Elliptische Kurven Kryptographie

Kevin Kappelmann, Lukas Stevens

Technische Universität München

26. Mai 2016

Überblick

Definition affiner Ebenen

Definition

Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Punkten und $\mathcal{G}$ eine Menge von Geraden mit $\mathcal{G} \subseteq Pot(A)$. Bei $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ handelt es sich um eine affine Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Zu je zwei Elementen $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \neq b$ existiert genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $a, b \in G$.
2. Zu $G \in \mathcal{G}$ und $a \in \mathcal{A} \setminus G$ existiert genau ein $G' \in \mathcal{G}$ mit $a \in G'$ und $G \cap G' = \emptyset$.
3. Es existieren drei Elemente $a, b, c \in \mathcal{A}$ mit $c \notin \overline{a, b}$.

Definition projektiver Ebenen

Definition

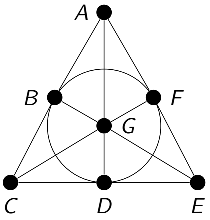
Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Punkten und $\mathcal{G}$ eine Menge von Geraden mit $\mathcal{G} \subseteq Pot(A)$. Bei $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ handelt es sich um eine projektive Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Zu je zwei Elementen $P, Q \in \mathcal{P}$ mit $P \neq Q$ existiert genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in G$.
2. Für je zwei $G, H \in \mathcal{G}$ mit $G \neq H$ gilt $|G \cap H| = 1$.
3. Es existieren vier verschiedene Elemente in $\mathcal{P}$, sodass immer höchstens zwei davon in jedem beliebigen $G \in \mathcal{G}$ liegen.

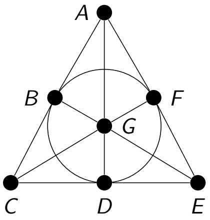
PG(2, $\mathbb{F}$)

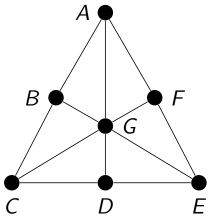
Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

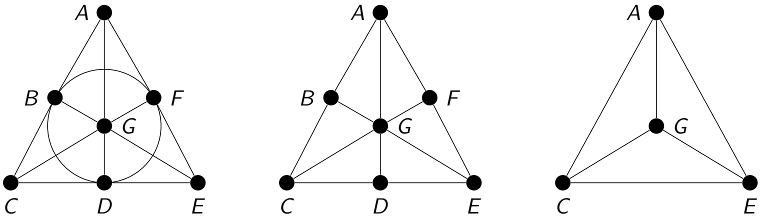


Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen





Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen



Einleitung

Blubb Lukas

Grundbegriffe – Affine Ebenen

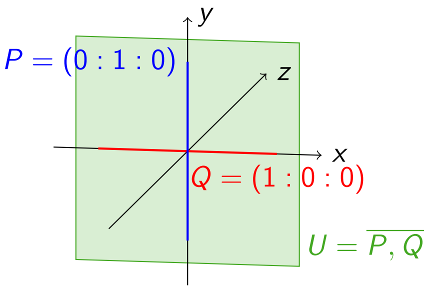
Blubb2 Lukas

Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

- Wähle $U := \overline{P, Q}$ mit $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$.

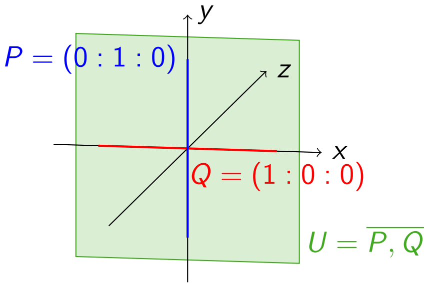
Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

- Wähle $U := \overline{P, Q}$ mit $P = (1:0:0)$, $Q = (0:1:0)$.
- U ist im dreidimensionalen Raum genau die x,y-Ebene mit $z = 0$.



Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

- Wähle $U := \overline{P, Q}$ mit $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$.
- U ist im dreidimensionalen Raum genau die x,y-Ebene mit $z = 0$.



- Wir bezeichnen U als die **unendlich ferne Gerade**.

