

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

deo 3: Трансформације координата и неки важни
координатни системи

Тијана Шукиловић

15. октобар 2023.

Дефиниција афиног пресликавања

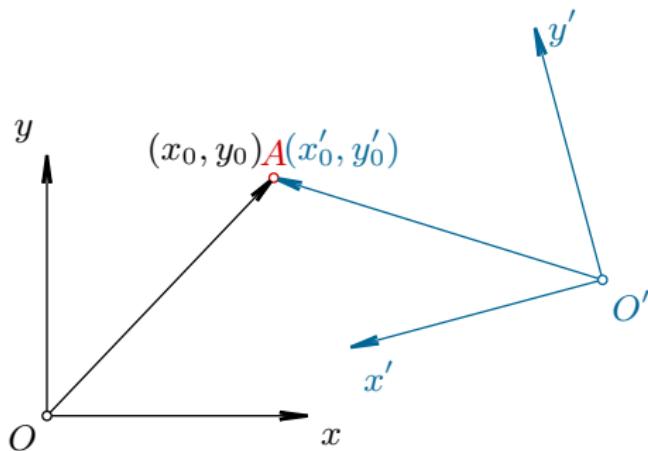
Дефиниција 1.1

Нека је $\bar{f} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ линеарно пресликање векторског простора који је придружен простору тачака \mathbb{E} .

Афино пресликање $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ је пресликање тачака које је индуковано пресликањем \bar{f} вектора у смислу да је:

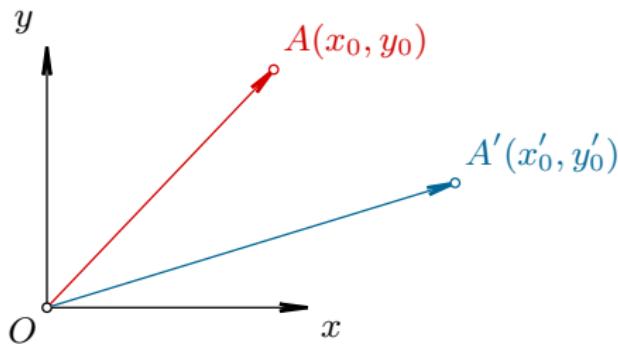
$$f(M) = M', \quad f(N) = N' \iff \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Пасивно гледиште

Пасивно и активно гледиште



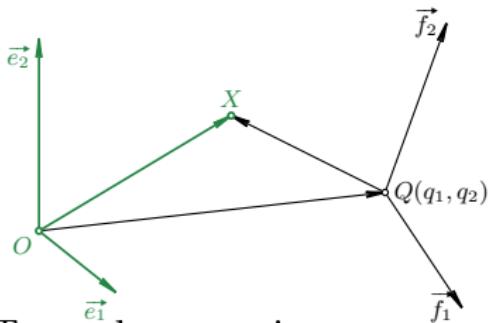
Слика 1: Активно гледиште

Трансформације координата вектора

- $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – стара база
- $f = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ – нова база
- $C = C_{e \rightarrow f}$ – матрица преласка = матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e , редом.

