

V101

Das Trägheitsmoment

Lukas Bertsch

lukas.bertsch@tu-dortmund.de

Steffen Kober

steffen.kober@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.01.2022

Abgabe: 18.01.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
3	Durchführung	4
3.1	Vorbereitungsaufgaben	4
3.2	Experimentelle Bestimmung der Apparatkonstanten	5
3.3	Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente einfacher Körper . . .	5
3.4	Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe . .	5
4	Auswertung	6
4.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße und des Eigenträgheitsmoments der Drehachse	6
4.2	Bestimmung des Trägheitsmoments des Zylinders	7
4.3	Bestimmung des Trägheitsmoments der Kugel	9
4.4	Bestimmung des Trägheitsmoments der Holzpuppe	9
4.4.1	Trägheitsmoment der ersten Stellung	10
4.4.2	Trägheitsmoment der zweiten Stellung	10
5	Diskussion	12
	Literatur	13

1 Ziel

Ziel des Versuches ist die experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente verschiedener Körper und einer Modellpuppe über die Schwingungsdauer. Dabei werden die Körper mithilfe einer Feder an einer Drillachse in Schwingung versetzt.

2 Theorie

Analog zur Masse eines Körpers bei einer Translation gibt es ein Trägheitsmoment I , welches die Trägheit des Körpers gegenüber Rotationen beschreibt. Für eine punktförmige Masse m mit senkrechtem Abstand r zur Drehachse berechnet sich das Drehmoment zu $I = mr^2$. Bei einer kontinuierlichen Massenverteilung ergibt sich mit der Dichte $\rho(r)$

$$I = \int r^2 dm = \int_V \rho(r) r^2 dV \quad (1)$$

für das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Körperschwerpunkt. Verläuft die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers, lässt sich das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse mithilfe des *Steiner'schen Satzes* berechnen. Dieser liefert für eine Drehachse, welche parallel zu einer Achse durch den Schwerpunkt liegt und den Abstand a zu dieser hat, das Trägheitsmoment

$$I = I_S + ma^2, \quad (2)$$

wobei I_S das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsachse ist. Für einfache Geometrien ergeben sich bei konstanter Dichte ρ grundlegende Trägheitsmomente. Das Trägheitsmoment einer Kugel ist durch

$$I_K = \frac{2}{5} m R^2 \quad (3)$$

gegeben. Aufgrund der Symmetrie wird das Trägheitsmoment des Zylinders für zwei Beziehungen zur Achse unterschiedlich berechnet. Liegt der Zylinder parallel zur Achse ist sein Trägheitsmoment durch

$$I_Z = \frac{1}{2} m R^2 \quad (4)$$

gegeben. Bei einer orthogonalen Lage wird es durch

$$I_{zh} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \quad (5)$$

berechnet.

In diesem Versuch wird ein System betrachtet, bei welchem eine Drehachse über das rücktreibende Drehmoment einer Feder in Schwingung versetzt werden kann, wenn die Drehachse um einen Winkel ϕ ausgelenkt wird. Ein Drehmoment \vec{M} wird durch eine Kraftwirkung \vec{F} entlang eines Kraftarms \vec{r} senkrecht zur Drehachse bewirkt und lässt sich über den Zusammenhang $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$ berechnen. Das beschriebene System ist ein Beispiel

eines harmonischen Oszillators, dessen Differentialgleichung durch eine Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (6)$$

gelöst wird. D ist dabei die Winkelrichtgröße (*Direktionsmoment*), welche eine Apparatkonstante der Feder ist. Aus dieser Gleichung lässt sich das Drehmoment des Körpers –abzüglich des Eigenträgheitsmoments I_D der Drehachse selbst– zu

$$I_K = \frac{T^2}{4\pi^2} D - I_D \quad (7)$$

bestimmen. Die Winkelrichtgröße beschreibt den Zusammenhang

$$M = D \cdot \phi$$

zwischen Auslenkung ϕ und dem Betrag M des wirkenden Drehmoments. Für eine zum Kraftarm senkrechte Kraftwirkung ergibt sich für die Winkelrichtgröße

$$D = \frac{F \cdot r}{\phi}. \quad (8)$$

3 Durchführung

In diesem Versuch werden, wie im Abschnitt 1 beschrieben, die Trägheitsmomente verschiedener Körper berechnet.

