GEOMETRIJA – januar 2009. godine

1. Dat je trougao ABC. Neka su M, N tačke takve da je $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NB}$ i P središte duži BC. Ako je $X = MN \cap AP$, odrediti u kom odnosu tačka X deli duž AP.
2. Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena $A(1,1,0)$, $B(-1,3,-2)$, $C(2,-3,1)$ i $D(0,0,4)$.
3. Translacijom svesti krivu $2x^2 - 8x + 5y + 3 = 0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti jednačinu normale iz tačke $M(3,5,-2)$ na ravan $\pi: \ 2x - 3z + 8 = 0$.
5. Data je poliedarska površ plosnima $p_0 = \langle 0,3,7,4\rangle$, $p_1 = \langle 1,2,6,5\rangle$, $p_2 = \langle 1,5,0\rangle$, $p_3 = \langle 3,2,1\rangle$, $p_4 = \langle 2,3,7,6\rangle$, $p_5 = \langle 3,1,0\rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2 = \langle 1,5,0\rangle$.

GEOMETRIJA – april 2009. godine

1. Dat je trougao ABC, $A(3,5)$, $B(9,3)$, $C(5,3)$. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. Da li centar kruga pripada trouglu ABC?
2. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice 4. Odrediti ugao izmedju dijagonala strane kocke AD_1 i B_1C_1, a zatim odrediti zapreminu tetraedra AD_1C_1B.
3. Rotacijom svesti krivu $x^2 + y^2 - xy + 1 = 0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti ravan α koja sadrži tačku $A(1,1,-1)$, paralelna je pravoj $p: \ x + y = 0, \ 2x + y - 2 = 0$, a sa ravni $\beta: \ x - 4y - z - 2 = 0$ gradi ugao $\frac{\pi}{4}$.
5. a) Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i napisati njene pljosni.
   b) Odrediti rub i broj komponenata ruba.
   c) Dokazati da Mebijusova traka nije orjentabilna.

GEOMETRIJA – januar 2010. godine

1. Dat je paralelogram $ABCD$, čije je središte tačka S. Ako je data baza $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AB}$, odrediti koordinate tačaka A, B, C, D, S u reperu Ae.
2. Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $A(3,-2)$ i koeficijentom $\frac{2}{3}$. U koju tačku se slika tačka $B(0,1)$ pri ovoj homotetiji?
3. Rotacijom svesti krivu $x^2 + 4xy - 2y^2 + 6 = 0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti ravan α koja sadrži pravu $p: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$, a sa ravni $\beta: \ x - 4y - 8z + 12 = 0$ gradi ugao $\frac{\pi}{4}$.
5. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 0,3,1\rangle$, $p_1 = \langle 8,6,5\rangle$, $p_2 = \langle 7,6,8\rangle$, $p_3 = \langle 3,2,6,7\rangle$, $p_4 = \langle 5,4,8\rangle$, $p_5 = \langle 9,6,2\rangle$, $p_6 = \langle 3,4,0\rangle$, $p_7 = \langle 1,5,4,0\rangle$, $p_8 = \langle 7,4,3\rangle$, $p_9 = \langle 1,5,9\rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_5 = \langle 9,6,2\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – april 2010. godine

1. Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko $\triangle ABC$ ako je $A(4,-3),\ B(2,-5),\ C(2,-1)$.
2. Odrediti Bezierovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1,0),\ P_1(-1,2),\ P_2(3,3),\ P_3(5,0)$.
3. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $P(0,-1,\frac{4}{3})$ i normalna je na ravan $\alpha:\ -y+2z+11=0$.
4. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 2,1,0\rangle, p_1=\langle 4,6,5\rangle, p_2=\langle 4,2,5\rangle, p_3=\langle 1,2,4\rangle, p_4=\langle 6,7,4\rangle, p_5=\langle 7,1,6\rangle, p_6=\langle 6,0,1\rangle, p_7=\langle 3,0,2\rangle, p_8=\langle 5,3,2\rangle, p_9=\langle 0,5,6\rangle$.
   (a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.
   (b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_7=\langle 3,0,2\rangle$.
   (c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – januar 2011. godine

1. Dat je trougao $ABC:\ A(-1,4),\ B(7,1),\ C(4,-1)$. Odrediti ortocentar trougla i ispitati da li pripada njegovoj unutrašnjosti.
2. Odrediti medjusobni polozaj pravih $p: P(-3,1),\ \overrightarrow{p}(1,1)$ i $q: x-y+5=0$.
3. Translacijom svesti krivu $2x^2+8x-5y+3=0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
4. Odrediti tačku simetričnu tački $M(10,0,-1)$ u odnosu na ravan $\pi:\ 5x-3y+4z+4=0$.
5. Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ako je izabrana orijentacija pljosni $p_0=\langle B_1,B,C,C_1\rangle$.

GEOMETRIJA – februar 2011. godine

1. Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $A(1,2)$ i koeficijentom 2. U koju tačku se slika težište $\triangle ABC$, ako je $B(0,-2),\ C(2,9)$?
2. Rotacijom svesti krivu $4x^2+24xy+11y^2+5=0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
3. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $p: \frac{x+3}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{0}$ i normalna je na ravan $\pi: 4x+y-3z=2$.
4. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 2,1,0\rangle, p_1=\langle 5,4,7,6\rangle, p_2=\langle 1,5,0\rangle, p_3=\langle 3,7,0\rangle, p_4=\langle 2,6,5,1\rangle, p_5=\langle 5,4,0\rangle, p_6=\langle 2,7,3\rangle$.
   (a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.
   (b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_5=\langle 5,4,0\rangle$.
   (c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – oktobar 2011. godine

1. Ispitati da li tačke $C(5,-3)$ i $D(1,0)$ pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom AB, $A(2,-2), B(3,1)$, a zatim odrediti medjusoban položaj duži AD i CB.
2. Translacijom svesti krivu $-2x^2+5y^2+4x-30y+42=0$ na kanonski oblik i odrediti o kojoj krivoj je reč.
3. Ispitati da li prava $p := \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-3}$ seče trougao $\triangle ABC$, $A(2,-4,1), B(3,1,0), C(-1,3,4)$ i, u slučaju da ga seče, odrediti koordinate presečne tačke.
4. Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 1,3,4\rangle$, $p_1 = \langle 5,7,1\rangle$, $p_2 = \langle 3,6,5\rangle$, $p_3 = \langle 6,9,5\rangle$, $p_4 = \langle 5,4,3\rangle$, $p_5 = \langle 2,8,7,1\rangle$, $p_6 = \langle 1,4,5\rangle$, $p_7 = \langle 2,8,6\rangle$, $p_8 = \langle 8,7,9\rangle$.
   (a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.
   (b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_7 = \langle 2,8,6\rangle$.
   (c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – januar 2012. godine

1) (6+6) a) Napisati definiciju vektorskog proizvoda i nacrtati odgovarajuću sliku. b) Koristeći vektorski proizvod odrediti površinu trougla ABC, $A(-2,5)$, $B(-1,1)$, $C(5,1)$.
2) (5+7) a) Definisati triangulaciju prostog poligona $p = p_1 \dots p_n$ i nacrtati sliku. b) Formulisati i dokazati teoremu o triangulaciji poligona p i broju trouglova u toj triangulaciji (bez dokaza da svaki prost poligon sa više od 3 temena ima unutrašnju dijagonalu)
3) (8+2) Odrediti formule homotetije sa koeficijentom $k=2$ sa centrom $S(3,-2)$ (formule zapisati u obliku $x' = \dots, y' = \dots$). Šta je slika tačke $A(1,2)$?
4) (5+3+6) a) Odrediti centar i poluprečnik kruga $k : x^2+y^2-8x+6y=0$. b) Napisati parametrizaciju tog kruga centralnim uglom. c) Odrediti presečne tačke kruga k i prave $p : 4x-3y-50=0$.
5) (6+6) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 6,7,0,3\rangle$, $p_1 = \langle 0,1,2,3\rangle$, $p_2 = \langle 3,2,5,4\rangle$, $p_3 = \langle 4,5,0,1\rangle$. a) Odrediti rub i komponente ruba poliedarske površi. b) Izvršiti uskladjivanje orijentacija pljosni počev od pljosni p_0. Da li je površ orjentabilna?

GEOMETRIJA – februar 2012. godine

1) (6) Ispitati da li tačka $M(1,2)$ pripada unutrašnjosti trougla ABC, $A(-1,-2), B(3,7), C(7,13)$.
2) (3+9+5) a) Napisati opšti oblik krive drugog reda. b) Napisati sve kanonske oblike krive drugog reda i šta predstavljaju. c) Svesti na kanonski oblik i reći o kojoj je krivoj reč: $x^2-2y^2-6x+4y+7=0$.
3) (10) Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i čije je rastojanje od tačke $M(1,1,1)$ jednako $\frac{5}{\sqrt{14}}$.
4) (3+3+5) a) Definisati mimoilazne prave b) U kojim medjusobnim položajima mogu biti dve prave u prostoru c) Odrediti medjusobni položaj pravih $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ i $q : x+2y+3z+6=0, 3x+2y+z+6=0$.
5) (6+6+4) Data je poliedarska površ: $p_0 = \langle 1,2,3\rangle$, $p_1 = \langle 2,3,7,6\rangle$, $p_2 = \langle 3,7,8,4\rangle$, $p_3 = \langle 8,5,1,4\rangle$, $p_4 = \langle 5,6,2,1\rangle$, $p_5 = \langle 7,8,9,10\rangle$, $p_6 = \langle 3,1,11\rangle$. a) Odrediti rub i broj komponenata ruba. b) Skicirati površ. c) Izračunati Ojlerovu karakteristiku površi.

GEOMETRIJA – januar 2013. godine

1) (6+6) a) Dokazati da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri vektora jednaka zapremini paralelopipeda odredjenog tim vektorima. b) Ispitati da li prava p zadata tačkom $P(1,2,3)$ i vektorom $\overrightarrow{p}$ $(1,-1,0)$ seče trougao ABC, $A(2,0,4)$, $B(1,-1,3)$, $C(-2,1,1)$.

2) (2+2+8) Formulisati, nacrtati i dokazati optičko svojstvo parabole.

3) (9+3) Date su tačke $P_0(1,1)$, $P_1(11,-4)$, $P_2(6,11)$, $P_3(1,6)$. a) Koristeći de-Casteljau algoritam odrediti $\alpha(0.4)$, gde je α Bezijerova kriva odredjena datim tačkama. b) Podeliti krivu α na dve Bezijerove krive praveći rez u tački $\alpha(0.4)$.

4) (10) Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $p : \frac{x-4}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-10}{-2}$, a od tačke $C(1,2,3)$ je udaljena za 3.