$$[\vec{v}]_e = C[\vec{v}]_f$$

Трансформације координата тачака

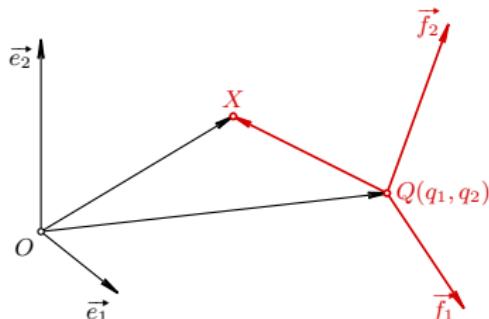


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{x} = Cx' + q$$

$$x = [X]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$$

Трансформације координата тачака

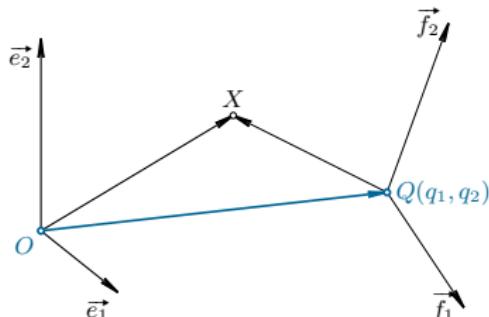


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = C \boxed{x'} + q$$

$$x' = [X]_{Qf} = (x'_1, x'_2)^T$$

Трансформације координата тачака

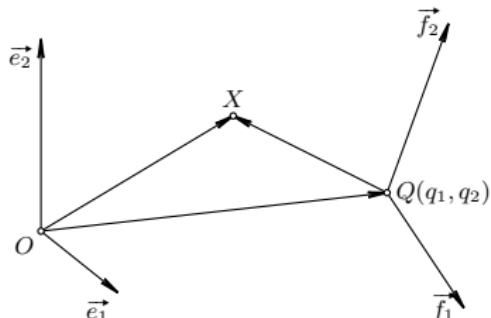


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C} x' + \boxed{q}$$

$$C = C_{e \rightarrow f} \quad q = [Q]_{Oe} = (q_1, q_2)^T$$

Трансформације координата тачака



Слика 2: Трансформације координата тачака

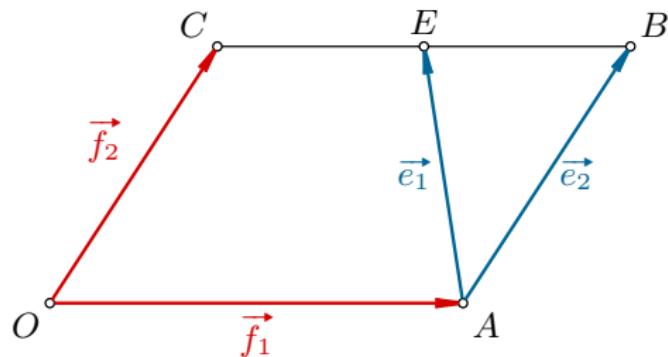
$$x = \boxed{C} x' + \boxed{q}$$

линеарни део

транслаторни део

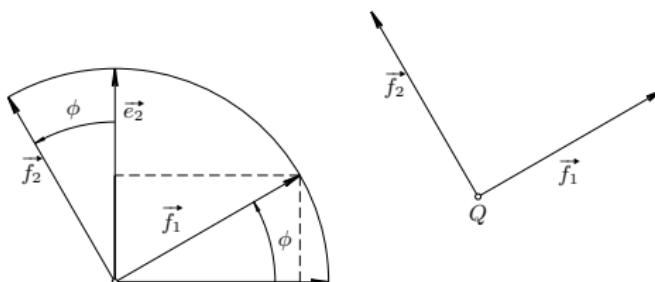
Примери

Пример 1



Слика 3: Одредити координате темена паралелограма у старом реперу Ae и новом реперу Of .
Одредити везу између координата.

Трансформације ортонормираних репера равни

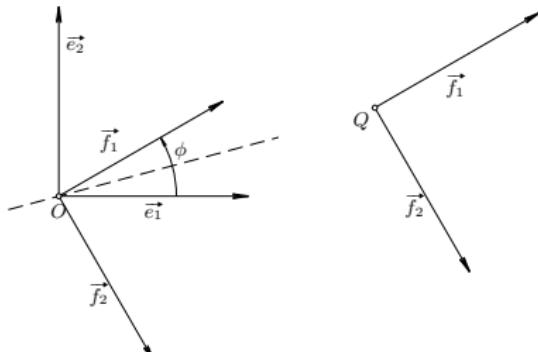


Слика 4: Ортонормирани репери истих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