3.1 Vorbereitungsaufgaben

Zur Vorbereitung des Versuches sollten die Drehmomente M_i einer Kraftwirkung von $F = 0,1 \text{ N}$ im Winkel von $\phi = 45^\circ$ zu verschiedenen Abständen r_i berechnet werden. Dazu wird die Formel $M = Fr \cos(\frac{\pi}{2})$ genutzt. Die errechneten Werte können Tabelle 1 entnommen werden.

Tabelle 1: Berechnete Werte der Vorbereitungsaufgabe.

r_i/cm	M_i/mNm
5	3,56
7,5	5,3
10	7,07
12,5	8,8
15	10,6
17,5	12,37
20	14,14
22,5	15,9
25	17,67

3.2 Experimentelle Bestimmung der Apparatkonstanten

Zu Beginn werden die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment I_D der Drill-Achse bestimmt. Dazu wird zunächst ein Stab an der Drill-Achse befestigt. Anschließend wird ein Newtonmeter senkrecht an dem Stab eingehängt. Die Drill-Achse wird nun mit dem Newtonmeter um 90° asugelenkt. Die auf dem abzulesende Kraft wird notiert. Diese Messung wird mindestens zehn Mal durchgeführt und die Ergebnisse danach gemittelt. Dazu wird ebenfalls der Abstand der Aufhängung zur Drill-Achse notiert. Aus diesen Werten kann die Winkelrichtgröße D gemäß Gleichung 8 bestimmt werden. Um das Eigenträgheitsmoment der Drill-Achse zu bestimmen, werden zwei Gewichte in symmetrischen Abständen an der Stange angebracht. Nun wird die Stange ausgelenkt, sodass sie schwingt. Dabei wird die Schwingungsdauer für mehrere Perioden gemessen und gemittelt. Diese Messung wird für mindestens zehn verschiedene Abstände der Gewichte zur Drillachse wiederholt. Aus dieser Messung kann das Eigenträgheitsmoment bestimmt werden.

3.3 Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente einfacher Körper

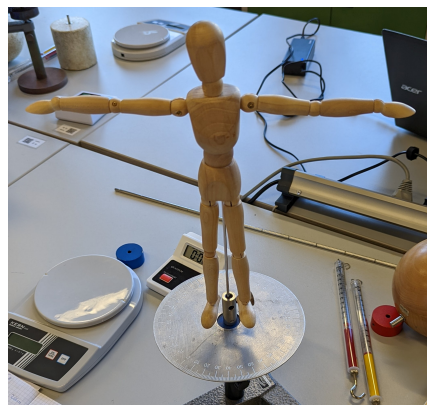
Im ersten Teil der eigentlichen Messung soll das Trägheitsmoment zweier einfacher Körper bestimmt werden. Dazu werden diese Körper zunächst gewogen und abgemessen. Anschließend werden die Körper auf der Drill-Achse angebracht. Wie zuvor, werden die Körper um 90° auf der Drill-Achse ausgelenkt. Es wird die Schwingungsdauer gemessen. Pro Körper werden zehn Messungen durchgeführt. Die Ergebnisse werden gemittelt.

3.4 Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe

Zuletzt werden die Trägheitsmomente einer Modellpuppe aus Holz in verschiedenen Stellungen bestimmt. Diese sind in Abbildung 1 zu sehen. Die Holzpuppe wird an ihrem Stab in die Drill-Achse eingespannt. Zunächst wird sie in Stellung 1 gebracht, welche in Abbildung 1a zusehen ist. In dieser Stellung wird die Figur fünf mal um 90° und weitere fünf mal um 120° ausgelenkt. Dabei werden je drei Periodendauern gemessen und der Mittelwert gebildet. Dieses Verfahren wird für Stellung 2, welche Abbildung 1b entnommen werden kann, erneut durchgeführt.



(a) Stellung 1



(b) Stellung 2

Abbildung 1: Verschiedene Stellungen der Holzpuppe, welche auf der Drillachse montiert ist.

