Elliptische Kurven Kryptographie

Kevin Kappelmann, Lukas Stevens

Technische Universität München

28. Mai 2016

Überblick

Einleitung

Blubb Lukas

Definition affiner Ebenen

Definition

Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Punkten und $\mathcal{G}$ eine Menge von Geraden mit $\mathcal{G} \subseteq Pot(A)$. Bei $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ handelt es sich um eine affine Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Zu je zwei Elementen $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$ existiert genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $a, b \in G$.
2. Zu $G \in \mathcal{G}$ und $a \in \mathcal{A} \setminus G$ existiert genau ein $G' \in \mathcal{G}$ mit $a \in G'$ und $G \cap G' = \emptyset$.
3. Es existieren drei Elemente $a, b, c \in \mathcal{A}$ mit $c \notin \overline{a, b}$.

Definition projektiver Ebenen

Definition

Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Punkten und $\mathcal{G}$ eine Menge von Geraden mit $\mathcal{G} \subseteq Pot(A)$. Bei $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ handelt es sich um eine projektive Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Zu je zwei Elementen $P, Q \in \mathcal{P}$ mit $P \neq Q$ existiert genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in G$.
2. Für je zwei $G, H \in \mathcal{G}$ mit $G \neq H$ gilt $|G \cap H| = 1$.
3. Es existieren vier verschiedene Elemente in $\mathcal{P}$, sodass immer höchstens zwei davon in jedem beliebigen $G \in \mathcal{G}$ liegen.

PG(2, $\mathbb{F}$)

Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

Abbildung: Von der Fano-Ebene zur minimalen affinen Ebene

Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

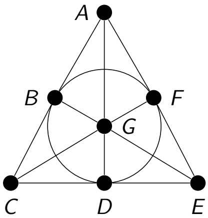


Abbildung: Von der Fano-Ebene zur minimalen affinen Ebene

Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

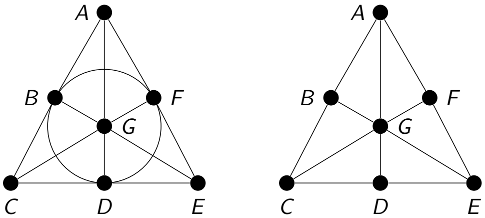


Abbildung: Von der Fano-Ebene zur minimalen affinen Ebene

Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

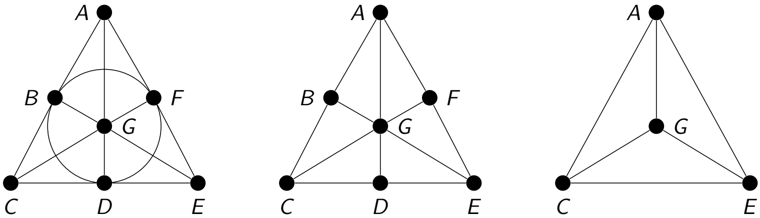


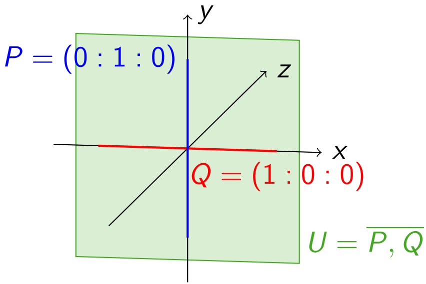
Abbildung: Von der Fano-Ebene zur minimalen affinen Ebene

Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

- Wähle $U := \overline{P, Q}$ mit $P = (1 : 0 : 0), Q = (0 : 1 : 0)$.

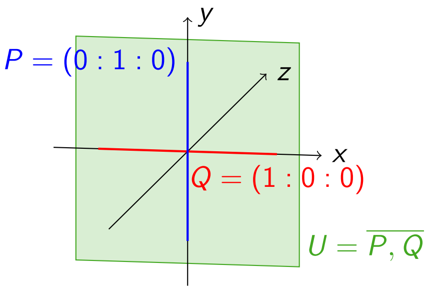
Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

- Wähle $U := \overline{P, Q}$ mit $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$.
- U ist im dreidimensionalen Raum genau die x,y-Ebene mit $z = 0$.



Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

- Wähle $U := \overline{P, Q}$ mit $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$.
- U ist im dreidimensionalen Raum genau die x,y-Ebene mit $z = 0$.



- Wir bezeichnen U als die **unendlich ferne Gerade**.

Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

Lemma

Gegeben sei die projektive Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = PG(2, \mathbb{F})$ und die unendlich ferne Gerade U, dann ist die Abbildung

$$\phi : \mathbb{F}^2 \to \mathcal{P}_U,\ (a, b) \mapsto (a : b : 1)$$

bijektiv und bildet Geraden auf Geraden ab, d.h. ϕ ist ein Isomorphismus von affinen Ebenen.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

Erinnerung: Punktemenge von PG(2, $\mathbb{F}$)

$$P = \{(x : y : z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

Definition

Eine elliptische Kurve $E \subseteq P$ ist durch die Lösung der **Weierstraß-Gleichung**

$$0 = Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3$$

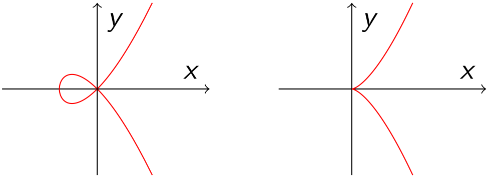
gegeben, wobei $a_i \in \mathbb{F}$ gilt und die Lösung keine Singularitäten besitzen darf.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

Definition

Eine Kurve E ist **singulär** in einem Punkt $P = (a : b : c) \in E$, wenn gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$



(a) $y^2 = x^3 + x^2$ (b) $y^2 = x^3$

Abbildung: Kurven mit Singularitäten (Knoten und Spitze)

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers $\mathbb{F}$ soll nicht 2 und nicht 3 sein: $\mathit{char}\,\mathbb{F} \neq 2, 3$.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers $\mathbb{F}$ soll nicht 2 und nicht 3 sein: *char* $\mathbb{F} \neq 2, 3$.
- Dies bedeutet, dass $1 + 1 \neq 0$ bzw. $1 + 1 + 1 \neq 0$, wobei $0, 1$ die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation von $\mathbb{F}$ sind.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers $\mathbb{F}$ soll nicht 2 und nicht 3 sein: *char* $\mathbb{F} \neq 2, 3$.
- Dies bedeutet, dass $1 + 1 \neq 0$ bzw. $1 + 1 + 1 \neq 0$, wobei $0, 1$ die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation von $\mathbb{F}$ sind.
- Unter diesen Voraussetzungen können wir die Weierstraß-Gleichung vereinfachen zu:

$$0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- Wir erinnern uns an die unendlich fernen Gerade $U = \overline{(0 : 1 : 0), (1 : 0 : 0)}$.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- Wir erinnern uns an die unendlich fernen Gerade $U = \overline{(0 : 1 : 0), (1 : 0 : 0)}$.
- Es gilt: $U \cap E = (0 : 1 : 0) =: \mathcal{O}$, d.h. es liegt nur $\mathcal{O}$ auf unserer Kurve E.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- Wir erinnern uns an die unendlich fernen Gerade $U = \overline{(0:1:0),(1:0:0)}$.
- Es gilt: $U \cap E = (0:1:0) =: \mathcal{O}$, d.h. es liegt nur $\mathcal{O}$ auf unserer Kurve E.
- Wir bezeichnen $\mathcal{O}$ als den **unendlich fernen Punkt**.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.
- Wir können also $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$ annehmen.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.
- Wir können also $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$ annehmen.
- Die Weierstraß-Gleichung für diese Punkte vereinfacht sich zu:

$$f(x, y) := y^2 - x^3 - ax - b$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

