УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 10: Полиедри

Тијана Шукиловић

11. децембар 2023.

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

[1] Семинарски рад 2019/20: Петар Магенхајм 443/19

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар[1]

[1] Семинарски рад 2019/20: Петар Магенхајм 443/19

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар[1]
- повезана површ

[1] Семинарски рад 2019/20: Петар Магенхајм 443/19

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

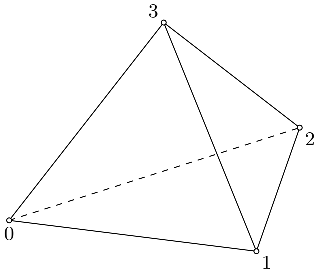
- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Пример 1

Одредити табелу повезаности тетраедра.



Слика 1: Тетраедар

Примери

Пример 2

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

1) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$, $p_1 = \langle 0, 2, 4, 5\rangle$, $p_2 = \langle 3, 2, 0\rangle$, $p_3 = \langle 1, 0, 3\rangle$.

Примери

Пример 2

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

2) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \ldots, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 7, 4\rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 6, 7\rangle$, $p_2 = \langle 2, 3, 5, 6\rangle$, $p_3 = \langle 3, 0, 4, 5\rangle$,
$p_4 = \langle 8, 9, 10\rangle$.

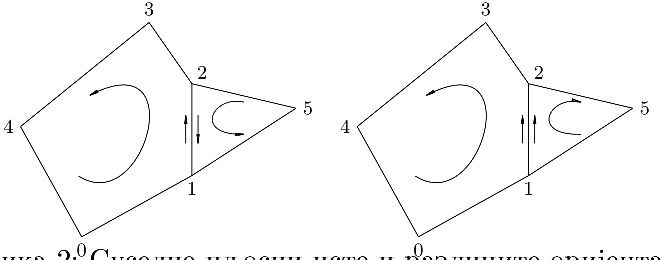
Примери

Пример 2

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

3) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_7\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 3\rangle$, $p_1 = \langle 0, 1, 5, 4\rangle$, $p_2 = \langle 1, 2, 6, 5\rangle$, $p_3 = \langle 5, 6, 7\rangle$,
$p_4 = \langle 7, 4, 0, 3\rangle$, $p_5 = \langle 2, 6, 7, 3\rangle$.

Оријентабилност полиедарске површи



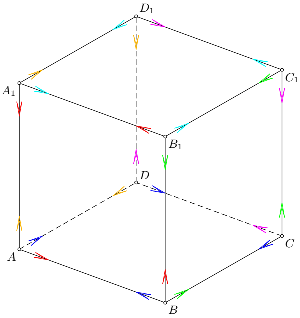
Слика 2: Суседне пљосни исте и различите оријентације

$\mathcal{M}$ – оријентабилна ако су сваке две суседне пљосни исте оријентације.

Оријентабилност

Пример 3

Коцка је оријентабилна.



Слика 3: Усклађивање оријентације коцке

Оријентабилност

Теорема 1.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Оријентабилност

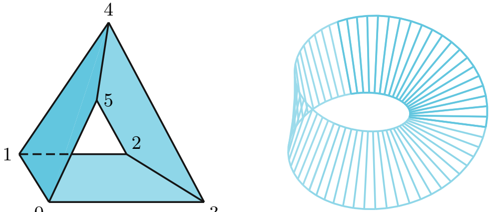
Теорема 1.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Теорема 1.2

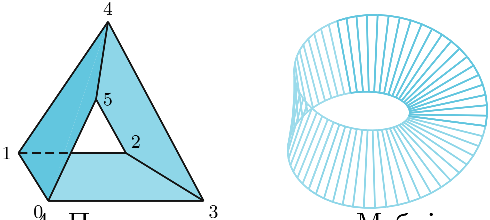
Сваки прост полиедар је оријентабилна површ.

