Pokrivanje skupa tačaka ortogonalno konveksnim poligonima

Luka Radanović

20. avgust 2024.

1 Opis problema

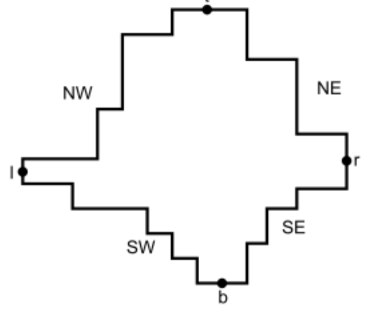
Ortogonalni poligon je prost poligon kome je svaka stranica paralelna nekoj od koordinatnih osa. Ortogonalni poligon je ortogonalno konveksan ako mu je presek sa bilo kojom pravom koja je paralelna nekoj od osa ili prazan skup ili se sastoji od jedne duži.

Neka je dat skup tačaka u ravni. Problem kojim se bavi ovaj projekat je nalaženje ortogonalno konveksnog poligona takvog da se svaka od datih tačaka nalazi na tačno jednoj stranici poligona i da svaka njegova stranica sadrži tačno jednu od datih tačaka.

U ovom projektu, za pronalaženje ovakvog poligona korišćen je algoritam opisan u radu [1]. Treba i napomenuti da u opštem slučaju, za proizvoljan skup tačaka ovakav poligon ne mora postojati.

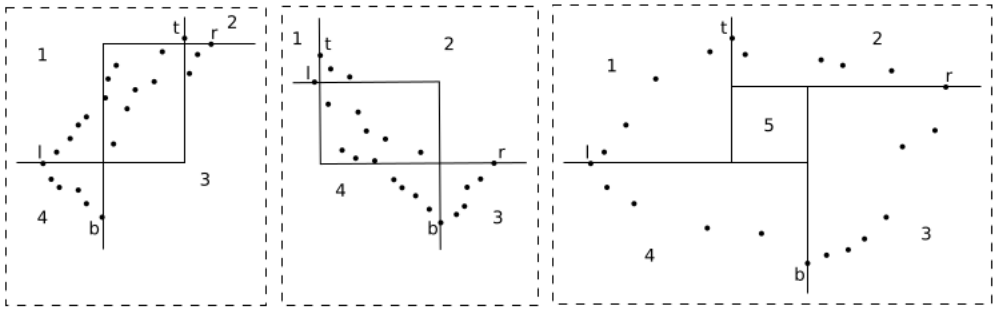
2 Opis algoritma

Traženi poligon se u odnosu na ekstremne tačke (tačke sa ekstremnim vrednostima x i y koordinata, na slikama l, t, r, b) iz skupa može podeliti na 4 "stepenice" (NW, NE, SE, SW).



Slika 1: Poligon podeljen na stepenice

Takođe se i u ravni mogu definisati kvadranti određeni istim ekstremnim tačkama. Postoje tri različita slučaja za njihov međusobni položaj.

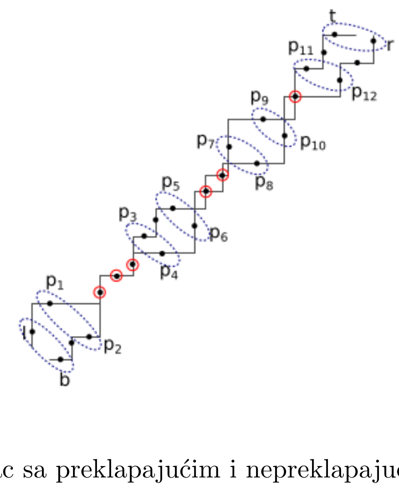


Slika 2: Mogući položaji kvandranta

Ukoliko se kvadranti sa prethodne slike ne preklapaju, konstruisanje stepenica je trivijalno. NW stepenice ce se konstruisati tako što se tačke obilaze po x koordinati, počne se od tačke l na koju se postavi vertikalna stranica, zatim se na svakoj sledećoj tački menja orijentacija stranice i tako sve do tačke t. Analogno i za ostale.

