PROSTA BOOLOVA ALGEBRA
SEMINAR

LUKA PONIKVAR

Povzetek. Pričetek toerije Boolovih algeber je nepresenetljivo pripisan Georgu Boolu, ki

1. Boolove algebre

Definicija 1.1 (Boolova algebra)**.** **Boolova algebra** je neprazna množica A, skupaj z binarnima operacijama $\vee$ [1] in $\wedge$[2], unarno operacijo $\neg$ [3] in dvema odlikovanima elementoma 0 in 1, ki skupaj zadoščajo sledečim aksiomom[4]:

$$
\begin{aligned}
&(1) & \neg 0 &= 1, & \neg 1 &= 0,\\
&(2) & p \wedge 0 &= 0, & p \vee 1 &= 1,\\
&(3) & p \wedge 1 &= p, & p \vee 0 &= p,\\
&(4) & p \wedge \neg p &= 0, & p \vee \neg p &= 1,\\
&(5) & \neg(\neg p) &= p, & &\\
&(6) & p \wedge p &= p, & p \vee p &= p,\\
&(7) & \neg(p \wedge q) &= \neg p \vee \neg q, & \neg(p \vee q) &= \neg p \wedge \neg q,\\
&(8) & p \wedge q &= q \wedge p, & p \vee q &= q \vee p,\\
&(9) & p \wedge (q \wedge r) &= (p \wedge q) \wedge r, & p \wedge (q \vee r) &= (p \vee q) \vee r,\\
&(10) & p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r), & p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r).
\end{aligned}
$$

Primer 1.2 (Izrojena Boolova algebra)**.** Najenostavnejši je primer izrojene Boolove algebre, ki je potenčna množica prazne množice:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Operacije na tej množici definiramo kot konstantne preslikave, ki vse slikajo v

$$0 = 1 = \emptyset.$$

Primer 1.3 (Boolova algebra z dvema elementoma)**.** Najmanjši primer neizrojene Boolove algebre je potenčna množica enojca[5]:

$$\mathcal{P}(\{\infty\}) = \{\emptyset, \{\infty\}\}.$$

---

[1] Imenujemo jo "join" oz. "ali".
[2] Imenujemo jo "meet" oz. "in".
[3] Imenujemo jo negacija, označujemo pa tudi kot $'$.
[4] Negacija ima najvišjo prioriteto, medtem ko ima "in" višjo prioriteto kot "ali".
[5] Element množice smo označili kar z ∞.

Taka Boolova algebra ima le dva elementa:

$$\emptyset = 0, \qquad \{\infty\} = 1.$$

Operaciji join in meet sta predstavljeni z naslednjima tabelama:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

in

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

,

komplementacija, pa 0 preslika v 1 in obratno.

Primer 1.4 (Končno-končna Boolova algebra)**.** Najpreprostejši primer Boolove algebre je potenčna množica neprazne množice X, ki jo seveda opremimo z operacijami unije, preseka in komplementa.

Malce splošnejši primer je, da si ogledamo določeno podmnožico $\mathcal{P}(X)$. Če definiramo $A := \{B \subset X \mid B$ končna ali B' končna$\}$, tudi dobimo Boolovo algebro, imenovano končno-končna Boolova Algebra.

Lahko se tudi ne omejimo le na končne, ampak na števne množice in dobimo števno-števno Boolovo algebro. Premislek deluje za poljubno kardinalnost, je pa to težje dokazati.

2. Princip dualnosti

Definicija 2.1 (Boolov polinom)**. Boolov polinom** je izraz, sestavljen iz konstant 0 in 1, neznank $p_0, \ldots, p_n$, s pomočjo standardnih operacij meet, join in komplementa.

Primer 2.2 (Boolov polinom)**.** Primer polinoma je

$$p \wedge (q \vee r).$$

Ta polinom, pa je na pogled zelo podoben polinomu

$$p \vee (q \wedge r),$$

kar motivira naslednjo definicijo.

