

V355

Gekoppelte Schwingkreise

Lukas Bertsch
lukas.bertsch@tu-dortmund.de

Steffen Kober
steffen.kober@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.12.2021

Abgabe: 11.01.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise	3
3	Durchführung	5
3.1	Justierung der Resonanzfrequenz	5
3.2	Messprogramm	6
4	Auswertung	7
4.1	Einstellung der Resonanzfrequenz	7
4.2	Bestimmung des Verhältnis der Perioden von Schwingung und Schwebung	8
4.3	Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über Lissajous-Figuren	8
4.4	Bestimmung der Fundamentalfrequenzen mittels der <i>Sweep</i> -Funktion . . .	9
4.5	Berechnung der Ströme in den Schwingkreisen	10
5	Diskussion	10
	Literatur	11

1 Ziel

In diesem Versuch sollen gekoppelte Schwingkreise auf ihren Energieübergang untersucht werden. Dazu werden die Frequenzabhängigkeiten des Stroms und die Fundamentalschwingungen mithilfe der Lissajous-Figuren in Abhängigkeit der Kopplung betrachtet.

2 Theorie

Ein System heißt "gekoppeltes" System, wenn es aus zwei Untersystemen besteht, welche im gegenseitigem Energieaustausch stehen. Ein einfaches Beispiel für ein gekoppeltes System sind zwei gekoppelte Pendel. Die beiden Einzelpendel entsprechen dabei den Untersystemen. Sie sind durch eine Feder gekoppelt, wodurch sie im gegenseitigen Energieaustausch stehen. In diesem Versuch werden anstatt gekoppelter Pendel kapazitiv gekoppelte Schwingkreise betrachtet. Bei solchen Systemen ist es häufig von Interesse das Verhalten unter äußerer Anregung zu untersuchen.

2.1 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Nun wird ein Schwingkreise wie in Abbildung 1 betrachtet. Die Kopplung findet über den Kondensator C_K statt, wodurch sich die beiden Schwingkreise das elektrische Feld dieses Kondensators teilen. Durch die Kirchhoffschen Regeln lassen sich zwei unabhängige Differentialgleichungen aufstellen. Die Lösungen dieser beschreiben den überlagerten Stromverlauf, sowie den Verlauf der Differenz des Stroms. Die Summe der beiden Ströme I_1 und I_2 wird durch

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1_0} + I_{2_0}) \frac{\cos(t)}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

beschrieben. Die Lösung der Differenz lautet

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1_0} - I_{2_0}) \cos \left(\frac{t}{\sqrt{L \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right)^{-1}}} \right). \quad (2)$$

Aus Gleichung 1 und Gleichung 2 lassen sich die Schwingungsfrequenzen ν^+ und ν^- aufstellen

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3)$$

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right)^{-1}}}. \quad (4)$$

Des Weiteren lassen sich aus Gleichung 1 und Gleichung 2 die Stromverläufe $I_1(t)$ und $I_2(t)$ aufstellen. Durch Addition und Subtraktion der beiden genannten Gleichungen folgt

$$I_{1,2}(t) = \frac{1}{2} (I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^+t) - \frac{1}{2} (I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^-t). \quad (5)$$

Betrachtet man nun den Fall der gleichsinnigen Schwingung ($I_{1_0} = I_{2_0}$), fällt der Differenzteil der Gleichung 5 weg und die Oszillatoren schwingen gleichphasig mit der Frequenz ν^+ . Für den gegensinnigen Schwingfall ($I_{1_0} = -I_{2_0}$) ergibt sich, dass die Oszillatoren gegenphasig mit der Frequenz ν^- schwingen. Beim Schwebungsfall gilt zur Zeit $t = 0$ $I_{1_0} \neq 0$ und $I_{2_0} = 0$. Daraus ergibt sich für Gleichung 5

$$I_1(t) = \frac{1}{2}I_{1_0} \cos\left(\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t\right)$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}I_{1_0} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t\right).$$

