

V106

Gekoppelte Pendel

Lukas Bertsch

lukas.bertsch@tu-dortmund.de

Steffen Kober

steffen.kober@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.11.2021

Abgabe: 07.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	5
4 Auswertung	6
4.1 Einzelpendel und gleichsinnige Schwingung	8
4.2 Gegensinnige Schwingung	8
4.3 Gekoppelte Schwingung / Schwebung	9
5 Diskussion	9
Literatur	11

1 Ziel

In diesem Versuch werden die gleichsinnige-, die gegensinnige- und die gekoppelte Schwingung zweier Fadenpendel, die über eine Feder gekoppelt sind, untersucht. Ziel ist es die Schwingungs- bzw. Schwebungsdauer der genannten Schwingungsarten zu bestimmen. Daraus können Rückschlüsse über die Kopplungskonstante der Feder getroffen werden und die Messwerte mit den Theoriewerten verglichen werden.

2 Theorie

Ein einzelnes Fadenpendel im Schwerefeld der Erde habe die Masse m , eine Fadenlänge l und sei reibungsfrei aufgehängt. Bei einer Auslenkung um einen kleinen Winkel aus der Ruhelage wirkt ein Drehmoment $M = D_p \cdot \phi$, welches aus der Gewichtskraft resultiert, auf die Masse. D_p ist die Winkelrichtgröße des Pendels und ϕ beschreibt den Auslenkwinkel. Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin(x) \approx x$ folgt die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators für den Winkel ϕ . Sie wird gelöst durch eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und der Schwingungsdauer} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

Bei der Kopplung zweier identischer Fadenpendel mit einer Feder wirkt zusätzlich ein Drehmoment $M_1 = D_F(\phi_2 - \phi_1)$ bzw. $M_2 = -M_1$ auf die Pendel 1 und 2. Damit ergibt sich ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi}_1 + D_p\phi_1 &= D_F(\phi_2 - \phi_1) \\ J\ddot{\phi}_2 + D_p\phi_2 &= D_F(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

für die Auslenkwinkel ϕ_1 und ϕ_2 der beiden Pendel. J ist das Trägheitsmoment der Pendel. Die Lösungen dieses Systems lassen sich als Überlagerung von Eigenschwingungen der beiden Pendel darstellen. Es ergibt sich für jedes Pendel eine harmonische Schwingung mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 . Wenn α_1 und α_2 die Auslenkwinkel der Pendel beschreiben, ist durch die Anfangsbedingungen $\alpha(t = 0)$ und $\dot{\alpha}(t = 0)$ eine eindeutige Lösung bestimmt. Unter diesen Lösungen werden verschiedene Schwingungsarten mit speziellen Anfangsbedingungen unterschieden, die im Folgenden diskutiert werden.

- **Gleichsinnige Schwingung:** $\alpha_1 = \alpha_2$

Bei der gleichsinnigen Schwingung, wie in Abbildung 1a dargestellt, werden beide Pendel um den gleichen Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$ ausgelenkt. Die Pendel schwingen nun im Takt und beeinflussen sich nicht. Es wird also keine Kraft über die Feder übertragen. Die Schwingungsfrequenz entspricht der eines einzelnen Pendels (vgl. Gleichung (1)) und wird mit ω_+ bezeichnet.

- **Gegensinnige Schwingung:** $\alpha_1 = -\alpha_2$

Bei dieser Schwingungsvariante (Abbildung 1b) werden die Pendel um den gleichen

Winkel in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt. Über die Feder wirken nun betragsmäßig gleiche, aber entgegengerichtete Kräfte auf die Pendel. Dies hat zur Folge, dass die Pendel symmetrisch zu der Achse zwischen den Pendeln schwingen. Die Schwingungsfrequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g + 2K}{l}} \quad (2)$$

und die daraus resultierende Schwingungsdauer T_- sind nun abhängig von der Federkonstante K .

- **Gekoppelte Schwingung:** $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$

Für die gekoppelte Schwingung –auch Schwebefall genannt– (Abbildung 1c) wird nur ein Pendel aus der Ruhelage ausgelenkt. Das ausgelenkte Pendel fängt an zu schwingen und überträgt seine kinetische Energie über die Kopplungsfeder an das zuerst ruhende Pendel. Dadurch wird die Schwingungsamplitude des ausgelenkten Pendels kontinuierlich kleiner, während die des zuerst Ruhenden zunimmt. Hat das ausgelenkte Pendel seine Energie vollständig abgegeben, bleibt es stehen und die Amplitude des zweiten Pendels erreicht ihr Maximum. Anschließend beginnt der Prozess mit nun getauschten Ausgangspositionen von vorne. Dieses Phänomen wird als Schwebung bezeichnet. Die Schwingungsdauer T_S bezeichnet die Dauer einer Periode dieses Prozesses, also die Zeit von Ruhelage bis erneuter Ruhelage eines Pendels. Die Schwingungsfrequenz

$$\omega_S = \omega_- - \omega_+ \quad \text{und die Schwingungsdauer} \quad T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \quad (3)$$

lassen sich durch die Schwingungsdauern T_+ und T_- der beiden anderen Fälle bestimmen. Aus den genannten Frequenzen kann ebenfalls die Federkonstante

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \quad (4)$$

bestimmt werden.

