УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 8: Безијеове криве и фрактали

Тијана Шукиловић

26. новембар 2023.

Безијеове криве

Дефиниција 1.1

Нека су $P_0, P_1 \ldots P_n$, $n \geq 2$ тачке равни. Безијеова крива степена n је:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Тачке P_i називају се контролне тачке, а полиноми $B_i(t)$ Бернштајнови полиноми или базне функције.
Полигонска линија $P_0 P_1 \ldots P_n$ се зове контролна полигонска линија.

Безијеове криве на прозивољном интервалу

- $t \in [0, 1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

Безијеове криве на прозивољном интервалу

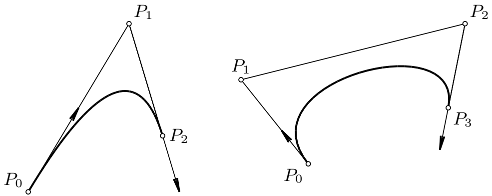
- $t \in [0, 1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

- $u \in [a, b]$:

$$\alpha_n(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{n-i} P_i.$$

Безијеове криве 2. и 3. степена

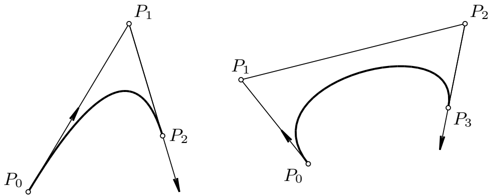


Слика 1: Безијеове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

Безијеове криве 2. и 3. степена



Слика 1: Безијеове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

Крива 3. степена одређена је са четири контролне тачке:

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1].$$

Матрична репрезентација Безијеове криве

$$\alpha_2(t) = \begin{pmatrix} 1, & t, & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 1

Извести формуле матричне репрезентације кубне Безијеове криве.

Особине

- $\deg \alpha_n = n.$

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 je $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 je $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

Теорема 1.1

Безијеова крива степена два је део параболе.

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0, 1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \dots, n-1$

   $\vdots$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \dots, n-1$

   $\vdots$

3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \dots, n-k$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0, 1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \dots, n-1$

   $\vdots$

3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \dots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \dots, n-1$

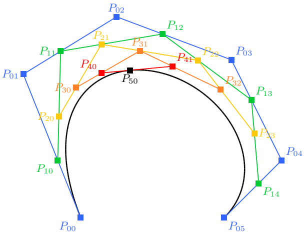
   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \dots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

$P_{n-1\,0}P_{n-1\,1}$ – тангента на криву у тачки t

Де-Кастељау алгоритам

Пример 2

Показати да је де-Кастељау алгоритам коректан.



Слика 2: Де-Кастељау алгоритам за криву 5. степена и $t = 0.4$

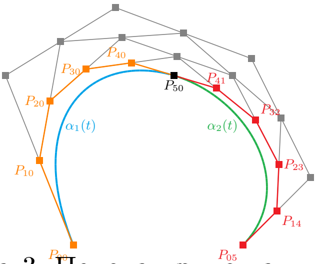
- Цртање кривих степена ≤ 3[1]
- Цртање криве 5. степена

[1] Бранко Грбић 2/20 и Маша Цуцић 34/20

Подела криве на два дела

Криву α делимо на две криве α_1 и α_2:

$$\alpha_1 : P_0 = P_{00}, P_{10}, P_{20}, \dots P_{n0} = \alpha(t),$$
$$\alpha_2 : \alpha(t) = P_{n0}, P_{n-11}, P_{n-22}, \dots, P_{0n} = P_n.$$



Слика 3: Подела криве на два дела

Матрична верзија де-Кастељау алгоритма

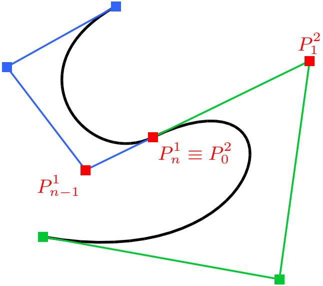
Пример 3

Извести формуле матричне верзије де-Кастељау алгоритма за криву степена 2.