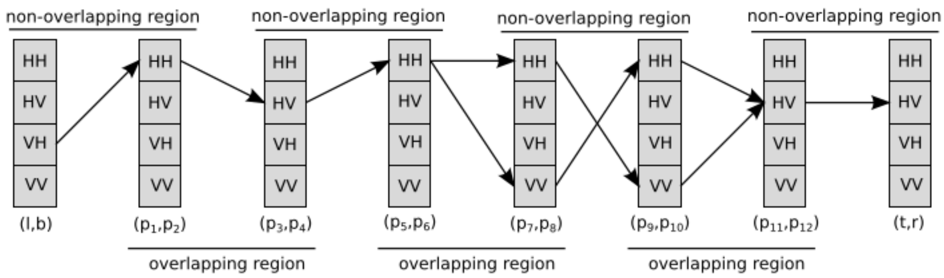
Ako se preklapaju kvadranti NW i SE posmatramo uniju tačaka iz ova dva kvadranta i treba da odredimo koje pripadaju NW, a koje SE stepenicama (opisan će biti ovaj slučaj, a sve analogno se radi i ako se preklapaju kvadranti NE i SW). Tačka će moći da pripada NW stepenicama ako ne postoji druga tačka koja je iznad i levo od nje (analogno za SE stepenice). Sa tim uvidom tačkama možemo pridružiti oznaku da li mogu pripadati NW i SE stepenicama. Ako neka od ovih tačka ne može da pripada ni NW ni SE onda je nemoguće konstruisati ortogonalno konveksni pokrivač. One tačke koje mogu pripadati samo jednim stepenicama označavamo kao nepreklapajuće dok su one koje mogu pripadati i NW i SE stepenicama preklapajuće.

Na ovaj način se dobiju dva lanca koja imaju preklapajuće i nepreklapajuće regione. Crvene tačke na slici su preklapajuće.



Slika 3: Lanac sa preklapajućim i nepreklapajućim regionima

Ova struktura se može predstaviti grafom rešenja. Svaki čvor predstavlja početni i/ili krajnji par tačaka regiona. Prvo slovo označava orijentaciju stranice na gornjem, a drugo slovo na donjem lancu. Grane označavaju da se mogu konstruisati dva lanca stepenica koje se ne seku sa datim orijentacijama na početku i kraju. U [1] je pokazano da se za preklapajući region na osnovu početnih orijentacija stranica i parnosti broja tačaka u regionu mogu direktno odrediti moguće orijentacije krajnjih stranica (izračunata je i dokazana tabela). Za nepreklapajući region se u linearnom vremenu na osnovu početnih orijentacija može odrediti da li postoje pravilno razdvojeni lanci u regionu kao i orijentaciju krajnjih stranica regiona. Koristeći ove uvide se dodaju odgovarajuće grane u graf.



Slika 4: Graf rešenja

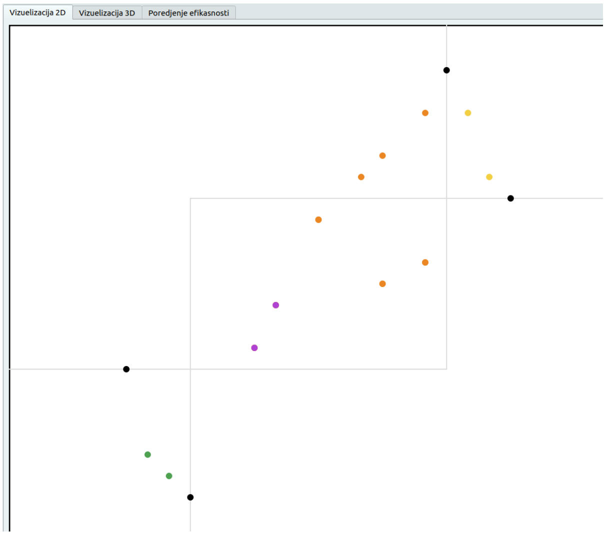
Nakon što je napravljen graf, rešenje postoji ako postoji grana do HV orijentacije u krajnjem čvoru. Tada se (jedno moguće) razdvajanje NW i SE lanaca može pronaći tako što se ide unazad od početnog čvora. Kada se prolazi kroz nepreklapajući region tačke su već odvojene tako da se svaka dodaje u svoj lanac. Kroz preklapajući region se tačka prvo pokuša dodati u gornji lanac, pa se (u tabeli) vidi da li je novonastali, za jednu tačku manji lanac moguć tj. da li postoji moguć lanac koji se završava sa novim orijentacijama krajnjih stranica. Ako da, nastavlja se dalje, ako ne, tačka se prebacuje u donji lanac i ide se dalje.

