УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 5: Афине трансформације простора

Тијана Шукиловић

4. новембар 2023.

Афина пресликавања простора

Анимација: Афине трансформације простора

Тачка $M(x,y,z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x',y',z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Афина пресликавања простора

Анимација: Афине трансформације простора

Тачка $M(x,y,z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x',y',z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Пресликавање се представља 4×4 матрицом:

$$A_b := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изометрије простора

Теорема 1.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Изометрије простора

Теорема 1.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 1.2

Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Изометрије простора

Теорема 1.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 1.2

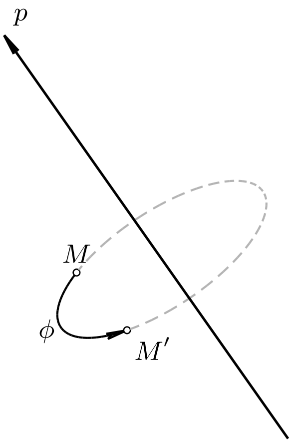
Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Теорема 1.3 (Особине изометрија простора)

Следећа тврђења су еквивалентна за $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$:

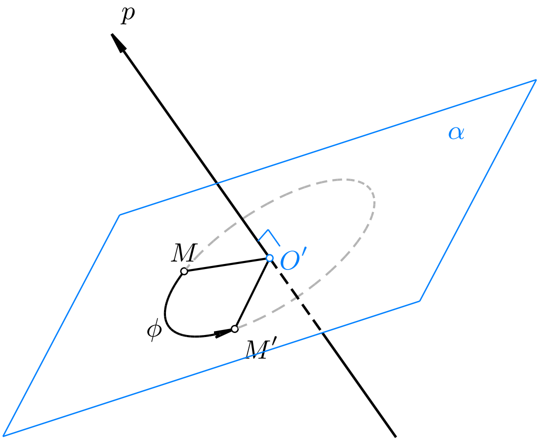
- f је изометрија (чува дужине);
- f чува скаларни производ;
- f пресликава ортонормирану базу у ортонормирану базу.

Ротације око праве у простору



Слика 1: Ротација око праве p за угао ϕ

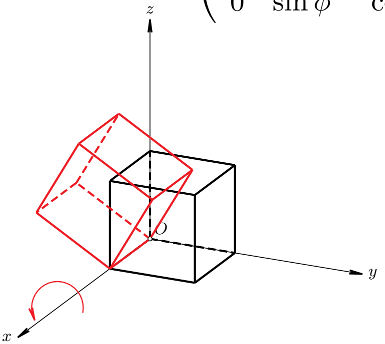
Ротације око праве у простору



Слика 1: Ротација око праве p за угао ϕ

Ротација око координатних оса

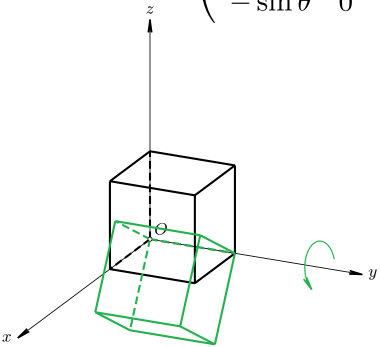
$$[\mathcal{R}_{Ox}(\phi)]_e = R_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$



Слика 2: Ротација око x-осе

Ротација око координатних оса

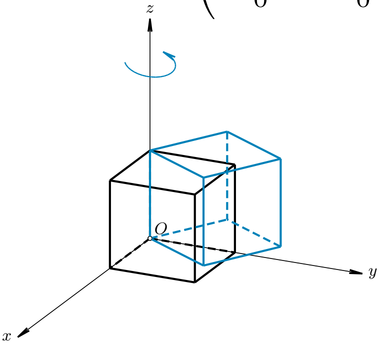
$$[\mathcal{R}_{Oy}(\theta)]_e = R_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Слика 2: Ротација око y-осе

Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = R_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 2: Ротација око z-осе

Формуле ротације око праве у простору

Теорема 1.4 (Формула Родригеза)

Матрица ротације $[\mathcal{R}_p(\phi)]_e$, у стандардној бази e, за угао ϕ око праве p_0 која садржи координатни почетак је:

$$[\mathcal{R}_{p_0}(\phi)]_e = \; pp^T + \cos\phi\,(E - pp^T) + \sin\phi\, p_\times,$$

где је $p_\times$ матрица векторског множења јединичним вектором p:

$$p_\times := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Пример 1

Одредити формуле ротације за угао $\phi = \dfrac{3\pi}{2}$ око праве p у простору која садржи тачку $Q(1,0,0)$ и има вектор правца $\overrightarrow{p} = (1,2,2)$.