Die dazugehörige Schwebungsfrequenz ν^s ist durch

$$\nu^s = \nu^- - \nu^+ \quad (6)$$

gegeben. Der Strom der Oszillatoren schwingt dann zwischen einer Anfangsamplitude $I_{1,2_0}$ und dem Wert 0. Die Anzahl der Schwingungsperioden innerhalb einer Schwebung kann durch

$$n = \frac{\nu^+ + \nu^-}{2(\nu^- - \nu^+)} \quad (7)$$

bestimmt werden. Die Amplitude des Stroms eines Schwingkreises kann durch

$$|I| = |U| \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K\right)^2}} \quad (8)$$

berechnet werden. Dabei ist $Z(\omega)$ durch

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right)$$

definiert. Durch Einsetzen der Gleichungen (3) und (4) ergeben sich für die Ströme

$$|I(\omega^+)| = \frac{U}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \quad (9)$$

und

$$|I(\omega^-)| = \frac{U}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC} \left(1 + \frac{C}{C_K}\right)}}. \quad (10)$$

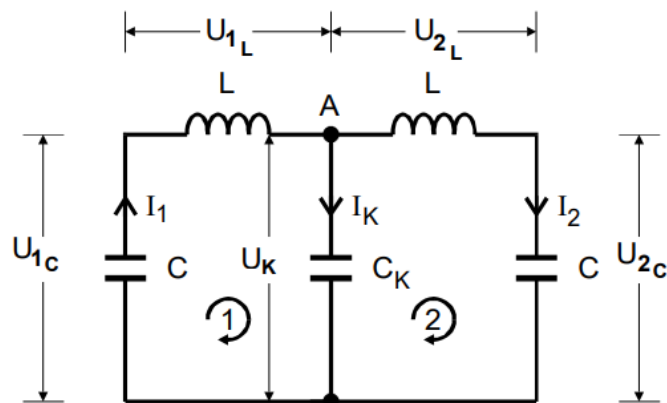


Abbildung 1: In dieser Abbildung ist die Skizze eines kapazitiv gekoppelten Schwingkreises zu sehen. [2]

3 Durchführung

Für die Durchführung des Versuches wird die in Abbildung 2 gezeigte Schaltung verwendet.

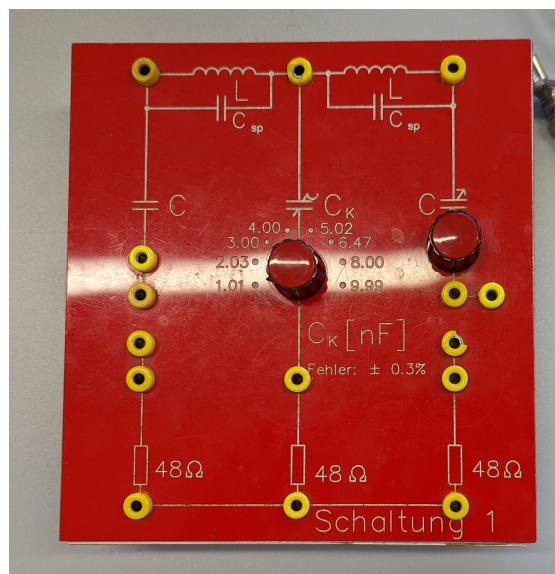


Abbildung 2: Foto des verwendeten Schaltbaukastens. Zu erkennen sind die Werte der verbauten Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten.

3.1 Justierung der Resonanzfrequenz

Bevor mit dem eigentlichen Messprogramm begonnen werden kann, müssen die beiden Schwingkreise auf die gleiche Resonanzfrequenz abgestimmt werden. Dazu wird zuerst die