4 Auswertung

Die Messunsicherheiten des folgenden Kapitels wurden mit *Python* unter Verwendung des Paketes *scipy* [2] bestimmt. Sie folgen aus der gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{dF}{dy_i} \Delta y_i \right)^2}. \quad (9)$$

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße und des Eigenträgheitsmoments der Drehachse

Bevor mit dem eigentlichen Versuch begonnen werden kann, müssen die Winkelrichtgröße D der Feder und das Eigenträgheitsmoments I_D der Drehachse ermittelt werden. Erstere kann mithilfe der Messwerte aus Tabelle 2 durch Anwendung von Gleichung 8 bestimmt werden. Neben den Messwerten finden sich die jeweiligen Werte der Winkelrichtgröße in der genannten Tabelle. Durch Mittelung der experimentellen Werte für die Winkelrichtgröße ergibt sich der Mittelwert $D = (0,048 \pm 0,012) \text{ N m/rad}$.

Zur Bestimmung des Eigendrehmoments der Drehachse wird Gleichung 6 betrachtet. Für das Quadrat der Schwingungsdauer T ergibt sich durch einsetzen des Gesamtträgheits-

Tabelle 2: Messdaten zur Bestimmung der Winkelrichtgröße zum festen Abstand
 $a = 20 \text{ cm}$

$\phi / ^\circ$	F / N	$D / \text{Nm/rad}$
20	0,025	0,029
30	0,045	0,034
40	0,067	0,038
50	0,1	0,046
60	0,124	0,047
70	0,145	0,047
80	0,17	0,049
90	0,25	0,064
100	0,27	0,062
110	0,3	0,063

moments $I = I_D + I_{\text{Zylinder}}$ unter Verwendung des Satzes von Steiner (2)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + 2I_{\text{Z,h}} + 2ma^2) \quad (10)$$

mit der Masse $m = 261,2 \text{ g}$, dem Trägheitsmoment $I_{\text{Z,h}}$ eines zylinderförmigen Gewichtes und dem Abstand a der Zylinder zur Drehachse. $I_{\text{Z,h}}$ berechnet sich dabei nach Gleichung 5. Die Gleichung stellt eine Geradengleichung der Form $f(x) = mx + b$ mit $f(x) = T^2(a^2)$ dar. In Abbildung 2 sind die Quadrate der Messwerte für die Schwingungsdauer T zum Abstand a zur Drehachse aufgeführt. Eine lineare Regression mittels *scipy* [2] ergibt die Geradenparameter $m = (732 \pm 5) \text{ s}^2/\text{m}^2$ und $b = (5,62 \pm 0,27) \text{ s}^2$. Ein Koeffizientenvergleich von Gleichung 10 und der Geradengleichung ergibt

$$b = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + 2I_{\text{Z,h}}),$$

woraus sich das Eigenträgheitsmoment I_D bestimmen lässt. Mit dem Durchmesser $d = 4,5 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 2 \text{ cm}$ der zylinderförmigen Gewichte folgt $I_D = (6,2 \pm 1,6) \text{ g m}^2$. Dieser Wert liegt eine Größenordnung über den im Folgenden zu bestimmenden Trägheitsmomenten, was nicht der Wahrheit entsprechen kann, da das Trägheitsmoment der Drehachse selbst sehr viel kleiner ist. Näheres hierzu findet sich in Abschnitt 5. Der wahre Wert von I_D wird für weitere Rechnungen als vernachlässigbar gering angenommen.

4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments des Zylinders

Der verwendete Zylinder hat eine Höhe $h = 10,09 \text{ cm}$ und einen Durchmesser $d = 9,83 \text{ cm}$. Die Masse des Zylinder beträgt $m = 367,7 \text{ g}$. Die Schwingungsdauer wurde zehn Mal gemessen mit jeweils fünffacher Periodendauer. Die Messwerte können Tabelle 3 entnommen werden. Zur Berechnung des Trägheitsmoments werden die Einzelmessungen zunächst auf eine Schwingungsperiode gemittelt. Anschließend wird der Mittelwert aller Messwerte