Elliptische Kurven – Die unendlich ferne Gerade

Lemma

Gegeben sei die projektive Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = PG(2, \mathbb{F})$ und die unendlich ferne Gerade U, dann ist die Abbildung

$$\phi : \mathbb{F}^2 \to \mathcal{P}_U, \ (a, b) \mapsto (a : b : 1)$$

bijektiv und bildet Geraden auf Geraden ab, d.h. ϕ ist ein Isomorphismus von affinen Ebenen.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

Erinnerung: Punktemenge von PG(2, $\mathbb{F}$)

$$P = \{(x : y : z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

Definition

Eine elliptische Kurve $E \subseteq P$ ist durch die Lösung der **Weierstraß-Gleichung**

$$0 = Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3$$

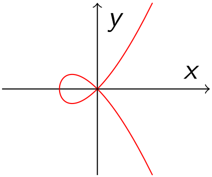
gegeben, wobei $a_i \in \mathbb{F}$ gilt und die Lösung keine Singularitäten besitzen darf.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

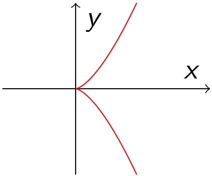
Definition

Eine Kurve E ist **singulär** in einem Punkt $P = (a : b : c) \in E$, wenn gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$



(m) $y^2 = x^3 + x^2$



(n) $y^2 = x^3$

Abbildung: Kurven mit Singularitäten (Knoten und Spitze)

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers $\mathbb{F}$ soll nicht 2 und nicht 3 sein: $\mathit{char}\,\mathbb{F} \neq 2, 3$.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers $\mathbb{F}$ soll nicht 2 und nicht 3 sein: $\mathit{char}\, \mathbb{F} \neq 2, 3$.
- Dies bedeutet, dass $1 + 1 \neq 0$ bzw. $1 + 1 + 1 \neq 0$, wobei $0, 1$ die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation von $\mathbb{F}$ sind.

Elliptische Kurven – Weierstraß-Gleichung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers $\mathbb{F}$ soll nicht 2 und nicht 3 sein: *char* $\mathbb{F} \neq 2, 3$.
- Dies bedeutet, dass $1 + 1 \neq 0$ bzw. $1 + 1 + 1 \neq 0$, wobei $0, 1$ die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation von $\mathbb{F}$ sind.
- Unter diesen Voraussetzungen können wir die Weierstraß-Gleichung vereinfachen zu:

$$0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- Wir erinnern uns an die unendlich fernen Gerade $U = \overline{(0:1:0),(1:0:0)}$.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- Wir erinnern uns an die unendlich fernen Gerade $U = \overline{(0:1:0),(1:0:0)}$.
- Es gilt: $U \cap E = (0:1:0) =: \mathcal{O}$, d.h. es liegt nur $\mathcal{O}$ auf unserer Kurve E.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- Wir erinnern uns an die unendlich fernen Gerade $U = \overline{(0:1:0),(1:0:0)}$.
- Es gilt: $U \cap E = (0:1:0) =: \mathcal{O}$, d.h. es liegt nur $\mathcal{O}$ auf unserer Kurve E.
- Wir bezeichnen $\mathcal{O}$ als den **unendlich fernen Punkt**.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.
- Wir können also $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$ annehmen.

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.
- Wir können also $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$ annehmen.
- Die Weierstraß-Gleichung für diese Punkte vereinfacht sich zu:

$$f(x, y) := y^2 - x^3 - ax - b$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

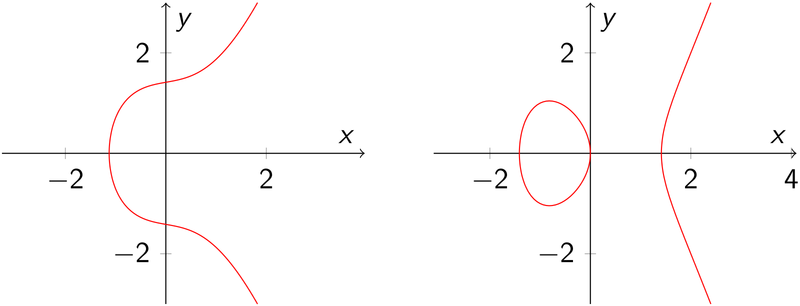
- Für alle anderen Punkte $P \in E$ ist die z-Koordinate $\neq 0$, d.h. alle Punkte außer $\mathcal{O}$ liegen im affinen Teil von E.
- Wir können also $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$ annehmen.
- Die Weierstraß-Gleichung für diese Punkte vereinfacht sich zu:

$$f(x, y) := y^2 - x^3 - ax - b$$

- Insgesamt gilt also:

$$E = \left\{(x : y : 1) \mid (x, y) \in \mathbb{F}^2 \wedge f(x, y) = 0\right\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