5) (2+6+6) Date su pljosni: $p_0 = \langle 0,1,4,3\rangle$, $p_1 = \langle 5,2,1,4\rangle$, $p_2 = \langle 3,0,5,2\rangle$, $p_3 = \langle 1,0,5\rangle$. a) Ispitati da li pljosni zadaju apstraktnu poliedarsku površ. b) Odrediti rub i broj komponenata ruba. c) Izvršiti uskladjivanje orjentacija pljosni počev od p_2. Da li je površ orjentabilna?

GEOMETRIJA – februar 2013. godine

1) (4+3+5) a) Definisati vektorski proizvod i nacrtati sliku. b) Izračunati površinu paralelograma $ABCD$ ako su date tačke $A(2,3), B(-2,2)$ i $C(0,4)$. c) Odrediti orijentaciju trougla BDA.

2) (8+4) Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{2\pi}{3}$ oko tačke $N(1,-2)$. U koju tačku se preslikava tačka $M(-3,2)$? (formule zapisati u obliku $x' = \dots, y' = \dots$)

3) (4+4+4) Sortirati tacčke $P_0 = (2,2), P_1 = (-2,1), P_2 = (3,-2), P_3 = (0,-5), P_4 = (1,-2), P_5 = (-1,-4), P_6 = (4,-5), P_7 = (-3,-1)$ tako da formiraju prost poligon, a zatim taj poligon triangulisati. Šta je konveksni omotač datog skupa tačaka?

4) (3+3+3) Šta predstavljaju sledeće jednačine u prostoru?
a) $y^2 + z^2 = 0$ b) $x^2 + z^2 = 0, y = 4$ c) $\frac{z-1}{2} = \frac{y-2}{1}$

5) (6+3+6) a) Skicirati glatku Mebijusovu traku i njen poliedarski model. b) Napisati tabelu povezanosti poliedarskog modela. c) Dokazati da Mebijusova traka nije orijentabilna.

**Bonus zadaci:*

a) Skicirati betonsko stepenište koje sadrži 4 stepenika i njegovu ortogonalnu projekciju na ravan tla.
b) Skicirati površi iz zadatka 4).

GEOMETRIJA – januar 2014.godine

1) (8+4+2) Odrediti formule afinog preslikavanja koje $\triangle ABC$ preslikava u $\triangle A'B'C'$ ako je $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(2,-1)$ i $A'(1,-1)$, $B'(2,1)$, $C'(3,2)$. Ispitati da li se tačka $M(1,1)$ nalazi unutar $\triangle ABC$. Da li se slika tačke M pri ovom afinom preslikavanju nalazi unutar $\triangle A'B'C'$?(obrazložiti)

2) (1+3+6) a) Napisati jednačinu ravni u prostoru. b) Šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni α? c) Data je ravan $\alpha : 6x - 2y + 3z - 5 = 0$ i u njoj tačka $C(4,2,-5)$. Odrediti parametrizaciju kruga κ poluprečnika $r = 3$ sa centrom C koji pripada ravni α.

3) (6+6) Date su tačke $P_0(1,-4)$, $P_1(6,6)$, $P_2(6,1)$, $P_3(1,1)$. a) Koristeći de-Casteljau algoritam, odrediti tangentu u tački $\alpha(0.8)$. b) Odrediti jednačinu krive čije su kontrolne tačke $P_0, \dots, P_3$. Da li je kontrolni poligon prost?

4) (6+6) Odrediti centralnu projekciju tačke $P(2,-1,0)$ na ravan $\alpha : x + y - 2z + 3 = 0$ ako je centar projektovanja tačka $O(0,1,1)$. Šta je ortogonalna projekcija tačke P na ravan α?

5) (2+6+4) a) Definisati Ojlerovu karakteristiku površi. b) Skicirati glatke površi roda $0, 1$ i 2. c) Odrediti Ojlerovu karakteristiku površi iz dela b).

GEOMETRIJA – februar 2014.godine

1) (10) Dat je paralelogram $ABCD$. Ako je tačka E središte stranice AB i tačka F presek duži AC i DE, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AC i DE.

2) (4+4+4) Napisati kanonsku i parametarsku jednačinu hiperbole. Navesti i nacrtati optičku osobinu hiperbole. Svesti hiperbolu $x^2 - 4y^2 - 2x - 32y + 36 = 0$ na kanonski oblik translacijom.

3) (10) Odrediti centar S upisanog kruga u trougao $\triangle ABC, A(3,0), B(6,4), C(0,4)$.

4) (6+4+6) Napisati matrice rotacija oko koordinatnih osa u prostoru. Navesti Ojlerovu teoremu o dekompoziciji ortogonalne matrice. Odrediti formule rotacije oko prave p koja sadrži tačku $P(1,2,3)$ i paralelna je $x-$osi.

5) (5+5+2) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,5,4\rangle$, $p_1 = \langle 8,7,4,3\rangle$, $p_2 = \langle 1,6,5,2\rangle$, $p_3 = \langle 4,6,5\rangle$, $p_4 = \langle 1,6,7,8\rangle$, $p_5 = \langle 6,4,7\rangle$.

a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba.

b) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_1 = \langle 8,7,4,3\rangle$.

c) Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – jun 2014.godine

1) (9 + 5) a) Definicija i računanje vektorskog proizvoda. Defnicija i određivanje orijentacije trougla. Uslov kolinearnosti tri tačke. b) Izračunati površinu prostog poligona čija su temena $P_0(1,1)$, $P_1(11,-4)$, $P_2(6,11)$, $P_3(1,6)$, $P_4(-3,4)$, $P_5(-1,1)$.

2) (8 + 4) Odrediti afino preslikavanje (kao kompoziciju rotacije, homotetije i translacije) koje kvadrat $ABCD$, $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$, preslikava u kvadrat $SCPD$, gde je $S = AC \cap BD$, a P je četvrto teme kvadrata. Odrediti koordinate slike tačke $M(-1,0)$ pri ovoj transformaciji.

3) (5 + 5) Skicirati i navesti koje geometrijske objekte prestavljaju sledeće jednačine u prostoru:
a) $x^2 + z^2 = 12$, b) $x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1,\ 5x + y + z = 1$.

4) (6 + 6) a) Napisati definiciju Beizijerove krive stepena 3 i skicirati je. b) Kako se Bezijerova kriva stepena 3 deli na dve krive istog stepena u tački $t = 0.75$? (nacrtati i navesti koji su to kontrolni poligoni)

5) (3 + 6 + 3) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,3,4\rangle$, $p_1 = \langle 5,1,2\rangle$, $p_2 = \langle 1,3,5\rangle$, $p_3 = \langle 4,2,1\rangle$, $p_4 = \langle 3,2,5\rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti (ako je moguće) usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2 = \langle 1,3,5\rangle$. Da li je površ orijentabilna? Skicirati površ.

GEOMETRIJA – septembar 2014.godine

1) (5 + 9) a) Definisati težište trougla i nacrtati sliku. Navesti formulu za težište n tačaka $P_1, \ldots, P_n$. b) Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u tački T i da ih ona deli u odnosu $3:1$.

2) (6 + 6) Odrediti formule refleksije u odnosu na ravan $\alpha_0:\ 6x + 2y + 3z = 0$. Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{\pi}{3}$ oko y-ose.

3) (10) Odrediti presek ravni $\alpha:\ 4x - y + 2z + 1 = 0$ i trougla ABC ako je $A(1,6,0)$, $B(3,3,-5)$, $C(1,4,4)$. Skicirati sliku.

4) (6 + 6) Šta je ekcentricitet i koliki je ekcentricitet hiperbole? Navesti i nacrtati optičku osobinu hiperbole.

5) (3 + 6 + 3) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,7,8\rangle, p_1 = \langle 4,6,5\rangle, p_2 = \langle 4,2,5\rangle, p_3 = \langle 7,2,4\rangle, p_4 = \langle 6,1,4\rangle, p_5 = \langle 7,1,6\rangle, p_6 = \langle 6,8,7\rangle, p_7 = \langle 3,8,2\rangle, p_8 = \langle 5,3,2\rangle, p_9 = \langle 8,5,6\rangle$. Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. Izvršiti (ako je moguće) usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_4 = \langle 6,1,4\rangle$. Da li je površ orijentabilna? Skicirati površ.

GEOMETRIJA – februar 2015.godine

1) (8) Dat je paralelogram $ABCD$. Ako tačka E deli duž CD u odnosu $2:1$, a tačka F je presek duži AC i BE, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AC i BE.

2) (4+4+6) Napisati opšte formule afinog preslikavanja i objasniti šta je šta. Da li afinim preslikavanjem možemo preslikati paralelogram u trapez (obrazložiti)? Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao ABC, $A(2,3), B(-1,0), C(0,3)$, preslikava u trougao $A'B'C'$, $A'(1,0), B'(0,0), C'(0,1)$.

3) (8+4) Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p:\frac{x}{0} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{3}$ i $q: 2x - 2y + z - 21 = 0,\ 4y + 3z - 13 = 0$.

4) (4+10) a) Šta je konveksni omotač skupa n-tačaka u ravni? Nacrtati primer. b) Opisati Grahamov algoritam za određivanje konveksnog omotača i navesti primer.

5) (5+2+5) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 2,5,4\rangle$, $p_1 = \langle 8,7,4,3\rangle$, $p_2 = \langle 1,6,5,2\rangle$, $p_3 = \langle 4,6,5\rangle$, $p_4 = \langle 1,6,7,8\rangle$, $p_5 = \langle 8,1,3\rangle$, $p_6 = \langle 6,4,7\rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Skicirati površ. c) Izvršiti (ako je moguće) uskladjivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2 = \langle 1,6,5,2\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

GEOMETRIJA – jun 2015.godine

1) (6+6) Ako je $A(0,-1)$, $B(2,1)$, $C(4,-3)$, odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko trougla ABC. Da li centar kruga pripada unutrašnjosti trougla ABC?

2) (10) Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $N(1,-2)$ i koeficijentom $k=-\frac{1}{3}$. U koju tačku se preslikava tačka $M(-6,3)$? (formule zapisati u obliku $x' = \ldots, y' = \ldots$)

3) (4+4+6) Navesti definiciju rotacije oko prave p u prostoru. Napisati matricu roatacije oko z-ose za ugao ϕ. Napisati matricu rotacije oko prave $p: x=y=z$ za ugao $\frac{\pi}{3}$.

4) (2+6+4) Napisati opšti oblik krive drugog reda. Napisati sve kanonske oblike krivih drugog reda (i imena tih krivih) i skicirati ih. Svesti krivu $x^2+3y^2-2x+12y+7=0$ na kanonski oblik translacijom.