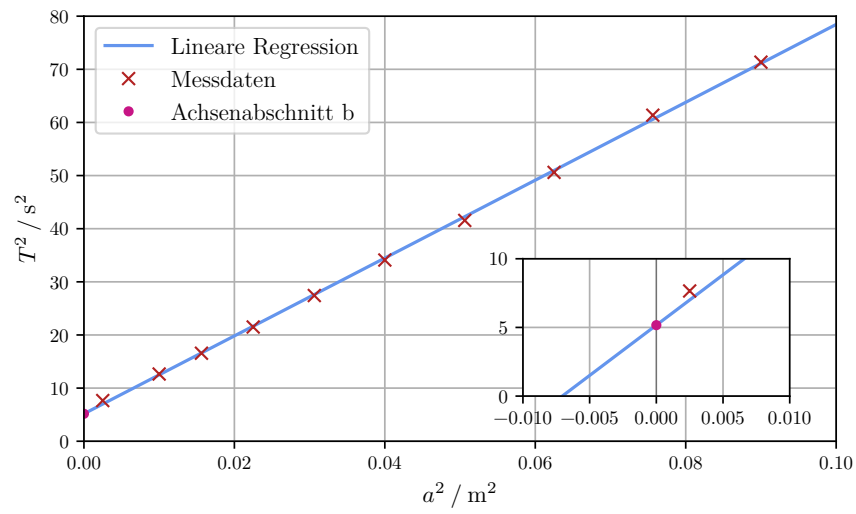


Abbildung 2: Graph der Quadrate der Messwerte und Ausgleichsgerade der linearen Regression. [1]

Tabelle 3: Messwerte der Schwingungsdauern von Zylinder und Kugel.

$5T_z / \text{s}$	$5T_k / \text{s}$
3.81	9.29
3.76	9.20
3.77	9.43
3.78	9.37
3.74	9.24
3.85	9.40
3.82	9.32
3.84	9.21
3.86	9.28
3.77	9.30

gebildet. Die mittlere Periodendauer des Zylinders beträgt $\bar{T}_z = (0,760 \pm 0,008)$ s. Mittels Gleichung 7 kann das experimentelle Trägheitsmoment des Zylinders $I_{z,\text{exp}}$ berechnet werden. Durch einsetzen der Werte ergibt sich $I_{z,\text{exp}} = (0,70 \pm 0,18) \text{ g m}^2$. Der Theoriewert $I_{z,\text{theo}}$ des Trägheitsmoments eines Zylinders lässt sich nach Gleichung 4 berechnen. Durch Einsetzen der Abmessungen des Zylinders ergibt sich $I_{z,\text{theo}} = 0,444 \text{ g m}^2$.

4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments der Kugel

Die verwendete Kugel hat einen Durchmesser von $d_k = 14,72 \text{ cm}$ und eine Masse von $m_k = 1170,3 \text{ g}$. Die Messwerte zur Periodendauer der Kugel können Tabelle 3 entnommen werden. Wie schon in Unterabschnitt 4.2 wird auch hier der Mittelwert zur Berechnung des Trägheitsmoments verwendet. Die mittlere Periodendauer der Kugel ist $\bar{T}_k = (1,861 \pm 0,016)$ s. Das experimentelle Trägheitsmoment $I_{k,\text{exp}}$ der Kugel lässt sich gemäß Gleichung 7 berechnen. Dadurch ergibt sich $I_{k,\text{exp}} = (4,2 \pm 1,1) \text{ g m}^2$. Der Theoriewert des Trägheitsmoments einer Kugel kann durch Gleichung 3 berechnen. Mit den gemessenen Größen ergibt sich $I_{k,\text{theo}} = 2,53 \text{ g m}^2$.

4.4 Bestimmung des Trägheitsmoments der Holzpuppe

Das Trägheitsmoment der Holzpuppe wird im Folgendem für zwei unterschiedliche Stellungen der Puppe bestimmt. Zuvor werden die Maße der einzelnen Gliedmaßen der Modellpuppe ausgewertet. Alle Gliedmaßen werden als Zylinder genähert. Tabelle 4 zeigt

Tabelle 4: Messdaten zur Bestimmung der Körpermodellierung. d_k beschreibt den Durchmesser des Kopfes. Weiter beschreibt der Index a den Arm, r den Rumpf und b das Bein der Puppe.