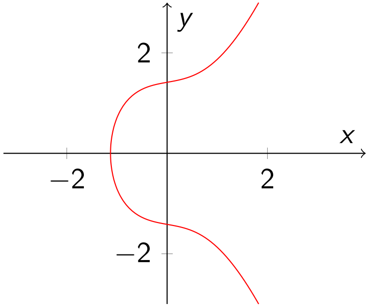
- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.
- Wir können also $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$ annehmen.
- Die Weierstraß-Gleichung für diese Punkte vereinfacht sich zu:

$$f(x, y) := y^2 - x^3 - ax - b$$

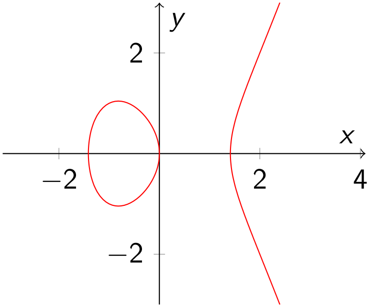
- Insgesamt gilt also:

$$E = \left\{(x : y : 1) \mid (x, y) \in \mathbb{F}^2 \wedge f(x, y) = 0\right\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung



(a) $y^2 = x^3 + 0.5x + 2$



(b) $y^2 = x^3 - 2x$

Abbildung: Affine Darstellung elliptischer Kurven

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

Lemma

Gegeben sei eine eine elliptische Kurve E, die durch die Lösungen der vereinfachten Weierstraß-Gleichung definiert ist:

$$E : Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3.$$

Dann gilt: Die Kurve E ist genau dann nicht-singulär, wenn das Polynom $f(x) = x^3 + ax + b$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Eine Gruppe über E – Voraussetzungen

- Es gelte *char* $\mathbb{F} \neq 2, 3$
- E sei nicht singulär.

Eine Gruppe über E – Tangenten

Blub

Eine Gruppe über E – Die Verknüpfung $\oplus$

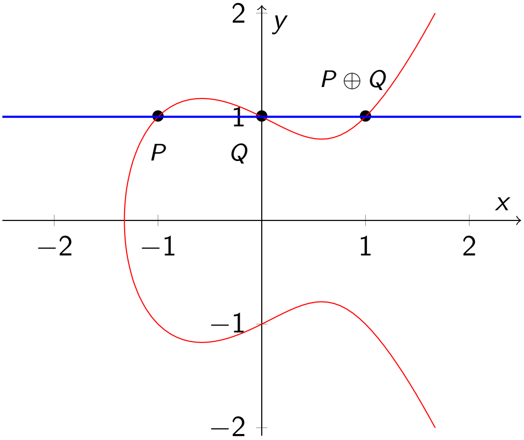
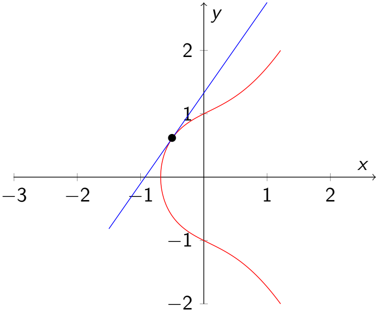


Abbildung: $P \oplus Q$

Vereinbarungen

Abbildung: Vereinbarungen(1)

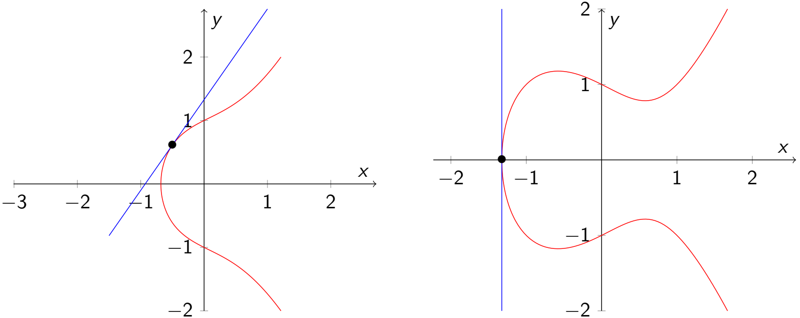
Vereinbarungen



(a) $P \oplus P$

Abbildung: Vereinbarungen(1)