$$S_{[0,t_0]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-t_0 & t_0 & 0 \\ (1-t_0)^2 & 2t_0(1-t_0) & t_0^2 \end{pmatrix}$$

$$S_{[1-t_0,1]} = \begin{pmatrix} (1-t_0)^2 & 2t_0(1-t_0) & t_0^2 \\ 0 & 1-t_0 & t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Глатко спајање кривих

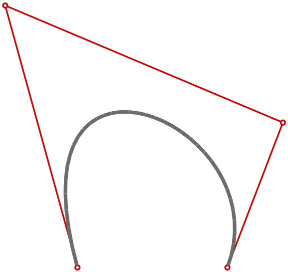


Слика 4: Глатко спајање кривих

Повећање степена криве

$\alpha_n(t): \; P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t)$:

$$Q_0 = P_0, \; Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \; 1 \leq i \leq n, \; Q_{n+1} = P_n.$$

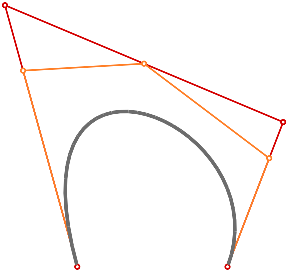


Слика 5: Повећање степена Безијеове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \; P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \; Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \; 1 \le i \le n, \; Q_{n+1} = P_n.$$

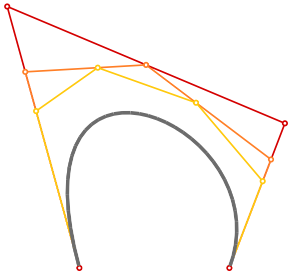


Слика 5: Повећање степена Безијеове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ \ 1 \le i \le n, \ Q_{n+1} = P_n.$$

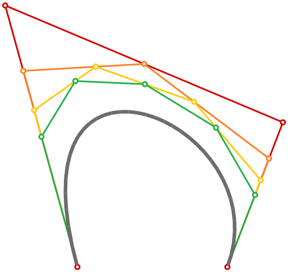


Слика 5: Повећање степена Безијеове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t):\ P_0,\ldots,P_n,\quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0,\ Q_i = \frac{i}{n+1}P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)P_i,\ 1 \le i \le n,\ Q_{n+1} = P_n.$$

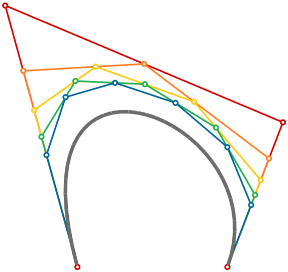


Слика 5: Повећање степена Безијеове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ \ 1 \le i \le n, \ Q_{n+1} = P_n.$$

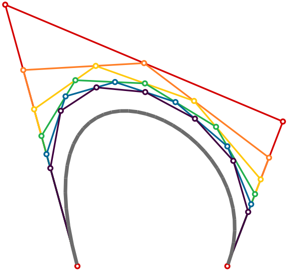


Слика 5: Повећање степена Безијеове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ 1 \leq i \leq n, \ Q_{n+1} = P_n.$$



Слика 5: Повећање степена Безијеове криве

Примери

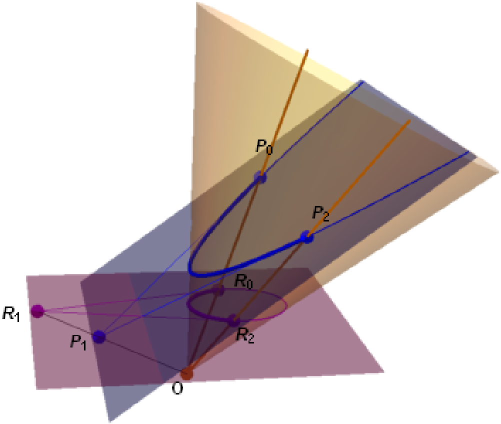
Пример 4

а) Одредити Безијеову криву $\alpha_2(t)$ чије су контролне тачке $P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$.

б) Одредити једначину тангенте на криву $\alpha_2(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$ и показати да је тангента паралелна са правом P_0P_2.

в) Повећати степен криве за 1.

