

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 4: Афине трансформације равни

Тијана Шукиловић

22. октобар 2023.

Дефиниција афиног пресликавања

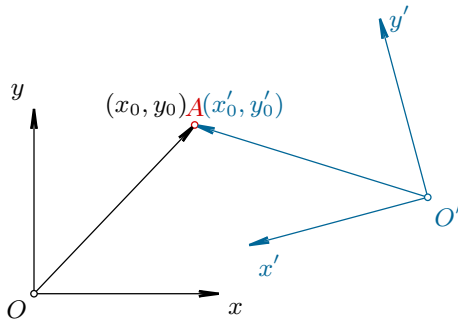
Дефиниција 1.1

Нека је $\bar{f} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака \mathbb{E} .

Афино пресликавање $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем \bar{f} вектора у смислу да је:

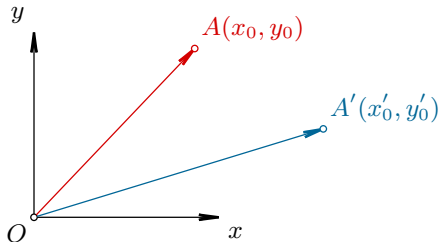
$$f(M) = M', \quad f(N) = N' \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Пасивно гледиште

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Активно гледиште

Афина пресликавања равни

Дефиниција 2.1

Афино пресликавање равни \mathbb{E}^2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

слике базних вектора

слика координатног
почетка

Афина пресликавања равни

Дефиниција 2.1

Афино пресликавање равни \mathbb{E}^2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

слике базних вектора

слика координатног
почетка

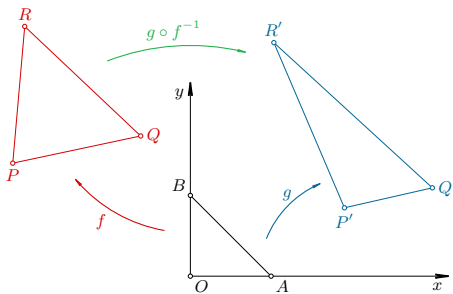
Пример 1

Одредити формуле афиног пресликавања f равни које тачке $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ пресликава редом у тачке $O'(2,2)$, $A'(4,5)$, $B'(3,1)$.

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.1

Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава три неколинеарне тачке P, Q, R у три неколинеарне тачке P', Q', R' , редом.



Слика 2: Доказ теореме

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је

$$\frac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|;$$

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колонеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је
$$\frac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|;$$
- Пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колонеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је
$$\frac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|;$$
- Пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни;
- Чувају центар масе и барицентричке координате.

Примери

Пример 2

Дате су тачке $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$; $A'(4, 5)$, $B'(8, 7)$, $C'(6, 9)$, $D'(2, 7)$.

- а) Одредити једначине афиног пресликавања које пресликава квадрат $ABCD$ у паралелограм $A'B'C'D'$.
- б) Одредити једначину слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива?
- в) Колика је површина слике круга?
- г) Да ли пресликавање чува оријентацију?

Представљање афиних пресликавања матрицама

A – линеарни део

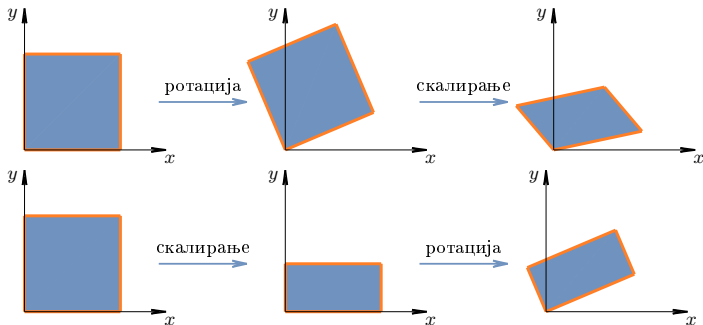
b – транслаторни део

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A_b

Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликавања.



Слика 3: Афина пресликавања не комутирају!

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

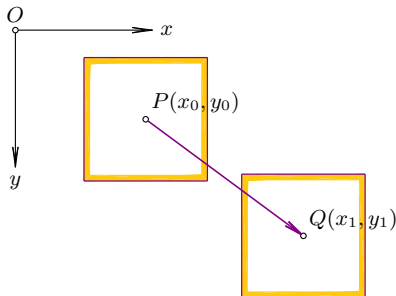
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?
- Да ли транслације комутирају?

Примери



Слика 4: „Pan” алатка

Пример 3

Представити као афину трансформацију „pan” алатку: Ако је миш притиснут у $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$, слика се транслира из P у Q .

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ :

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ :

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 4

Одредити 3×3 матрицу ротације око тачке $S(1, -2)$ за угао од $\frac{2\pi}{3}$, као и формуле тог пресликавања.

У коју тачку се пресликава координатни почетак при овој ротацији?

Матрица ротације

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad - \text{ матрица ротације за угао } \phi.$$

Теорема 2.4

Особине матрице ротације:

- $(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$;
- $\det R_\phi = 1$;
- $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta} = R_\theta R_\phi$.

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x -осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x -осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Рефлексija у односу на праву

Рефлексija у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x -осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексija у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 5

Одредити формуле рефлексije у односу на праву:

а) $x = -1$; б) $y = 3$; в) $4x - 3y + 6 = 0$.