Рефлексија у односу на раван

Теорема 1.5

Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Рефлексија у односу на раван

Теорема 1.5

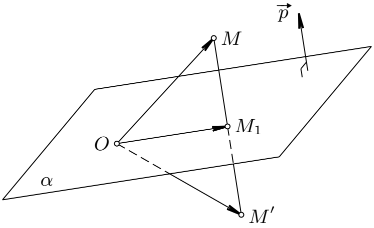
Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Ако раван $\beta \parallel \alpha$ не садржи координатни почетак, него неку тачку B, тада се рефлексија S_β представља са:

$$\mathcal{S}_\beta = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OB}} \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BO}}.$$

Примери



Слика 3: Рефлексија у односу на раван кроз O

Пример 2

Одредити формуле рефлексије у односу на раван $\alpha : 2x - y + 2z = 0$.

Ојлерове теореме

Теорема 1.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Ојлерове теореме

Теорема 1.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Теорема 1.7 (II Ојлерова)

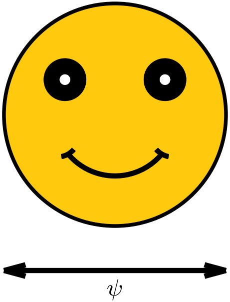
Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које чува координатни почетак може се представити као композиција три сопствене ротације око координатних оса:

$$f = \mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi),$$

где су $\psi, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тзв. Ојлерови или Тејт-Брајанови углови.

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

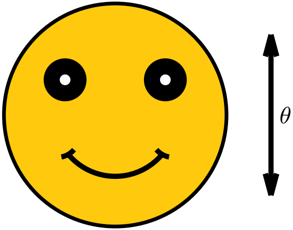


Слика 4: Скретање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)



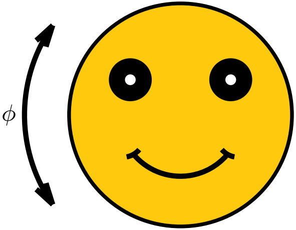
Слика 4: Пропињање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)

ϕ – угао ваљања (енг. roll)



Слика 4: Ваљање

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!
У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Веза сопствених и светских ротација

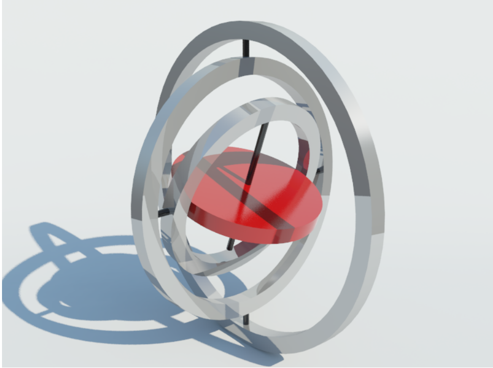
Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!
У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Теорема 1.8 (Веза сопствених и светских ротација)

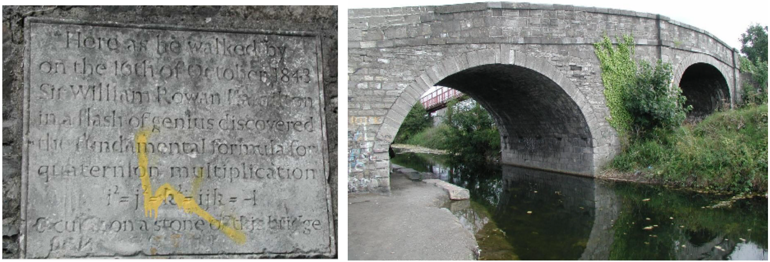
$$[\mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = [f]_e = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi).$$

Проблем „закључаног жироскопа"



Слика: Жироскоп је закључан за $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

Хамилтонова дефиниција кватерниона



Слика: Мост Брум (Даблин, Ирска) на коме је В. Р. Хамилтон исклесао своју дефиницију кватерниона

Конструкција удвајања алгебри

- Комплексни бројеви
  - $z = a + ib \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2$
  - множење: $(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb)$
  - конјуговање: $(a, b)^* = (a, -b)$

Конструкција удвајања алгебри

- Комплексни бројеви
  - $z = a + ib \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2$
  - множење: $(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb)$
  - коњуговање: $(a, b)^* = (a, -b)$
- Кватерниони
  - $q \in \mathbb{H} \Longleftrightarrow (a, b) \in \mathbb{C}^2$
  - множење: $(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb)$
  - коњуговање: $(a, b)^* = (a^*, -b)$

Конструкција удвајања алгебри

- Комплексни бројеви
  - $z = a + ib \in \mathbb{C} \iff (a, b) \in \mathbb{R}^2$
  - множење: $(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb)$
  - конјуговање: $(a, b)^* = (a, -b)$
- Кватерниони
  - $q \in \mathbb{H} \iff (a, b) \in \mathbb{C}^2$
  - множење: $(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb)$
  - конјуговање: $(a, b)^* = (a^*, -b)$
- Октониони $\mathbb{O}$

Октониони: зашто не наставити процес удвајања?