матрица ротације

Трансформације ортонормираних репера равни



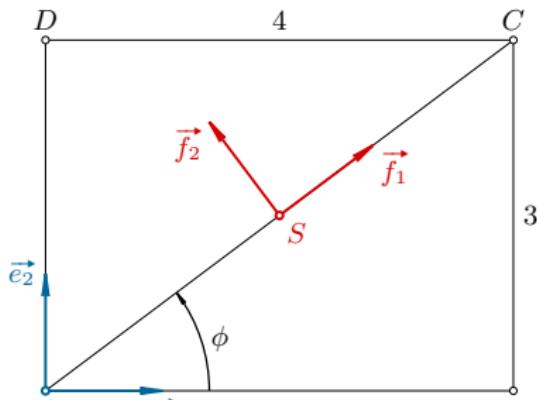
Слика 5: Ортонормирани репери различитих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

матрица рефлексије

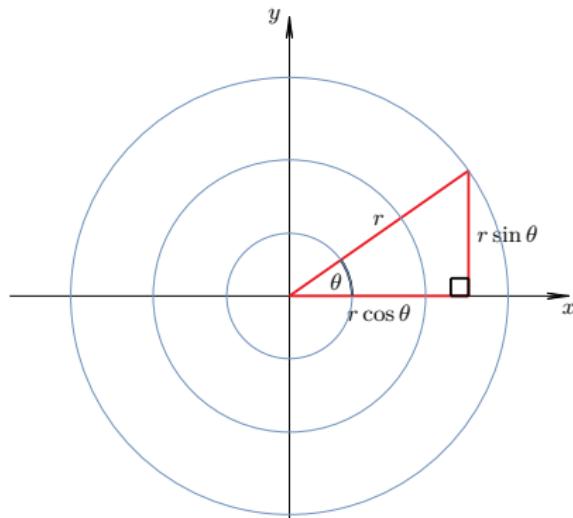
Примери

Пример 2



Слика 6: Одредити везу координата као и координате темена правоугаоника у новом реперу.

Поларне координате



Слика 7: Поларне координате (r, θ)

Примери

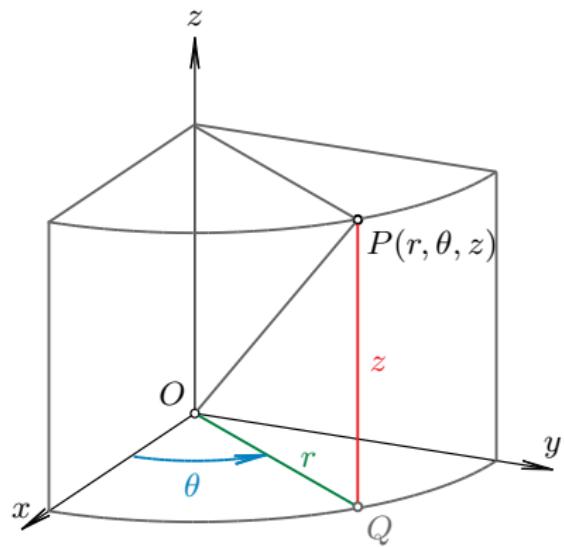
Пример 3

Одредити Декартове координате тачака $A(2, \frac{\pi}{3})$ и $B(3, -\frac{\pi}{4})$.
Скицирати!