5) (2+4+6) Ispitati da li pljosni $p_0=\langle 2,7,8\rangle, p_1=\langle 4,6,5\rangle, p_2=\langle 4,2,5\rangle, p_3=\langle 7,2,4\rangle, p_4=\langle 6,1,4\rangle, p_5=\langle 7,1,6\rangle, p_6=\langle 6,8,7\rangle, p_7=\langle 3,8,2\rangle, p_8=\langle 5,3,2\rangle, p_9=\langle 8,5,6\rangle$ zadaju apstraktnu poliedarsku površ. Odrediti rub i broj komponenti ruba, kao i Ojlerovu karakteristiku te površi.

GEOMETRIJA – septembar 2015.godine

1) (4+4+2+2) Definisati koordinate tačaka i vektora. Neka je $ABCDEF$ pravilan šestougao i neka su $e=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$ i $f=(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF})$ dve baze. Odrediti formule transformacije koordinata iz repera A_e u reper D_f. Odrediti koordinate temena šestougla u obe baze. Da li ova promena koordinata čuva orjentaciju?

2)(6+2+4) Odrediti formule preslikavanja f koje je kompozicija homotetije sa centrom $C(2,1)$ i koeficijentom 3 i refleksije u odnosu na pravu $x=2$. Šta je slika trougla OAB, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, pri preslikavanju f (izračunati i skicirati)? Predstaviti preslikavanje f matricom 3×3. Da li je preslikavanje f izometrija (detaljno obrazložiti)?

3) (4+4+2+4) Šta sve može biti presek ravni i trougla (navesti i skicirati)? Odrediti presek ravni $\alpha: x+z=0$ i trougla $A(-2,-2,0)$, $B(1,3,1)$, $C(2,2,2)$. Odrediti jednačinu prave p koja sadrži tačku $P(-1,2,2)$ i normalna je na ravan α. Da li prava p seče trougao ABC (obrazložiti)?

4) (4+4+2+4) Objasniti rečima šta znači afina invarijantnost Bezijerove krive. Ako je kontrolni poligon Bezijerove krive α: $P_0(-1,-3)$, $P_1(4,7)$, $P_2(-6,2)$, $P_3(9,-3)$, primenom De Casteljau algoritma podeliti Bezijerovu krivu na dve krive i odrediti joj tangentu u tački $\alpha(0.4)$. Skicirati algoritam.

5) (4+4) Definisati i nabrojati Platonova tela. Odrediti svakom telu rod i Ojlerovu karakteristiku.

GEOMETRIJA – januar 2016.godine

1) (8+4+2) Odrediti formule afinog preslikavanja koje $\triangle ABC$ preslikava u $\triangle A'B'C'$ ako je $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(-3,0)$ i $A'(1,-1)$, $B'(0,0)$, $C'(3,2)$. Odrediti težište T trougla ABC, a zatim ispitati da li se tačka T nalazi u unutrašnjosti $\triangle ABC$. Da li se slika tačke T pri ovom afinom preslikavanju nalazi unutar $\triangle A'B'C'$? (obrazložiti)

2) (4+3+2) a) Napisati parametarsku i implicitnu jednačinu ravni. Skicirati i označiti odgovarajuće elemente. b) U kom međusobnom položaju mogu biti dve ravni u prostoru? c) Skicirati ravni $\alpha: x-z+4=0$ i $\beta: 2x-3y-2z+6=0$.

3) (3+4+6) a) Skicirati poligon $P_0P_1P_2P_3$, $P_0(-1,-2)$, $P_1(4,8)$, $P_2(4,3)$, $P_3(-1,3)$, i ispitati da li je prost. b) Odrediti Bezijerovu krivu $\alpha_3(t)$, $t\in[0,1]$ čije su kontrolne tačke P_0,P_1,P_2,P_3 (ne nužno tim redosledom) i kontrolni poligon je prost. c) Koristeći de-Casteljau algoritam, odrediti tangentu na krivu $\alpha_3(t)$ u tački $\alpha_3(0.2)$.

4) (6+6+2) Odrediti tačku Q simetričnu tački $P(0,1,-1)$ u odnosu na ravan $\alpha: x+2y-z+3=0$, a zatim odrediti tačku R simetričnu tački P u odnosu na pravu $l: x=y=z$. Da li je tačka P bliža tački Q ili R?

5) (2+4+4) a) Definisati Ojlerovu karakteristiku površi. b) Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake i dodekaedra. c) Navesti primer i skicirati **glatke** površi roda 0 i 1.

Geometrija (I-smer), februar 2016. godine

1) (4+4+6) a) Definisati mešoviti proizvod. Kako se računa mešoviti proizvod u ortonormiranoj bazi?

b) Dokazati da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda vektora jednaka zapremini paralelepipeda razapetog njima.

c) Koristeći mešoviti proizvod, ispitati koplanarnost tačaka $A(2,0,4)$, $B(-1,3,3)$, $C(0,-5,7)$, $D(2,1,3)$. Ako tačke nisu koplanarne, izračunati zapreminu tetraedra $ABCD$.

2) (5+5) Odrediti formule refleksije u odnosu na pravu $p: 4x-3y+3=0$ u ravni. Odrediti sliku tačke $M(-3,2)$ pri ovom preslikavanju.

3) (6+4+4) a) Napisati kanonsku jednačinu hiperbole i odrediti joj osnovne elemente. Skicirati.

b) Rotacijom pokazati da je kriva $xy=1$ hiperbola. Skicirati je.

c) Da li je kriva zadata jednačinom hiperbola $xy+x=0$? Obrazložiti.

4) (4+6) a) Odrediti tačku prodora C prave $p: \frac{x}{0}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+3}{0}$ kroz ravan $\alpha: y+z-6=0$.

b) Napisati parametarsku jednačinu jediničnog kruga sa centrom u tački C koji pripada ravni α.

5) (5+5+2) a) Odrediti rub i broj komponenti ruba poliedarske površ date pljosnima: $p_0=\langle 0,3,7,4\rangle$, $p_1=\langle 1,6,2,5\rangle$, $p_2=\langle 5,0,1\rangle$, $p_3=\langle 3,2,1\rangle$, $p_4=\langle 2,3,7,6\rangle$, $p_5=\langle 3,1,0\rangle$.

b) Izvršiti usklađivanje orijentacije pljosni počev od pljosni $p_2=\langle 5,0,1\rangle$.

c) Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), januar 2017. godine

1) (6+6) U ravni je dat trougao ABC. Neka tačka D pripada stranici AB, a tačka E stranici BC, tako da je $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}$ i $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{2}$. Ako se duži AE i CD seku u tački F, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD. Odrediti koordinate temena trougla u reperu $Fe,\ e=\left(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}\right)$.

2) (6+2) U ravni je dat trougao ABC, $A(2,-2)$, $B(6,-5)$, $C(8,6)$. Odrediti koordinate težišta T, ortocentra H i centra O kruga opisanog oko trougla. Koje od ovih tačaka se nalaze unutar trougla ABC?

3) (2+6+6) Napisati definiciju Bezijerove krive stepena 2 i skicirati je. Pokazati da je svaka Bezijerova kriva stepena 2 deo parabole. Predstaviti deo elipse $x=5\cos\theta,\ y=3\sin\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ kao racionalnu Bezijerovu krivu.

4) (5+3+6) Definisati izometrije i kretanja prostora, navesti primere. Koji uslov mora da zadovoljava matrica kretanja (izometrije)? Odrediti formule refleksije u odnosu na ravan $\alpha: 2x-y+2z-5=0$.

5) (2+8+2) Definisati i nabrojati Platonova tela. Odrediti svakom telu Ojlerovu karakteristiku i dualno telo (skicirati). Da li su Platonova tela orijentabilna? (obrazložiti)

Geometrija (I-smer), jun 2017. godine

1) (4+4+2+2) Dat je jedinični kvadrat $ABCD$. Odrediti vezu između koordinata (x,y) u reperu De i koordinate (x',y') u reperu Bf ako je $e=(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$ i $f=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$. Odrediti koordinate temena u oba repera. Koji tip transformacija ON repera se ovde javlja? Skicirati!

2) (6+4) Odrediti presek kruga $\kappa: x^2-4x+y^2+2y+1=0$ i prave $p: P(1,2)$, $\overrightarrow{p}=(-1,1)$. Koliko je rastojanje prave p od centra kruga?

3) (4+4+4) Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(-2,1)$, $P_1(0,3)$, $P_2(-2,5)$, $P_2(0,1)$. Koristeći de Casteljau algoritam, odrediti tačku Bezijerove krive $\alpha_3(t)$ za $t=\frac{3}{4}$. Povećati stepen krive za 1.

4) (3+5+6) a) Odrediti parametarsku jednačinu normale n iz tačke $A(1,2,3)$ na ravan $\alpha: x+y-z=0$. b) Izvesti formule rotacije u prosoru oko x-ose za ugao θ. c) Odrediti sliku prave n pri rotaciji oko x-ose za ugao $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

5) (4+2+6) Nacrtati torus i njegov poliedarski model. Odrediti rod i Ojlerovu karakteristiku torusa. Da li je torus orijentabilna površ? (detaljno obrazložiti)

Geometrija (I-smer), januar 2018. godine

1) $(6+4)$ U ravni je dat trougao ABC. Neka tačka D pripada stranici AB, a tačka E stranici BC, tako da je $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$ i $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{3}$. Ako se duži AE i CD seku u tački F, odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD. Odrediti baricentričke koordinate tačke F u odnosu na tačke A, B i C.

2) $(6+2+2)$ Odrediti formule preslikavanja f koje je kompozicija refleksije u odnosu na pravu $x-y=0$ i skaliranja sa centrom u tački $A(1,1)$ i koeficijentima $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. Da li preslikavanje f čuva orijentaciju? Da li je izometrija?

3) $(5+6+3)$ Skicirati elipsu i definisati njene osnovne elemente. Navesti i dokazati **fokusnu** osobinu elipse. Navesti **optičko** svojstvo elipse.

4) $(3+5+5)$ Ispitati da li prava $p: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0}$ seče trougao ABC, $A(1,0,-1)$, $B(2,-1,2)$, $C(0,0,1)$. U slučaju da seče, odrediti koordinate presečne tačke. Odrediti ugao koji prava p zaklapa sa ravni trougla ABC.

5) $(2+2+3+6)$ Ispitati da li pljosni $p_0=\langle 2,7,4\rangle, p_1=\langle 4,6,1\rangle$, $p_2=\langle 4,2,3,5\rangle$, $p_3=\langle 7,2,8\rangle$, $p_4=\langle 6,5,4\rangle$, $p_5=\langle 7,1,6\rangle$, $p_6=\langle 6,5,8,7\rangle$, $p_7=\langle 3,8,2\rangle$ zadaju apstraktnu poliedarsku površ. Skicirati je. Odrediti rub i broj komponenti ruba, kao i Ojlerovu karakteristiku te površi. Izvršiti, ako je moguće, usklađivanje orijentacija pljosni počev od pljosni p_6.