Грејвс: Ако је дозвољено да измислимо начин множења листе од 4 броја, зашто не и за више?

Хамилтон: Само зато што је нешто веће, не значи и да је боље. Мој коњ има 4 ноге. Не знам да ли би твој коњ са 8 ногу трчао двоструко брже!

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање
  - множење
  - конјуговање

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

  где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање

$$(x_1 i + y_1 j + z_1 k + w_1) + (x_2 i + y_2 j + z_2 k + w_2) := (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k + (w_1 + w_2).$$

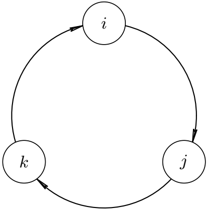
  - множење
  - конјуговање

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

  где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање
  - множење



Слика 7: Множење кватерниона

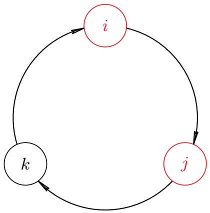
  - коњуговање

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

  где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање
  - множење



Слика 7: Множење кватерниона: позитиван смер

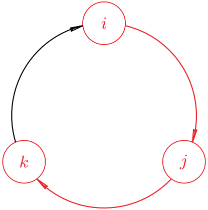
  - коњуговање

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

  где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање
  - множење



Слика 7: Множење кватерниона: $ij = k$

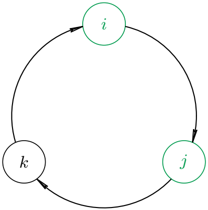
  - конјуговање

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

  где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање
  - множење



Слика 7: Множење кватерниона: негативан смер

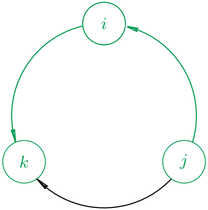
  - конјуговање

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

  где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање
  - множење



Слика 7: Множење кватерниона: $ji = -k$

  - коњуговање

Кватерниони

- Кватерниони су бројеви облика:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

  где су i, j и k, тзв. имагинарне јединице.
- Операције са кватернионима:
  - сабирање
  - множење
  - конјуговање

$$\bar{q} := -xi - yj - zk + w.$$

Луис Керол, Алиса у Земљи чуда (1865): Особине кватерниона

Слика: Луда чајанка

„Онда би исто тако могла рећи да је Ја видим оно што једем исто што и Ја једем оно што видим!"

Walt Disney (1951)

Кватерниони као векторски простор

- $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4: \quad xi + yj + zk + w \cong (x, y, z, w).$
- Реални и имагинарни део кватерниона:

$$\Re(q) := w, \quad \Im(q) := xi + yj + zk = \vec{v}.$$

- Простор имагинарних кватерниона $\Im\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$.
- $\mathbb{H} = \Im\mathbb{H} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$:

$$q = xi + yj + zk + w = [(x, y, z), w] = [\vec{v}, w].$$

- Скаларни производ на $\mathbb{H}$:

$$\langle q, q_1 \rangle = xx_1 + yy_1 + zz_1 + ww_1,$$

- Скаларни производ на $\Im\mathbb{H}$:

$$\vec{v} \times \vec{v_1} = xx_1 + yy_1 + zz_1$$

Конјуговање кватерниона и његове особине

Дефиниција 1.1

Ма који кватернион q различит од нуле, одређује конјугацију, тј. пресликавање $C_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ дефинисано формулом: $C_q(p) = qpq^{-1}$.

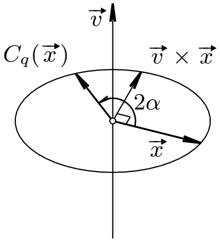
Лема 1.1

Конјугације C_q и C_h, $q, h \in \mathbb{H}$ су иста пресликавања ако и само ако важи $h = \lambda q, \lambda \in \mathbb{R}$.

Конјугација као изометрија простора

Лема 1.2

а) Конјугација C_q је изометрија простора $\Im\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$.
б) Ако важи $q = [\vec{v}\sin\alpha, \cos\alpha]$ и $|\vec{v}| = 1$, пресликавање C_q је ротација за угао 2α око вектора $\vec{v}$ у позитивном смеру.