Пример 4

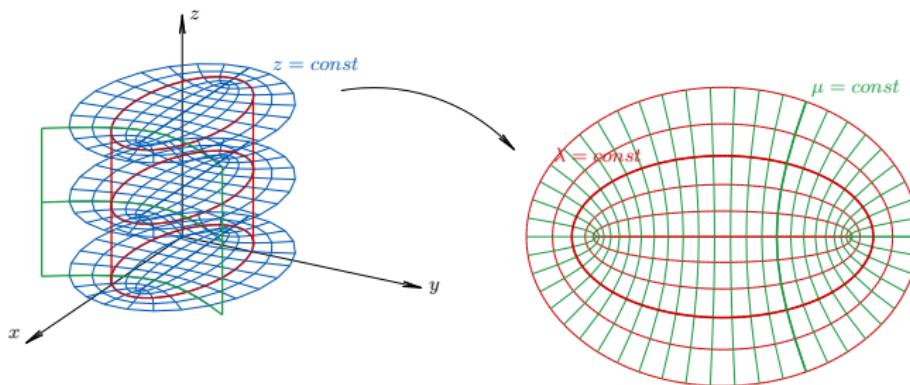
Одредити поларне координате тачака $A(2, 2)$ и $B(3, -\sqrt{3})$.
Скицирати!

Цилиндричке координате



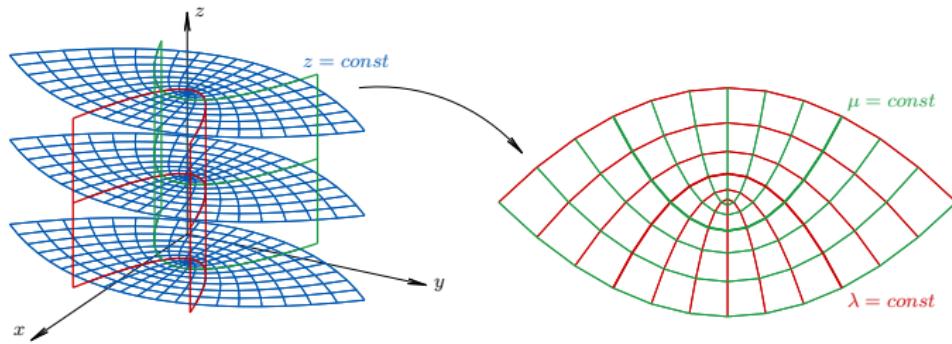
Слика 8: $(r, \theta, z) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$

Елиптички координатни систем



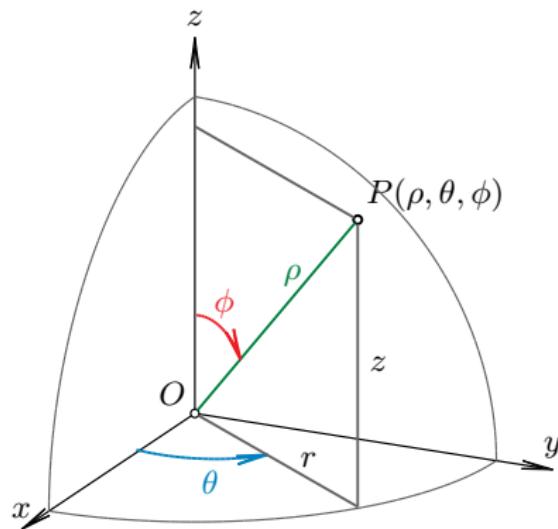
Слика 9: $(\lambda, \mu, z) : x = c \cosh \lambda \cos \mu, y = c \sinh \lambda \sin \mu, z = z$

Парabolочки координатни систем



Слика 10: $(\lambda, \mu, z) :$ $x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), y = \lambda\mu, z = z$