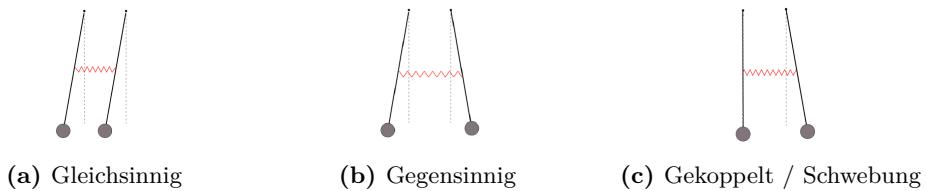


Abbildung 1: Die Schwingungsarten des Doppelpendels. [1]

3 Durchführung

In diesem Versuch werden alle untersuchten Schwingungs- und Schwebedauern für zwei unterschiedliche Pendellängen bestimmt. Dies kann durch unterschiedliche Aufhängungen der Masse am Pendel realisiert werden, da die angehängte Masse sehr viel Größer ist als die überstehende Masse des Metallstabes (siehe Abbildung 2). Die Schwing- und Schwebedauern werden für verschiedene Arten von Schwingungen gemessen. Vorbereitend dazu wird zunächst überlegt, ob es sich bei diesem Versuch um eine harmonische Schwingung handelt. Eine harmonische Schwingung muss durch Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben werden können und es muss ein lineares Kraftgesetz gelten. Außerdem muss die Energie erhalten sein. Die ersten beiden Bedingungen gelten für ein Pendel, wie es im Versuch genutzt wird. Aufgrund der kurzen Messdauern kann annähernde Energieerhaltung angenommen werden. Um nun die Gleichungen aus Abschnitt 2 nutzen zu können, dürfen bei der Durchführung lediglich kleine Auslenkungen der Pendel verwendet werden, also solche, bei denen die Kleinwinkelnäherung noch möglichst genau gilt. Dies ist bis zu einem Auslenkwinkel von circa 5° gegeben. Bei einer Pendellänge von 70 cm ergibt sich daher eine maximale Auslenkung von 6.1 cm.

Für diesen Versuch werden zwei identische Pendel benötigt (siehe Abbildung 2), welche durch eine Feder gekoppelt werden können (siehe Abbildung 3). Zuerst wird die Schwin-



Abbildung 2: Zu sehen sind die beiden Stabpendel mit den runden Massen.

gungsdauer eines einfachen Pendels bestimmt. Dazu werden fünf Schwingungsdauern gemessen, um den Fehler der Zeitmessung möglichst klein zu halten. Dies wird zehn mal an beiden Pendeln durchgeführt, um auch die möglichen Unterschiede der beiden Einzelpendel zueinander gemessen zu haben.

Anschließend wird die Kopplungsfeder an die Pendel angebracht, wie in Abbildung 3

zu sehen ist. Zuerst wird eine gleichsinnige Schwingung der gekoppelten Pendel untersucht.



Abbildung 3: An den Stabpendeln wurde die Kopplungsfeder montiert.

sucht. Dazu werden die Pendel, wie in Abbildung 1a zu sehen ist, um den gleichen Winkel ausgelenkt. Es werden erneut zehn Messungen durchgeführt, bei denen je fünf Schwingungsperioden gemessen werden.

Danach wird die gegensinnige Schwingung untersucht. Die Pendel werden gemäß Abbildung 1b ausgelenkt. Wie zuvor werden zehn Messwerte für die Dauer von je fünf Perioden der Schwingung gemessen.