Geometrija (I-smer), februar 2018. godine

1) $(6+4)$ Odrediti površinu i orijentaciju $\triangle ABC$, $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(2,-1)$. Da li se tačke A i B nalaze sa iste strane prave CT, gde je T težište $\triangle ABC$? (obrazložiti)

2) $(2+6+6)$ U proširenoj afinoj ravni su date tačke $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(0,0)$ i $A'(1,1)$, $B'(0,1)$, $C'(1,0)$. a) Odrediti tačku D tako da je $ABCD$ paralelogram. b) Odrediti formule afinog preslikavanja pri kome se $ABCD$ slika u $A'B'C'D'$. Koji tip četvorougla je $A'B'C'D'$? c) Odrediti formule projektivnog preslikavanja pri kome se $ABCD$ slika u $A'B'C'D'$, gde je D' presek pravih $p: x+2y=0$ i $q: 2x+4y-3=0$.

3) $(4+2+8)$ a) Napisati parametarsku jednačinu kosog hica. b) Za koji početni ugao se dostiže najveća daljina/visina? c) Lopta je šutnuta sa zemlje pod uglom od $\phi_0=\frac{\pi}{6}$. Kolika treba da bude početna brzina da bi lopta pogodila metu na rastojanju od $30m$ i visini $2m$? Za koje vreme će lopta pogoditi metu? (uzeti da je gravitaciono ubrzanje $g=10\frac{m}{s^2}$)

4) $(4+3+3)$ Šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni? Odrediti ortonormirani koordinatni sistem (x',y',z') u odnosu na ravan $\alpha: 2x-y-2z+4=0$. Napisati vezu novih koordinata sa standardnim koordinatama (x,y,z).

5) $(4+4+4)$ Nacrtati glatki i poliedarski model torusa. Napisati mu tabelu povezanosti i odrediti Ojlerovu karakteristiku i rod. Pokazati da je torus orijentabilna površ.

Geometrija (I-smer), jun 2018. godine

1) $(6+4+2)$ Napisati opšte formule transformacije koordinata ortonormiranih repera (oba oblika), skicirati i objasniti koji oblik šta predstavlja. Da li formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

prestavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

2) $(4+4)$ Od datih tačaka u ravni formirati prost poligon, a zatim ga triangulisati: $P_0=(0,1)$, $P_1=(3,-1)$, $P_2=(1,-2)$, $P_3=(5,-3)$, $P_4=(6,1)$, $P_5=(4,2)$, $P_6=(0,0)$. Primenom Grahamovog algoritma odrediti konveksni omotač skupa ovih tačaka.

3) $(6+3+5)$ Date su tačke $P_0(1,0)$, $P_1(11,-5)$, $P_2(6,10)$, $P_3(1,5)$. a) Koristeći de-Kasteljau algoritam odrediti $\alpha(0.6)$, gde je α Bezijerova kriva odredjena datim tačkama. b) Podeliti krivu α na dve Bezijerove krive praveći rez u tački $\alpha(0.6)$. c) Povećati stepen "desne" krive za 1.

4) $(8+5)$ a) Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p: \frac{x}{-1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-10}{2}$, a od tačke $C(2,1,3)$ je udaljena za 3. b) Odrediti tačku D simetričnu tački C u odnosu na ravan α.

5) $(4+5+4)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela. c) Odrediti odnos zapremina tetraedra i njemu dualnog tela.

Geometrija (I-smer), septembar 2018. godine

1) $(4+4+4+4)$ Odrediti težište T, ortocentar H i centar opisanog kruga O oko trougla ABC, $A(3,4)$, $B(-1,0)$, $C(7,2)$. Koje od ovih tačaka se nalaze **unutar** $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) $(2+5+3)$ Da li je trougao ABC iz prethodnog zadatka podudaran trouglu $A'B'C'$, $A'(5,-2)$, $B'\left(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)$, $C'(7,2)$? Odrediti formule izometrije kojom se $\triangle ABC$ preslikava u $\triangle A'B'C'$. O kojoj se izometriji radi?
3) $(6+6)$ Skicirati hiperbolu i definisati njene osnovne elemente. Rotacijom pokazati da je kriva $xy=1$ hiperbola i skicirati je.
4) $(5+5)$ Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p: x-z+3=0,\ 2x-y+3z-4=0$ i $q: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+5}{1}$.
5) $(2+6+4)$ a) Definisati Ojlerovu karakteristiku površi. b) Skicirati glatke površi roda 0, 1 i 2. c) Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake i dodekaedra.

Geometrija (I-smer), januar 2019. godine

1) $(2+4+2+4)$ a) Navesti opšte formule afinog preslikavanja i objasniti šta je šta. b) Odrediti afino preslikavanje koje slika $\triangle ABC$, $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(-\sqrt{3},1)$, u $\triangle A'B'C'$, $A'(0,1)$, $B'(\sqrt{3},2)$, $C'(\sqrt{3},0)$. c) Da li je preslikavanje izometrija? (obrazložiti) d) Odrediti sliku centra kruga upisanog u $\triangle ABC$ pri ovom preslikavanju.
2) $(6+2+4)$ a) Napisati i dokazati formulu za rastojanje tačke od ravni. b) Navesti teoremu o pramenu ravni. c) Odrediti jednačinu ravni σ koja sadrži pravu $p: \frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0}$ i čije je rastojanje od tačke $T(2,-1,2)$ jednako 1.
3) $(4+4+4)$ Date su kontrolne tačke Bezijerove krive $P_0(3,0)$, $P_1(3,3)$, $P_2(0,3)$. a) Podeliti krivu na dva dela preveći rez u tački $\alpha_2\left(\frac{1}{3}\right)$. b) Povećati stepen "desne" krive za 1. c) Napisati jednačinu krive dobijene spajanjem "leve" i nove "desne" krive. Kog stepena je ta kriva? Skicirati je.
4) $(4+6+2)$ a) Šta je konveksni omotač skupa n tačaka u ravni? Nacrtati primer. b) Opisati algoritam za određivanje konveksnog omotača po izboru i na primeru pokazati kako radi. c) Navesti osobinu konveksnog omotača Bezijerove krive.
5) $(4+2+6)$ a) Navesti imena i nacrtati skicu glatkih površi roda 0 i 1. b) Skicirati njihove poliedarske modele. c) Da li su ove površi orijentabilne? Dokazati.

Geometrija (I-smer), februar 2019. godine

1) $(4+4+2)$ a) Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački. b) Ako je $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(6,0)$, ispitati da li ortocentar H pripada unutrašnjosti $\triangle ABC$. c) Odrediti homogene baricentričke koordinate tačke H u odnosu na $\triangle ABC$.
2) $(5+7)$ a) Nabrojati sve afine transformacije ravni i napisati njihove formule. b) Odrediti sliku kvadrata $ABCD$, čiji je centar koordinatni početak i $A(1,0)$, pri kompoziciji rotacije oko tačke A za ugao $\phi=\frac{\pi}{4}$ i homotetije sa centrom B i koeficijentom $\lambda=-\sqrt{2}$. Skicirati!
3) $(4+2+6)$ a) Skicirati parabolu, napisati njenu kanonsku jednačinu i definisati osnovne elemente. b) Napisati jednačinu kosog hica. c) Sa linije za slobodna bacanja prvo je koš gađao igrač visine $1.9m$, a zatim igrač visine $2.05m$. Ako su obojica loptu izbacila pod početnim uglom $\phi_0=\frac{\pi}{3}$, kom igraču je bila potrebna manja početna brzina? (linija za slobodna bacanja je udaljena od koša $5.8m$, koš je na visini $3.05m$, a za gravitaciono ubrzanje uzeti $g=10m/s^2$)
4) $(4+4+4+2)$ U prostoru su date tačke $O(1,0,3)$, $A(-2,4,1)$, $B(2,0,-1)$ i ravan $\pi: 2x+y+2z-11=0$. a) Odrediti normalnu projekciju duži $[AB]$ na ravan π. b) Odrediti centralnu projekciju sa centrom u tački O duži $[AB]$ na ravan π. c) Odrediti duž simetričnu duži $[AB]$ u odnosu na ravan π. d) Poređati ove četiri duži po dužini, počev od najkraće.
5) $(5+5+2)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 0,3,7,4\rangle$, $p_1=\langle 1,6,2,5\rangle$, $p_2=\langle 5,0,1\rangle$, $p_3=\langle 3,2,1\rangle$, $p_4=\langle 2,3,7,6\rangle$, $p_5=\langle 3,1,0\rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_2=\langle 5,0,1\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), jun 2019. godine

1) $(4+2+4)$ U ravni su date tačke $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(4,0)$, $D(2,3)$, $A'(1,0)$, $B'(0,0)$ i $C'(0,1)$. a) Odrediti afino preslikavanje kojim se trougao ABC slika u trougao $A'B'C'$. b) Šta je slika tačke D pri ovom preslikavanju? c) Ako je $D'(2,2)$, odrediti formule projektivnog preslikavanja koje slika četvorougao $ABCD$ u četvorougao $A'B'C'D'$.
2) $(4+6+4)$ a) Definisati centar mase i težište tetraedra. b) Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u težištu. c) Odrediti u kom odnosu centar mase T deli težišnu duž iz temena D tetraedra $ABCD$ ako su mase u temenima $m_A=m_B=m_C=2$ i $m_D=3$.
3) $(4+6)$ a) Odrediti parametrizaciju kruga $\kappa: (x-1)^2+(y+4)^2=9$. b) Odrediti presek kruga κ i prave $p: x=-2+t,\ y=-4+5t$.
4) (10) Odrediti jednačinu prave m koja sadrži tačku $M(2,7,-1)$ i seče prave $p: x-2y+5=0,\ 3y+z-13=0$ i $q: \frac{x}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-5}{-3}$.
5) $(5+5+6)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela. c) Odrediti odnos zapremina kocke i njoj dualnog tela. Skicirati ih!

