)| = r$ i

$$S_1^{**} : w = r, \quad S_2^{**} : w = 1.$$

Projekcija oblasti D^* na uv -ravan je krug $u^2 + v^2 \leq 1$, pa je nova oblast D^{**} opisana sa

$$D^{**} : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad r \leq w \leq 1.$$

Za integral I se dobija

$$\begin{aligned} I &= 2a^2b^2 \iiint_{D^*} w du dv dw = 2a^2b^2 \iiint_{D^{**}} rw dr d\varphi dw \\ &= 2a^2b^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^1 w dw = 2a^2b^2\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr = \frac{1}{2}a^2b^2\pi. \end{aligned}$$

Da bi se integral I rešavao kao površinski, mora da se rastavi na integrale po površima S_1 i S_2 . Integral po površi S_2 se lako rešava jer je S_2 ravan. Međutim, za rešavanje integrala po površi S_1 je potrebno prethodno izvršiti adekvatnu parametrizaciju površi, uključujući i nalaženje njene oblasti definisanosti, što nije jednostavno s obzirom na neprepoznatljivost površi u xyz -sistemu. Ako se tome pridoda i rešavanje samog površinskog integrala, ovaj postupak je toliko komplikovan da je neupotrebljiv.

75. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S (x - z^2) dydz + (y + x^2) dzdx - (z + y^2) dxdy ,$$

gde je S zatvorena površ

$$S : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$$

i $a > 0$. Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Kako je

$$P(x, y, z) = x - z^2 , \quad Q(x, y, z) = y + x^2 , \quad R(x, y, z) = -(z + y^2) ,$$

to je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

i prema Teoremi Ostrogradskog

$$I = \iiint_D dxdydz ,$$

gde je D prostorna oblast ograničena sa S .

Uvođenjem sfernih koordinata r, φ, θ , za koje je $|J| = r^2 \cos \theta$, površ S se preslikava u

$$S^* : \quad r = a\sqrt{\cos 2\theta} .$$

Površ S^* je definisana za $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$. Kako je tačka $(0, 0, 0) \in S$, tj. $(0, 0, 0) \in D$, oblast D prelazi u

$$D^* : \quad 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\theta} , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi , \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} .$$

Za integral I se dobija

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{D^*} r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 dr \\ &= \frac{4}{3} a^3 \pi \int_0^{\pi/4} \cos \theta \cos 2\theta \sqrt{\cos 2\theta} d\theta = \frac{4}{3} a^3 \pi \int_0^{\pi/4} \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta} d\theta . \end{aligned}$$

Poslednji određeni integral se rešava smenom

$$\sqrt{2} \sin \theta = \sin t ,$$

za koju je $t = 0$ kad je $\theta = 0$ i $t = \pi/2$ kad je $\theta = \pi/4$. Još je $1 - 2 \sin^2 \theta = \cos^2 t$ i $\sqrt{2} \cos \theta d\theta = \cos t dt$. Korišćenjem rezultata iz Zadatka 10, konačno je

$$I = \frac{4}{3\sqrt{2}} a^3 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} a^3 \pi^2 .$$

Komentar iz Zadatka 74 važi i u ovom slučaju.

76. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

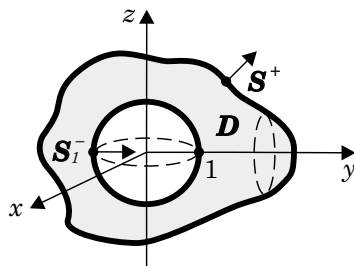
$$I = \iint_S \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

gde je S zatvorena površ koja je spoljna granica dvostruko povezane prostorne oblasti, čija je unutrašnja granica sfera

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 .$$

Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Neka je D prostorna oblast ograničena sa S i S_1 . Za stranu integracije sfere S_1 biramo njenu unutrašnju stranu. Na strane integracije površi S i S_1 su postavljeni normalni vektori.



U integralu I je

$$P(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} , \quad Q(x, y, z) = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

$$R(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{(-2x^2 + y^2 + z^2) + (x^2 - 2y^2 + z^2) + (x^2 + y^2 - 2z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = 0 .$$

Kako $(0, 0, 0) \notin D$, funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ su neprekidne u oblasti D . Uslovi Teoreme 4.6.2 su ispunjeni i sledi

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \iint_{S_1^-} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = 0 . \end{aligned}$$

Izostavljajući podintegralni izraz, odavde je

$$I = \iint_{S^+} = - \iint_{S_1^-} = \iint_{S_1^+} ,$$

pri čemu su sa S^+ i S_1^+ označene spoljne strane površi S i S_1 , a sa S_1^- unutrašnja strana površi S_1 .

Neka je $S_1 = S_2 \cup S_3$, gde je S_2 deo za $z \geq 0$, a S_3 deo za $z \leq 0$. Oba dela se projektuju na xy -ravan ($z = 0$) u istu oblast

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

i imaju jednačine

$$S_{2,3} : \quad z = z_{2,3}(x, y) = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2} .$$

Normalni vektor na S_2 zaklapa oštar ugao γ_2 , a normalni vektor na S_3 tup ugao γ_3 sa pozitivnim delom z -ose, pa je

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{-p_2}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} , \quad \cos \beta_2 = \frac{-q_2}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} , \quad \cos \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}} ; \\ \cos \alpha_3 &= \frac{p_3}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}} , \quad \cos \beta_3 = \frac{q_3}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}} , \quad \cos \gamma_3 = \frac{-1}{\sqrt{1 + p_3^2 + q_3^2}} . \end{aligned}$$