Zuletzt wird die gekoppelte Schwingung beziehungsweise der Schwebungsfall untersucht. Eines der Pendel soll sich in Ruhelage befinden während das Andere ausgelenkt wird. Abbildung 1c stellt die beschriebene Auslenkung dar. Hier wird die Schwebungsdauer von einer Ruhelage eines Pendels bis zu seiner Nächsten bestimmt. Dabei muss sehr genau beobachtet werden, zu welchem Zeitpunkt die Ruhelage eintritt, da kurz vor der Ruhelage noch sehr kleine Schwingungen ausgeübt werden. Zu dieser Messung reicht es, eine Periode der Schwebung zu messen, da diese ausreichend lang ist. Zusätzlich wird die Schwingungsdauer eines Pendels gemessen. Diese ist beim Schwebungsfall bei einem der Pendel zwischen dessen Ruhelagen zu messen. Je nach Länge des Pendel können hier nur 3-5 Schwingungsdauer gemessen werden, da sich das Pendel nach wenigen Schwingungen wieder in Ruhelage begibt. Es sollen ebenfalls 10 Messungen der Schwing- und Schwebedauern durchgeführt werden.

4 Auswertung

Im Folgenden werden alle zu untersuchenden Werte für beide Pendellängen bestimmt. In der ersten Messung wurde die Pendellänge auf (28.4 ± 0.1) cm eingestellt. Für den zweiten

Messdurchgang wurde die Länge auf (78.4 ± 0.1) cm geändert. Den Tabellen 1 und 2 können sämtliche Messwerte für die Schwingungs- und Schwebungsdauern entnommen werden. Dabei ist darauf zu achten, dass bis zu fünf Periodendauern gemessen wurden, was bei der Mittelwertbildung berücksichtigt werden muss.

Tabelle 1: Messwerte zur Pendellänge $l_1 = 28.4\text{cm}$

$5T_l / \text{s}$	$5T_r / \text{s}$	$5T_+ / \text{s}$	$5T_- / \text{s}$	$3T / \text{s}$	T_s / s
6,18	5,98	6,11	5,07	3,32	6,06
6,11	5,79	6,15	5,07	3,45	6,20
6,11	5,99	6,04	5,13	3,23	6,20
5,91	5,93	5,99	5,08	3,43	6,35
6,10	5,99	6,19	5,11	3,39	5,87
5,85	6,18	6,16	5,11	3,36	6,07
5,89	5,97	6,14	5,12	3,34	6,25
5,99	6,04	6,23	5,16	3,40	6,12
5,94	6,09	6,16	5,14	3,44	6,19
5,96	6,05	6,14	5,12	3,44	6,12

Tabelle 2: Messwerte zur Pendellänge $l_1 = 78.4\text{cm}$

$5T_l / \text{s}$	$5T_r / \text{s}$	$5T_+ / \text{s}$	$5T_- / \text{s}$	$5T / \text{s}$	T_s / s
8,89	8,81	8,93	8,09	8,22	20,20
8,79	8,75	8,98	8,20	8,33	20,10
8,93	8,86	8,98	8,13	8,52	19,49
8,97	8,82	8,87	8,12	8,36	19,61
8,91	8,91	8,89	8,18	8,50	20,00
8,75	8,84	8,75	8,27	8,39	20,31
8,85	8,90	8,89	8,18	8,51	20,25
8,82	9,01	8,98	8,31	8,45	19,94
8,85	8,91	8,84	8,22	8,43	19,53
8,96	8,99	8,89	8,23	8,56	20,24

Alle Mittelwerte für die Schwingungsdauern T berechnen sich nach Division durch die Periodenzahl zu

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k \quad ,$$

wobei N die Anzahl der Messungen beschreibt und in diesem Experiment immer gleich 10 ist. Der Mittelwertfehler ΔT lässt sich durch

$$\Delta \bar{T} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{T} - T_i)^2} \quad (5)$$

berechnen.

An einigen Stellen werden Schwingungsdauern in Kreisfrequenzen umgerechnet. Dies geschieht nach Gleichung 1 und führt zu einem Fehler

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T^2} \Delta T \quad (6)$$

der Kreisfrequenz, der sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ergibt.

4.1 Einzelpendel und gleichsinnige Schwingung

Die Schwingungsdauern der Einzelpendel und der gleichsinnigen Schwingung können zusammen betrachtet werden, da die Kopplungsfeder bei der gleichsinnigen Schwingung keinen Einfluss auf die Dynamik hat. Gemessen wurden die Schwingungsdauern T_l , T_r und T_+ aus Tabelle 1 und Tabelle 2. Der Index l beschreibt jeweils das linke Pendel, r bezeichnet das rechte Pendel. Zu den Längen l_1 und l_2 lassen sich die theoretisch vorhergesagten Frequenzen der Pendel errechnen. Mit Gleichung (1) ergeben sich die theoretischen Frequenzen $\omega_{+, \text{Theorie}} = (5.87 \pm 0.01) \text{ Hz}$ und $\omega_{+, \text{Theorie}} = (3.537 \pm 0.002) \text{ Hz}$. Aus den gemessenen Werten wird zunächst der Mittelwert gebildet. Die Fehler des Mittelwertes ergeben sich nach Gleichung (5). Daraus folgen die fehlerbehafteten Schwingungsdauern \bar{T}_l , \bar{T}_r und \bar{T}_+ für beide Pendellängen. Diese können mit Gleichung (1) in die zugehörigen Frequenzen überführt werden.