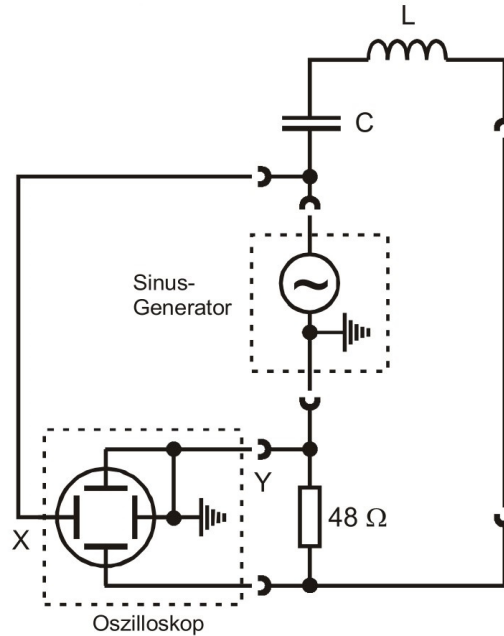


Abbildung 3: Schaltskizze zur Bestimmung der Resonanzfrequenz [2].

Resonanzfrequenz des linken Schwingkreises festgestellt. Unter Verwendung des Aufbaus aus Abbildung 3 wird der zeitliche Verlauf der am Y-Eingang gemessenen Spannung betrachtet. Durch Variation der Generatorfrequenz wird ein Extremum der Spannung gesucht. Trägt man nun die Spannung im Schwingkreis gegen die Generatorspannung auf (XY-Betrieb), entstehen Lissajous-Figuren, anhand derer sich die gesuchte Frequenz genauer ermitteln lässt. Die Frequenz des Generators muss dabei so eingestellt werden, dass die Lissajous-Figur eine Gerade darstellt. Die nun eingestellte Frequenz ist die Resonanzfrequenz. Anschließend wird die Schaltung aus Abbildung 3 für den rechten Schwingkreis aufgebaut. Mithilfe der regelbaren Kapazität wird nun die Resonanzfrequenz des Schwingkreises auf die des Linken eingestellt.

3.2 Messprogramm

In den folgenden Messungen wird ein Aufbau gemäß Abbildung 4 verwendet. Um das Verhältnis der Frequenzen von Schwebung und Schwingung zu bestimmen, wird am Generator (links) eine Rechteckspannung mit einer Frequenz von etwa 400 Hz eingestellt. Der zeitliche Verlauf der am $48\ \Omega$ Widerstand abfallenden Spannung kann nun am Oszilloskop entnommen werden. Für die verschiedenen Kopplungskondensatoren C_K wird die Anzahl der Schwingungsmaxima innerhalb einer Schwebungsperiode notiert.

Im zweiten Teil der Messung wird der Rechteckimpuls des Generators durch eine Sinusschwingung ersetzt. Als Ausgangsfrequenz wird die Resonanzfrequenz des Schwingkreises gewählt. Durch Auftragen der am Y_A -Eingang gemessenen Spannung gegen die Generatorspannung entstehen Lissajous-Figuren auf der Anzeige des Oszilloskops. Die

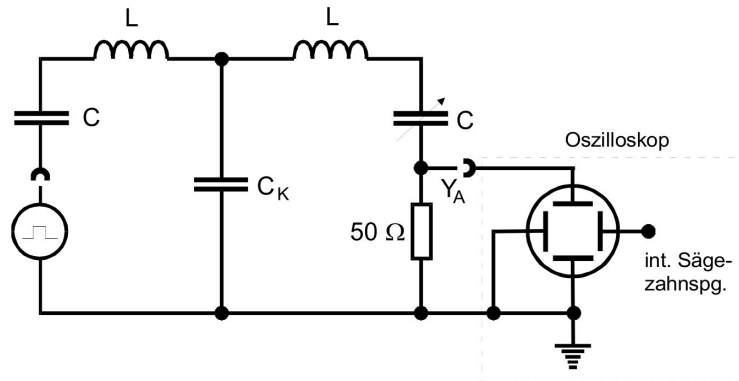


Abbildung 4: Skizze des Versuchaufbaus [2].

beiden Frequenzen bei denen sich eine Gerade einstellt sind die Frequenzen ν^+ und ν^- der Fundamentalschwingungen. Ihre Werte werden in Abhängigkeit zur Kapazität des Kopplungskondensators notiert.