Još je

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} , \quad q_2 = \frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} ; \\ p_3 &= \frac{\partial z_3}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} , \quad q_3 = \frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

i važi

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_2} \frac{x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} d\sigma + \iint_{S_3} \frac{x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{-xp_2 - yq_2 + z_2(x, y)}{(x^2 + y^2 + z_2^2(x, y))^{3/2}} dxdy + \iint_{D_{xy}} \frac{xp_3 + yq_3 - z_3(x, y)}{(x^2 + y^2 + z_3^2(x, y))^{3/2}} dxdy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} . \end{aligned}$$

Uvođenjem polarnih koordinata u xy -ravni sledi

$$D_{xy}^* : \quad 0 \leq r \leq 1 , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i za integral I se dobija

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 4\pi .$$

Pošto je površ S proizvoljna, površinski integral ima istu vrednost $I = 4\pi$ po svakoj zatvorenoj površi za koju je $(0, 0, 0) \in \text{int } S$. Ukoliko $(0, 0, 0) \notin S \cup \text{int } S$, prema Teoremi Ostrogradskog je $I = 0$. Dakle, I ne zavisi od oblika površi S , već samo od njenog položaja u prostoru, tj. od navedenog uslova.

77. Izračunati potpuni površinski integral II vrste

$$I = \iint_S \frac{(y+z) dydz + (z-x) dzdx - (x+y) dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

gde je S zatvorena površ koja je spoljna granica dvostruko povezane prostorne oblasti, čija je unutrašnja granica zatvorena površ S_1 . Površ S_1 je sastavljena od delova ravni

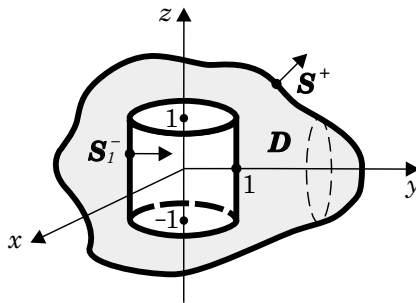
$$S_2 : z = -1 , \quad S_3 : z = 1$$

koji su unutar cilindrične površi

$$S_4 : x^2 + y^2 = 1$$

i dela površi S_4 između ravni S_2 i S_3 . Integracija se vrši po spoljnoj strani površi S .

Rešenje. Ravni S_2, S_3 su paralelne xy -ravni, a cilindrična površ S_4 ima izvodnice paralelne z -osi i kružnicu u xy -ravni za direktrisu. Radi jednostavnosti, delove ovih površi, koji ulaze u sastav površi S_1 , označimo isto sa S_2, S_3, S_4 . Dakle, S_1 je cilindar sa bazuima S_2, S_3 i omotačem S_4 . Za stranu integracije biramo unutrašnju stranu cilindra. Normalni vektori su postavljeni na strane integracije površi S i S_1 . Neka je D prostorna oblast ograničena sa S i S_1 .



U integralu I je

$$P(x, y, z) = \frac{y+z}{x^2 + y^2 + z^2} , \quad Q(x, y, z) = \frac{z-x}{x^2 + y^2 + z^2} , \quad R(x, y, z) = \frac{-(x+y)}{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{-2x(y+z) - 2y(z-x) + 2z(x+y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = 0 .$$

Kako $(0, 0, 0) \notin D$, funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ su neprekidne u oblasti D . Uslovi Teoreme 4.6.2 su ispunjeni i sledi

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} \frac{(y+z) dydz + (z-x) dzdx - (x+y) dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} \\ & + \iint_{S_1^-} \frac{(y+z) dydz + (z-x) dzdx - (x+y) dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} \\ & = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = 0 . \end{aligned}$$

Izostavljajući podintegralni izraz, odavde je

$$I = \iint_{S^+} = - \iint_{S_1^-} = \iint_{S_1^+} ,$$

pri čemu su sa S^+ i S_1^+ označene spoljne strane površi S i S_1 , a sa S_1^- unutrašnja strana površi S_1 .

Neka je $S_4 = S_5 \cup S_6$, gde je S_5 deo za $x \geq 0$, a S_6 deo za $x \leq 0$. Tada je $S_1 = S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_6$ i

$$I = I_2 + I_3 + I_5 + I_6 .$$

Integrali I_2 , I_3 , I_5 , I_6 su površinski po površima S_2 , S_3 , S_5 , S_6 redom sa podintegralnim izrazom kao u integralu I .

Površ S_2 , S_3 se bijektivno projektuju na xy -ravan ($z = 0$) u istu oblast

$$D_{xy} : \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

i imaju jednačine

$$S_{2,3} : \quad z = z_{2,3}(x, y) = \mp 1 .$$

Jedinični normalni vektori na strane površi S_2 , S_3 , koje odgovaraju spoljnoj strani površi S_1 , su jedinični vektori sa z -ose

$$\mp \vec{k} = (0, 0, \mp 1) .$$

Zato je

$$\cos \alpha_2 = 0 , \quad \cos \beta_2 = 0 , \quad \cos \gamma_2 = -1 ; \quad \cos \alpha_3 = 0 , \quad \cos \beta_3 = 0 , \quad \cos \gamma_3 = 1$$

i, zbog $z_2^2 = z_3^2 = 1$, važi

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= \iint_{S_2} \frac{(y+z) \cos \alpha_2 + (z-x) \cos \beta_2 - (x+y) \cos \gamma_2}{x^2 + y^2 + z^2} d\sigma \\ &+ \iint_{S_3} \frac{(y+z) \cos \alpha_3 + (z-x) \cos \beta_3 - (x+y) \cos \gamma_3}{x^2 + y^2 + z^2} d\sigma \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + z_2^2} dxdy - \iint_{D_{xy}} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + z_3^2} dxdy = 0 . \end{aligned}$$

