УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

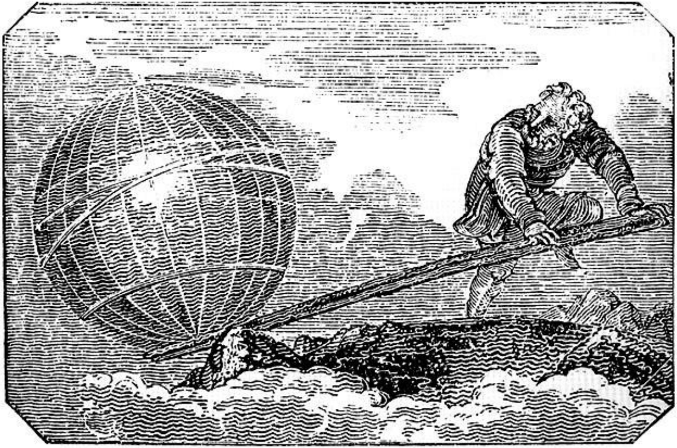
Геометрија И–смер

део 2: Центар масе

Тијана Шукиловић

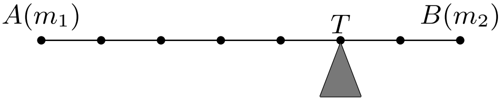
8. octobар 2023.

Архимедов закон полуге



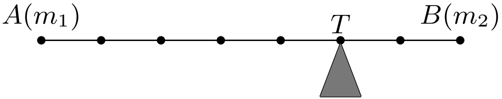
Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



O – произвољна тачка

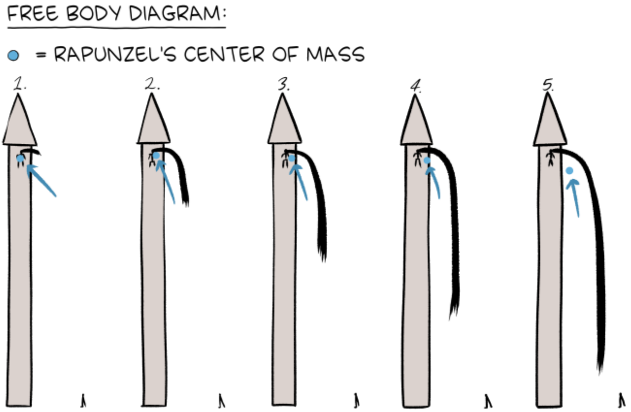
Центар маса тачака $A(m_1)$ и $B(m_2)$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right)$$

Saturday Morning Breakfast Cereal (smbc-comic.com)[1]

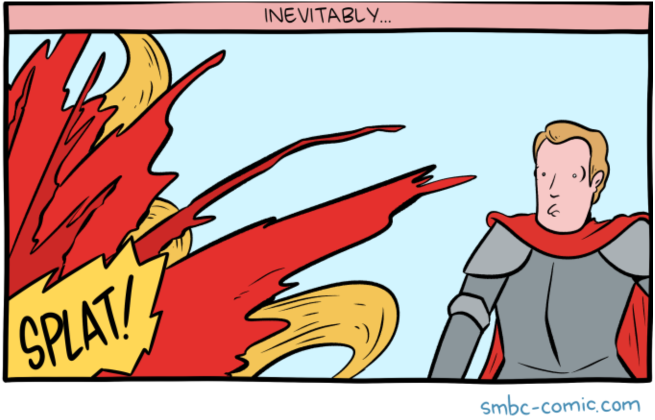
[1] http://smbc-comics.com/comic/rapunzel-2

Saturday Morning Breakfast Cereal (smbc-comic.com)[1]



[1] http://smbc-comics.com/comic/rapunzel-2

Saturday Morning Breakfast Cereal (smbc-comic.com)[1]



[1] http://smbc-comics.com/comic/rapunzel-2

Проблем клацкалице

Пример игрице са клацкалицом[2]

[2] (студентски семинарски рад 2016/17 године, аутори: Милена Куртић, Лука Главоњић)

Проблем клацкалице

Пример игрице са клацкалицом[2]

Пример 1

На једном крају полуге дужине $3m$ седи дете масе $12kg$, а на другом крају је џак са играчкама масе $4kg$.
а) На ком растојању од детета треба поставити ослонац да би полуга била у равнотежи?

[2] (студентски семинарски рад 2016/17 године, аутори: Милена Куртић, Лука Главоњић)

Проблем клацкалице

Пример игрице са клацкалицом[2]

Пример 1

На једном крају полуге дужине $3m$ седи дете масе $12kg$, а на другом крају је џак са играчкама масе $4kg$.
а) На ком растојању од детета треба поставити ослонац да би полуга била у равнотежи?
б) Ако се један крај полуге постави на земљу, а џак са играчкама помери на средину, колику масу подиже дете држећи други крај полуге?

[2] (студентски семинарски рад 2016/17 године, аутори: Милена Куртић, Лука Главоњић)

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Теорема 1.1

Тежишне дужи се секу у центру маса.

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Теорема 1.1

Тежишне дужи се секу у центру маса.

За $m_1 = m_2 = m_3 = m$: центар маса = тежиште троугла!