Ovim su dobijene NW i SE stepenice (lanci). NE i SW stepenice se trivijalno konstruisu (samo se svaki sortira) i na kraju se sve četiri spoje.

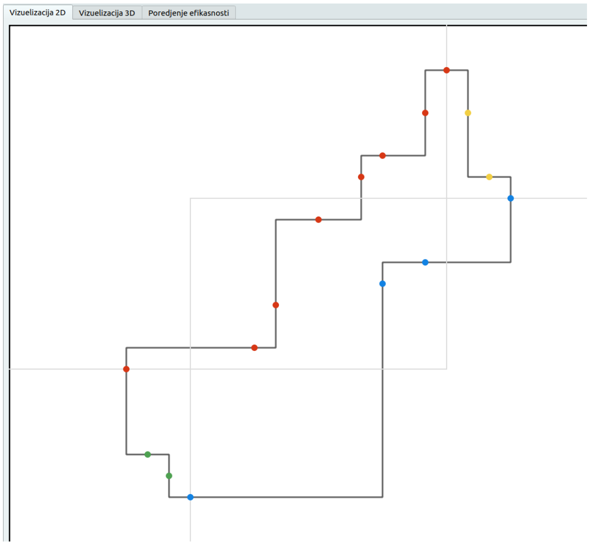
Složenost algoritma je $O(nlogn)$. U trivijalnom slučaju da nema preklapajućih kvadranta samo se tačke iz svakog sortiraju. U slučaju da se dva kvadranta preklapaju tačke se inicijalno sortiraju, obeležavanje tačaka kao preklapajućih i nepreklapajućih se vrši u linearnoj složenosti (jedan prolaz). Nakon toga, prilikom konstrukcije grafa rešenja, prolazi se redom kroz tačke linearno (za nepreklapajuće regione prilikom provere da li se lanci seku postoji dodatni prolaz, ali ukupno je linearno vreme). Na kraju se prilikom rekonstrukcije gornjeg i donjeg lanca ponovo samo prolazi unazad kroz graf (i time kroz svaku tacku dva kvadranta), što je opet linearna složenost. Sam krajnji poligon se iz sortiranog skupa tačaka konstruiše u linearnoj složenosti. Ukupna složenost je samim time $O(nlogn)$.

Prilikom implementacije slučaj gde se preklapaju NE i SW kvadranti se svodi na drugi preklapajući slučaj tako što se x koordinate tačaka iz oba kvadranta pomnože sa -1. Time se dobija simetrična slika tačaka. Za njih se nađe razdvajanje na dva lanca korišćenjem implementiranog metoda, a zatim se u svakom lancu tačke ponovo vrate na originalne (x koordinate im se opet pomnože sa -1).

Animacija u implementaciji prvo prikazuje podelu prostora na kvadrante. Zatim, tačke iz različitih kvadranta se boje različito, dok se one iz kvadranta koji se preklapaju boje isto. Prilikom pronalaženja razdvajanja lanaca, posebno se boje preklapajuće tačke. Nakon što je nađeno razdvajanje dva lanca, svaki se boji svojom bojom. Na kraju tačke se redom obilaze i crtaju se stranice finalnog poligona.



Slika 5: Konstrukcija rešenja



Slika 6: Dobijen poligon

3 Testiranje

Algoritam je testiran na skupu ulaznih instanci koje su dostupne u okviru projekta. Korišćeni su različiti skupovi tačaka da bi se pokrili najrazličitiji slučajevi:

- instanca koja samo sadrži četiri ekstremne tačke
- instanca kod koje nema preklapanja kvadranta
- instanca kod koje se preklapaju kvadranti ali nema ostalih stepenica (ne postoje NE i SW)
- instanca kod koje se preklapaju kvadranti i postoje i ostale stepenice
- instanca kod koje se preklapaju NE i SW kvadranti
- instanca za koju ne postoji ortogonalno konveksni pokrivač

Algoritam pokazuje očekivano ponašanje na svim instancama.

Literatura

[1] Burkay Genç, Cem Evrendilek, and Brahim Hnich. Covering points with orthogonally convex polygons. *Computational Geometry*, 44(5):249–264, 2011.