Слика 8: Ротација преко кватернионске конјугације

Доказ а)

- Лема 1.1 $\Longrightarrow$ $C_q: \ |q| = 1$ тј. $q^{-1} = \bar{q}$.
- C_q је изометрија $\mathbb{H}$:

$$C_q(p) = |qp\bar{q}| = |q||p||\bar{q}| = |p|, \ \forall p \in \mathbb{H}.$$

- C_q чува реалан део кватерниона:

$$2\Re(C_q(p)) = C_q(p) + \overline{C_q}(p) = qp\bar{q} + q\bar{p}\bar{q} = q(p+\bar{p})\bar{q} = p + \bar{p} = 2\Re(p).$$

- $|\Im C_q(p)| = |\Im(p)|$:

$$|\Im(p)|^2 + |\Re(p)|^2 = |p|^2 = |C_q(p)|^2 = |\Im C_q(p)|^2 + |\Re C_q(p)|^2.$$

Доказ б)

$$
\begin{aligned}
|q| = 1 &\Longrightarrow \bar{q} = -\overrightarrow{v}\sin\alpha + \cos\alpha \\
q, p \in \Im\mathbb{H} &\Longrightarrow qp = [\overrightarrow{v}, 0][\overrightarrow{u}, 0] = [\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}, -\langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\rangle] \\
C_q(v) &= (v\sin\alpha + \cos\alpha)v(-v\sin\alpha + \cos\alpha) = \ldots = v \\
x : vx &= v \times x, \quad (x, v \times x, v) \text{ -- ортонормирана база} \\
C_q(x) &= (v\sin\alpha + \cos\alpha)x(-v\sin\alpha + \cos\alpha) \\
&= (v \times x\sin\alpha + x\cos\alpha)(-v\sin\alpha + \cos\alpha) \\
&= -(v \times x) \times v\sin^2\alpha + x\cos^2\alpha + 2(v \times x)\sin\alpha\cos\alpha \\
&= x\cos 2\alpha + (v \times x)\sin 2\alpha.
\end{aligned}
$$

Примери

Пример 3

Одредити матрицу $[C_q]_e$ конјугације јединичним кватренионом $q = xi + yj + zk + w$ у канонској бази простора $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

$$[C_q]_e = [L_q]_e \cdot [R_{q^{-1}}]_e = [L_q]_e \cdot [R_{\bar{q}}]_e$$

$$[L_q]_e = [q \cdot i, q \cdot j, q \cdot k, q \cdot 1] = \begin{pmatrix} w & -z & y & x \\ z & w & -x & y \\ -y & x & w & z \\ -x & -y & -z & w \end{pmatrix}$$

Примери

Пример 3

Одредити матрицу $[C_q]_e$ конјугације јединичним кватренионом $q = xi + yj + zk + w$ у канонској бази простора $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

$$[C_q]_e = [L_q]_e \cdot [R_{q^{-1}}]_e = [L_q]_e \cdot [R_{\bar{q}}]_e$$

$$[R_{\bar{q}}]_e = [i \cdot \bar{q}, j \cdot \bar{q}, k \cdot \bar{q}, 1 \cdot \bar{q}] = \begin{pmatrix} w & -z & y & -x \\ z & w & -x & -y \\ -y & x & w & -z \\ x & y & z & w \end{pmatrix}$$

Примери

Пример 3

Одредити матрицу $[C_q]_e$ конјугације јединичним кватренионом $q = xi + yj + zk + w$ у канонској бази простора $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

$$[C_q]_e = [L_q]_e \cdot [R_{q^{-1}}]_e = [L_q]_e \cdot [R_{\bar{q}}]_e$$

$$[C_q]_e = \begin{pmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) & 0 \\ 2(xy + wz) & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2(yz - wx) & 0 \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & 1 - 2(x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примери

Пример 4

Одредити матрицу ротације око осе чији је јединични вектор $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ за угао α у позитивном смеру.

$$q = [\sin\frac{\alpha}{2}\vec{v}, \cos\frac{\alpha}{2}]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}(8\cos\alpha + 1) & -\frac{2}{9}(\cos\alpha + 3\sin\alpha - 1) & \frac{1}{9}(-2\cos\alpha + 6\sin\alpha + 2) \\ \frac{1}{9}(-2\cos\alpha + 6\sin\alpha + 2) & \frac{1}{9}(5\cos\alpha + 4) & \frac{1}{9}(-4\cos\alpha - 3\sin\alpha + 4) \\ -\frac{2}{9}(\cos\alpha + 3\sin\alpha - 1) & \frac{1}{9}(-4\cos\alpha + 3\sin\alpha + 4) & \frac{1}{9}(5\cos\alpha + 4) \end{pmatrix}$$