Geometrija (I-smer), septembar 2019. godine

1) $(4+6)$ a) Dokazati da je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ako i samo ako se duži AC i BD polove b) Dat je paralelogram $ABCD$. Neka je E središte stranice BC i S presek dijagonala AC i BD. Odrediti homogene baricentričke koordinate tačaka B, C i D u odnosu na trougao AES.
2) $(6+6)$ Formirati prost poligon od tačaka $P_0=(1,2)$, $P_1=(4,0)$, $P_2=(2,-1)$, $P_3=(6,2)$, $P_4=(7,-2)$, $P_5=(5,3)$, a zatim ga triangulisati. Proveriti da li tačka $M(5,2)$ pripada unutrašnjosti početnog poligona $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ (obrazložiti odgovor).
3) $(6+4+2)$ a) Skicirati hiperbolu, napisati njenu kanonsku jednačinu i definisati osnovne elemente. b) Pokazati da za hiperbolu važi: $|d(M,F_1)-d(M,F_2)|=2a$. c) Formulisati i skicirati optičko svojstvo hiperbole.
4) $(8+2+4)$ Izvesti formule stereografske projekcije iz južnog pola na ravan $z=0$. Skicirati! Šta su slike meridijana i paralela?
5) $(4+3+5)$ a) Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i napisati njene pljosni. b) Odrediti rub, broj komponenata ruba i Ojlerovu karakteristiku. c) Dokazati da Mebijusova traka nije orijentabilna.

Geometrija (I-smer), januar 2020. godine

1) $(4+2+4)$ a) Dokazati da se simetrale unutršnjih uglova trougla seku u jednoj tački. b) Da li ta tačka pripada unutrašnjosti $\triangle ABC$, $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(6,0)$? Zašto? c) Odrediti homogene baricentričke koordinate te tačke u odnosu na $\triangle ABC$.
2) $(9+3)$ Korisik je obeležio sliku pravougaonog oblika sa naspramnim temenima $P(20,20)$ i $Q(120,160)$. Zatim ju je prvo rotirao za 90 stepeni, a onda i preslikao na ceo ekran dimeznije 800×600 bez distorzije (homotetijom). Odrediti formule ove afine transformacije. Da li ova transformacija čuva orijentaciju i uglove? Obrazložiti.
3) $(4+4+4+3)$ Bezijerova kriva $\alpha(t)$, $t\in[0,1]$, je data kontrolnim tačkama $P_0(-1,-4)$, $P_1(-7,2)$, $P_2(5,8)$. a) Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački $t_0=\frac{2}{3}$. b) Povećati stepen "desne" krive za 2. c) Napisati jednačinu "leve" krive ako se njena početna tačka translira za vektor $\vec{v}=(2,3)$. d) Da li je moguće izvršiti glatko lepljenje nove "leve" i "desne" krive? Kog stepena je ta nova kriva? Obrazložiti odgovore.
4) $(4+3+2+4)$ a) Navesti i skicirati sve međusobne položaje pravih p i q u prostoru (napisati uslove u terminima vektora). b) Odrediti međusobni položaj i presečnu tačku (ako postoji) pravih $p:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{4}$ i $q: x+y-2z=0,\ 2x-y+3=0$. c) Da li postoji zajednička normala pravih p i q? Obrazložiti. d) Odrediti jednačinu prave r koja sadrži tačku $R(0,2,0)$ i seče prave p i q.
5) $(4+2+4)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 0,2,7,4\rangle$, $p_1=\langle 1,6,3\rangle$, $p_2=\langle 2,6,1\rangle$, $p_3=\langle 5,0,1\rangle$, $p_4=\langle 6,2,7,3\rangle$, $p_5=\langle 5,4,0\rangle$, $p_6=\langle 3,1,5\rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Skicirati površ. c) Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_5=\langle 5,4,0\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), februar 2020. godine

1) $(4+4+4)$ U ravni su date tačke $P_0(1,2)$, $P_1(-3,1)$, $P_2(4,4)$, $P_3(0,-2)$, $P_4(1,1)$, $P_5(-2,-1)$, $P_6(5,0)$, $P_7(3,-2)$, $P_8(3,3)$. a) Koristeći Grahamov algoritam odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0,\ldots,P_8$. b) Izvesti formulu za površinu prostog poligona. c) Izračunati površinu poligona koji čini konveksni omotač.
2) $(4+4+4)$ a) Izvesti formulu za rastojanje tačke od parametrski zadate prave. b) Izvesti formulu za rastojanje tačke od implicitno zadate prave. c) U ravni su date tačka $A(-1,1)$ i prave $p: P(2,2), \vec{p}=(-3,4)$, $q: 5x+12y+6=0$. Kojoj pravoj je tačka A bliža?
3) $(4+8)$ Translacijom svesti na kanonski oblik krivu $4x^2-9y^2+16x+18y-9=0$. Napisati naziv krive i odrediti njene osnovne elemente.
4) $(8+4+2)$ U prostoru su date ravni $\alpha: 2x-2y+z=0$ i $\beta: 2x+y-2z=0$. Neka je f preslikavanje koje predstavlja kompoziciju refleksije u odnosu na ravni α i β redom. Odrediti matricu preslikavanja f. Napisati koje je to preslikavanje (navesti naziv i osnovne elemente). Da li f čuva orijentaciju? (odgovor detaljno obrazložiti)
5) $(2+5+3)$ Definisati Ojlerovu karakteristiku χ poliedarske površi. Navesti primer površi za koju je $\chi=2$, skicirati je i napisati njenu tabelu povezanosti. Da li je ta površ orijentabilna? (odgovor detaljno obrazložiti)

Geometrija (I-smer), jun 2020. godine

1) $(4+4+4)$ a) Izvesti jednačinu ravnoteže klackalice i formulu za centar mase. b) Na jednom kraju poluge dužine $3m$ sedi dete mase $12kg$, a na drugom kraju je džak sa igračkama mase $4kg$. Na kom rastojanju (u **centimetrima**) od deteta treba postaviti oslonac da bi poluga bila u ravnoteži? c) Ako se jedan kraj poluge postavi na zemlju, a džak sa igračkama pomeri na sredinu, koliku masu podiže dete držeći drugi kraj poluge?
2) $(4+4+4)$ a) Definisati afina preslikavanja ravni i napisati opšte formule. b) Nabrojati afina preslikavanja koja čuvaju površinu. Koja od njih **ne čuvaju** uglove? c) Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $C(-1,1)$ i koeficijentom $\lambda = 2$.
3) $(2+5+5)$ a) Napisati parametarsku jednačinu kosog hica. b) Sa vertikalne litice visine $12m$ u more je bačena lopta pod uglom $30°$, početnom brzinom $8m/s$. Posle koliko vremena će lopta upasti u vodu? Na kojoj udaljenosti od podnožja litice će biti tačka udara o površinu vode? Uzeti da je gravitaciono ubrzanje $10m/s^2$.
4) $(4+5+3)$ Odrediti ortonormirani koordinatni sistem vezan za ravan $\alpha : 3x - 4y = 0$. Napisati parametarsku jednačinu kruga κ koji se nalazi u preseku ravni α sa jediničnom sferom σ čiji je centar u koordinatom početku. Šta je slika kruga κ pri streografskoj projekciji sa centrom u tački $N(0,0,1)$ na ravan $z = 0$? (obrazložiti)
5) $(4+4+4)$ Napisati tabelu povezanosti oktaedra, izračunati mu Ojlerovu karakteristiku i rod. Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni. Skicirati oktaedar i njemu dualno Platonovo telo.

Geometrija (I-smer), avgust 2020. godine

1) $(2+4+4)$ U prostoru su date tačke $A(1,4,-2)$, $B(3,0,0)$, $C(-1,2,1)$ i $D(2,2,0)$. a) Da li ove tačke mogu biti temena tetraedra? Obrazložiti. b) Ukoliko je odgovor pod a) potvrdan, izračunati zapreminu i površinu tog tetraedra. Ukoliko je odgovor odričan, izračunati površinu prostog poligona čija su temena te tačke. c) Da li tačka $M(2,3,1)$ pripada unutrašnjosti tetraedra/poligona?
2) $(4+8)$ a) Definisati izometrije ravni i nabrojati ih. Koje od tih izometrija su kretanja? b) Neka je f kompozicija smicanja u odnosu na y-osu sa koeficijentom $k_1 = -2$, smicanja u odnosu na x-osu sa koeficijentom $k_2 = \frac{1}{2}$ i smicanja u odnosu na y-osu sa koeficijentom $k_3 = -1$. Odrediti formule preslikavanja f. Da li je f izometrija? Da li je kretanje? Šta je slika koordinatnog početka pri preslikavanju f?
3) $(6+2+4)$ U ravni su date tačke $F_1(2,0)$ i $F_2(-2,0)$. a) Odrediti geometrijsko mesto tačaka čiji je zbir rastojanja od tačke F_1 i tačke F_2 jednako 8 (napisati jednačinu). b) Koja kriva je u pitanju? c) Ako je ova kriva orbita nekog nebeskog tela, da li se i posle koliko vremena to telo vraća u početni položaj?
4) $(4+2+6)$ Navesti formulu za ugao između prave i ravni. Skicirati. Izračunati ugao između prave $p:\ P(-1,0,1)$, $Q(1,0,-1)$ i ravni $\alpha : x = t-2,\ y = s+2t-2,\ z = -s,\ s,t \in \mathbb{R}$.
5) $(5+3+6)$ a) Nabrojati sva Platonova tela i za svako napisati broj temena, ivica i pljosni. Navesti sve parove dualnih tela i skicirati jedan par (po izboru). b) Dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela.

Geometrija (I-smer), septembar 2020. godine

1) $(6+4)$ Odrediti ortocentar H i centar opisanog kruga O oko trougla ABC, $A(-3,2)$, $B(-1,2)$, $C(7,-10)$. Koje od ovih tačaka se nalaze **izvan** $\triangle ABC$? Obrazložiti.
2) $(6+3+5)$ a) Odrediti formule preslikavanja f kojim se trougao iz prethodnoh zadatka preslikava u trougao PQR, $P(0,0)$, $Q(3,4)$, $R(0,4)$. b) Da li su trouglovi ABC i PQR podudarni? Obrazložiti. c) U koju tačku se slika težište T trougla ABC? Da li je ta tačka neka od značajnih tačaka trougla PQR? Ako jeste, navesti koja tačka je u pitanju.
3) $(4+4+4)$ a) Napisati definiciju Bezijerove krive stepena 2 i skicirati je. b) Napisati matričnu reprezentaciju te krive. c) Dokazati da je svaka Bezijerova kriva stepena 2 deo parabole.
4) $(5+5+2)$ a) Odrediti tačku prodora M prave $p:\ 2x - y = 0,\ y + z - 2 = 0$ kroz ravan α određenu tačkom $A(0,1,-1)$ i vektorima $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$. b) Odrediti tačku $P \in p$ čije je rastojanje od ravni α jednako $\sqrt{3}$. c) Da li je tačka P jedinstvena?
5) $(5+2+5)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 1,6,7,0 \rangle$, $p_1 = \langle 0,7,4,3 \rangle$, $p_2 = \langle 1,6,5,2 \rangle$, $p_3 = \langle 4,6,5 \rangle$, $p_4 = \langle 2,5,4 \rangle$, $p_5 = \langle 0,1,3 \rangle$, $p_6 = \langle 6,4,7 \rangle$. a) Odrediti rub te površi i broj komponenti ruba. b) Skicirati površ. c) Izvršiti (ako je moguće) usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_3 = \langle 4,6,5 \rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), dodatni rok, septembar 2020. godine

