

# Elliptische Kurven Kryptographie

Kevin Kappelman, Lukas Stevens

Technische Universität München

1. Juni 2016

# Sicherheitsvergleich

Sicherheitsniveau	RSA/Diffie-Hellman	Elliptische-Kurven
$\leq 80$	1024	160-223
112	2048	224-255
128	3072	256-383
192	7680	384-511
256	15360	512+

Tabelle: Vergleich Schlüssellängen

# Überblick

## 1 Grundbegriffe

- Affine Ebenen
- Projektive Ebenen

## 2 Elliptische Kurven $E$

- Weierstraß-Gleichung
- Affine Darstellung

## 3 Eine Gruppe über $E$

- Schnittpunkte von Tangenten und Geraden mit elliptischen Kurven
- Die Verknüpfung  $\oplus$
- Die Gruppenoperation

## 4 Anwendungen

- Diskretes-Logarithmen-Problem
- Sicherheit
- Angriffe



# Definition affiner Ebenen

## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine affine Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:



# Definition affiner Ebenen

## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine affine Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Zu je zwei Elementen  $a, b \in \mathcal{A}$  mit  $a \neq b$  existiert genau ein  $G \in \mathcal{G}$  mit  $a, b \in G$ .



# Definition affiner Ebenen

## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine affine Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Zu je zwei Elementen  $a, b \in \mathcal{A}$  mit  $a \neq b$  existiert genau ein  $G \in \mathcal{G}$  mit  $a, b \in G$ .
- 2 Zu  $G \in \mathcal{G}$  und  $a \in \mathcal{A} \setminus G$  existiert genau ein  $G' \in \mathcal{G}$  mit  $a \in G'$  und  $G \cap G' = \emptyset$ .



# Definition affiner Ebenen

## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine affine Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Zu je zwei Elementen  $a, b \in \mathcal{A}$  mit  $a \neq b$  existiert genau ein  $G \in \mathcal{G}$  mit  $a, b \in G$ .
- 2 Zu  $G \in \mathcal{G}$  und  $a \in \mathcal{A} \setminus G$  existiert genau ein  $G' \in \mathcal{G}$  mit  $a \in G'$  und  $G \cap G' = \emptyset$ .
- 3 Es existieren drei Elemente  $a, b, c \in \mathcal{A}$  mit  $c \notin \overline{a, b}$ .



# Definition projektiver Ebenen

## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine projektive Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:





# Definition projektiver Ebenen

## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine projektive Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Zu je zwei Elementen  $P, Q \in \mathcal{P}$  mit  $P \neq Q$  existiert genau ein  $G \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in G$ .



# Definition projektiver Ebenen

## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine projektive Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Zu je zwei Elementen  $P, Q \in \mathcal{P}$  mit  $P \neq Q$  existiert genau ein  $G \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in G$ .
- 2 Für je zwei  $G, H \in \mathcal{G}$  mit  $G \neq H$  gilt  $|G \cap H| = 1$ .



# Definition projektiver Ebenen

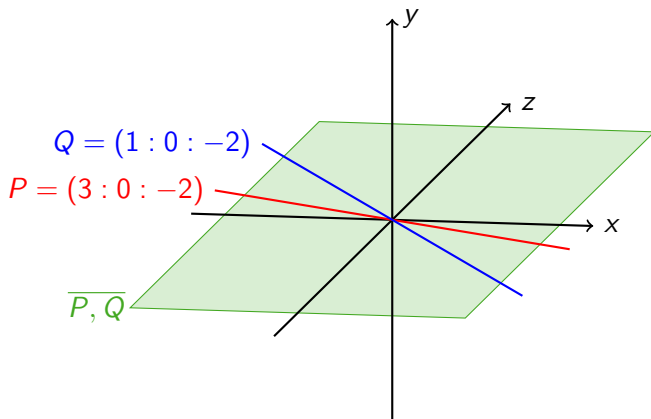
## Definition

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Geraden mit  $\mathcal{G} \subseteq \text{Pot}(\mathcal{A})$ . Bei  $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$  handelt es sich um eine projektive Ebene, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Zu je zwei Elementen  $P, Q \in \mathcal{P}$  mit  $P \neq Q$  existiert genau ein  $G \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in G$ .
- 2 Für je zwei  $G, H \in \mathcal{G}$  mit  $G \neq H$  gilt  $|G \cap H| = 1$ .
- 3 Es existieren vier verschiedene Elemente in  $\mathcal{P}$ , sodass immer höchstens zwei davon in jedem beliebigen  $G \in \mathcal{G}$  liegen.