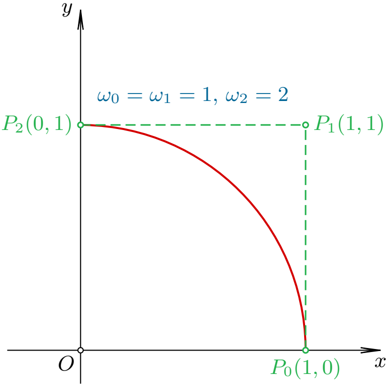
Рационалне Безијеове криве степена 2



Слика: Пројективна еквивалентност елипсе и параболе

Део круга као RB-крива

Пример 5



Слика 7: Четвртина круга: $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

као RB-крива: $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y = \dfrac{2t}{1+t^2},\ t \in [0,1].$

Рационалне Безијеове (RB) криве

Рационална Безијеова крива степена n са контролним тачкама $P_0, \ldots, P_n$ и тежинама $\omega_0, \ldots, \omega_n > 0$ је дата параметризацијом:

$$r_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{i,n}(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

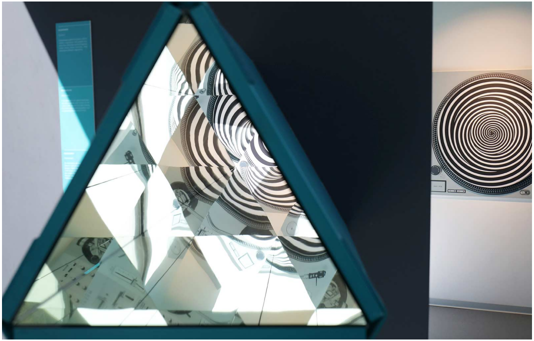
где су $B_{i,n}(t)$ Бернштајнови полиноми.

Особине RB-кривих

- $r_n(0) = P_0, \quad r_n(1) = P_n.$
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- Особина конвексног омотача.
- Пројективна инваријантност.
- Особина линеарне прецизности.
- ...

Фрактали

Фрактал = геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине.

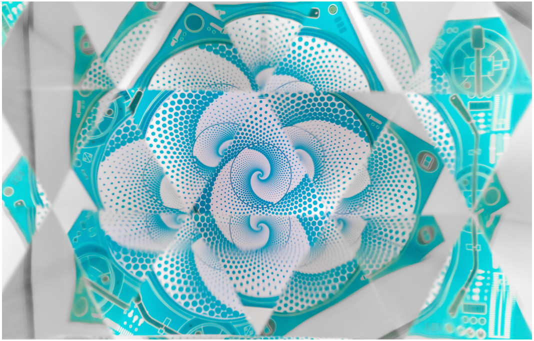


Слика: Музеј Илузија, Београд[2]

[2] преузето са: https://www.muzejiluzija.rs/eksponat/kaleidoskop/

Фрактали

Фрактал = геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине.

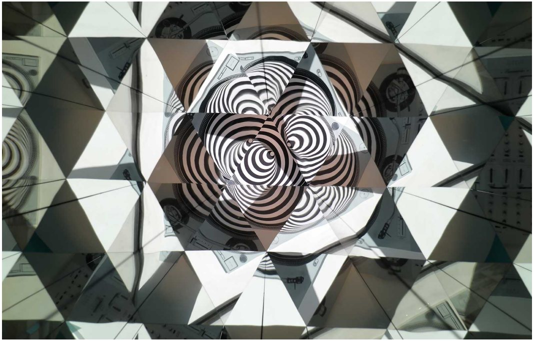


Слика: Музеј Илузија, Београд[2]

[2] преузето са: https://www.muzejiluzija.rs/eksponat/kaleidoskop/

Фрактали

Фрактал = геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине.



Слика: Музеј Илузија, Београд[2]

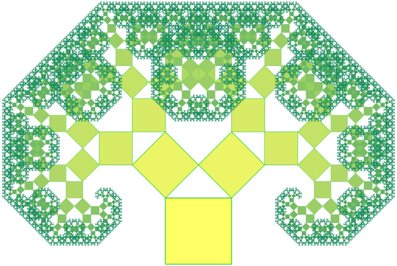
[2]преузето са: https://www.muzejiluzija.rs/eksponat/kaleidoskop/

Фрактали

Фрактал = геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине.