Мебијусова трака



Слика 4: Полиедарски модели Мебијусове траке

Мебијусова трака



Слика 4: Полиедарски модели Мебијусове траке

Пример 4

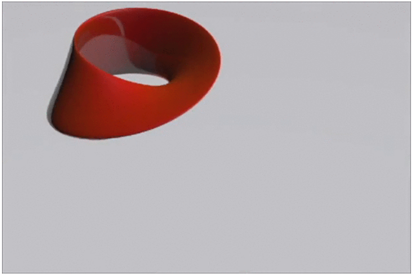
Полиедарски модел Мебијусове траке је неоријентабилан.

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
  Кретање по Мебијусовој траци

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку.



Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

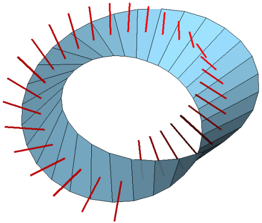
Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.

Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

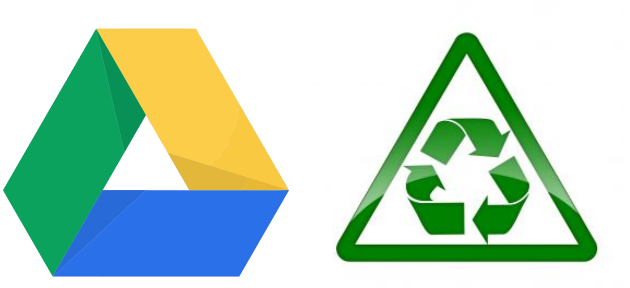
Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.
- Немогуће је дефинисати непрекидну нормалу на Мебијусовој траци.



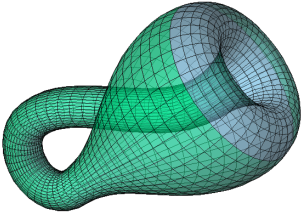
Слика: Нормале на Мебијусову траку

Примери Мебијусове траке



Слика: Лого за Google Drive (лево) и међународни симбол за рециклажу (десно)

Клајнова боца

Слика: Клајнова боца

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \boxed{T} - \boxed{I} + \boxed{P}$$

темена ивице пљосни

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \underset{\text{темена}}{\boxed{T}} - \underset{\text{ивице}}{\boxed{I}} + \underset{\text{пљосни}}{\boxed{P}}$$

Теорема 1.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \boxed{T} - \boxed{I} + \boxed{P}$$

темена ивице пљосни

Теорема 1.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

За полиедре важи:

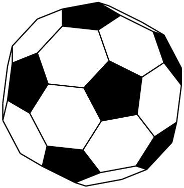
$$\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2\boxed{r}$$

род полиедра

Примери

Пример 5

Ако је $\mathcal{M}$ полиедарски модел сфере, тада је $\chi(\mathcal{M}) = 2$.



Слика 8: Полиедарски модел сфере

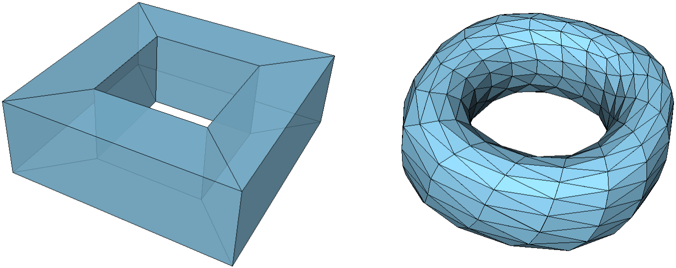
Пример 6

Ојлерова карактеристика Мебијусове траке је нула.

Примери

Пример 7

Род торуса је 1.



Слика: Полиедарски модели торуса

Примери

Пример 8

Дата је полиедарска површ:

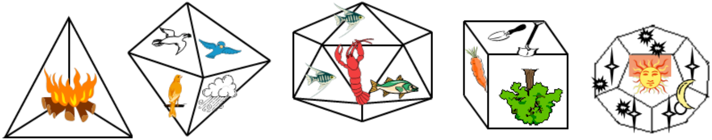
$$\begin{aligned} p_0 &= \langle 0,1,4,3\rangle, & p_5 &= \langle 4,5,8,7\rangle,\\ p_1 &= \langle 1,2,5,4\rangle, & p_6 &= \langle 8,7,1,2\rangle,\\ p_2 &= \langle 2,0,3,5\rangle, & p_7 &= \langle 0,1,7,6\rangle\\ p_3 &= \langle 6,8,5,3\rangle, & p_8 &= \langle 0,6,8,2\rangle.\\ p_4 &= \langle 6,3,4,7\rangle \end{aligned}$$

а) Доказати да је она полиедар, тј. да нема руб.
б) Израчунати њену Ојлерову карактериску и род.