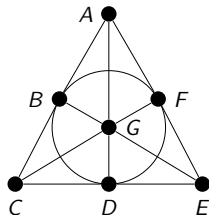


# $\text{PG}(2, \mathbb{F})$

$\text{PG}(2, \mathbb{F})$ Abbildung: Projektive Punkte und Geraden in  $\text{PG}(2, \mathbb{F})$

# Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

# Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen



**Abbildung:** Von der Fano-Ebene zur minimalen affinen Ebene

# Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

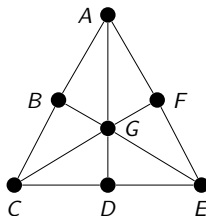
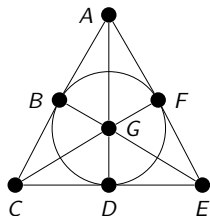


Abbildung: Von der Fano-Ebene zur minimalen affinen Ebene



# Konstruktion affiner Ebenen aus projektiven Ebenen

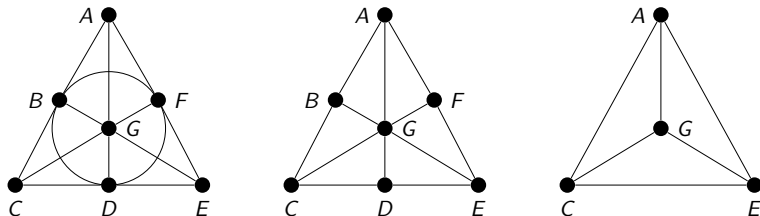


Abbildung: Von der Fano-Ebene zur minimalen affinen Ebene

# Definition

Erinnerung: Punktemenge von  $\text{PG}(2, \mathbb{F})$

$$\mathcal{P} = \{(x : y : z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

# Definition

Erinnerung: Punktemenge von  $\text{PG}(2, \mathbb{F})$

$$\mathcal{P} = \{(x : y : z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{F}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

## Definition

Wir setzen:

$$F(X, Y, Z) := Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3$$

Eine elliptische Kurve  $E \subseteq \mathcal{P}$  ist durch die Lösung der  
**Weierstraß-Gleichung**

$$F(X, Y, Z) = 0$$

gegeben, wobei  $a_i \in \mathbb{F}$  gilt und die Lösung keine Singularitäten besitzen darf.

# Vereinfachung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers  $\mathbb{F}$  soll nicht 2 und nicht 3 sein:  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2, 3$ .

# Vereinfachung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers  $\mathbb{F}$  soll nicht 2 und nicht 3 sein:  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2, 3$ .
- Dies bedeutet, dass  $1 + 1 \neq 0$  bzw.  $1 + 1 + 1 \neq 0$ , wobei 0, 1 die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation von  $\mathbb{F}$  sind.

# Vereinfachung

- Wir schränken ein: Die *Charakteristik* des Körpers  $\mathbb{F}$  soll nicht 2 und nicht 3 sein:  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2, 3$ .
- Dies bedeutet, dass  $1 + 1 \neq 0$  bzw.  $1 + 1 + 1 \neq 0$ , wobei 0, 1 die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation von  $\mathbb{F}$  sind.
- Unter diesen Voraussetzungen können wir die Weierstraß-Gleichung vereinfachen zu:

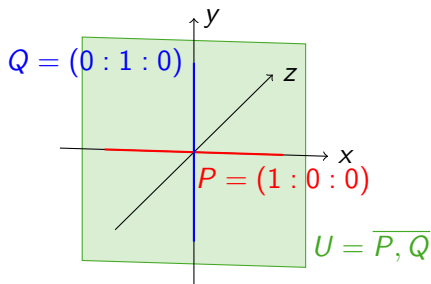
$$0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3$$

# Unendlich ferne Gerade

- Betrachte  $U := \overline{P, Q}$  mit  $P = (1 : 0 : 0)$ ,  $Q = (0 : 1 : 0)$ .