Домаћи: Тежиште и центар масе тетраедра

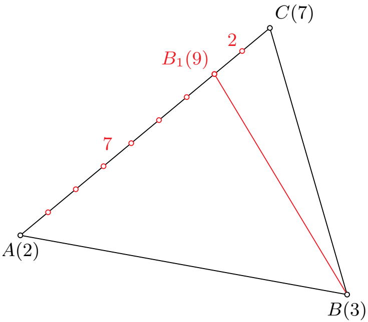
Пример 2

Нека je $ABCD$ тетраедар и T тачка таква да важи $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Тежишном дужи тетраедра се назива дуж која спаја теме тетраедра са тежиштем напсрамне пљосни. Доказати да се тежишне дужи тетраедра секу у тачки T и да их она дели у односу $3:1$. Тачка T се назива тежиште тетраедра.

Примери

Пример 3

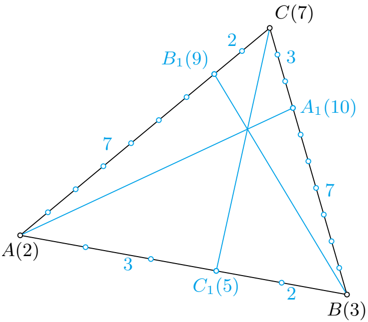
Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 3

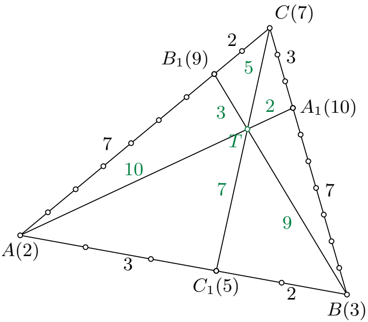
Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 3

Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



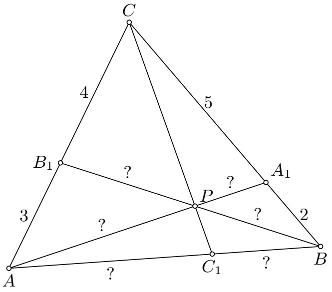
Примери

Пример 4

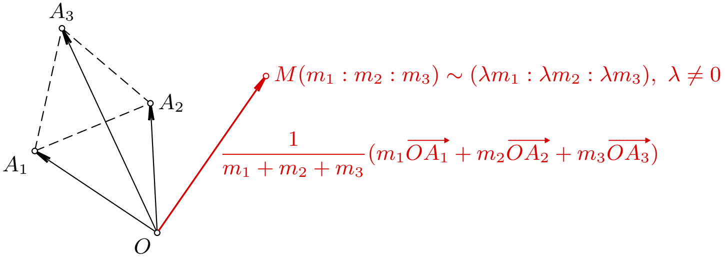
Дат је $\triangle ABC$ и на његовим ивицама тачке A_1 и B_1 такве да $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, $|BA_1| : |A_1C| = 2 : 5$.

а) Ако је $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$, у ком односу P дели AA_1 и BB_1?

б) Ако је $\{C_1\} = CP \cap AB$, у ком односу C_1 дели AB?

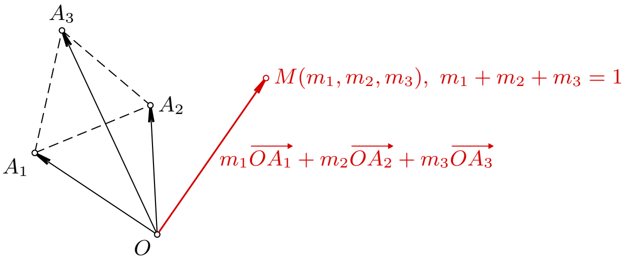


Барицентричке координате



Слика 1: Хомогене барицентричке координате

Барицентричке координате



Слика 1: Нехомогене барицентричке координате

Смисао барицентричких координата

Одредити барицентричке координате тачке M значи одредити масе које треба ставити у темена $\triangle A_1A_2A_3$ да би центар масе тог система била тачка M.

Пример 5

За $\triangle ABC$ барицентричке координате тежишта су $T(1:1:1)$ (хомогене), тј. $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (нехомогене).

Пример

Пример 6

У равни је дат троугао ABC, $A(6,8)$, $B(6,0)$, $C(0,8)$.

а) Одредити хомогене барицентричке координате тачке $M(3,4)$.

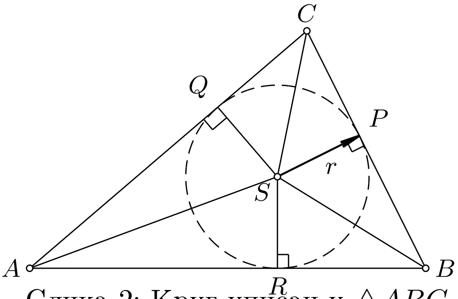
б) Одредити нехомогенте барицентричке координате тачке $N(2,4)$.

в) Да ли се тачке M и N налазе унутар троугла ABC?

Пример - центар уписаног круга

Пример 7

Одредити координате центра уписаног круга у $\triangle ABC$.



Слика 2: Круг уписан у $\triangle ABC$

Пример - “превртљиви лаптоп”

Пример 8

Претпоставимо да је лаптоп направљен од хомогеног материјала и да је основа лаптопа дупло тежа од поклопца. Како год отворили поклопац лаптопа он ће стабилно стајати на столу. С друге стране, ако лаптоп ослонимо поклопцем на сто и подижемо основу лаптопа у једном моменту лаптоп ће се “претурити”. Колики је угао између основе и поклопца у том моменту? (Занемарити дебљину основе и поклопца)