Površni S_5 , S_6 se bijektivno projektuju na yz -ravan ($x = 0$) u istu oblast

$$D_{yz} : -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$$

i imaju jednačine

$$S_{5,6} : x = x_{5,6}(y, z) = \pm \sqrt{1 - y^2}.$$

Normalni vektor na S_5 zaklapa oštar ugao α_5 , a normalni vektor na S_6 tup ugao α_6 sa pozitivnim delom x -ose, pa je

$$\begin{aligned} \cos \alpha_5 &= \frac{1}{\sqrt{1 + p_5^2 + q_5^2}}, \quad \cos \beta_5 = \frac{-p_5}{\sqrt{1 + p_5^2 + q_5^2}}, \quad \cos \gamma_5 = \frac{-q_5}{\sqrt{1 + p_5^2 + q_5^2}}; \\ \cos \alpha_6 &= \frac{-1}{\sqrt{1 + p_6^2 + q_6^2}}, \quad \cos \beta_6 = \frac{p_6}{\sqrt{1 + p_6^2 + q_6^2}}, \quad \cos \gamma_6 = \frac{q_6}{\sqrt{1 + p_6^2 + q_6^2}}. \end{aligned}$$

Još je

$$p_5 = \frac{\partial x_5}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad q_5 = \frac{\partial x_5}{\partial z} = 0; \quad p_6 = \frac{\partial x_6}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad q_6 = \frac{\partial x_6}{\partial z} = 0$$

i važi

$$\begin{aligned} I_5 + I_6 &= \iint_{S_5} \frac{(y + z) \cos \alpha_5 + (z - x) \cos \beta_5 - (x + y) \cos \gamma_5}{x^2 + y^2 + z^2} d\sigma \\ &+ \iint_{S_6} \frac{(y + z) \cos \alpha_6 + (z - x) \cos \beta_6 - (x + y) \cos \gamma_6}{x^2 + y^2 + z^2} d\sigma \\ &= \iint_{D_{yz}} \frac{y + z - (z - x_5)p_5 + (x_5 + y)q_5}{x_5^2 + y^2 + z^2} dydz \\ &+ \iint_{D_{yz}} \frac{-(y + z) + (z - x_6)p_6 - (x_6 + y)q_6}{x_6^2 + y^2 + z^2} dydz \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \frac{yz}{(1 + z^2)\sqrt{1 - y^2}} dydz = 2 \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} dy \int_{-1}^1 \frac{z}{1 + z^2} dz = 0, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} dy = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{z}{1 + z^2} dz = 0$$

zbog neparnosti podintegralnih funkcija i simetričnih segmenata integracije.

Pošto je površ S proizvoljna, površinski integral ima istu vrednost

$$I = I_2 + I_3 + I_5 + I_6 = 0$$

po svakoj zatvorenoj površi za koju je $(0, 0, 0) \in \text{int } S$. Ukoliko $(0, 0, 0) \notin S \cup \text{int } S$, prema Teoremi Ostrogradskog je takođe $I = 0$. Za razliku od Zadatka 76, u ovom slučaju I ne zavisi ni od oblika površi S , ni od njenog položaja u prostoru.

Stokesova teorema

Ako je S prostorna površ i L njena saglasno orijentisana kontura, tada je

$$\oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{vmatrix} d\sigma .$$

78. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y dx + x^2 dy + z dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : x^2 + y^2 = 2(x + y) , \quad S_2 : z = x^2 + y^2 .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa izvodnicama paralelnim z -osi, a S_2 je paraboloid sa z -osom kao osovinom. Direktrisa površi S_1 je istovremeno projekcija krive L na xy -ravan

$$L_{xy} : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 , \quad z = 0 .$$

Slika za ovaj zadatak bi bila ista kao slika iz Zadatka 13 ako bi se umesto konusa uzeo paraboloid. Neka je S deo paraboloida S_2 ograničen sa L . Za zadatu orijentaciju krive L saglasno je orijentisana strana površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z -ose (Slika 1.2.25 i komentar uz nju).

U integralu I je

$$P(x, y, z) = y , \quad Q(x, y, z) = x^2 , \quad R(x, y, z) = z ,$$

pa je

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & x^2 & z \end{vmatrix} = (2x - 1) \cos \gamma .$$

Funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi su neprekidni na površi S . Uslovi Stokesove teoreme su ispunjeni i njenom primenom sledi

$$I = \iint_S (2x - 1) \cos \gamma d\sigma .$$

Površ S se bijektivno projektuje na xy -ravan ($z = 0$) u krug D_{xy} ograničen sa L_{xy} (1° iz Napomene 4.3.2), a jednačina površi S je

$$S: \quad z = z(x, y) = x^2 + y^2; \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Normalni vektor na stranu integracije površi S zaklapa oštar ugao γ sa pozitivnim delom z -ose. Zato je

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

i integral I postaje dvojni

$$I = \iint_{D_{xy}} (2x - 1) dx dy.$$

Pomoću smene

$$x = 1 + r \cos \varphi, \quad y = 1 + r \sin \varphi,$$

za koju je $|J| = r$, oblast D_{xy} se preslikava u

$$D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

pa je dalje

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{xy}^*} r(2r \cos \varphi + 1) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2r^2 \cos \varphi + r) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} \cos \varphi + 1 \right) d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

Koliko je direktno rešavanje krivolinijskog integrala teže, ostavljamo čitaocu da se sam uveri.

79. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L (y + z) dx + (z - x) dy + (x + y) dz,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4x, \quad S_2: \quad x^2 + y^2 = 2x$$

za $z \geq 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 , S_2 , kriva L , deo S sfere S_1 koji je ograničen sa L i odgovarajuća slika su isti kao u Zadatku 70 za $a = 1$. Zadatoj orijentaciji krive L odgovara (saglasno je orijentisana) strana površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z -ose. To je strana na koju je postavljen normalni vektor u Zadatku 70.