# Unendlich ferne Gerade

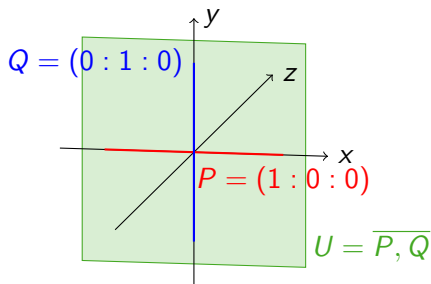
- Betrachte  $U := \overline{P, Q}$  mit  $P = (1 : 0 : 0)$ ,  $Q = (0 : 1 : 0)$ .
- $U$  ist im dreidimensionalen Raum genau die  $x, y$ -Ebene mit  $z = 0$ .





# Unendlich ferne Gerade

- Betrachte  $U := \overline{P, Q}$  mit  $P = (1 : 0 : 0)$ ,  $Q = (0 : 1 : 0)$ .
- $U$  ist im dreidimensionalen Raum genau die  $x, y$ -Ebene mit  $z = 0$ .



- Wir bezeichnen  $U$  als die **unendlich ferne Gerade**.

# Unendlich ferner Punkt

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

# Unendlich ferner Punkt

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- und die unendlich ferne Gerade

$$U = \{(x : y : 0) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$$

# Unendlich ferner Punkt

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- und die unendlich ferne Gerade

$$U = \{(x : y : 0) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$$

- Es gilt:  $U \cap E = (0 : 1 : 0) =: \mathcal{O}$ , d.h. der einzige Punkt von  $U$ , der auf der Kurve  $E$  liegt, ist  $\mathcal{O}$ .

# Unendlich ferner Punkt

- Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E = \{(X : Y : Z) \mid 0 = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3\}$$

- und die unendlich ferne Gerade

$$U = \{(x : y : 0) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$$

- Es gilt:  $U \cap E = (0 : 1 : 0) =: \mathcal{O}$ , d.h. der einzige Punkt von  $U$ , der auf der Kurve  $E$  liegt, ist  $\mathcal{O}$ .
- Wir bezeichnen  $\mathcal{O}$  als den **unendlich fernen Punkt**.

- Für alle anderen Punkte  $P \in E$  ist die z-Koordinate  $\neq 0$ , d.h. alle Punkte außer  $\mathcal{O}$  liegen im affinen Teil  $E \setminus U$ .



- Für alle anderen Punkte  $P \in E$  ist die z-Koordinate  $\neq 0$ , d.h. alle Punkte außer  $\mathcal{O}$  liegen im affinen Teil  $E \setminus U$ .
- Wir können also  $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$  annehmen.



- Für alle anderen Punkte  $P \in E$  ist die z-Koordinate  $\neq 0$ , d.h. alle Punkte außer  $\mathcal{O}$  liegen im affinen Teil  $E \setminus U$ .
- Wir können also  $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$  annehmen.
- Die Weierstraß-Gleichung für diese Punkte vereinfacht sich zu:

$$f(x, y) := y^2 - x^3 - ax - b$$





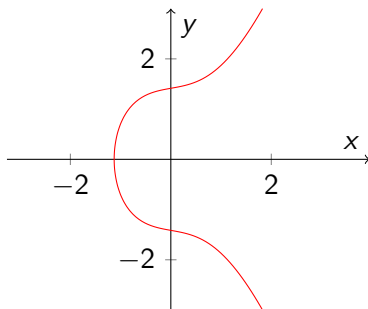
- Für alle anderen Punkte  $P \in E$  ist die z-Koordinate  $\neq 0$ , d.h. alle Punkte außer  $\mathcal{O}$  liegen im affinen Teil  $E \setminus U$ .
- Wir können also  $P \in \{(x : y : 1) \mid x, y \in \mathbb{F}\}$  annehmen.
- Die Weierstraß-Gleichung für diese Punkte vereinfacht sich zu:

$$f(x, y) := y^2 - x^3 - ax - b$$

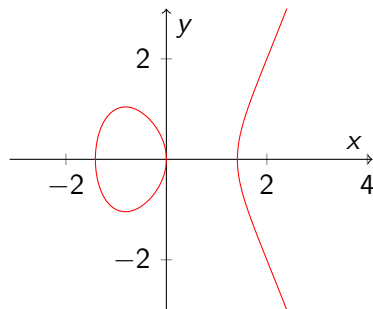
- Insgesamt gilt also:

$$E = \{(x : y : 1) \mid (x, y) \in \mathbb{F}^2 \wedge f(x, y) = 0\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