Сферне координате



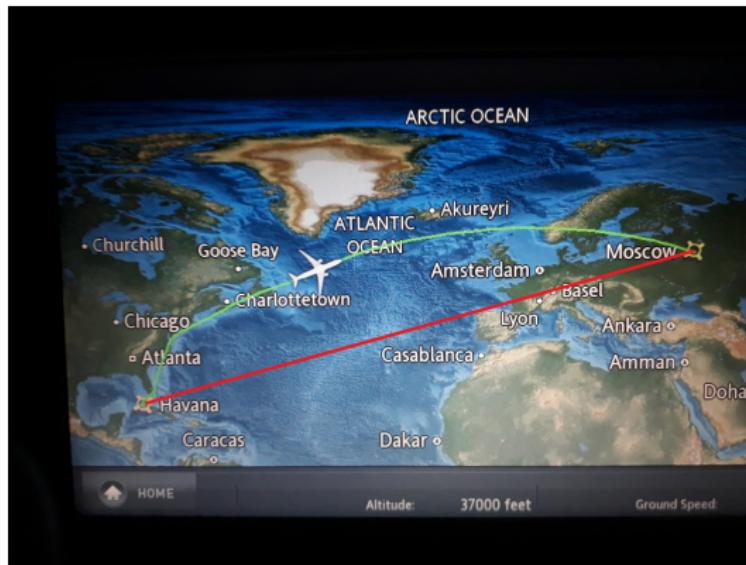
Слика 11: $(\rho, \theta, \phi) : x = \rho \cos \theta \sin \phi, y = \rho \sin \theta \sin \phi, z = \rho \cos \phi$

Примена сферне геометрије у геодезији

- географска ширина: $\frac{\pi}{2} - \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 - Екватор: географска ширина = 0
- географска дужина: $\theta \in [-\pi, \pi]$
 - Гринич: географска дужина = 0
- азимут правца: угао који дати правац образује са правцом север-југ (рачунат од севера у смеру казаљке на сату)

Неки интересантни проблеми на сфери

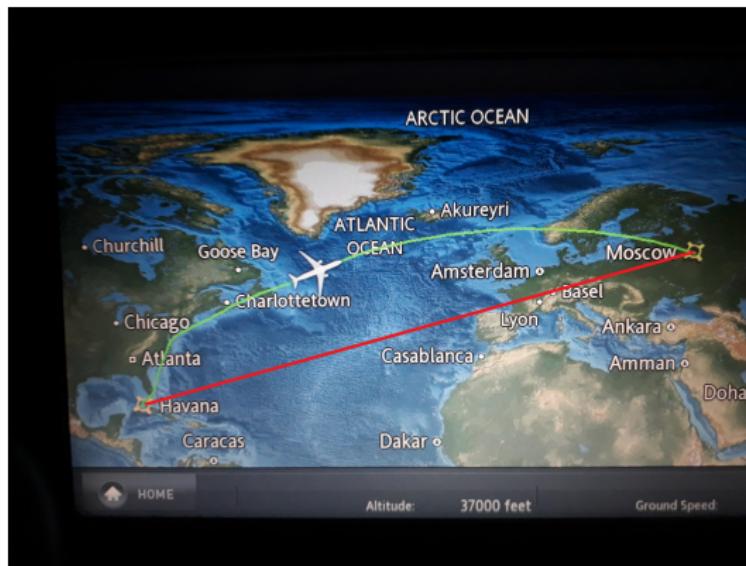
- Најкраћи пут између две тачке на сфери.



Слика: Најкраћи пут између Хаване и Москве

Неки интересантни проблеми на сфери

- Најкраћи пут између две тачке на сфери.
 - Колика је дужина зеленог пута? А црвеног?



Слика: Најкраћи пут између Хаване и Москве

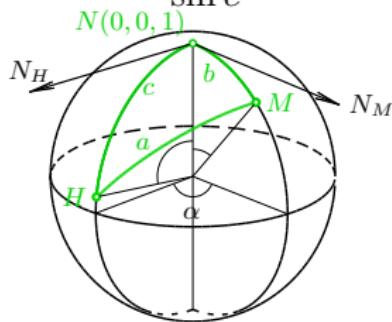
Основне формуле сферне геометрије

- Основна формула сферне геометрије

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

- Нека је ABC сферни троугао са правим углом код темена C :

- Питагорина теорема: $\cos c = \cos a \cos b$;
- Синус угла: $\sin \angle A = \frac{\sin a}{\sin c}$.