d_k/cm	d_a/cm	d_r/cm	d_b/cm
2,61	1,30	3,86	1,92
2,86	1,38	3,76	1,91
2,90	1,40	3,55	1,80
2,83	1,46	3,00	1,60
2,66	1,20	3,52	1,56
2,21	1,37	3,73	1,60
	1,47	4,00	1,70
	1,23	4,22	1,62
	1,12		1,40
	1,27		1,30

die Messwerte der Durchmesser der einzelnen Körperteile. Aus diesen wird jeweils ein Mittelwert gebildet. Die Maße und Massen der einzelnen Gliedmaßen sind Tabelle 5 zu entnehmen. Die einzelnen Massen können bestimmt werden, indem der prozentuale Anteil des genäherten Volumens der Gliedmaßen mit der Gesamtmasse $m = 167,2 \text{ g}$ multipliziert wird. Das Volumen der Zylinder berechnet sich dabei nach $V = \pi r^2 h$.

Tabelle 5: Maße und errechnetes Gewicht der als Zylinder genäherten Gliedmaßen der Holzpuppe.

	Höhe h / cm	Radius r / cm	Masse m / g
Kopf	4,14	$1,34 \pm 0,13$	18 ± 4
Arm	12,91	$0,66 \pm 0,06$	$13,6 \pm 2,5$
Rumpf	9,84	$1,85 \pm 0,18$	82 ± 1
Bein	12,42	$0,82 \pm 0,10$	20 ± 4

4.4.1 Trägheitsmoment der ersten Stellung

Die erste Stellung der Figur ist in Abbildung 1a zu sehen. Zunächst werden die gemessenen Schwingungsdauern, welche Tabelle 6 entnommen werden können, gemittelt. Der

Tabelle 6: Messwerte der Schwingungsdauern der Holzpuppe.

$5T_1$ / s	$5T_2$ / s
3,81	3,13
3,86	3,17
3,91	3,12
3,92	3,14
3,74	3,15
3,77	3,31
3,70	3,21
3,80	3,20
3,52	3,20
3,53	3,24

Mittelwert einer Schwingungsperiode ergibt sich zu $\bar{T}_1 = (0,751 \pm 0,028)$ s. Mit diesem Wert ergibt sich nach Gleichung 7 $I_{1,\text{exp}} = (0,684 \pm 0,180)$ g m² für das experimentell bestimmte Trägheitsmoment der Puppe in Stellung 1. Der Theoriewert des Trägheitsmomentes ergibt sich durch die Gleichungen (4), (5) und den Satz von Steiner (2). Dazu werden zunächst die Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile berechnet, welche anschließend addiert werden. Die Einzelträgheitsmomente können Tabelle 7 entnommen werden. Das theoretische Gesamtträgheitsmoment der Modellpuppe in der Stellung 1 beträgt $I_{1,\text{theo}} = (0,246 \pm 0,040)$ g m².

4.4.2 Trägheitsmoment der zweiten Stellung

Wie zuvor wird ebenfalls der Mittelwert der Periodendauer in Stellung 2 gebildet. Dieser beträgt $\bar{T}_2 = (0,637 \pm 0,012)$ s. Mit diesem Wert kann erneut mittels Gleichung 7 das experimentelle Trägheitsmoment errechnet werden. Es ergibt sich $I_{2,\text{exp}} = (0,493 \pm 0,125)$ g m². Für den Theoriewert werden wieder die Einzelträgheitsmomente aus Tabelle 7

Tabelle 7: Einzelträgheitsmomente der Holzpuppe.

	Stellung 1	Stellung 2
	$I_{1,\text{theo}}/\mu\text{gm}^2$	$I_{2,\text{theo}}/\mu\text{gm}^2$
Kopf	1.6 ± 0.6	1.6 ± 0.6
Arme	8.9 ± 1.9	113 ± 19
Rumpf	14 ± 4	14 ± 4
Beine	106 ± 22	2.8 ± 0.6

addiert. Der Theoriewert zur zweiten Stellung lautet dann $I_{2,\text{theo}} = (0,247 \pm 0,037) \text{ g m}^2$.