1) (10) Dat je trougao ABC. Neka su M i N tačke takve da je $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NB}$. Ako je $\{P\} = CN \cap BM$ i $\{X\} = AP \cap BC$, odrediti u kom odnosu tačka X deli duž BC.
2) (8+4) Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p: 3y-4z+9=0,\ x=0$, i $q: 2x-2y+z-21=0,\ 4y+3z-13=0$.
3) (4 + 6 + 4) Objasniti rečima šta znači afina invarijantnost Bezijerove krive. Ako je kontrolni poligon Bezijerove krive α: $P_0(1,-2)$, $P_1(6,6)$, $P_2(-4,1)$, $P_3(11,-4)$, primenom De Kasteljau algoritma podeliti Bezijerovu krivu na dve krive i odrediti joj tangentu u tački $\alpha\left(\frac{4}{5}\right)$. Skicirati algoritam.
4) (5 + 3 + 4) Izvesti formule rotacije oko y koordinatne ose. Navesti Ojlerovu teoremu o dekompoziciji ortogonalne matrice. Odrediti formule rotacije oko prave p koja sadrži tačku $P(2,-1,2)$ i paralelna je y-osi.
5) (4 + 8) Definisati triangulaciju prostog poligona i nacrtati sliku. Sortirati tačke $P_0 = (4,5), P_1 = (0,4), P_2 = (5,1), P_3 = (2,-2), P_4 = (3,1), P_5 = (1,-1), P_6 = (6,-2), P_7 = (-1,2)$ tako da formiraju prost poligon, a zatim taj poligon triangulisati.

Geometrija (I-smer), januar 2021. godine

1) (4 + 2 + 4) a) Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački. b) Da li ta tačka pripada **unutrašnjosti** $\triangle ABC$, $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(1,-2)$? Zašto? v) Odrediti **nehomogene** baricentričke koordinate te tačke u odnosu na $\triangle ABC$.
2) (4 + 5 + 5) a) Definisati afina preslikavanja ravni i napisati opšte formule. b) Nabrojati afina preslikavanja koja čuvaju odnos dužine i širine. Koja od njih **ne čuvaju** uglove? v) Odrediti formule rotacije sa centrom u tački $C(-1,1)$, za ugao $\phi = \frac{5\pi}{3}$.
3) (4 + 3 + 4 + 5) a) Napisati parametarsku jednačinu kosog hica. b) Od čega zavisi ubrzanje pri kretanju niz strmu ravan bez početne brzine? v) Sa vrha krova pod nagibom od 30° počinje da se kotrlja grudva snega bez početne brzine. Koliku brzinu će dostići na kraju krova dužine $10m$? Ako je rastojanje od kraja krova do zemlje $10m$, koliko vremena će proteći od početka kretanja niz krov, pa dok grudva ne padne na zemlju? Uzeti da je gravitaciono ubrzanje $10m/s^2$. Zanemariti trenje i otpor sredine.
4) (10) Odrediti normalnu projekciju prave $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{-2}$ na ravan $\alpha: x+y+z-2=0$.
5) (4 + 2 + 4) Data je poliedarska površ pljosnima $p_0 = \langle 0,1,4,3\rangle$, $p_1 = \langle 0,6,8,2\rangle$, $p_2 = \langle 1,2,5,4\rangle$, $p_3 = \langle 8,7,1,2\rangle$, $p_4 = \langle 2,0,3,5\rangle$, $p_5 = \langle 0,1,7,6\rangle$, $p_6 = \langle 6,8,5,3\rangle$, $p_7 = \langle 6,3,4,7\rangle$, $p_8 = \langle 4,5,8,7\rangle$. a) Odrediti Ojlerovu karakteristiku te površi i rod (ako postoji). b) Skicirati površ. v) Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni, počev od pljosni $p_1 = \langle 0,6,8,2\rangle$. Da li je površ orijentabilna?

Geometrija (I-smer), februar 2021. godine

1) (6 + 4) Odrediti površinu i orijentaciju $\triangle ABC$, $A(0,1)$, $B(-1,4)$, $C(1,1)$. Da li se tačke A i C nalaze sa iste strane prave BT, gde je T težište $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) (6 + 4 + 2) U početnom trenutku dodir jednog prsta je registrovan u tački $P_0(40,40)$, a drugog u tački $Q_0(100,120)$. U sledećem trenutku prvi prst se nalazi u tački $P_1(320,200)$, a drugi u tački $Q_1(500,440)$. Uvećati sliku čija su naspramna temena $A(20,20)$ i $C(120,160)$ za odnos dužina $\lambda = P_1Q_1 : P_0Q_0$, pri čemu se središte duži P_0Q_0 preslikava u središte duži P_1Q_1. Napisati formule odgovarajućeg afinog preslikavanja. Odrediti slike tačaka A i C pri ovom preslikavanju. Da li čitava uvećana slika staje na ekran dimenzija 800×600 piksela?
3) (4 + 4 + 6) a) Napisati parametarsku jednačinu Bezijerove krive stepena 2. b) Izvesti njenu matričnu reprezentaciju. v) Napisati jednačinu Bezijerove krive definisane na intervalu $[3,8]$ čije su kontrolne tačke $P_0(-3,-1)$, $P_1(2,7)$, $P_2(-8,2)$.
4) (4+2+6) Navesti formulu za ugao između dve ravni. Skicirati. Odrediti ravan koja sadrži pravu $p:\ P(-1,0,1),\ Q(1,0,-1)$ i sa ravni $\alpha: x+2y-2z+1=0$ zaklapa ugao $\phi = \frac{\pi}{4}$.
5) (4+4+4) Napisati tabelu povezanosti kocke, izračunati joj Ojlerovu karakteristiku i rod. Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni. Skicirati kocku i njoj dualno Platonovo telo.

Geometrija (I-smer), jun 2021. godine

1) $(4+4+2+2)$ Dat je kvadrat $ABCD$. Odrediti vezu između koordinata (x,y) u reperu Ce i koordinate (x',y') u reperu Bf ako je $e=(\vec{CD},\vec{CB})$ i $f=(\vec{BC},\vec{BA})$. Odrediti koordinate temena u oba repera. Koji tip transformacija ortonormiranih repera se ovde javlja? Skicirati!
2) $(4+3+4)$ a) Napisati parametarsku i implicitnu jednačinu ravni. Skicirati i označiti odgovarajuće elemente. b) U kom međusobnom položaju mogu biti dve ravni u prostoru? v) Skicirati ravni $\alpha: y-2z+4=0$ i $\beta: x-3y+2z+6=0$.
3) $(3+6+3)$ a) Formulisati Keplerove zakone. b) Ekcentricitet Jupitera je ~ 0.05, a veća poluosa $\sim 5AJ$. Odrediti najmanje (perihel) i najveće (afel) rastojanje Jupitera od Sunca. v) Koliko godina je potrebno Jupiteru da obiđe oko Sunca?
4) $(6+4+6)$ a) Napisati matrice rotacija oko koordinatnih osa u prostoru. b) Navesti Ojlerovu teoremu o dekompoziciji ortogonalne matrice (II Ojlerova teorema). v) Odrediti formule rotacije oko prave p koja sadrži tačku $P(2,-1,2)$ i paralelna je y-osi.
5) $(2+5+2)$ Definisati Ojlerovu karakteristiku χ poliedarske površi. Navesti primer površi za koju je $\chi=0$, skicirati je i napisati njenu tabelu povezanosti. Da li je ta površ orijentabilna? (odgovor detaljno obrazložiti)

Geometrija (I-smer), jun 2, 2021. godine

1) $(4+2+3+3)$ U ravni je dat trougao ABC, $A(0,-2)$, $B(4,-5)$, $C(6,6)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu kruga opisanog oko trougla ABC. b) Odrediti koordinate ortocentra H trougla ABC. v) Odrediti tačke simetrične ortocentru u odnosu na stranice trougla. g) Da li te tačke pripadaju krugu opisanom oko trougla ABC?
2) $(4+3+3)$ a) Izvesti formule stereografske projekcije iz severnog pola na ravan $z=0$. b) Objasniti šta je šta u osnovnoj formuli sferne geometrije: $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$. Skicirati! v) Izračunati rastojanje između tačaka $A(60^\circ\ N, 30^\circ\ E)$ i $B(30^\circ\ S, 60^\circ\ W)$ na sferi.
3) $(5+5+4)$ Bezijerova kriva $\alpha(t)$, $t\in[0,1]$, je data kontrolnim tačkama $P_0(1,-5)$, $P_1(-5,1)$, $P_2(7,7)$. a) Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački $t_0=\frac{1}{3}$. b) Povećati stepen "desne" krive za 1. v) Napisati jednačinu "leve" krive ako se njena početna tačka translira za vektor $\vec{v}=(-1,2)$.
4) $(2+5+5)$ a) Definisati mimoilazne prave. b) Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p: 3y-4z+9=0$, $x=0$, i $q: \frac{x-10}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-4}$.
5) $(5+2+5)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Za svako Platonovo telo navesti njemu dualno telo. v) Odrediti odnos zapremina tetraedra i njemu dualnog tela. Skicirati ih!

Geometrija (I-smer), septembar 2021. godine

1) $(4+2+4)$ Definisati vektorski proizvod i napisati tablicu vektorskog množenja u ortonormiranoj bazi. Ispitati kolinearnost tačaka $A(2,3)$, $B(4,7)$ i $C(-2,0)$. Ako su tačke kolinearne, odrediti odnos u kome tačka A deli duž BC. Ukoliko tačke nisu kolinearne, ispitati orijentaciju trougla ABC.
2) $(6+2+6)$ Dat je pravilan petougao $ABCDE$. Ako su date baze $e=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ i $f=(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA})$, odrediti formule transformacija koordinata iz repera Ae u reper Cf, kao i inverzne formule. Da li ove formule predstavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera (obrazložiti)? Odrediti koordinate temena B, D i E u oba repera.
Pomoć: Odnos dijagonale i stranice pravilnog petougla jednak je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3) $(4+4+6)$ Napisati kanonsku i parametarsku jednačinu hiperbole. Translacijom svesti hiperbolu $x^2-4y^2-2x-32y+36=0$ na kanonski oblik, a zatim je skicirati i odrediti joj osnovne elemente.
4) $(4+6)$ Šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni π? Odrediti parametarski jednačinu kruga sa centrom u tački $C(1,1,1)$ koji pripada ravni $\pi: 2x+y-2z-1=0$.
5) $(6+6)$ Primenom Grahamovog algoritma odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0=(2,2)$, $P_1=(-2,1)$, $P_2=(3,-2)$, $P_3=(0,-5)$, $P_4=(1,-2)$, $P_5=(1,-4)$, $P_6=(4,-5)$, $P_7=(-3,-1)$. Dobijeni poligon triangulisati. Skicirati!