U integralu I je

$$P(x, y, z) = y + z, \quad Q(x, y, z) = z - x, \quad R(x, y, z) = x + y,$$

pa je

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & z-x & x+y \end{vmatrix} = -2 \cos \gamma .$$

Uslovi Stokesove teoreme su ispunjeni i sledi

$$I = -2 \iint_S \cos \gamma \, d\sigma .$$

Koristeći činjenicu da se površ S bijektivno projektuje na xy -ravan u krug D_{xy} , kao i ostale rezultate iz Zadatka 70, za integral I se dobija

$$I = -2 \iint_{D_{xy}} dx dy = -2d = -2\pi ,$$

gde je $d = R^2\pi = \pi$ površina kruga D_{xy} poluprečnika $R = 1$.

80. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S : \quad x^2 + y + z^2 = 1$$

sa koordinatnim ravnima za $x, y, z \geq 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela x -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Isti integral je već rešen direktno u Zadatku 11. Sada ga rešavamo primenom Stokesove teoreme. Radi jednostavnosti, za deo površi S u I oktantu, koji je ograničen sa L , koristimo istu oznaku S . Zadatoj orijentaciji krive L odgovara strana površi S koja se vidi sa pozitivnih delova svih koordinatnih osa.

U integralu I je

$$P(x, y, z) = y^2 , \quad Q(x, y, z) = -x^2 , \quad R(x, y, z) = z^2 ,$$

pa je

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x+y) \cos \gamma .$$

Uslovi Stokesove teoreme su ispunjeni i sledi

$$I = -2 \iint_S (x+y) \cos \gamma \, d\sigma .$$

Površ S se bijektivno projektuje na sve koordinatne ravni (2° iz Napomene 4.3.2). Biramo, npr., xy -ravan ($z = 0$). Koristeći rezultate iz Zadatka 11, utvrđujemo da je projekcija oblast

$$D_{xy} : \quad 0 \leq x \leq 1 , \quad 0 \leq y \leq 1 - x^2 .$$

Normalni vektor na stranu integracije površi S zaklapa oštar ugao γ sa pozitivnim delom z -ose i integral I postaje

$$\begin{aligned} I &= -2 \iint_{D_{xy}} (x+y) dx dy = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x+y) dy \\ &= -2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x - x^2 - x^3 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = -\frac{31}{30} . \end{aligned}$$

Na osnovu Zadatka 11 vidimo da je direktno rešavanje krivolinijskog integrala teže jer zahteva deobu krive L na tri dela.

81. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz ,$$

gde je kriva L presek površi

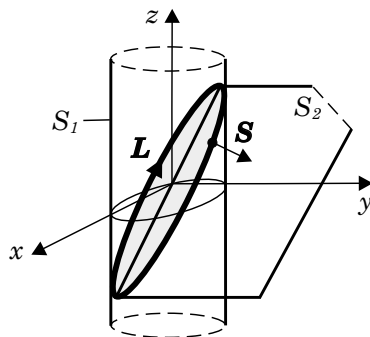
$$S_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} , \quad S_2 : \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$$

za $a, b, c > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je negativno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je cilindrična sa izvodnicama paralelnim z -osi, a S_2 je ravan paralelna y -osi. Direktrisa površi S_1 je i projekcija krive L na xy -ravan (3° iz Napomene 2.3.5), a to je elipsa

$$L_{xy} : \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 .$$

Neka je S deo ravni S_2 ograničen sa L . Zadatoj orijentaciji krive L odgovara strana površi S koja se vidi sa negativnog dela z -ose. Na ovu stranu je postavljen normalni vektor.



Kako je

$$P(x, y, z) = y - z , \quad Q(x, y, z) = z - x , \quad R(x, y, z) = x - y ,$$

to je

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

i primenom Stokesove teoreme sledi

$$I = -2 \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) d\sigma .$$

Površ S se bijektivno projektuje na xy -ravan ($z = 0$) u oblast D_{xy} ograničenu sa L_{xy} (Napomena 4.3.1), a njena jednačina je

$$S: \quad z = z(x, y) = c - \frac{c}{a} x ; \quad (x, y) \in D_{xy} .$$

Normalni vektor na stranu integracije zaklapa tup ugao γ sa pozitivnim delom z -ose, pa je

$$\cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} , \quad \cos \beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0 , \quad \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} ,$$

gde je

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a} , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 .$$

Integral I prelazi u dvojni

$$I = -2 \iint_{D_{xy}} (p + q - 1) dx dy = 2 \frac{a+c}{a} \iint_{D_{xy}} dx dy .$$

Uvodeći smenu

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} r \cos \varphi , \quad y = \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} r \sin \varphi ,$$

za koju je $|J| = abr/2$, oblast D_{xy} se transformiše u

$$D_{xy}^*: \quad 0 \leq r \leq 1 , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

i dobija se

$$I = 2 \frac{a+c}{a} \iint_{D_{xy}^*} \frac{ab}{2} r dr d\varphi = (a+c)b \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = (a+c)b\pi .$$

82. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

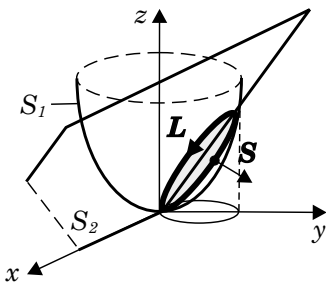
$$I = \oint_L y^2 dx + z^2 dy + z^2 dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1: \quad z = x^2 + y^2 , \quad S_2: \quad z = 2y .$$

Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je negativno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je paraboloid sa z -osom kao osovinom, a S_2 je ravan koja prolazi kroz x -osu i seče yz -ravan duž prave $z = 2y$, $x = 0$. Ako je S deo ravni S_2 ograničen sa L , orijentaciji krive L odgovara strana površi S na koju je postavljen normalni vektor.