Vereinbarungen

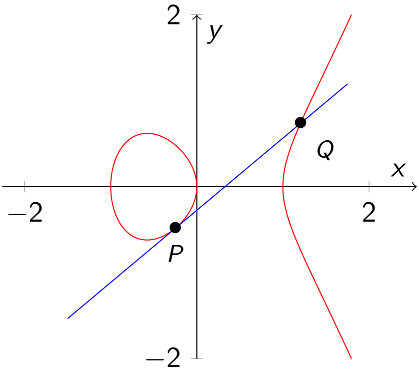


(a) $P \oplus P$

(b) $P \oplus P = P$

Abbildung: Vereinbarungen(1)

Vereinbarungen



(a) $P \oplus Q = P$

Abbildung: Vereinbarungen(2)

Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für
$P \oplus Q = R$:

Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für
$P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

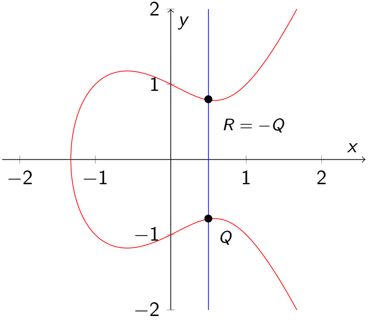
Fallunterscheidung für $P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für $P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$



(a) $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

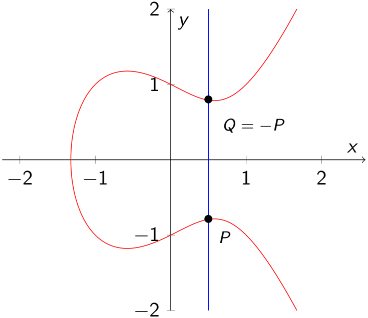
Fallunterscheidung für $P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$
3. $P = -Q$:
   $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für $P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$
3. $P = -Q$:
   $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$



(a) $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

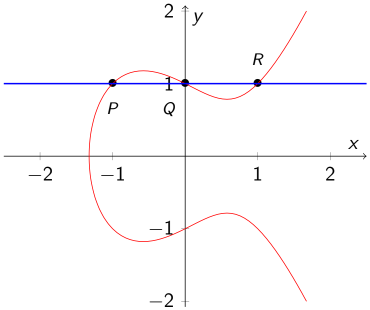
Fallunterscheidung für
$P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$
3. $P = -Q$:
   $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$
4. $P \neq \pm Q$:
   $P \oplus Q = R$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für $P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$
3. $P = -Q$:
   $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$
4. $P \neq \pm Q$:
   $P \oplus Q = R$



(a) $P \oplus Q = R$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

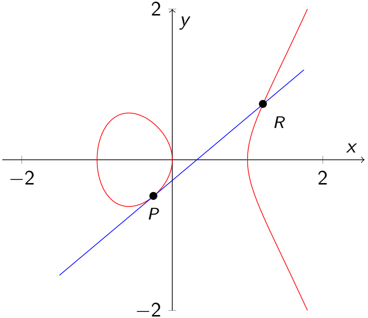
Fallunterscheidung für $P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$
3. $P = -Q$:
   $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$
4. $P \neq \pm Q$:
   $P \oplus Q = R$
5. $P = Q \neq -P$:
   $P \oplus P = R$

Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für $P \oplus Q = R$:

1. $P = Q = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$
2. $P = \mathcal{O}$:
   $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$
3. $P = -Q$:
   $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$
4. $P \neq \pm Q$:
   $P \oplus Q = R$
5. $P = Q \neq -P$:
   $P \oplus P = R$