Tabelle 3: Mittelwerte der Messungen und daraus resultierende Frequenzen

	$l = 28.4 \text{ cm}$	$l = 78.4 \text{ cm}$
\bar{T}_l / s	$1,201 \pm 0,007$	$1,774 \pm 0,005$
\bar{T}_r / s	$1,200 \pm 0,007$	$1,776 \pm 0,005$
\bar{T}_+ / s	$1,226 \pm 0,004$	$1,780 \pm 0,005$
ω_+ / Hz	$5,124 \pm 0,019$	$3,530 \pm 0,009$
$\omega_{+, \text{Theorie}} / \text{Hz}$	$5,876 \pm 0,01$	$3,537 \pm 0,002$

4.2 Gegensinnige Schwingung

Die Theoriewerte der Frequenzen ω_- der gegensinnigen Schwingung lassen sich mittels Gleichung (2) berechnen. Dabei wurde für die Kopplungskonstante K der experimentell ermittelte Wert eingestzt. Es folgt mit der gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta\omega_- = \frac{1}{\sqrt{l \cdot (g + 2K)}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta g\right)^2 + \Delta K^2 + \left(\frac{g + 2K}{2l}\Delta l\right)^2}$$

für die Unsicherheit dieser Größe. Δg wurde in der Rechnung als 0 angenommen. Wie oben beschrieben lassen sich Mittelwerte aus den Messwerten bilden, woraus sich wiederum die Frequenzen berechnen lassen.

Tabelle 4: Mittelwerte der Messungen für die gegensinnige Schwingung und daraus resultierende Frequenzen

	$l = 28.4\text{cm}$	$l = 78.4\text{cm}$
\bar{T}_- / s	$1,022 \pm 0,002$	$1,639 \pm 0,004$
ω_- / Hz	$6,147 \pm 0,011$	$3,835 \pm 0,010$
$\omega_{-, \text{Theorie}} / \text{Hz}$	$5,983 \pm 0,003$	$3,566 \pm 0,001$

Die Federkonstante K lässt sich nun mit den experimentell ermittelten Werten für ω_+ und ω_- nach Gleichung 4 berechnen. Die Unsicherheit des Wertes ergibt sich zu

$$\Delta K = \frac{4T_+ T_-}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \cdot \sqrt{T_-^2 \Delta T_+^2 + T_+^2 \Delta T_-^2}.$$

Damit folgen die beiden Werte für die Federkonstanten $K_1 = (0.180 \pm 0.004)$, $K_2 = (0.083 \pm 0.004)$, die bereits zur Berechnung der Theoriewerte für ω_- verwendet wurden.

4.3 Gekoppelte Schwingung / Schwebung

Die Theoriewerte der Schwebungsfrequenzen ergeben sich mit Gleichung 3. Diese Werte haben einen Fehler von

$$\Delta\omega_S = \sqrt{\Delta\omega_+^2 + \Delta\omega_-^2}.$$

Erneut lassen sich die experimentellen Werte durch Mittelung und Umrechnen der Schwingungsdauern in Frequenzen feststellen.

Tabelle 5: Mittelwerte der Messungen für die Schwebung und daraus resultierende Frequenzen

	$l = 28.4\text{cm}$	$l = 78.4\text{cm}$
\bar{T}_s / s	$6,14 \pm 0,04$	$19,97 \pm 0,10$
ω_s / Hz	$1,023 \pm 0,007$	$0,315 \pm 0,002$
$\omega_{s, \text{Theorie}} / \text{Hz}$	$0,107 \pm 0,011$	$0,030 \pm 0,002$

5 Diskussion

Zuerst wird geprüft, ob die beiden Einzelpendel auch annähernd identisch schwingen. Für die Länge l_1 ergibt sich eine prozentuale Abweichung von $\Delta T_1 = 0.05\%$ und für l_2 ergibt sich $\Delta T_2 = 0.1\%$ zueinander. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Pendel auf sehr ähnliche Längen eingestellt sind.

Zunächst wird die gleichsinnige Schwingung diskutiert. Bei diesen Messungen ergibt sich für l_1 eine relative Abweichung $\Delta\omega_+ = 12.8\%$ vom Theoriewert. Diese liegt nicht

Tabelle 6: Zusammenfassung der zu bestimmenden Werte und relative Abweichung zur Theorie.