Nalazimo

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & z^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(z \cos \alpha + y \cos \gamma)$$

i dobijamo

$$I = -2 \iint_S (z \cos \alpha + y \cos \gamma) d\sigma .$$

Eliminacijom z iz jednačina površi S_1 i S_2 sledi jednačina projekcije krive L na xy -ravan

$$L_{xy} : x^2 + (y - 1)^2 = 1, z = 0 ,$$

pa se S projektuje na krug D_{xy} ograničen sa L_{xy} . Jednačina površi S je

$$S : z = z(x, y) = 2y ; (x, y) \in D_{xy} .$$

Normalni vektor na stranu integracije zaklapa tup ugao γ sa pozitivnim delom z -ose. Kako je $p = \partial z / \partial x = 0$, dalje je

$$I = -2 \iint_{D_{xy}} (2yp - y) dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} y dx dy .$$

Smenom

$$x = r \cos \varphi, y = 1 + r \sin \varphi ,$$

za koju je $|J| = r$, D_{xy} prelazi u

$$D_{xy}^* : 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

i dobija se

$$I = 2 \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} (1 + r \sin \varphi) d\varphi = 4\pi \int_0^1 r dr = 2\pi .$$

Za površ S može da se uzme i deo paraboloidea S_1 koji je ograničen sa L , ali je tada odgovarajući dvojni integral nešto teži za rešavanje. Važi i generalno. Najjednostavniji za rešavanje su dvojni integrali koji se dobijaju izborom dela ravni za površ integracije.

Takođe, površ S se bijektivno projektuje i na zx -ravan (2° iz Napomene 4.3.2), bilo da je S deo paraboloida S_1 ili deo ravni S_2 . Projekcija je oblast elipse, pa se i u ovom slučaju dvojni integral teže rešava.

83. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L z \, dx + x \, dy + y \, dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 , \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 = 2az$$

za $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Sfera S_1 i paraboloid S_2 su isti, samo drugačije označeni sa S_3 , S_4 , kao u Zadatku 55. U istom zadatku je utvrđeno da sve tačke krive L imaju istu treću koordinatu $z = a$, što znači da L istovremeno pripada i ravni

$$S : \quad z = a .$$

U skladu sa zaključkom iz Zadatka 82, za površ S biramo deo ravni S_3 ograničen sa L . Orijentaciji krive L odgovara strana površi S koja se vidi sa pozitivnog dela z -ose.

Prema Zadatku 55, površ S se projektuje na xy -ravan u krug D_{xy} poluprečnika $\sqrt{2}a$. Još, za S važi

$$p = q = 0 ; \quad \cos \alpha = \cos \beta = 0 , \quad \cos \gamma = 1 ,$$

pa se primenom Stokesove teoreme dobija

$$I = \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} dx dy = (\sqrt{2}a)^2 \pi = 2a^2 \pi .$$

84. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L y \, dx + z \, dy + x \, dz ,$$

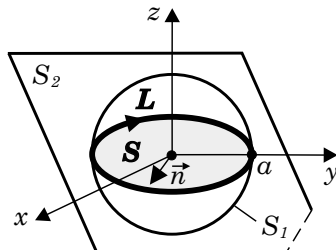
gde je kriva L presek površi

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 , \quad S_2 : \quad x + y + z = 0$$

za $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je negativno orijentisana.

Rešenje. Površ S_1 je centralna sfera poluprečnika a , dok je S_2 ravan koja prolazi kroz koordinatni početak $(0, 0, 0)$. Ravan S_2 seče sferu S_1 po kružnici L poluprečnika a . Ako je S deo ravni S_2 ograničen sa L , tada je S krug istog poluprečnika. Orijentaciji krive L

odgovara strana kruga S koja se vidi sa negativnog dela z -ose. Normalan vektor na ovu stranu je označen sa \vec{n} .



Primenom Stokesove teoreme sledi

$$I = - \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) d\sigma .$$

Opšti oblik jednačine ravni je ([3], str. 268)

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

gde su A, B, C koordinate vektora \vec{n}_1 normalnog na ravan. U slučaju ravni S_2 , tj. dela ravni S , je $A = B = C = 1$ i važi $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{3}$. Ako su $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ uglovi koje \vec{n}_1 zaklapa s pozitivnim delovima koordinatnih osa, tada je

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} , \cos \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} , \cos \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Kako je $\cos \gamma_1 > 0$, γ_1 je oštar ugao. S druge strane, vektor \vec{n} zaklapa tup ugao γ sa pozitivnim delom z -ose i takođe je normalan na S . Dakle, \vec{n} i \vec{n}_1 su vektori suprotnog smera, pa je

$$\vec{n} = (-1, -1, -1) , |\vec{n}| = \sqrt{3} ; \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Zato je

$$I = \frac{3}{\sqrt{3}} \iint_S d\sigma = \sqrt{3} s = \sqrt{3} a^2 \pi ,$$

gde je $s = R^2 \pi = a^2 \pi$ površina kruga S poluprečnika $R = a$.

Projekcija kružnice L na bilo koju od koordinatnih ravni je elipsa. Kako ose ovih elipsi nisu paralelne koordinatnim osama, njihova parametrizacija je naporna jer zahteva prethodnu rotaciju koordinatnog sistema ([5], str. 96). Zato se integral I teško rešava direktno kao krivolinijski. Iz istog razloga je i projekciju kruga S na neku od koordinatnih ravni teško opisati, zbog čega odgovarajući površinski integral i nismo rešavali prelaskom na dvojni.