Definicija 2.3 (Dualnost)**.** Naj bo $f(p_1, \ldots, p_n)$ Boolov polinom v n spremenljivkah. Takemu polinomu lahko priredimo tri nove polinome:

(1) **komplement polinoma** $f(p_1, \ldots, p_n)$:

$$f'(p_1, \ldots, p_n),$$

(2) **dual polinoma** $f(p_1, \ldots, p_n)$:

$$f'(p_1', \ldots, p_n'),$$

(3) **kontradual polinoma** $f(p_1, \ldots, p_n)$:

$$f(p_1', \ldots, p_n').$$

Opomba 2.4. V resnici obstaja grupa G, ki deluje na množici $\mathcal{BP}$ vseh Boolovih polinomov. Obstajajo štiri funkcije, ki bijektivno preslikajo množico $\mathcal{BP}$ nazaj nase:

(1) Identična funkcija:

$$id : \mathcal{BP} \to \mathcal{BP}$$
$$id : f(p_1, \ldots, p_n) \mapsto f(p_1, \ldots, p_n).$$

(2) Komplementna funkcija:

$$c : \mathcal{BP} \to \mathcal{BP}$$
$$c : f(p_1, \ldots, p_n) \mapsto f'(p_1, \ldots, p_n).$$

(3) Dualna funkcija:

$$d : \mathcal{BP} \to \mathcal{BP}$$
$$d : f(p_1, \ldots, p_n) \mapsto f'(p_1', \ldots, p_n').$$

(4) Kontradualna funkcija:

$$k : \mathcal{BP} \to \mathcal{BP}$$
$$k : f(p_1, \ldots, p_n) \mapsto f(p_1', \ldots, p_n').$$

Grupa G je zaprta za operacijo $\circ$:

$\circ$	id	c	d	k
id	id	c	d	k
c	c	id	k	d
d	d	k	id	c
k	k	d	c	id

Opazimo, da je $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, torej je Kleinova četverka.

Opomba 2.5. Praktična posledica principa dualnosti je moč dokazati le polovico izrekov in trditev, saj druga polovica sledi iz tega principa.

3. Urejenost

V tem razdelku delujemo v poljubni Boolovi algebri A.

Lema 3.1. *$(p \vee q) \wedge p = p$ in $(p \wedge q) \vee p = p$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge p &\overset{3}{=} (p \vee q) \wedge (p \vee 0)\\ &\overset{10}{=} p \vee (q \wedge 0)\\ &\overset{2}{=} p \vee 0\\ &\overset{3}{=} p\end{aligned}$$

Druga furmula sledi iz dualnosti. □

Lema 3.2. *$p \wedge q = p$ natanko tedaj ko $p \vee q = q$.*

Dokaz. Če je $p \wedge q = p$, je

$$\begin{aligned}p \vee q &= (p \wedge q) \vee q\\ &\overset{10}{=} (p \vee q) \wedge (q \vee q)\\ &\overset{6}{=} (p \vee q) \wedge q\\ &\overset{3.1}{=} q\end{aligned}$$

Drugo implikacijo dobimo z zamenjavo p in q, ter formiranjem dualov. □

Definicija 3.3. Na vsaki Boolovi algebri lahko vpeljemo urejenost kot:

$$p \leq q \text{ natanko tedaj ko } p \wedge q = p.$$

Lema 3.4. *Relacija $\leq$ je delna urejenost.*

Dokaz. Refleksivnost sledi iz 6, antisimetričnost pa sledi iz 8: če je $p \leq q$ in $q \leq p$, potem je $p = p \wedge q = q \wedge p = q$. Tranzitivnost sledi iz 9: če je $p \leq q$ in $q \leq r$ je $p \wedge r = (p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) = p \wedge q = p$ □

Lema 3.5.
(1) *$0 \leq p$ in $p \leq 1$.*
(2) *Če $p \leq q$ in $r \leq s$, potem $p \wedge r \leq q \wedge s$ in $p \vee r \leq q \vee s$.*
(3) *Če $p \leq q$, potem $q' \leq p'$.*

Dokaz. Prva točka je očitna. Druga sledi iz definicije in 3.2. Tretja točka sledi s komplemetiranjem.

□

Definicija 3.6 (Meje)**.** Če je E podmnožica delno urejene Boolove algebre A, lahko govorimo o množici F vseh zgornjih mej za E. Element q pripada množici F, če za vsak $p \in E$ velja $p \leq q$. Če ima F najmanjši element, je ta enolično določen in ga imenujemo **supremum** množice E oz. njena **najmanjša zgornja meja**[6]. Podobno definiramo **infimum** oz. **največjo spodnjo mejo**[7] množice E

Primer 3.7 (Prazna množica)**.** Če je $E = \emptyset$, je vsak element na prazno zgornja meja te množice. Tedaj ima E supremum, in sicer kar element 0 (3.5 točka 2). Podoben razmislek nas privede do zaključka, da je infimum množice E element 1.