	$l = 28.4\text{cm}$	Δ_{relativ}	$l = 78.4\text{cm}$	Δ_{relativ}
ω_+ / Hz	$5,124 \pm 0,019$		$3,530 \pm 0,009$	
$\omega_{+, \text{Theorie}} / \text{Hz}$	$5,876 \pm 0,01$	12.8%	$3,537 \pm 0,002$	0.19%
ω_- / Hz	$6,147 \pm 0,011$		$3,834 \pm 0,010$	
$\omega_{-, \text{Theorie}} / \text{Hz}$	$5,983 \pm 0,003$	2.73%	$3,566 \pm 0,001$	7.52%
ω_s / Hz	$1,023 \pm 0,007$		$0,315 \pm 0,002$	
$\omega_{s, \text{Theorie}} / \text{Hz}$	$0,107 \pm 0,011$	857%	$0,030 \pm 0,002$	961%

im Fehlerbereich des gemessenen Wertes und kann durch die Überlänge des Pendels entstehen, da die Masse sehr weit oben aufgehängt ist (siehe Abbildung 3).

Für die Massenlage l_2 ergibt sich lediglich eine prozentuale Abweichung $\Delta\omega_+ = 0.19\%$. Dieser Wert liegt im Rahmen des errechneten Fehlers und ist somit qualitativ gut, was zu erwarten war, da die Masse hier sehr weit unten aufgehängt wurde.

Bei Betrachtung der Federkonstante, fällt auf, dass diese für die unterschiedlichen Längen einen anderen Wert ergibt. Bei der ersten Messung ergibt sie sich zu $K_1 = (0.180 \pm 0.004)$ und bei der zweiten zu $K_2 = (0.083 \pm 0.004)$. Dabei weichen K_1 und K_2 circa um den Faktor 2 voneinander ab. Dies ergibt sich, da die Federkonstante aus den experimentell bestimmten, fehlerbehafteten Werten errechnet werden soll. In Wahrheit sollte die Federkonstante bei beiden Messungen jedoch gleich sein, da auch die gleiche Feder genutzt wurde. Dies führt dazu, dass die Theoriewerte, die mittels der Federkonstante bestimmt wurden, zweifelhaft sind.

Zur gegensinnigen Schwingung der Länge l_1 lässt sich eine Abweichung von $\Delta\omega_- = 2.73\%$ der Messung zum Theoriewert bestimmen. Dies liegt zwar nicht im theoretischen Fehlerbereich, ist jedoch im Rahmen der Messgenauigkeit ein akzeptabler Wert. Bei der Länge l_2 liegt eine relative Abweichung von $\Delta\omega_- = 7.53\%$ vor, obwohl bei dem längeren Pendel bessere Werte zu erwarten wären. Mögliche Gründe für diese Abweichung sind am Ende des Abschnitts aufgelistet.

Die Schwebungsfrequenz weicht für beide Längen um über 800% ab. Dies hat den Grund, dass sich der Theoriewert der Schwebungsfrequenzen aus der Differenz von ω_- und ω_+ zusammensetzt, die beide bereits größere Abweichungen zu den jeweiligen Theoriewerten vorweisen. Werden die Schwebungsfrequenzen hingegen aus den experimentell bestimmten Werten ω_- und ω_+ berechnet, ergeben sich sehr geringe relative Abweichungen von $\Delta\omega_s = 0.02\%$ für l_1 und $\Delta\omega_s = 3.31\%$ für l_2 .

Allgemein liegen in diesem Experiment einige potentielle Fehlerquellen vor. Durch händische Auslenkung ist es nicht möglich beide Pendel gleichmäßig auszulenken und sich genau im Bereich der Kleinwinkelnäherung aufzuhalten. Dazu wird die Schwingungsdauer mit einer Stoppuhr durch optisches Abpassen der maximalen Auslenkung bestimmt, was ebenfalls zu einem Fehler führen kann. Des Weiteren war der Stab eines der verwendeten Pendel leicht gekrümmt, weshalb die Schwingung mitunter nicht in einer Ebene stattfand, was ebenfalls eine mögliche Ungenauigkeit bewirken könnte. Unter Betrachtung dieser

Fehlerquellen, lassen sich die Abweichungen der Messwerte –mit Ausnahme jener der Schwebungsfrequenz– nachvollziehen.

Literatur

- [1] *V106 - Gekoppelte Schwingungen.* TU Dortmund. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1712437/mod_resource/content/2/V106.pdf (besucht am 02.12.2021).