Površinski integral iz Zadatka 83 može analogno da se reši, bez prelaska na dvojni integral. Međutim, u ovom slučaju nema razlike između površinskog i dvojnog integrala,

$$\iint_S d\sigma = \iiint_{D_{xy}} dx dy ,$$

jer su krugovi S i D_{xy} istog poluprečnika, pa su njihove površine jednake.

85. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

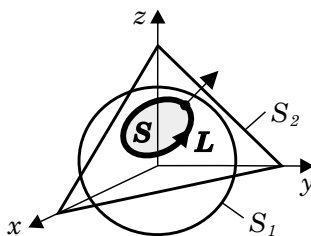
$$I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz ,$$

gde je kriva L presek površi

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 , \quad S_2 : x + y + z = \frac{3}{2} a$$

za $a > 0$. Posmatrano sa pozitivnog dela z -ose, L je pozitivno orijentisana.

Rešenje. Ako je S deo ravni S_2 ograničen sa L , tada je S krug. Orijentaciji krive L odgovara strana kruga S na koju je postavljen normalni vektor.



Analogno kao u Zadatku 84, utvrđujemo da je

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

pa primenom Stokesove teoreme sledi

$$\begin{aligned} I &= -2 \iint_S [(y+z) \cos \alpha + (x+z) \cos \beta + (x+y) \cos \gamma] d\sigma \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (2x + 2y + 2z) d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) d\sigma . \end{aligned}$$

Kako je podintegralna funkcija $x + y + z$ definisana na $S \subset S_2$, to mora da važi

$$x + y + z = \frac{3}{2} a ,$$

pa je dalje

$$I = -2\sqrt{3} a \iint_S d\sigma = -2\sqrt{3} a s ,$$

gde je s površina kruga S .

Poluprečnik R kruga S nam nije poznat. Da bismo odredili R , prethodno uočavamo sledeće činjenice. Prvo, normala na ravan S_2 , koja prolazi kroz koordinatni početak

$(0, 0, 0)$, istovremeno prolazi i kroz centar kruga S . Drugo, normalno rastojanje proizvoljne tačke (x_0, y_0, z_0) od ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ je ([3], str. 271)

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

U slučaju ravni S_2 je $A = B = C = 1$, $D = -3a/2$, pa je normalno rastojanje tačke $(0, 0, 0)$ od S_2

$$\rho = \frac{\left| -\frac{3}{2}a \right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a .$$

Treće, kružnica L pripada centralnoj sferi S_1 poluprečnika a . Zato je rastojanje tačke $(0, 0, 0)$ od svih tačaka sa L isto i iznosi a . Konačno, iz pravouglog trougla, čija su temena koordinatni početak $(0, 0, 0)$, centar kruga S i bilo koja tačka kružnice L , sledi

$$\rho^2 + R^2 = a^2 , \quad R^2 = a^2 - \rho^2 = a^2 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 , \quad s = R^2\pi = \frac{1}{4}a^2\pi .$$

Vrednost integrala I je

$$I = -\frac{\sqrt{3}}{2} a^3 \pi .$$

Nezavisnost krivolinijskog integrala od puta integracije

Ako je u prostu povezanoj prostornoj oblasti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} ,$$

tada je

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + c ,$$

$$c = u(x_0, y_0, z_0) ;$$

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = u(B) - u(A) .$$

86. Neka je D proizvoljna prostu povezano zatvorena oblast u xy -ravni ($z = 0$), takva da $(0, 0) \notin D$ i $A(1, 1), B(2, 2) \in D$. Takođe, neka je

$$I = \int_L \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

potpuni krivolinijski integral II vrste, u kome je $L = \widehat{AB} \subset D$ proizvoljna kriva i $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta.

- (1°) Odrediti λ tako da integral I ne zavisi od puta integracije L .
 (2°) Izračunati integral I za nađenu vrednost λ .

Rešenje. (1°) Kako je

$$P(x, y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^\lambda}, \quad Q(x, y) = \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^\lambda},$$

to je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2 - 2\lambda xy + 2\lambda y^2}{(x^2 + y^2)^{\lambda+1}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2\lambda xy - 2\lambda x^2}{(x^2 + y^2)^{\lambda+1}}.$$

Funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ su neprekidne u oblasti D za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ zbog $(0, 0) \notin D$, pa je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

dovoljan uslov za nezavisnost krivolinijskog integrala I od puta integracije. Iz poslednje jednakosti sledi

$$(1 - \lambda)(x^2 + y^2) = 0,$$

odakle je

$$\lambda = 1.$$

(2°) Prvo određujemo potencijal $u(x, y)$ prema formuli

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + c,$$

birajući konkretnu tačku $(x_0, y_0) = (0, 1) \in D$.

Za $\lambda = 1$ je

$$P(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

pa je $Q(0, y) = 1/y$ i

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x \frac{x - y}{x^2 + y^2} dx + \int_1^y \frac{1}{y} dy + c = \int_0^x \frac{x dx}{x^2 + y^2} - y \int_0^x \frac{dx}{x^2 + y^2} + \ln |y| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \Big|_{x=0}^{x=x} - \arctan \frac{x}{y} \Big|_{x=0}^{x=x} + \ln |y| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{x}{y} + c, \end{aligned}$$

gde je $c = u(x_0, y_0) = u(0, 1)$.

Izračunavanjem

$$u(A) = u(1, 1) = \frac{1}{2} \ln 2 - \arctan 1 + c, \quad u(B) = u(2, 2) = \frac{3}{2} \ln 2 - \arctan 1 + c,$$

za integral I se dobija

$$I = u(B) - u(A) = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2.$$

87. Neka je

$$I = \int_L f(x+y) \left[(1+3x^2+y^2) dx + (1+x^2+3y^2) dy \right]$$

potpuni krivolinijski integral II vrste, u kome je L proizvoljna kriva iz xy -ravni ($z=0$) i $f(t)$ realna diferencijabilna funkcija takva da je $f(1)=4$.