(a) $P \oplus P = R$

Mathematische Beschreibung der $\oplus$-Verknüpfung

Satz

Es sei $P = (x, y), Q = (u, v) \in E \setminus \{\mathcal{O}\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \oplus P = (x, -y) =: -P \quad \textit{und}$$

$$P \oplus Q = \begin{cases} \mathcal{O}, & \textit{falls } P = -Q \\ (w, k(w - x) + y), & \textit{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$w = k^2 - x - u \quad \textit{und} \quad k = \begin{cases} \frac{v-y}{u-x}, & \text{falls } P \neq \pm Q \\ \frac{3x^2+a}{2y}, & \text{falls } P = Q \neq -P \end{cases}$$

Eine Gruppe über E – Die Gruppenoperation

Wir definieren die Verknüpfung $+$ für $P, Q \in E$ folgendermaßen:

$$P + Q := \mathcal{O} \oplus (P \oplus Q) = -(P \oplus Q).$$

Satz

$(E, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\mathcal{O}$.

Eine Gruppe über E – Die Gruppenoperation

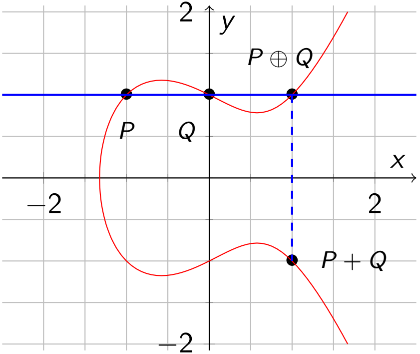


Abbildung: Grafische Addition in $(E, +)$

Anwendungen – Diskretes-Logarithmen-Problem

Definition

Sei G eine Gruppe und seien $x, y \in G$. Das Finden von $m \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Anwendungen – Diskretes-Logarithmen-Problem

Definition

Sei G eine Gruppe und seien $x, y \in G$. Das Finden von $m \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Über elliptische Kurven:

- Wähle $P, Q \in E$ und ein $m \in \mathbb{N}$. Das DLP ist dann die Lösung der Gleichung $mP = Q$, wobei P und Q bekannt sind.

Anwendungen – Diskretes-Logarithmen-Problem

Definition

Sei G eine Gruppe und seien $x, y \in G$. Das Finden von $m \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Über elliptische Kurven:

- Wähle $P, Q \in E$ und ein $m \in \mathbb{N}$. Das DLP ist dann die Lösung der Gleichung $mP = Q$, wobei P und Q bekannt sind.
- Die skalare Multiplikation des Punktes P wird durch wiederholtes Addieren des Punktes mit sich selbst dargestellt.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in $O(\sqrt{|E|})$ lösbar.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in $O(\sqrt{|E|})$ lösbar.
- DLP mit Hilfe von Primzahlen mit Index-Calculus-Algorithmen subexponentiell lösbar.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in $O(\sqrt{|E|})$ lösbar.
- DLP mit Hilfe von Primzahlen mit Index-Calculus-Algorithmen subexponentiell lösbar.

  Aber: Elliptische Kurven besitzen keine "Primzahlen".

Anwendungen – Angriffe

Beispiel: Wir wollen 13P berechnen:

$$P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P$$
$$2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P$$
$$4P \quad + \quad 4P \qquad\qquad 4P$$
$$8P \quad + \quad 4P \quad + \quad P$$

Abbildung: Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

Anwendungen – Angriffe

Beispiel: Wir wollen 13P berechnen:

$$P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P$$

$$2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P$$

$$4P \quad + \quad 4P \qquad 4P$$

$$8P \quad + \quad 4P \quad + \quad P$$

Abbildung: Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.

Anwendungen – Angriffe

Beispiel: Wir wollen 13P berechnen:

$$P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P$$

$$2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P$$

$$4P \qquad + \qquad 4P \qquad\qquad 4P$$

$$8P \qquad + \qquad 4P \qquad + \; P$$

Abbildung: Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.

  $\Rightarrow$ Rückschlüsse über Schlüssel mit Seitenkanalangriff möglich.

The End

Zusammengefasst: Elliptische Kurven sind einfach super.