Im letzten Teil der Messung soll die Frequenzabhängigkeit des Stroms gemessen werden. Dazu wird die *Sweep*-Funktion des Spannungsgenerators genutzt. Mit dieser lässt sich ein einstellbares Frequenzspektrum durchlaufen. Als Startwert sollte 20 kHz- und als Endwert 50 kHz gewählt werden. Die Zeit in der dieser Frequenzbereich durchlaufen wird sollte auf 0.02 s eingestellt werden. Auf dem Bildschirm des Oszilloskops entsteht nun ein Spannungsverlauf, an dem zwei große Peaks zu erkennen sind, die den Fundamentalfrequenzen ν^+ und ν^- entsprechen. Es werden die Breite einer Periode des Verlaufes, der Zeitpunkt an denen die Maxima auftreten und der Betrag der Maxima notiert. Dies wird für alle Kondensatoren C_K wiederholt.

4 Auswertung

Die Fehlerrechnung des folgenden Kapitels wird mit Python durch Verwendung des Pakets *uncertainties* [1] durchgeführt. Zur Berechnung der Theoriewerte müssen die Werte der Induktivitäten und der Kapazitäten der einzelnen Bauteile bekannt sein. Verwendet wurde die in Abbildung 2 gezeigte Schaltung mit den Werten

$$L = 32.351 \text{ mH} \quad C = 0.8015 \text{ nF} \quad C_{\text{Sp}} = 0.037 \text{ nF}.$$

4.1 Einstellung der Resonanzfrequenz

Wie in Unterabschnitt 3.1 beschrieben, muss vor der eigentlichen Durchführung des Versuches die Resonanzfrequenz der Schwingkreise ermittelt und aufeinander abgestimmt werden. Für die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ergibt sich der Wert $\nu^+ = 30.7 \text{ kHz}$. Die theoretische Frequenz berechnet sich nach Gleichung 3 durch Einsetzen von C und C_{Sp} für die Gesamtkapazität zu $\nu_{\text{Theorie}}^+ = 30.558 \text{ kHz}$. Dies führt zu einer relativen

Abweichung von $\Delta_{\text{relativ}}(\nu^+) = 0.46\%$. Die relative Abweichung eines Messwertes x zu einem Theoriewert x^* lässt sich dabei über den Zusammenhang

$$\Delta_{\text{relativ}}(x) = \frac{|x^* - x|}{x^*} \quad (11)$$

berechnen.

4.2 Bestimmung des Verhältnis der Perioden von Schwingung und Schwebung

Die Messung zur Bestimmung des Amplitudenverhältnisses von Schwebung und Schwingung wurde bei einer Generatorfrequenz von 381 Hz durchgeführt. Ein beispielhafter Graph des Oszilloskops ist in Abbildung 5 zu sehen. Eine Periode der Schwebung ist zwischen den roten Balken gekennzeichnet. Fälschlicherweise wurden die Amplituden von je zwei Perioden gezählt, weshalb es durch die Mittelung auf eine Periodenlänge vorkommen kann, dass die Messwerte eine "halbe" Amplitude beinhalten.

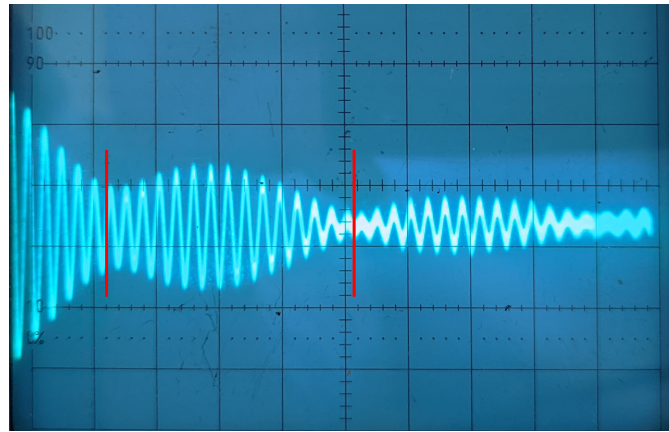


Abbildung 5: Anzeige des Oszilloskops unter Verwendung des 9.99 nF Kondensators.