(1°) Odrediti $f(t)$ tako da integral I ne zavisi od puta integracije L .

(2°) Odrediti potencijal $u(x, y)$ ako je $u(0, 0) = 0$. Zatim izračunati integral I ako je $L = \widehat{AB}$ za $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$.

Rešenje. (1°) Za

$$P(x, y) = f(x+y)(1+3x^2+y^2), \quad Q(x, y) = f(x+y)(1+x^2+3y^2)$$

nalazimo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f'(x+y)(1+3x^2+y^2) + 2yf(x+y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f'(x+y)(1+x^2+3y^2) + 2xf(x+y)$$

i izjednačavanjem parcijalnih izvoda

$$f'(x+y)(1+3x^2+y^2) + 2yf(x+y) = f'(x+y)(1+x^2+3y^2) + 2xf(x+y).$$

Sređivanjem poslednje jednakosti sledi

$$(x+y)f'(x+y) - f(x+y) = 0$$

i, smenom $t = x+y$,

$$tf'(t) - f(t) = 0, \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t}.$$

Integracijom dobijene jednakosti nalazimo $\ln|f| = \ln|t| + k_1$ i $f(t) = kt$, gde je $k = \pm \exp(k_1)$ proizvoljna integraciona konstanta. S obzirom na $f(1) = k$ i uslov $f(1) = 4$ je $k = 4$, pa je

$$f(t) = 4t.$$

Zbog neprekidnosti funkcija $f(t) = 4t$, $f'(t) = 4$ za svako $t \in \mathbb{R}$ i neprekidnosti funkcije $t = t(x, y) = x+y$ za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, neprekidne su i funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zato za oblast D , u kojoj integral I ne zavisi od puta integracije, može da se uzme bilo koja prosto povezana zatvorena oblast u xy -ravni.

(2°) Za $f(t) = 4t$ je $f(x+y) = 4(x+y)$ i

$$P(x, y) = 4(x+y)(1+3x^2+y^2), \quad Q(x, y) = 4(x+y)(1+x^2+3y^2).$$

Birajući $(x_0, y_0) = (0, 0)$, za potencijal se dobija

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, y) dx + \int_0^y Q(0, y) dy + c \\ &= 4 \int_0^x (x+y)(1+3x^2+y^2) dx + 4 \int_0^y y(1+3y^2) dy + c \\ &= 4xy + 4xy^3 + 2x^2 + 2x^2y^2 + 4x^3y + 3x^4 + 2y^2 + 3y^4 + c \\ &= (x+y)^2(3x^2+3y^2-2xy+2) + c, \end{aligned}$$

gde je $c = u(0, 0)$. S obzirom na $u(0, 0) = 0$, sledi $c = 0$ i

$$u(x, y) = (x + y)^2 (3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2) .$$

Kako je

$$u(A) = u(-1, -1) = 24 , \quad u(B) = u(1, 1) = 24 ,$$

to je

$$I = u(B) - u(A) = 0 .$$

88. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} ,$$

gde je L proizvoljna pozitivno orijentisana kontura u xy -ravni ($z = 0$).

Rešenje. Neka je D prosto povezana zatvorena oblast u xy -ravni, ograničena sa L i takva da $(0, 0) \notin D$. Tada su funkcije

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} , \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

neprekidne u oblasti D , pa krivolinijski integral

$$I_1 = \int_{\widehat{AB}} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

ne zavisi od puta integracije $\widehat{AB} \subset D$. Kako je L kontura (zatvorena kriva), prema Teoremi 4.8.1 sledi

$$I = 0 .$$

Pretpostavimo sada da je $(0, 0) \in D$. Funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ su prekidne u tački $(0, 0)$, pa ne može da se govori o nezavisnosti krivolinijskog integrala I_1 od puta integracije. Zato pribegavamo drugačijem rešavanju. Oko tačke $(0, 0)$ opisujemo proizvoljnu konturu $L_1 \subset D$, takvu da je $L_1 \cap L = \emptyset$. Tada je L spoljna, a L_1 unutrašnja kontura dvostruko povezane oblasti D_1 . Kako $(0, 0) \notin D_1$, može da se primeni postupak i iskoristi zaključak iz Zadatka 50, prema kome je

$$I = 2\pi .$$

S obzirom na Teoremu 4.8.1 i $I \neq 0$ u slučaju $(0, 0) \in D$, integral I_1 zavisi od puta integracije. Do istog zaključka se dolazi i bez Teoreme 4.8.1. Ako je $L = A\widehat{X}_1B \cup B\widehat{X}_2A$, označavajući $L_1 = A\widehat{X}_1B$, $L_2 = A\widehat{X}_2B$ i izostavljajući podintegralni izraz, sledi

$$I = \int_{A\widehat{X}_1B} + \int_{B\widehat{X}_2A} = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 2\pi , \quad \int_{L_1} = 2\pi + \int_{L_2} ,$$

pa je u opštem slučaju

$$\int_{L_1} \neq \int_{L_2} .$$

89. Neka je D proizvoljna prosto povezana zatvorena prostorna oblast, takva da je $z > 0$ za sve tačke $(x, y, z) \in D$. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \int_L \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

gde je $L = \widehat{AB} \subset D$ proizvoljna kriva, $A \in S_1$, $B \in S_2$,

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 , \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

i $a, b > 0$.