Primer 3.8 (Enojec)**.** Če je $E = \{p\}$, je p hkrati zgornja in spodnja meja za E. Sledi da je p tudi infimum in supremum.

Lema 3.9. *Za vsaka p in q ima množica $\{p, q\}$ za supremum element $p \vee q$ in za infimum element $\{p \wedge q\}$*

Dokaz. Očitno je $p \vee q$ zgornja meja te množice. Zaradi točke 2 v 3.5, pa je to tudi natančna zgornja meja: če je $p \leq r$ in $q \leq r$ je $p \wedge q \leq r \wedge r = r$. Drug del sledi iz dualnosti.

□

Opomba 3.10 (Posplošitev)**.** Lemo bi lahko posplošili na poljubno končno neprazno množico E. Za infimum pišemo $\bigwedge E$, za supremum pa $\bigvee E$. Enake oznake uporabljamo za supremume in infimume poljubnih množic (če jih te seveda imajo).

Primera 3.7 in 3.8 bi lahko sedaj zapisali kot:

$$\bigvee \emptyset = 0, \qquad \bigwedge \emptyset = 1, \qquad \bigvee \{p\} = p, \qquad \bigwedge \{p\} = p.$$

Če imamo opravka z množico $\{p_i |\ i \in I\}$, kjer je I poljubna indeksna množica, pišemo tudi:

$$\bigvee_{i \in I} p_i \qquad \qquad \bigwedge_{i \in I} p_i$$

[6]Pišemo tudi natančna zgornja meja.
[7]Pišemo tudi natančna spodnja meja.

4. Kompletne Boolove algebre

Končno-končna Boolova algebra nad $\mathbb{N}$ je primer Boolove algebre, kjer nimajo vse podmnožice elementov natančnih spodnjih oz. zgornjih mej. Primer take množice je množica vseh enojcev sodih naravnih števil. To motivira naslednjo definicijo.

Definicija 4.1 (Kompletna Boolova algebra)**.** Boolova algebra z lastnostjo, da ima vsaka njena podmnožica infimum in supremum se imenuje **Kompletna Boolova Algebra**.

Lema 4.2. *Če je $\{p_i\}$ družina elementov Boolove algebre, potem:*

$$\left(\bigvee_i p_i\right)' = \bigwedge_i p_i' \qquad \textit{in} \qquad \left(\bigwedge_i p_i\right)' = \bigvee_i p_i'.$$

Enačbi povesta, da obstoj ene strani implicira obstoj druge in njuno enakost.

Dokaz. □

Posledica 4.3 (Zadosten pogoj za kompletnost)**.** *Če ima vsaka podmnožica Boolove algebre infimum (supremum), potem je ta Boolova algebra kompletna.*

Dokaz. □

Zdaj nas zanimajo še lastnosti natančnih zgornjih (spodnjih) mej. Natančneje njihova asociativnost, komutativnost in distributivnost.

Lema 4.4 (Asociativnost in komutativnost)**.** *Če je $\{I_j\}$ družina množic z unijo I, in če je p_i element Boolove algebre za vsak $i \in I$, tedaj je*

$$\bigvee_j \left(\bigvee_{i \in I_j} p_i\right) = \bigvee_{i \in I} p_i \qquad \textit{in} \qquad \bigwedge_j \left(\bigwedge_{i \in I_j} p_i\right) = \bigwedge_{i \in I} p_i.$$

Dokaz. □

Lema 4.5.

Dokaz. □

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

Boolean algebra Boolova algebra
Degenerate Izrojena
The principle of duality Princip dualnosti
Lower (upper) bound Spodnja(zgornja) meja
Least upper bound Najmanjša zgornja meja
Greatest lower bound Največja spodnja meja
Complete Boolean algebra Kompletna Boolova algebra
Finite-cofinite Boolean algebra Končno-končna Boolova algebra
Countable-cocountable Boolean algebra Števno-števna Boolova algebra

Literatura

[1] Givant, Steven; Halmos, Paul. "IntroDuction to Boolean Algebras (Undergraduate Texts in Mathematics)," Springer (2009).
[2] N. Calkin in H. S. Wilf, Recounting the rationals, *Amer. Math. Monthly* **107** (2000), 360–363.
[3] J. Grasselli, *Elementarna teorija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2009.

Luka Ponikvar, Fakulteta za matematiko in fiziko, Oddelek za matematiko, Jadranska 21, 1000 Ljubljana, Slovenija
Email address: lp29353@student.uni-lj.si