5 Diskussion

Um die experimentellen Werte der Trägheitsmomente in diesem Versuch aus den Messwerten ermitteln zu können wurden zu Anfang die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment I_D bestimmt. Die Winkelrichtgröße ist eine konstante der Feder, die eine Proportionalität zwischen Auslenkwinkel und dem wirkenden Drehmoment beschreibt. Betrachtet man die einzelnen Werte dieser Größe in Tabelle 2 fällt auf, dass die Werte nicht konstant sind, sondern kontinuierlich steigen. Eine Ursache dafür ist ein Wechsel des Messinstrumentes, was allerdings nur den Sprung der Werte bei $\phi = 90^\circ$ erklärt. Allgemein könnte die Ungenauigkeit der Federwaagen eine Ursache darstellen, da diese möglicherweise defekt waren. Ein systematischer Fehler ist ebenfalls nicht auszuschließen. Auf Grund der großen Streuung der Messwerte ist die Güte des experimentell bestimmten Wertes der Winkelrichtgröße $D = (0,048 \pm 0,012) \text{ N m/rad}$ mangelhaft, was sich auch auf die folgenden experimentellen Werte auswirkt. Bei der Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D sollte der Metallstab als masselos angenommen werden. Dies ist jedoch nicht sinnvoll, da die Masse des Stabes im Vergleich zu jener der Drehachse selbst groß ist und somit, auch durch die waagerechte Ausrichtung des Stabs, das bestimmte Eigenträgheitsmoment $I_D = (6,2 \pm 1,6) \text{ g m}^2$ wohl zu einem großen Teil auf das Trägheitsmoment des Stabes zurückzuführen ist. Wie in Unterabschnitt 4.1 beschrieben wurde der eigentliche Wert des Eigenträgheitsmoments als vernachlässigbar klein angenommen.

Bei der Bestimmung der Trägheitsmomente der Kugel und des Zylinders ergaben sich die Werte $I_{z,\text{theo}} = 0,444 \text{ g m}^2$ und $I_{z,\text{exp}} = (0,70 \pm 0,18) \text{ g m}^2$ für den Zylinder, sowie $I_{k,\text{theo}} = 2,53 \text{ g m}^2$ und $I_{k,\text{exp}} = (4,2 \pm 1,1) \text{ g m}^2$ für die Kugel. Die relative Abweichung eines Messwertes x zu einem Theoriewert x^* lässt sich über den Zusammenhang

$$\Delta_{\text{relativ}}(x) = \frac{|x^* - x|}{x^*} \quad (11)$$

berechnen. Damit folgt für die relativen Abweichungen $\Delta_{\text{rel}}(I_z) = 57,74\%$ und $\Delta_{\text{rel}}(I_k) = 65,62\%$. Ursachen für diese starken Abweichungen sind die zuvor beschriebene schlechte Güte der Winkelrichtgröße und Ungenauigkeiten in der Zeitmessung der Periodendauer. Bei der Bestimmung der Trägheitsmomente der Modellpuppe ergaben sich die Werte $I_{1,\text{theo}} = (0,246 \pm 0,040) \text{ g m}^2$ und $I_{1,\text{exp}} = (0,684 \pm 0,180) \text{ g m}^2$ für die erste Stellung, sowie $I_{2,\text{theo}} = (0,247 \pm 0,037) \text{ g m}^2$ und $I_{2,\text{exp}} = (0,493 \pm 0,125) \text{ g m}^2$ für die zweite Stellung. Nach Gleichung 11 ergeben sich die relativen Abweichungen $\Delta_{\text{rel}}(I_1) = 99,51\%$ und $\Delta_{\text{rel}}(I_2) = 177,97\%$. Diese großen Abweichungen können nur zum Teil auf die zuvor genannten Ursachen zurückgeführt werden. Ein weiterer Grund ist, dass die theoretischen Trägheitsmomente durch Näherung der Modellpuppe mittels Zylindern berechnet wurden, was nur grob der Realität entspricht. Die Gelenke der Puppe, der Metallstab der Halterung und eventuelle Neigungen der Gliedmaßen wurden vernachlässigt.

Insgesamt ergeben sich bei allen Messungen des Versuchs starke Abweichung, die teilweise auf systematische Fehler, aber auch auf Näherungen zurückzuführen sind. Besonders die Bestimmung des Eigenträgheitsmoments ist in der beschriebenen Form ungeeignet.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.