Geometrija (I-smer), septembar 2, 2021. godine

1) $(4+3+5)$ U ravni je dat trougao ABC, $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(-2,5)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu kruga upisanog u trougao ABC. b) Odrediti koordinate težišta T trougla ABC. v) Odrediti **homogene** baricentričke koordinate težišta i centra upisanog kruga u odnosu na trougao ABC.
2) $(4+4+4)$ a) Napisati parametarsku i implicitnu jednačinu ravni α koja sadrži tačku $A(1,0,-2)$ i pravu $a: x+y+z=0, x-y+2z=0$. b) Skicirati i označiti odgovarajuće elemente. v) Izvesti formulu refleksije u odnosu na ravan α.
3) $(4+4+4)$ a) Podeliti Bezijerovu krivu $\alpha_2(t)$ čije su kontrolne tačke $P_0(-3,2)$, $P_1(2,7)$, $P_2(-8,2)$ na dva dela, praveći rez u tački $t_0=\frac{1}{5}$. b) Odrediti sliku "leve" krive pri refleksiji u odnosu na tangentu u tački $t_0=\frac{1}{5}$. v) Da li je kriva dobijena u delu b) Bezijerova? Zašto? Detaljno obrazložiti.
4) $(4+4+4)$ a) Definisati orijentabilnost poliedarske površi. b) Dokazati da je oktaedar orijentabilan. v) Izračunati zapreminu oktaedra upisanog u jediničnu kocku.
5) $(6+6)$ a) Izvesti formulu za računanje površine prostog poligona. b) Izračunati površinu prostog poligona čija su temena $P_0(1,1)$, $P_1(11,-4)$, $P_2(6,11)$, $P_3(1,6)$, $P_4(-3,4)$, $P_5(-1,1)$.

Geometrija (I-smer), januar 2022. godine

1) $(5+3+4)$ U ravni su date tačke $P_0(1,2)$, $P_1(-3,2)$, $P_2(4,5)$, $P_3(0,-1)$, $P_4(-1,-3)$, $P_5(2,3)$, $P_6(1,1)$, $P_7(-2,0)$, $P_8(3,-2)$, $P_9(5,1)$. a) **Grahamovim algoritmom** odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0,\dots,P_9$. b) Ako galerija ima oblik dobijenog konveksnog omotača, postaviti kamere u njegova temena tako da pokrivenost unutrašnosti bude optimalna. Koliko je kamera potrebno? v) Da li postoji triangulacija konveksnog omotača takva da sve unutrašnje tačke leže unutar jednog trougla? U slučaju potvrdnog odgovora, odrediti tu triangulaciju.
2) $(4+4+4)$ a) Izvesti formule rotacije oko proizvoljne tačke u ravni (napisati odgovarajuću matricu preslikavanja). b) Shta sve može biti kompozicija dve rotacije u ravni? Detaljno obrazložiti. v) Napisati primer dve rotacije u ravni (sa različitim centrima) čija je kompozicija translacija za nenula vektor.
3) $(4+4+4)$ a) Odrediti centar i poluprečnik kruga $\kappa: x^2+y^2-6x+4y+12=0$. b) Odrediti parametrizaciju kruga κ dužinom luka. v) Odrediti presek prave $p: x-y-6=0$ i kruga κ.
4) (10) Odrediti rastojanje između mimoilaznih pravih $p: \frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{0}$ i $q: \frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-15}{-5}$.
5) $(4+2+4+4)$ Odrediti tabelu povezanosti oktaedra. Izračunati mu Ojlerovu karakteristiku i rod. Dokazati da je oktaedar orijentabilan. Skicirati oktaedar i njemu dualno Platonovo telo.

Geometrija (I-smer), februar 2022. godine

1) $(4+4+4)$ a) Definisati centar mase sistema tri tačke i dokazati da ne zavisi od izbora referentne tačke O. b) Neka se centar mase tri objekta nalazi u tački $T(3,4)$. Odrediti koordinate objekta A_3 mase $m_3=8\,kg$ ako preostala dva objekta imaju koordinate i masu $A_1(1,3)$, $m_1=2\,kg$ i $A_2(3,2)$, $m_2=5\,kg$. v) Odrediti **nehomogene** baricentričke koordinate tačke T u odnosu na trougao $A_1A_2A_3$.
2) $(4+4+4)$ U ravni su date tačke $P(2,1)$ i $Q(4,5)$. Odrediti formule afinog preslikavanja f koje slika tačku P u tačku Q ako je f: a) translacija; b) refleksija; v) rotacija oko koordinatnog početka. Ako ne postoji odgovarajuće preslikavanje f, obrazložiti zašto ne postoji.
3) $(8+4)$ Kubna Bezijerova kriva je zadata kontrolnim tačkama $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,1)$, $P_3(2,0)$. a) Koristeći De-Kasteljau algoritam, podeliti krivu na tri, praveći rez u tačkama $t_0=\frac{1}{2}$ i $t_1=\frac{3}{4}$. b) Nakon podele dozvoljena je promena "srednje" krive. Odrediti uslove koje nove kontrolne tačke te krive moraju da zadovolje da bi čitava kriva i dalje ostala glatka.
4) $(4+4+4)$ a) Odrediti prodor prave $p: \frac{x}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{1}$ kroz trougao ABC, ako je $A(-4,2,0)$, $B(-2,4,-2)$, $C(2,4,-2)$. b) Kako se računa ugao između prave i ravni? Skicirati. v) Odrediti ugao koji prava p zaklapa sa ravni trougla ABC.
5) $(3+5+4)$ Definisati prostu poliedarsku površ. Navesti primer apstraktne poliedarske površi koja ima rub, napisati joj tabelu povezanosti i skicirati je. Definisati orijentabilnost poliedarske površi i ispitati da li je navedeni primer orijentabilan.

Geometrija (I-smer), jun 1 2022. godine

1) $(6+4)$ Odrediti površinu i orijentaciju $\triangle ABC$, $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(0,2)$. Da li se tačke A i C nalaze sa iste strane prave BS, gde je S centar upisanog kruga $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) $(4+6+2)$ a) Napisati parametarsku jednačinu prave $p: x+2y-z=0$, $x-y+2z=0$. b) Odrediti formule rotacije za ugao $\frac{\pi}{3}$ oko prave p. v) Shta je slika koordinatnog početka pri ovoj rotaciji?
3) $(4+4+6)$ a) Skicirati elipsu i definisati njene osnovne elemente. b) Navesti i dokazati **fokusnu** osobinu elipse. v) Na bilijarskom stolu oblika elipse čije su ose $a = 1m$ i $b = 80cm$ lopta je udarena sa pozicije udaljene $30cm$ od centra elipse (u pravcu duže ose) pod uglom od $60°$. Da li će lopta proći kroz njoj centralno simetričnu tačku u odnosu na centar? Ako hoće, posle koliko odbijanja o ivicu stola? Odgovore detaljno obrazložiti.
4) $(4+6)$ Shta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni π? Odrediti parametarsku jednačinu kruga poluprečnika $r = 3$, sa centrom u tački $A(2,1,0)$ koji pripada ravni $\pi : x = 2+3t+s$, $y = 1-4t+2s$, $z = 2s$, $s,t \in \mathbb{R}$.
5) $(5+4+5)$ a) Definisati Platonovo telo i navesti nazive svih Platonovih tela. b) Za svako Platonovo telo navesti njemu dualno telo. v) Odrediti odnos površina kocke i njoj dualnog tela. Skicirati ih!

Geometrija (I-smer), jun 2 2022. godine

1) $(4+8)$ a) Izvesti jednačinu ravnoteže klackalice i formulu za centar mase. b) Sportski ribolovac je harpunom ulovio veliku belu ajkulu. Ajkula je neko vreme pružala otpor, ali se onda umirila na udaljenosti $120m$ od broda. Ribolovac povlači ajkulu užetom privezanim za harpun, pri čemu se brod (iz početnog stanja mirovanja) pomera $24m$ u pravcu ajkule. Kolika je masa ajkule ako je masa broda $3t$? Zanemariti otpor sredine.
2) $(4+4+4)$ Dat je $\triangle ABC$, $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(0,2)$. a) Odrediti simetralu s_α unutrašnjeg ugla kod temena A. b) Odrediti simetralu n_{BC} stranice BC. v) Odrediti sliku tačke A pri kompoziciji refleksije u odnosu na pravu s_α i refliksije u odnosu na pravu n_{BC}.
3) $(6+6)$ a) Odrediti konveksni omotač skupa tačaka $P_0(1,-5)$, $P_1(-5,1)$, $P_2(7,7)$, $P_3 = (2,-2)$, $P_4 = (3,1)$, $P_5 = (1,-4)$, $P_6 = (4,-5)$, $P_7 = (-3,-1)$. b) Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke temena konveksnog omotača iz dela a). Kog stepena je ta kriva?
4) $(4+4+4+2)$ U prostoru su date tačke $C(1,1,0)$, $A(-2,2,1)$, $B(2,1,-2)$ i ravan $\pi : z = -2$. a) Odrediti normalnu projekciju duži $[AB]$ na ravan π. b) Odrediti centralnu projekciju sa centrom u tački C duži $[AB]$ na ravan π. v) Odrediti stereografsku projekciju duži $[AB]$ iz severnog pola sfere sa centrom u koordinatnom početku koja sadrži tačku A na ravan π. g) Koja duž je najkraća? Skicirati.
5) $(4+4+2)$ a) Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i napisati njene pljosni. b) Odrediti rub, broj komponenata ruba i Ojlerovu karakteristiku. v) Da li Mebijusova traka ima rod? Ako ima, odrediti ga.