# Grafische Darstellungen



(a)  $y^2 = x^3 + 0.5x + 2$



(b)  $y^2 = x^3 - 2x$

Abbildung: Affine Darstellung elliptischer Kurven

# Singularitäten

## Definition

Eine Kurve  $E$  ist **singulär** in einem Punkt  $P = (a : b : c) \in E$ , wenn gilt:

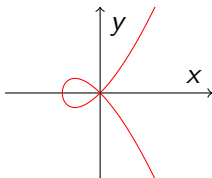
$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$

# Singularitäten

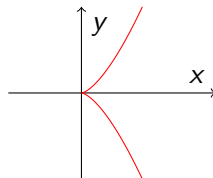
## Definition

Eine Kurve  $E$  ist **singulär** in einem Punkt  $P = (a : b : c) \in E$ , wenn gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$



(a)  $y^2 = x^3 + x^2$



(b)  $y^2 = x^3$

**Abbildung:** Kurven mit Singularitäten (Knoten und Spitze)

# Voraussetzungen

- Es gelte  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2, 3$
- $E$  sei nicht singulär.

# Tangenten elliptischer Kurven

## Definition

Es sei  $P$  ein Punkt der elliptischen Kurve  $E$ . Wir definieren die Tangente an  $E$  im Punkt  $P$ :

$$T_P := \left\{ (u : v : w) \in \mathcal{P} \mid \frac{\partial F}{\partial X}(P)u + \frac{\partial F}{\partial Y}(P)v + \frac{\partial F}{\partial Z}(P)w = 0 \right\}$$

Tangente  $T_{\mathcal{O}}$  an  $\mathcal{O}$ 

Vereinfachte Weierstraß-Gleichung:

$$F(X, Y, Z) = Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = -3X^2 - aZ^2, \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = 2YZ, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = Y^2 - 2aZX - 3bZ^2$$

# Schnittpunkte mit Geraden

## 1 Unendlich ferne Gerade $U$



# Schnittpunkte mit Geraden

- 1 Unendlich ferne Gerade  $U$
- 2 Affine Geraden:  $y = kx + d$



# Schnittpunkte mit Geraden

- 1 Unendlich ferne Gerade  $U$
- 2 Affine Geraden:  $y = kx + d$
- 3 Parallele zur  $y$ -Achse:  $v + \lambda(0, 1)$  mit  $v = (x, y)$  und  $\lambda \in \mathbb{F}$

# Idee

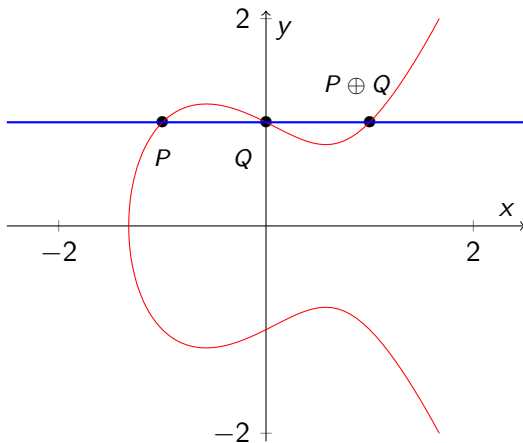


Abbildung:  $P \oplus Q$

Einleitung

Grundbegriffe



Elliptische Kurven  $E$



Eine Gruppe über  $E$



Anwendungen



Die Verknüpfung  $\oplus$

# Vereinbarungen

# Vereinbarungen

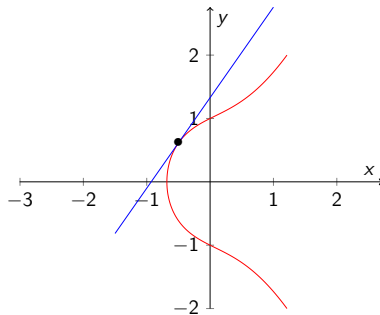
(a)  $P \oplus P$ 

Abbildung: Vereinbarung(1)