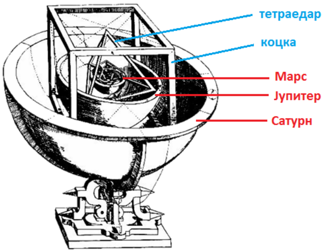
Платонова тела

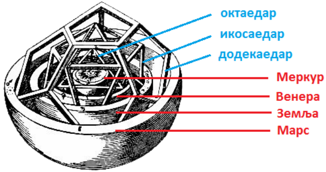
Платон (457 – 347 п.н.е.), „Тимај” или „О метафизици”

- тетраедар = сувоћа ватре
- октаедар = покретљивост ваздуха
- икосаедар = влажност воде
- хексаедар (коцка) = стабилност земље
- додекаедар = Универзум



Јохан Кеплер (1571 – 1630)





Слика: Кеплеров Соларни систем

Платонова тела

Теорема 1.4

Постоји тачно пет Платонових тела.

Платонова тела

Теорема 1.4

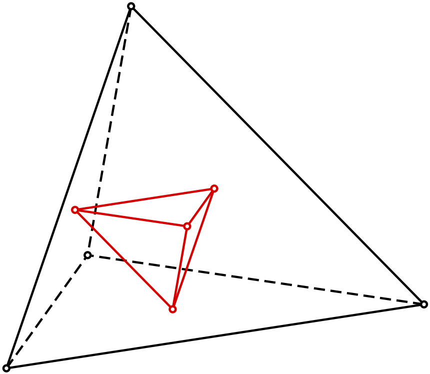
Постоји тачно пет Платонових тела.

полиедар	p	q	T	I	P
тетраедар	3	3	4	6	4
коцка (хексаедар)	3	4	8	12	6
октаедар	4	3	6	12	8
додекаедар	3	5	20	30	12
икосаедар	5	3	12	30	20

p - број ивица из једног темена;

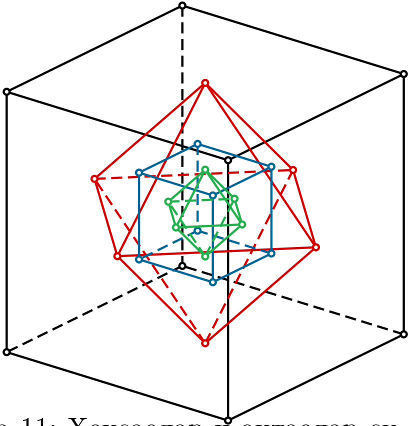
q - број ивица једне пљосни.

Дуалност Платонових тела



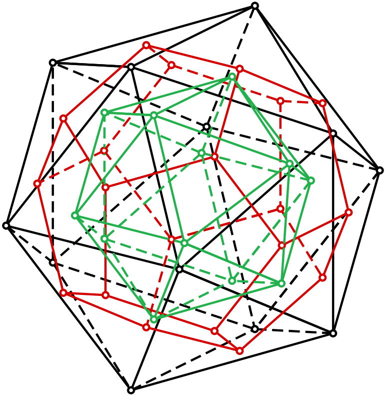
Слика 11: Тетраедар је дуалан самом себи

Дуалност Платонових тела



Слика 11: Хексаедар и октаедар су дуални

Дуалност Платонових тела



Слика 11: Икосаедар и додекаедар су дуални

Примери

Пример 9

Одредити запремину тетраедра и њему дуалног тела. Скицирати!

Пример 10

Дат је тетраедар $ABCD$ ивице 2. Израчунати запремину октаедра чија су темена средишта ивица датог тетраедра. Скицирати!