Elliptische Kurven – Affine Darstellung



(a) $y^2 = x^3 + 0.5x + 2$ (b) $y^2 = x^3 - 2x$

Abbildung: Affine Darstellung elliptischer Kurven

Elliptische Kurven – Affine Darstellung

Lemma

Gegeben sei eine eine elliptische Kurve E, die durch die Lösungen der vereinfachten Weierstraß-Gleichung definiert ist:

$$E : Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3.$$

Dann gilt: Die Kurve E ist genau dann nicht-singulär, wenn das Polynom $f(x) = x^3 + ax + b$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Eine Gruppe über E – Voraussetzungen

Lukas Teil. Blub

Eine Gruppe über E – Tangenten

Blub

Eine Gruppe über E – Die Gruppenoperation

Wir definieren die Verknüpfung $+$ für $P, Q \in E$ folgendermaßen:

$$P + Q := \mathcal{O} \oplus (P \oplus Q) = -(P \oplus Q).$$

Satz

$(E, +)$ *ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element* $\mathcal{O}$.

Eine Gruppe über E – Die Gruppenoperation

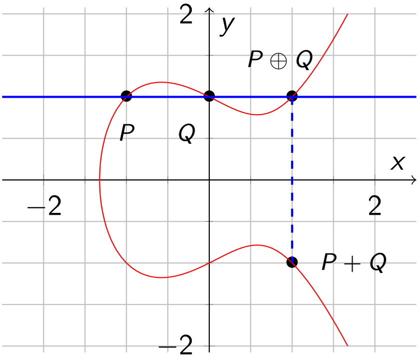


Abbildung: Grafische Addition in $(E, +)$

Blocks of Highlighted Text

Block 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Block 2

Pellentesque sed tellus purus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Vestibulum quis magna at risus dictum tempor eu vitae velit.

Anwendungen – Diskretes-Logarithmen-Problem

Definition

Sei G eine Gruppe und seien $x, y \in G$. Das Finden von $m \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Anwendungen – Diskretes-Logarithmen-Problem

Definition

Sei G eine Gruppe und seien $x, y \in G$. Das Finden von $m \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Über elliptische Kurven:

- Wähle $P, Q \in E$ und ein $m \in \mathbb{N}$. Das DLP ist dann die Lösung der Gleichung $mP = Q$, wobei P und Q bekannt sind.

Anwendungen – Diskretes-Logarithmen-Problem

Definition

Sei G eine Gruppe und seien $x, y \in G$. Das Finden von $m \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Über elliptische Kurven:

- Wähle $P, Q \in E$ und ein $m \in \mathbb{N}$. Das DLP ist dann die Lösung der Gleichung $mP = Q$, wobei P und Q bekannt sind.
- Die skalare Multiplikation des Punktes P wird durch wiederholtes Addieren des Punktes mit sich selbst dargestellt.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in $O(\sqrt{|E|})$ lösbar.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in $O(\sqrt{|E|})$ lösbar.
- DLP mit Hilfe von Primzahlen mit Index-Calculus-Algorithmen subexponentiell lösbar.

Anwendungen – Sicherheit

- Naives Probieren: $O(|E|)$.

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in $O(\sqrt{|E|})$ lösbar.
- DLP mit Hilfe von Primzahlen mit Index-Calculus-Algorithmen subexponentiell lösbar.

  Aber: Elliptische Kurven besitzen keine “Primzahlen”.

Anwendungen – Angriffe

Beispiel: Wir wollen 13P berechnen:

$$P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P$$

$$2P \quad + \quad 2P \qquad\qquad 2P \quad + \quad 2P \qquad\qquad 2P \quad + \quad 2P$$

$$4P \qquad + \qquad 4P \qquad\qquad\qquad 4P$$

$$8P \qquad\qquad + \qquad 4P \qquad + P$$

Abbildung: Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

Anwendungen – Angriffe

Beispiel: Wir wollen 13P berechnen:

$$P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P$$
$$2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P$$
$$4P \qquad + \qquad 4P \qquad\qquad 4P$$
$$8P \qquad\qquad + \qquad 4P \qquad + \; P$$

Abbildung: Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.

Anwendungen – Angriffe

Beispiel: Wir wollen 13P berechnen:

$$P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P + P$$

$$2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P \qquad 2P \quad + \quad 2P$$

$$4P \qquad + \qquad 4P \qquad\qquad 4P$$

$$8P \qquad + \qquad 4P \qquad + P$$

Abbildung: Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.

$\Rightarrow$ Rückschlüsse über Schlüssel mit Seitenkanalangriff möglich.

The End

Zusammengefasst: Elliptische Kurven sind einfach super.