Rešenje. Imajući u vidu da $(0, 0, 0) \notin D$, funkcije

$$P(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} , \quad Q(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} , \quad R(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi zadovoljavaju uslove Teoreme 4.8.3, pa u oblasti D postoji potencijal $u(x, y, z)$ i određuje se prema formuli

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + c .$$

Za $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ se dobija

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x P(x, y, z) dx + \int_0^y Q(0, y, z) dy + \int_1^z R(0, 0, z) dz + c \\ &= \int_0^x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \int_0^y \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} dy + \int_1^z dz + c \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + c_1 , \end{aligned}$$

gde je $c = u(x_0, y_0, z_0) = u(0, 0, 1)$ i $c_1 = c - 1$.

Kako je $A(x_1, y_1, z_1) \in S_1$, $B(x_2, y_2, z_2) \in S_2$, važi

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 , \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = b^2 ,$$

pa je

$$I = u(B) - u(A) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} + c_1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - c_1 = b - a .$$

90. Izračunati potpuni krivolinijski integral II vrste

$$I = \oint_L f(x^2 + y^2 + z^2)(x dx + y dy + z dz) ,$$

gde je L proizvoljna kontura i $f(t)$ neprekidna realna funkcija sa neprekidnim izvodom $f'(t)$ za svako $t \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Kako je

$$P(x, y, z) = x f(x^2 + y^2 + z^2) , \quad Q(x, y, z) = y f(x^2 + y^2 + z^2) , \quad R(x, y, z) = z f(x^2 + y^2 + z^2) ,$$

to je

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf'(x^2 + y^2 + z^2) , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2xz f'(x^2 + y^2 + z^2) , \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = 2yz f'(x^2 + y^2 + z^2) . \end{aligned}$$

Funkcije $f(t)$, $f'(t)$ i $t = t(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su neprekidne, pa su neprekidne funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, kao i njihovi navedeni izvodi za svako $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ako je D prosto povezana oblast, integral

$$\int_{\widehat{AB}} f(x^2 + y^2 + z^2)(x dx + y dy + z dz)$$

ne zavisi od puta integracije $\widehat{AB} \subset D$ prema Teoremi 4.8.3. Budući da je L zatvorena kriva, prema Teoremi 4.8.1 tada je i

$$I = 0 .$$

PRILOG

Česta je pojava određenih integrala oblika

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^m \varphi \cos^n \varphi d\varphi ,$$

gde je $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Takvi su, npr., integrali u Zadacima 31 i 34, koje smo rešavali transformacijom podintegralne funkcije. U slučaju velikih brojeva m, n , ovakav način rešavanja je izuzetno naporan. Rešavanje je neuporedivo jednostavnije pomoću beta i gama funkcije ([1], str. 404–414), pri čemu $m, n \geq 0$ mogu da budu proizvoljni realni brojevi.

Beta funkcija ili *Eulerov integral drugog reda* je određen integral

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx ,$$

gde su $p, q > 0$ realni brojevi. Ako su p, q prirodni brojevi, za beta funkciju važi

$$B(p, q) = \frac{(p-1)! (q-1)!}{(p+q-1)!} .$$

Gama funkcija ili *Eulerov integral prvog reda* je nesvojstveni integral

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx ,$$

gde je $p > 0$ realan broj. Za gama funkciju važi:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} , \quad \Gamma(1) = 1 , \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

i, ako je p prirodan broj,

$$\Gamma(p) = (p-1)! .$$

Veza između beta i gama funkcije iskazana je jednakošću

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} .$$

Rešavanje integrala I upotrebom beta i gama funkcije ilustrujemo sa tri primera.

Primer 1. Uvođenjem smena $t = \sin \varphi$ i $x = t^2$ redom, integral iz Zadatka 34,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi d\varphi ,$$

postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^5 \varphi \cos^4 \varphi d(\sin \varphi) = \int_0^{\pi/2} \sin^5 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^2 d(\sin \varphi) \\ &= \int_0^1 t^5 (1 - t^2)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1 - x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{3-1} (1 - x)^{3-1} dx = \frac{1}{2} B(3, 3) = \frac{1}{2} \frac{2! 2!}{5!} = \frac{1}{60} . \end{aligned}$$

Umesto smene $t = \sin \varphi$ može da se koristi smena $t = \cos \varphi$. Ove dve smene su ravnopravne.

Primer 2. Uvođenjem smena $t = \sin \varphi$ i $x = t^2$ redom, integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi$$

postaje

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi d(\sin \varphi) = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^{3/2} d(\sin \varphi) \\ &= \int_0^1 t^4 (1 - t^2)^{3/2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{3/2} (1 - x)^{3/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{5/2-1} (1 - x)^{5/2-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)} . \end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom osobine $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ izračunavamo

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

pa je

$$I = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right)^2}{4!} = \frac{3}{256}\pi.$$

Primer 3. Uvođenjem smena $t = \cos \varphi$ i $x = t^2$ redom, za integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^6 \varphi d\varphi$$

se dobija

$$\begin{aligned}I &= - \int_0^{\pi/2} \sin^5 \varphi d(\cos \varphi) = - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi)^{5/2} d(\cos \varphi) \\ &= - \int_1^0 (1 - t^2)^{5/2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-1/2} (1 - x)^{5/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{1/2-1} (1 - x)^{7/2-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)}.\end{aligned}$$

Kako je

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \sqrt{\pi},$$

to je

$$I = \frac{5}{32} \pi.$$

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.3 (075.8)

СТЕФАНОВИЋ, Лидија

Integrali: krivolinijski, dvojni, trojni,
površinski, Deo II: za studente tehničkih
Fakulteta / Lidija Stefanović. – 1. izd. –
Niš: Studentski kulturni centar, 2009 (Niš:
Petrograf). – VI, 135 str. : graf. prikazi; 25 cm

Tiraž 100

ISBN 978-86-7757-154-2

а) Интеграли
COBISS.SR-ID 154627340