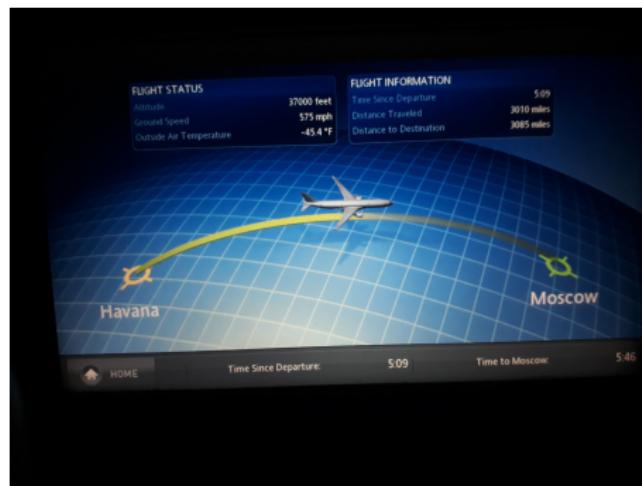


Слика 13: Најкраће растојање на сferи

Неки интересантни проблеми на сфери

Пример 5

- a) Одредити сферно растојање између Москве ($55.8^\circ N$, $37.6^\circ E$) и Хаване ($23.1^\circ N$, $82.4^\circ W$). Узети да је Земља полу пречника $r = 6340\text{ km}$.



Слика: Геодезијска линија

Неки интересантни проблеми на сфери

Пример 5

- a) Одредити сферно растојање између Москве ($55.8^\circ N$, $37.6^\circ E$) и Хаване ($23.1^\circ N$, $82.4^\circ W$). Узети да је Земља полуупречника $r = 6340\text{km}$.

Основна формула сферне геометрије:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$b = 90^\circ - 55.8^\circ = 34.2^\circ$$

$$c = 90^\circ - 23.1^\circ = 66.9^\circ$$

$$\alpha = 37.6^\circ + 82.4^\circ = 120^\circ$$

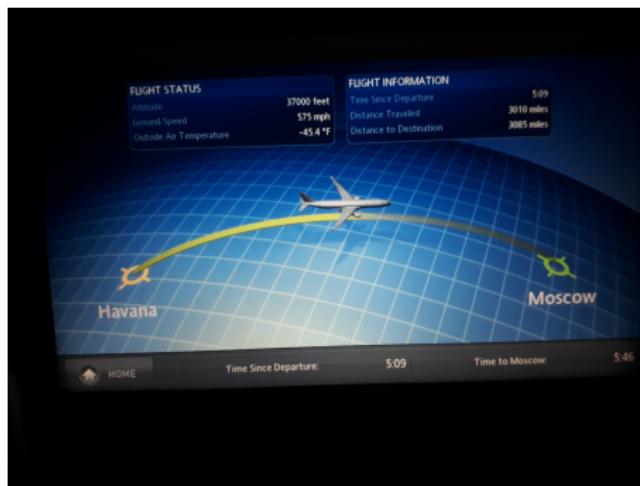
$$\implies a = r \cdot \arccos(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha) \approx 9540\text{km}$$

Основна формула сферне геометрије се односи на јединичну сферу!

Неки интересантни проблеми на сфери

Пример 5

б) У којој тачки свог пута је авион најближи Северном полу? Колика је та удаљеност? Колика је удаљеност од Москве у том тренутку?



Слика: Геодезијска линија

Неки интересантни проблеми на сфери

Пример 5

б) У којој тачки свог пута је авион најближи Северном полу? Колика је та удаљеност? Колика је удаљеност од Москве у том тренутку?

x – растојање од Северног пола

y – растојање од Москве

Косинусна теорема: $\cos \beta = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \Rightarrow \beta \approx 53^\circ$

Синус угла: $\sin \beta = \frac{\sin x}{\sin b}$

Питагорина теорема: $\cos b = \cos x \cos y$

$x \approx 2950 \text{ km}$, $y = 2463 \text{ km}$

Формуле се односе на јединичну сферу! Резултат је помножен са r .