# Vereinbarungen

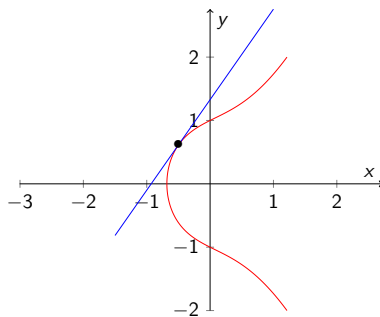
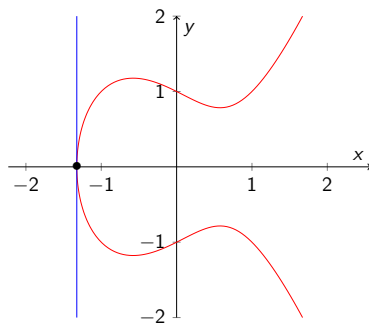
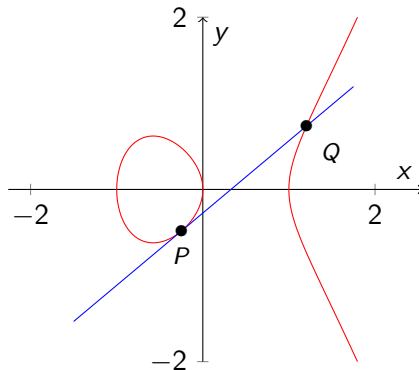
(a)  $P \oplus P$ (b)  $P \oplus P = P$ 

Abbildung: Vereinbarungen(1)

# Vereinbarungen



$$(a) P \oplus Q = P$$

Abbildung: Vereinbarungen(2)



# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$





# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

**1**  $P = Q = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$



# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$

# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

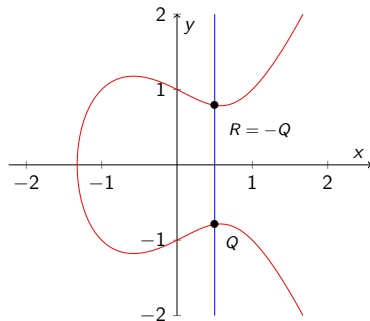
$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$



(a)  $\mathcal{O} \oplus Q = -Q$



# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$

3  $P = -Q:$

$$P \oplus (-P) = \mathcal{O}$$

# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}:$

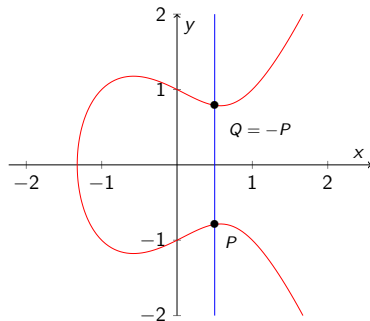
$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$

3  $P = -Q:$

$$P \oplus (-P) = \mathcal{O}$$



(b)  $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$



# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$

3  $P = -Q:$

$$P \oplus (-P) = \mathcal{O}$$

4  $P \neq \pm Q:$

$$P \oplus Q = R$$



# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}:$

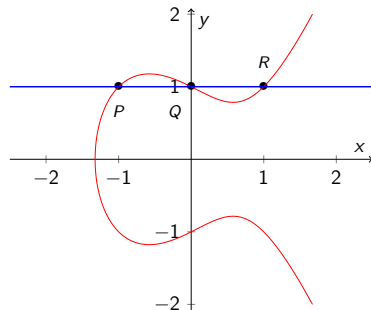
$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$

3  $P = -Q:$

$$P \oplus (-P) = \mathcal{O}$$

4  $P \neq \pm Q:$

$$P \oplus Q = R$$



(c)  $P \oplus Q = R$



# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}:$

$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$

3  $P = -Q:$

$$P \oplus (-P) = \mathcal{O}$$

4  $P \neq \pm Q:$

$$P \oplus Q = R$$

5  $P = Q \neq -P:$

$$P \oplus P = R$$





# Kommutativität und Abgeschlossenheit

Fallunterscheidung für

$$P \oplus Q = R:$$

1  $P = Q = \mathcal{O}$ :

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

2  $P = \mathcal{O}$ :

$$\mathcal{O} \oplus Q = -Q$$

3  $P = -Q$ :

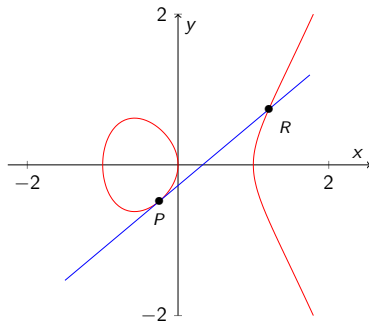
$$P \oplus (-P) = \mathcal{O}$$

4  $P \neq \pm Q$ :

$$P \oplus Q = R$$

5  $P = Q \neq -P$ :

$$P \oplus P = R$$



(d)  $P \oplus P = R$



# Mathematische Beschreibung der $\oplus$ -Verknüpfung

## Satz

Es sei  $P = (x, y), Q = (u, v) \in E \setminus \{\mathcal{O}\}$ . Dann gilt:

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \oplus P = (x, -y) =: -P \quad \text{und}$$

$$P \oplus Q = \begin{cases} \mathcal{O}, & \text{falls } P = -Q \\ (w, k(w - x) + y), & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$w = k^2 - x - u \quad \text{und} \quad k = \begin{cases} \frac{v-y}{u-x}, & \text{falls } P \neq \pm Q \\ \frac{3x^2+a}{2y}, & \text{falls } P = Q \neq -P \end{cases}$$

# Definition

Wir definieren die Verknüpfung  $+$  für  $P, Q \in E$  folgendermaßen:

$$P + Q := \mathcal{O} \oplus (P \oplus Q) = -(P \oplus Q).$$

# Definition

Wir definieren die Verknüpfung  $+$  für  $P, Q \in E$  folgendermaßen:

$$P + Q := \mathcal{O} \oplus (P \oplus Q) = -(P \oplus Q).$$

## Satz

$(E, +)$  ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $\mathcal{O}$ .



# Grafische Darstellung

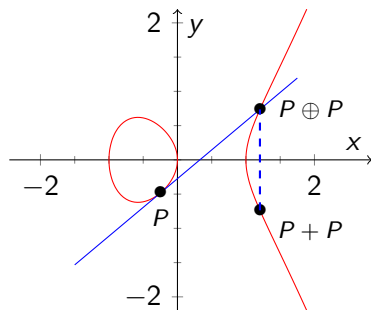
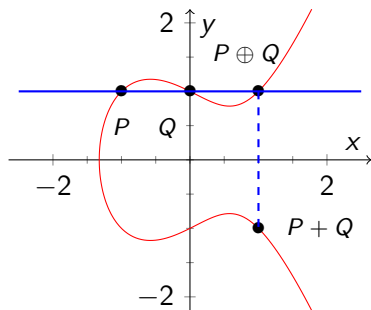


Abbildung: Grafische Addition in  $(E, +)$

# Grafische Darstellung

Und wie sieht das Ganze über endliche Körper aus?  
(siehe addition.gif)

# Grafische Darstellung

Und wie sieht das Ganze über endliche Körper aus?  
(siehe addition.gif)

Quelle: <http://arstechnica.com/>



# Definition

## Definition

Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $x, y \in G$ . Das Finden von  $m \in \mathbb{N}$ , so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.



# Definition

## Definition

Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $x, y \in G$ . Das Finden von  $m \in \mathbb{N}$ , so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Über elliptische Kurven:

- Wähle  $P, Q \in E$  und ein  $m \in \mathbb{N}$ . Das DLP ist dann die Lösung der Gleichung  $mP = Q$ , wobei  $P$  und  $Q$  bekannt sind.

# Definition

## Definition

Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $x, y \in G$ . Das Finden von  $m \in \mathbb{N}$ , so dass gilt

$$x^m = y,$$

wird **Diskretes-Logarithmen-Problem** (kurz DLP) genannt.

Über elliptische Kurven:

- Wähle  $P, Q \in E$  und ein  $m \in \mathbb{N}$ . Das DLP ist dann die Lösung der Gleichung  $mP = Q$ , wobei  $P$  und  $Q$  bekannt sind.
- $mP$  bedeutet: "Addiere m-mal  $P$ "  
Beispiel:  $4P = P + P + P + P$

# Analyse

Wie sicher ist das DLP über elliptische Kurven?

# Analyse

Wie sicher ist das DLP über elliptische Kurven?

- Naives Probieren:  $O(|E|)$ .

# Analyse

Wie sicher ist das DLP über elliptische Kurven?

- Naives Probieren:  $O(|E|)$ .

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in  $O(\sqrt{|E|})$  lösbar.

# Analyse

Wie sicher ist das DLP über elliptische Kurven?

- Naives Probieren:  $O(|E|)$ .

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in  $O(\sqrt{|E|})$  lösbar.
- DLP mit Hilfe von Primzahlen mit Index-Calculus-Algorithmen subexponentiell lösbar.

# Analyse

Wie sicher ist das DLP über elliptische Kurven?

- Naives Probieren:  $O(|E|)$ .

Wir erinnern uns:

- DLP beispielsweise mit Babystep-Giantstep in  $O(\sqrt{|E|})$  lösbar.
- DLP mit Hilfe von Primzahlen mit Index-Calculus-Algorithmen subexponentiell lösbar.