Zur Berechnung der Theoriewerte wird zunächst der Theoriewert der Frequenz ν^- unter Verwendung der Gleichung 6 zu den jeweiligen Kondensatoren mit den Kapazitäten C_K bestimmt. Auch hier muss die zusätzliche Kapazität der Spule C_{Sp} berücksichtigt werden. Diese wird wie zuvor zusätzlich zur Gesamtkapazität addiert. Mittels der Werte von ν^+ und ν^- lässt sich nach Gleichung 6 die Frequenz der Schwebung berechnen, woraus wiederum das Verhältnis n der Schwingungsperioden pro Schwebungsperiode nach Gleichung 7 bestimmt werden kann. Die jeweiligen Werte können Tabelle 1 entnommen werden.

4.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über Lissajous-Figuren

Die Theoriewerte der Fundamentalfrequenzen ν^+ und ν^- wurden bereits bestimmt. Mithilfe der Lissajous-Figuren lassen sich Messwerte für diese Frequenzen experimentell

Tabelle 1: Ergebnisse zur Messung des Verhältnisses von Schwingung und Schwebung

C_K / nF	n_{gemessen}	n_{Theorie}	$\Delta_{\text{relativ}}(n) / \%$
9,99	14,0	$14,1 \pm 0,04$	0,8
8,00	12,0	$11,5 \pm 0,03$	4,2
6,47	10,5	$9,5 \pm 0,03$	10,4
5,02	8,5	$7,6 \pm 0,02$	11,7
4,00	7,0	$6,3 \pm 0,02$	11,6
3,00	6,0	$5,0 \pm 0,01$	21,0
2,03	4,5	$3,7 \pm 0,01$	22,5
1,01	3,0	$2,3 \pm 0,00$	30,3

bestimmen, die Tabelle 2 entnommen werden können. Der Theoriewert der Frequenz ν^+ ist konstant und gegeben durch $\nu_{\text{Theorie}}^+ = 30.558 \text{ kHz}$.

Tabelle 2: Mess- und Theoriewerte und dazugehörige Abweichungen der Fundamental-frequenzen bei Bestimmung über Lissajous-Figuren.

C_K / nF	$\nu_{\text{exp}}^+ / \text{kHz}$	$\Delta_{\text{rel}}(\nu^+) / \%$	$\nu_{\text{exp}}^- / \text{kHz}$	$\nu_{\text{Theorie}}^- / \text{kHz}$	$\Delta_{\text{rel}}(\nu^-) / \%$
9,99	31,26	2,29	32,94	$32,80 \pm 0,006$	0,42
8,00	31,40	2,76	33,47	$33,33 \pm 0,008$	0,41
6,47	31,58	3,34	34,08	$33,95 \pm 0,010$	0,39
5,02	31,83	4,16	34,98	$34,85 \pm 0,012$	0,36
4,00	32,11	5,08	35,97	$35,85 \pm 0,014$	0,33
3,00	32,58	6,62	37,51	$37,41 \pm 0,018$	0,26
2,03	33,42	9,37	40,25	$40,19 \pm 0,025$	0,16
1,01	35,83	17,25	47,38	$47,52 \pm 0,039$	0,29

Betrachtet man die Messwerte der Frequenz ν^+ fällt auf, dass diese stetig ansteigen, obwohl sie theoretisch konstant sein sollten. Näheres hierzu wird in Abschnitt 5 diskutiert.