Матрица рефлексije

$$S_\phi := \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} - \text{матрица рефлексije.}$$

Теорема 2.5

Особине матрице рефлексije:

- $(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$;
- $S_\phi^2 = Id$;
- $\det S_\phi = -1$;
- $S_\phi S_\theta = R_{\phi-\theta}$.

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање са центром у произвољној тачки:

$$\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексија у односу на x -осу (y -осу)?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексija у односу на x -осу (y -осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2}$ централна рефлексija у односу на тачку Q ?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексija у односу на x -осу (y -осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2}$ централна рефлексija у односу на тачку Q ?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?

Примери

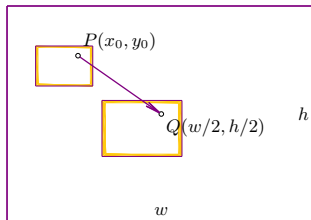
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексija у односу на x -осу (y -осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2}$ централна рефлексija у односу на тачку Q ?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?
- Да ли скалирање чува однос дужине и ширине, углове?
А хомотетија?

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom in*”: Кликом миша у тачку $P(x_0, y_0)$, слика се увећава λ пута, а тачка P постаје центар екрана резолуције $w \times h$.



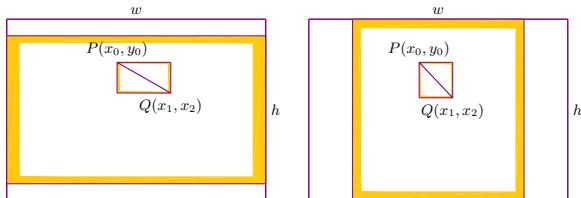
Слика 5: „*Zoom in*” алатка

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

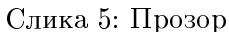
- „*Zoom to window*”: Миш је притиснут у тачки $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$. Увећати прозор са дијагоналом PQ преко целог екрана. При томе водити рачуна да се увећана слика уклопи у екран или по ширини, или по висини – у зависности од пропорција прозора. Сматрати да је екран резолуције $1920 : 1080 = 16 : 9$.



Слика 5: „*Zoom to window*” алатка

Пример 6

- Пресликати прозор чије су лево-доње теме $A(a_1, a_2)$ и горње-десно теме $C(c_1, c_2)$ у прозор одређен дијагоналним теменима $P(p_1, p_2)$ и $R(r_1, r_2)$.

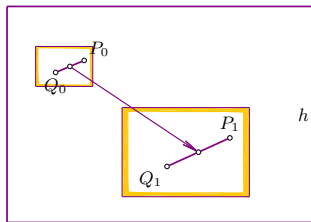


Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Pinch to zoom*”: У почетном тренутку додир једног прста је регистрован у тачки P_0 , а другог у тачки Q_0 . У следећем тренутку први прст се налази у тачки P_1 , а други у тачки Q_1 . Увећати слику за однос дужина $\lambda = P_1Q_1 : P_0Q_0$, при чему се средиште дужи P_0Q_0 пресликава у средиште дужи P_1Q_1 .



Слика 5: „*Pinch to zoom*” алатка

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x -осе:

$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x -осе:

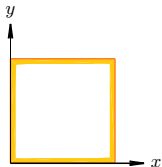
$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање са коефицијентом λ у правцу y -осе:

$$\mathcal{S}_y(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Реализација ротације помоћу смицање

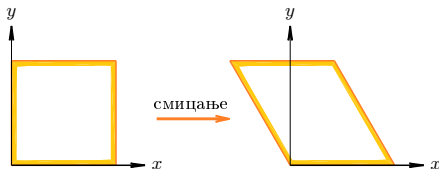
$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

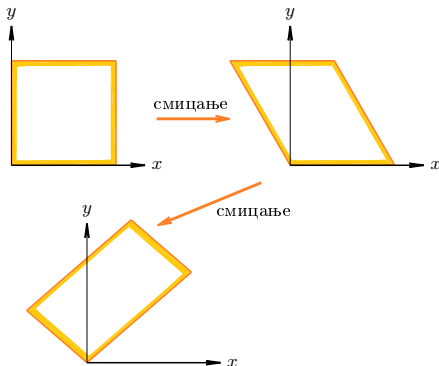
$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

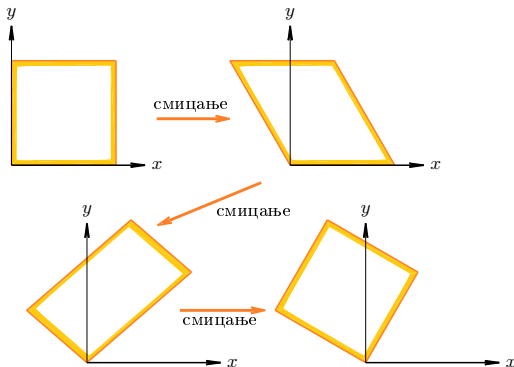
$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E} произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E} произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије које чувају оријентацију зову се **кретања**.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E} произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије које чувају оријентацију зову се **кретања**.

Теорема 2.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексција у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E} произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије које чувају оријентацију зову се **кретања**.

Теорема 2.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексција у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Које трансформације равни су кретања?