Geometrija (I-smer), septembar 1, 2022. godine

1) $(4+8)$ Ispitati koplanarnost tačaka $A(1,1,0)$, $B(-1,3,-2)$, $C(2,-3,1)$ i $D(0,1,1)$. Ako su koplanarne, ispitati da li postoji tačka koja se nalazi unutar trougla čija su temena preostale tri tačke. Ako nisu, odrediti zapreminu tetraedra $ABCD$ (izvesti formulu za računanje zapremine).
2) $(4+4+4)$ a) Definisati prostu poligonsku liniju. Skicirati primer poligonske linije koja je prosta i koja nije. b) Formulisati uslov da tačka pripada unutrašnjosti poligona. Skicirati primere. v) Izvesti formulu za računanje površine prostog poligona.
3) $(4+6+2)$ a) Odrediti presečne tačke A i B parabole $y^2 = 4x-6$ i prave $-2x+y+3=0$. b) Odrediti parametarsku jednačinu dela parabole između tačaka A i B. v) Skicirati!
4) $(7+3+2+2)$ Odrediti kompoziciju rotacije oko y-ose i refleksije u odnosu na xz-ravan. Skicirati! Da li je dobijeno preslikavanje izometrija? Da li je kretanje? (Odgovore detaljno obrazložiti)
5) (10) Skicirati poliedarski model torusa, odrediti mu tabelu povezanosti, Ojlerovu karakteristiku i rod.

Geometrija (I-smer), septembar 2, 2022. godine

1) $(8+4)$ Odrediti površinu i orijentaciju trougla ABC, $A(0,1)$, $B(-1,4)$, $C(1,1)$. Da li se tačke A i B nalaze sa iste strane prave CS, gde je S centar upisanog kruga $\triangle ABC$? (obrazložiti)
2) $(6+6+2)$ Korisnik je obeležio pravougaonik (recimo sliku) sa naspramnim temenima $P(360,420)$ i $Q(520,520)$. Odrediti formule afine transformacije koja taj pravougaonik rotira oko tačke P za ugao od $90°$, a zatim preslikava na ceo ekran dimenzija 800×600 bez distrozije, tj. homotetijom. Skicirati!
3) $(8+4)$ Predstaviti deo kruga $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ kao racionalnu Bezijeovu krivu. Skicirati.
4) $(4+8)$ a) Navesti teoremu o pramenu ravni. b) Odrediti vrednost parametra λ tako da ravni $\alpha : 3x-y+z-17=0$, $\beta : x+2y-z-8=0$ i $\gamma : 2x-3y+2z+\lambda=0$ pripadaju istom pramenu.
5) $(5+5)$ Skicirati poliedarski model Mebijusove trake i odrediti mu tabelu povezanosti. Dokazati da je Mebijusova traka neorijentabilna.

Geometrija (I-smer), januar 2023. godine

1) $(5+5+2)$ a) Predstaviti deo kružnice $x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sqrt{2}\sin\theta,\ \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, kao racionalnu Bezijeove krivu. b) Koristeći de-Kasteljau algoritam za homogenu krivu, odrediti središnju tačku na krivoj. v) Skicirati!
2) $(4+3+5)$ Definisati izometrije i kretanja ravni, navesti primere. Koji uslov mora da zadovoljava matrica kretanja (izometrije)? Odrediti formule refleksije u odnosu na pravu $\alpha: 3x-4y+5=0$.
3) $(4+4+4)$ Definisati poligonsku liniju i poligon. Definisati i nacrtati primere prostog, složenog, konveksnog i nekonveksnog poligona. Formulisati uslov da tačka pripada unutrašnjosti poligona i nacrtati primere.
4) $(6+4+2)$ Ispitati da li prava $p:=\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$ seče trougao $\triangle ABC$, $A(2,2,1)$, $B(0,1,-3)$, $C(-1,1,1)$ i, u slučaju da ga seče, odrediti ugao između prave p i ravni $\triangle ABC$. Skicirati!
5) $(8+4)$ Data je poliedarska površ pljosnima $p_0=\langle 0,1,3,5,10,11\rangle$, $p_1=\langle 0,11,9,8,7\rangle$, $p_2=\langle 2,7,6,1\rangle$, $p_3=\langle 8,7,6\rangle$, $p_4=\langle 3,4,5\rangle$, $p_5=\langle 0,1,2\rangle$, $p_6=\langle 11,10,9\rangle$, $p_7=\langle 6,4,3,1\rangle$, $p_8=\langle 0,7,2\rangle$. a) Odrediti rub i komponente ruba, Ojlerovu karakteristiku te površi i rod (ako postoji). b) Skicirati površ.

Geometrija (I-smer), februar 2023. godine

1) $(6+6)$ Navesti i dokazati formulu za rastojanje tačke od prave u ravni ako je prava zadata: a) parametraski; b) implicitno.
2) $(4+8)$ a) Izvesti jednačinu ravnoteže klackalice i formulu za centar mase. b) Astronaut je u svemiru pričvrstio teleskop uređajem čija je masa deset puta manja od njegove. U tom trenutku je shvatio da ne može da se vrati do broda od koga je udaljen $10\,m$. Zato je bacio uređaj što jače, dalje od broda, što ga je pomerilo u suprotnom smeru, ka brodu. Kada je konačno došao do ulaza u brod, koliko je bio udaljen od bačenog uređaja?
3) $(4+4+4)$ a) Izvesti formule rotacije oko x koordinatne ose. Skicirati! b) Neka je f kompozicija rotacije oko y ose za ugao $\frac{3\pi}{2}$ i rotacije oko x ose za ugao $\frac{\pi}{2}$. Odrediti formule preslikavanja f. v) Koje preslikavanje predstavlja f? Detaljno obrazložiti odgovor.
4) $(3+5+4)$ a) Formulisati Keplerove zakone. b) Najveći Saturnov mesec, Titan, ima srednju vrednost radijusa orbite $\approx 1.2\times 10^9\,m$, a period orbite je ≈ 16 dana. Koliki je orbitalni period drugog Saturnovog meseca, Hiperiona, ako mu je srednja vrednost radijusa orbite $\approx 1.5\times 10^9\,m$? v) Ako je ekscentricitet orbite ≈ 0.03, odrediti rastojanje Saturna od Titana u trenutku kada su najudaljeniji.
5) $(4+4+4)$ a) Napisati tabelu povezanosti tetraedra i dokazati da je orijentabilan. b) Na koliko različitih načina možemo razviti tetraedar u mrežu? Skicirati ih. v) U jedinični tetraedar nasuti vodu koja doseže do polovine njegove visine. Dokle će voda dosezati ako se tetraedar okrene vrhom naniže?

Geometrija (I-smer), jun 2023. godine

1) $(3+5+4)$ a) Navesti i skicirati međusobne položaje dve ravni u prostoru. b) Napisati kriterijume za proveru međusobnog položaja ako su ravni zadate parametarski. v) Navesti formulu za ugao između dve ravni. Skicirati i objasniti kako je formula izvedena.
2) $(4+4+4)$ a) Na Slici 1 je prikazana jedna umetnička galerija. Postaviti kamere tako da pokrivenost unutrašnjosti bude optimalna. Koliko je kamera dovoljno? b) Objasniti šta je Delonijeva triangulacija. Opisati algoritam za Delonijevu triangulaciju i navesti njegovu složenost. Skicirati potrebne elemente. v) Triangulisati poligon sa Slike 1 Delonijevom triangulacijom.

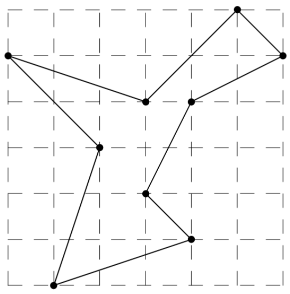

Figure 1: Galerija

3) $(4+4+4)$ a) Koristeći osnovnu formulu sferne geometrije: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$, izračunati rastojanje između Beograda $B(45^\circ\ N, 20.5^\circ\ E)$ i njemu najbližeg mesta E na ekvatoru. Uzeti da je poluprečnik Zemlje $6378km$. b) Izvesti formule stereografske projekcije iz južnog pola **Zemlje** na ekvatorijalnu ravan. Skicirati! v) Da li je rastojanje stereografskih projekcija tačaka B i E veće od njihovog stvarnog rastojanja? Obrazložiti (uz korektno obrazloženje, račun nije neophodan).
4) $(4+8)$ a) Izvesti parametarsku jednačinu kosog hica. b) Da bi uhvatio negativca koji vozi brzinom $40m/s$, D2ejms Bond pokušava da iskoči iz helikoptera koji se kreće horizontalno, brzinom $100m/s$. Ako je helikopter $125m$ iznad i $450m$ iza automobila, koliko vremena treba Bond da sačeka pre skoka da bi bezbedno uskočio u automobil? Uzeti da je gravitaciono ubrzanje $10m/s^2$.
5) $(6+6)$ a) Mrav se kreće rubom Mebijusove trake. Da li može da se ne silazeći sa ruba vrati u početnu tačku? Ako može, koliko vremena mu je za to potrebno? Ako ne može, posle koliko vremena će stići do tačke sa koje mora da napusti rub? Mrav se kreće brzinom $1\,mm/s$, a Mebijusova traka je dugačka $15\,dm$. b) Iz Mebijusove trake je isečena srednja trećina širine $2\,cm$. Koliko je potrebno boja da se ona oboji ako je se svaki put kada se četkica podigne sa isečene površi potrebno promeniti boju? Koja se ukupna količina boje potroši ako je prosečna potrošnja boje $150\,ml/m^2$? **Sve odgovore detaljno obrazložiti!**

Geometrija (I-smer), septembar 2023. godine

1) $(8+2+2)$ Odrediti formule preslikavanja f koje je kompozicija refleksije u odnosu na pravu $x-2y+2=0$ i skaliranja sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentima $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$. Da li preslikavanje f čuva orijentaciju? Da li je izometrija? Detaljno obrazložiti.
2) $(4+4+4)$ a) Definisati mimoilazne prave i navesti primer (skicirati). Navesti teoremu o normali mimoilaznih pravih. b) Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p: \frac{x-3}{-7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-11}{3}$ i $q: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$.
3) $(6+6)$ a) Definisati centar mase i težište tetraedra. b) Odrediti u kom odnosu centar mase T deli težišnu duž iz temena A tetraedra $ABCD$ ako su mase u temenima $m_A=1$, $m_B=m_C=2$ i $m_D=3$.
4) $(4+8)$ Data je Bezijeova kriva kontrolnim tačkama $P_0=(0,2), P_1=(3,8), P_2=(0,11), P_3=(6,8)$. a) Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački $\alpha_3(\frac{2}{3})$. b) Povećati stepen "desne" krive za 2.
5) $(4+2+6)$ Data je poliedarska površ $p_0=\langle 0,1,2\rangle$, $p_1=\langle 5,0,2\rangle$, $p_2=\langle 0,3,4\rangle$, $p_3=\langle 1,2,3\rangle$, $p_4=\langle 1,3,4\rangle$, $p_5=\langle 0,4,5\rangle$. a) Odrediti rub te poliedarske površi i broj komponenata. b) Skicirati površ. v) Uraditi usklađivanje orijentacija pljosni. Da li je površ orijentabilna?