4.4 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen mittels der Sweep-Funktion

Bei dieser Messung wird die *Sweep*-Funktion des Spannungsgenerators verwendet. Der Startwert des Frequenzspektrums wurde vor der Messung auf 20 kHz eingestellt. Am Ende der Messreihe lag die Einstellung jedoch bei 19.7 kHz. Der Endwert des Spektrums wurde auf 50 kHz geregelt und lag am Ende der Messreihe bei 49.4 kHz. Die Zeit in der das Spektrum durchlaufen wird wurde auf 0.02 s eingestellt. Die Zeitpunkte, an denen die Peaks der Frequenzen ν^+ und ν^- auftreten lassen sich mit Hilfe einer linearen Funktion in die jeweiligen Frequenzen umrechnen, da die *Sweep*-Funktion des Spannungsgenerators das Frequenzspektrum linear durchläuft. Die Breite b des Frequenzspektrums liegt für alle Kopplungskondensatoren konstant bei $b = 11 \mu\text{s}$. Auch der Zeitpunkt, an dem die Frequenz ν^+ auftritt ist konstant an der Stelle $t^+ = 4.4 \mu\text{s}$, was einer Frequenz von $\nu_{\text{exp}}^+ = 31.58 \text{ kHz}$

entspricht, die um 3.34% vom Theoriewert $\nu_{\text{Theorie}}^+ = 30.558 \text{ kHz}$ abweicht. Die Messwerte zu der Frequenz ν^- sind Tabelle 3 zu entnehmen.

Tabelle 3: Mess- und Theoriewerte und dazugehörige Abweichungen der Fundamentalfrequenz ν^- bei Bestimmung mithilfe der Sweep-Funktion.

C_K / nF	$t_{\text{exp}}^- / \mu\text{s}$	$\nu_{\text{exp}}^- / \text{kHz}$	$\nu_{\text{Theorie}}^- / \text{kHz}$	$\Delta_{\text{rel}}(\nu^-) / \%$
9,99	5,2	33,74	$32,80 \pm 0,006$	2,86
8,00	5,6	34,82	$33,33 \pm 0,008$	4,46
6,47	5,8	35,36	$33,95 \pm 0,010$	4,16
5,02	6,0	35,90	$34,85 \pm 0,012$	3,00
4,00	6,2	36,44	$35,85 \pm 0,014$	1,64
3,00	7,0	38,60	$37,41 \pm 0,018$	3,17
2,03	8,0	41,30	$40,19 \pm 0,025$	2,77

Zu dem Kopplungskondensator mit Kapazität $C_K = 1.01 \text{ nF}$ konnten keine experimentellen Werte bestimmt werden, da auf Grund der Auflösung des Oszilloskops kein genaues Ablesen der Messwerte möglich war.

4.5 Berechnung der Ströme in den Schwingkreisen

Die Ströme im Schwingkreis lassen sich durch das Ohmsche Gesetz $U = R \cdot I$ berechnen. Dabei werden für U die gemessenen Spannungsamplituden und für R der Widerstand 48Ω verwendet. Die Theoriewerte ergeben sich durch Einsetzen der gemessenen Spannungen U und der theoretischen Frequenzen $\omega_+ = 2\pi\nu_+$ und $\omega_- = 2\pi\nu_-$ in Gleichung 9 beziehungsweise Gleichung 10. Dabei muss die Eigenkapazität C_{Sp} der Spule berücksichtigt werden. Die Spannungen und die daraus berechneten Ströme sind in Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: In dieser Tabelle werden die Spannungs- und Stromamplituden dargestellt.

C_K / nF	$U_{\text{exp}}^+ / \text{mV}$	$I_{\text{exp}}^+ / \text{mA}$	$I_{\text{theo}}^+ / \text{mA}$	$U_{\text{exp}}^- / \text{mV}$	$I_{\text{exp}}^- / \text{mA}$	$I_{\text{theo}}^- / \text{mA}$
9,99	80	1,67	0,83	150	3,13	1,56
8,00	75	1,56	0,78	155	3,23	1,61
6,47	70	1,46	0,73	140	2,92	1,46
5,02	70	1,46	0,73	145	3,02	1,51
4,00	70	1,46	0,73	140	2,92	1,46
3,00	70	1,46	0,73	140	2,92	1,46
2,03	70	1,46	0,73	135	2,81	1,41