Подела фрактала:

1) геометријски 2) алгебарски 3) стохастички



Слика: Питагорино дрво[3]

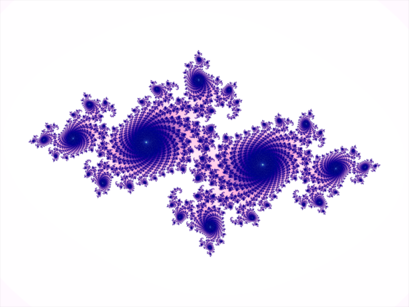
[3] извор:Wikipedia

Фрактали

Фрактал = геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине.

Подела фрактала:

1) геометријски 2) алгебарски 3) стохастички

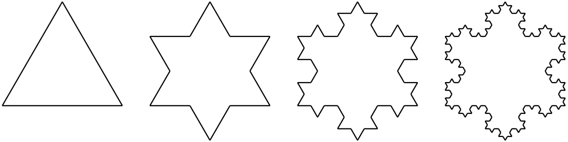


Слика: Жулијин скуп[3]

[3] извор:Wikipedia

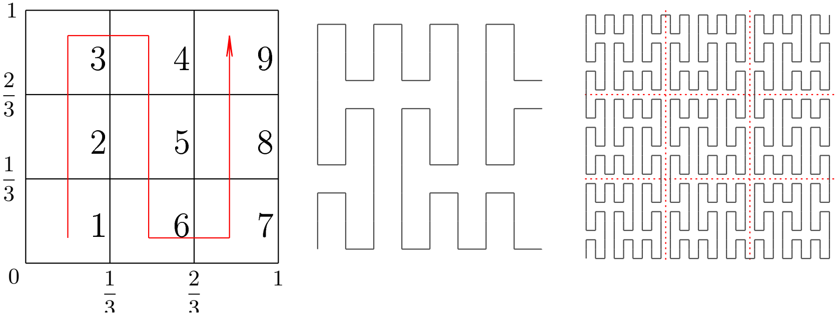
Геометријски фрактали

- Геометријски фрактал = самослична фигура чији се општи облик задаје генератором.



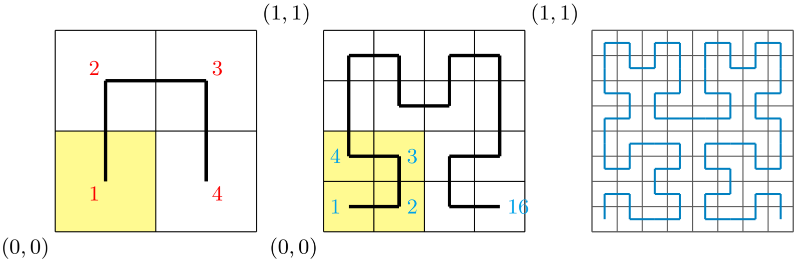
Слика 10: Прве четири итерације Кохове криве

Пеанова крива



Слика 11: Прве три итерације Пеанове криве

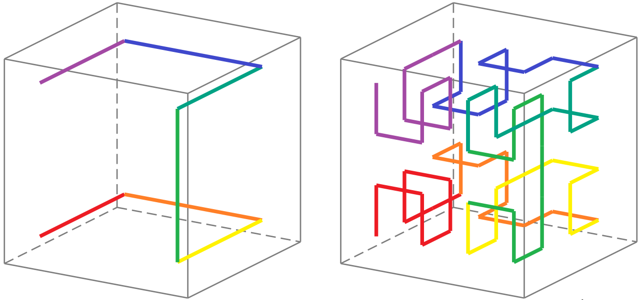
Хилбертова крива



Слика 12: Прве три итерације Хилбертове криве

Примена геометрисјких фрактала

Примена: када је потребно линеаризовати вишедимензионе податке јер представљају оптималан начин да се вишедимензиони скупови пресликају на једнодимензионе низове.



Слика 13: Прве две итерације тродимензионе Хилбертове криве