**Aber:** Elliptische Kurven besitzen keine “Primzahlen”.

# Addition

Beispiel: Wir wollen  $13P$  berechnen:

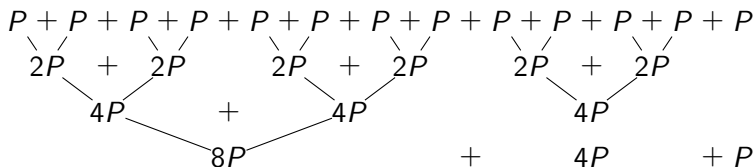
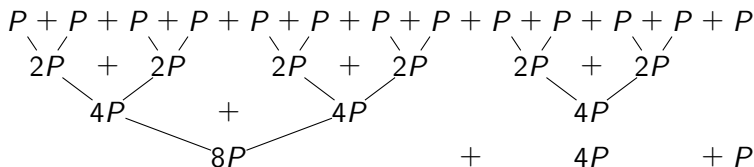


Abbildung: Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum



# Addition

Beispiel: Wir wollen  $13P$  berechnen:

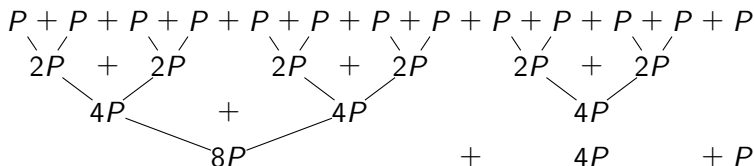


**Abbildung:** Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.

# Addition

Beispiel: Wir wollen  $13P$  berechnen:

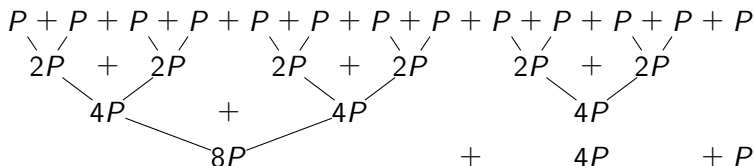


**Abbildung:** Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.  
 $\Rightarrow$  Rückschlüsse über Schlüssel mit Seitenkanalangriff möglich.

# Addition

Beispiel: Wir wollen  $13P$  berechnen:

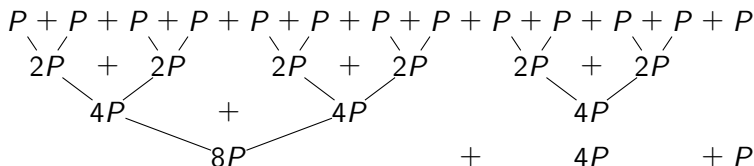


**Abbildung:** Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.  
 $\Rightarrow$  Rückschlüsse über Schlüssel mit Seitenkanalangriff möglich.

# Addition

Beispiel: Wir wollen  $13P$  berechnen:



**Abbildung:** Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

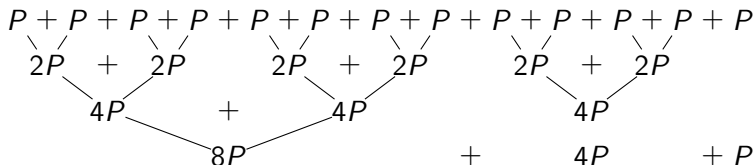
- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.  
 $\Rightarrow$  Rückschlüsse über Schlüssel mit Seitenkanalangriff möglich.

Lösung:

- Dummy-Additionen

# Addition

Beispiel: Wir wollen  $13P$  berechnen:



**Abbildung:** Effiziente Skalarmultiplikation mit Additionsbaum

- Fallunterscheidungen bei Addition notwendig.  
 $\Rightarrow$  Rückschlüsse über Schlüssel mit Seitenkanalangriff möglich.

Lösung:

- Dummy-Additionen
- Edwards-Kurven benötigen keine Fallunterscheidungen

# Sonstige

Weitere Angriffe:

- Isomorphismus-Angriffe
- Angriffe durch Reduzierung auf Untergruppen

# Sonstige

Weitere Angriffe:

- Isomorphismus-Angriffe
- Angriffe durch Reduzierung auf Untergruppen

Lösung:

- Geeignete Parameter für die Kurve wählen (NIST-Vorschläge)

# The End



# The End

Elliptische Kurven sind einfach super.