5 Diskussion

Im Folgenden werden die experimentellen Abweichungen zur Theorie und mögliche Fehlerquellen diskutiert. Zunächst fällt auf, dass bei der Abstimmung der beiden Schwingkreise

auf ihre Resonanzfrequenz die Abweichung von 0.46% sehr gering ist. Diese gute Einstellung ist ein wichtiges Qualitätsmerkmal für Messungen, welche im weiteren noch diskutiert werden. Nach dieser Einstellung wurde die Schwebungsfrequenz untersucht. Bei dieser Messung ist zu erkennen, dass die Abweichungen mit 0.8% für die größte Kapazität noch sehr genau ist. Allerdings werden die Abweichungen mit sinkender Kapazität stetig größer. Die Abweichungen steigen bis auf 30.3% für die geringste Kapazität an. Dies kann an den in der Versuchsanleitung [2] beschriebenen systematischen Abweichungen liegen. Ein solcher Verlauf ist experimentell zu erwarten, da mit geringerer Kapazität auch die Qualität des Schwingvorgangs abnimmt. Die Fundamentalfrequenzen wurden zuerst über die Lissajous-Figuren bestimmt. Bei der Frequenz ν^+ fällt auf, dass der experimentelle Wert bei fallendem C_K ansteigt. Nach Theorie sollte dieser allerdings konstant sein. Dies könnte an einem systematischen Fehler liegen, da sich eine Gerade zwischen der Resonanzfrequenz und der Frequenz ν^- gebildet hat. Der Grund für das Auftreten dieser ist ungewiss. Eine weitere Fehlerquelle ist das händische Einstellen der Gerade. In einem kleinen Frequenzbereich um diese Gerade kann nur geraten werden, welche die beste Frequenz ist. Außerdem unterliegt die Anzeige des Generators Schwankungen, weshalb die Frequenz nicht eindeutig abgelesen werden kann. Dennoch liegen alle Werte für ν^+ , mit Ausnahme dem der kleinsten Kapazität, in einem akzeptablen Bereich mit relativen Abweichungen von 2.29% bis 9.37%. Die experimentellen Werte für die Frequenz ν^- sind sehr qualitativ, da alle Abweichungen kleiner als 0.42% sind. Zuletzt wurden die Fundamentalfrequenzen mittels der Sweep-Funktion bestimmt. Durch diese Methode wurde die Frequenz ν^+ mit einer Abweichungen von 3.34% bestimmt. Dieser Wert ist im Mittel besser als die Methode der Lissajous-Figuren, allerdings ist für die großen Kapazitäten C_K die Lissajousmethode genauer. Für die Frequenz ν^- liegen die Abweichungen in einem Bereich von 1.64% bis 4.46%. Die Abweichungen liegen alle in einem relativ kleinem Intervall. Dies spricht für die Qualität der Werte. Für die Kapazität 1.01 nF war die Auflösung des Oszilloskops nicht ausreichend um den Wert abzulesen. Auch hier stellt sich heraus, dass die Lissajous-Methode genauer ist. Die Abweichungen sind unter anderem durch die Sweep-Funktion zu erklären. Diese wurde ursprünglich auf 20kHz und 50kHz eingestellt. Diese Einstellung änderte sich allerdings im Verlauf der Messungen. Des Weiteren ist das optische Ablesen am Bildschirm des Oszilloskops grundlegend ungenau. Bei der Berechnung der Ströme ergeben sich für beide Fundamentalfrequenzen relative Abweichungen von $\Delta_{\text{relativ}} = 100\%$ (gerundet auf ganze Prozent). Zusammenfassend bestätigen dennoch beide Methoden die Theorie, da die relativen Abweichungen alle im Rahmen der Messunsicherheit des Experimentes liegen.

Literatur

- [1] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [2] V355 - *Gekoppelte Schwingkreise*. TU Dortmund. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1884597/mod_resource/content/1/V355.pdf (besucht am 02.01.2022).