

V308

Spulen und Magnetfelder

Lukas Bertsch

lukas.bertsch@tu-dortmund.de

Steffen Kober

steffen.kober@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.12.2021

Abgabe: 21.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Magnetfelder von Spulen	3
2.2 Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe	4
3 Durchführung	5
3.1 Vorbereitungsaufgaben	5
3.1.1 Diamagnetismus	6
3.1.2 Paramagnetismus	6
3.1.3 Ferromagnetismus	6
3.2 Messung des Magnetfeldes einer langen Spule	6
3.3 Messung des Magnetfelds eines Spulenpaars	7
3.4 Messung des Magnetfeldes einer Toroid-Spule zur Bestimmung der Hysteresekurve	8
4 Auswertung	8
4.1 Magnetfeld einer langen Spule	9
4.2 Magnetfeld des Helmholtzspulenpaars	9
4.3 Bestimmung der Hysteresekurve	11
5 Diskussion	13
Literatur	14

1 Ziel

Ziel des Versuches ist die Vermessung und anschließende Analyse der Magnetfelder verschiedener Spulen. Betrachtet werden eine "lange" Spule, ein Helmholtzspulenpaar und eine Toroidspule. Eine Spule wird als *lange Spule* bezeichnet, wenn die Länge der Spule groß gegenüber dem Spulendurchmesser ist. Es sollen der Verlauf der Magnetfeldstärke der ersten beiden Spulen und die Hysteresekurve des Kernmaterials der Toroidspule untersucht werden.

2 Theorie

Bewegen sich Ladungen im Raum, verursachen diese Magnetfelder. So entsteht um einen stromdurchflossenen Leiter ein stationäres Magnetfeld, welches proportional zum Strom I des Leiters ist. Die Stärke dieses Magnetfeldes wird mit \vec{H} bezeichnet. Mit der Magnetfeldstärke lässt sich wiederum die magnetische Flussdichte \vec{B} als

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (1)$$

berechnen. Die Konstante μ_0 wird als *magnetische Feldkonstante* bzw. *Vakuum-Permabilität* bezeichnet. Der zweite Faktor μ_r ist die *relative Permabilität*, welche von dem Material abhängt, in dem sich das Magnetfeld befindet.

2.1 Magnetfelder von Spulen

Die Flussdichte \vec{B} an der Stelle \vec{r} lässt sich im Vakuum mit dem *Biot-Savartschen Gesetz*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

durch Integration über den Leiterverlauf berechnen, wobei r den Abstand vom Leiter beschreibt. Für eine runde, geschlossene Leiterschleife ergibt sich so das Magnetfeld entlang der Symmetriechse X

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

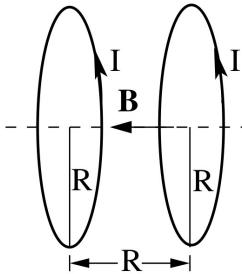
mit dem Radius R der Leiterschleife. Bei einer langgestreckten, stromdurchflossenen Spule der Länge l ergibt sich durch Überlagerung der Flussdichte von N Leiterschleifen (Windungen) ein homogenes Magnetfeld mit Betrag

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} \quad (3)$$

im Inneren der Spule. An den Rändern der Spule gilt dies nicht mehr. Um die Randeffekte zu eliminieren, kann die Spule zu einem Ring gebogen werden. Das Magnetfeld des so entstandenen Torus verhält sich im Inneren wie jenes einer langen Spule mit Länge $l = 2\pi R$. Außerhalb des Torus ist das Magnetfeld konstant 0.

h3.5cm

Abbildung 1: Geometrie eines Helmholtzspulenpaars. [4]



Ein weiterer Aufbau, mit dem ein homogenes Magnetfeld erzeugt werden kann, ist der des Helmholtzspulenpaars in Abbildung 1. Die Spulen sind parallel angeordnet und werden gleichsinnig vom Strom durchflossen. Der Abstand der Spulen sollte dem Spulenradius R entsprechen. Bei einer solchen Anordnung ist das Magnetfeld entlang der Symmetriearchse homogen. Falls sich der Abstand $d = 2x$ vom Spulenradius unterscheidet, gilt diese Homogenität nicht mehr. Das Magnetfeld im Zentrum eines Spulenpaars mit je einer Windung kann in diesem Fall durch Überlagerung der Felder B_1 der einzelnen Spulen als

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4)$$

bestimmt werden. Um die Flussdichte für N Windungen pro Spule zu erhalten, kann Gleichung 4 mit N multipliziert werden. Die räumliche Ausdehnung der Spulen wird so nicht berücksichtigt, was jedoch in der Praxis vernachlässigt werden kann. Der Wert der Flussdichte entlang der Symmetriearchse außerhalb des Mittelpunkts lässt sich über

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{d}{2} + x\right)^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + R^2\right)^{3/2}} \right) \quad (5)$$

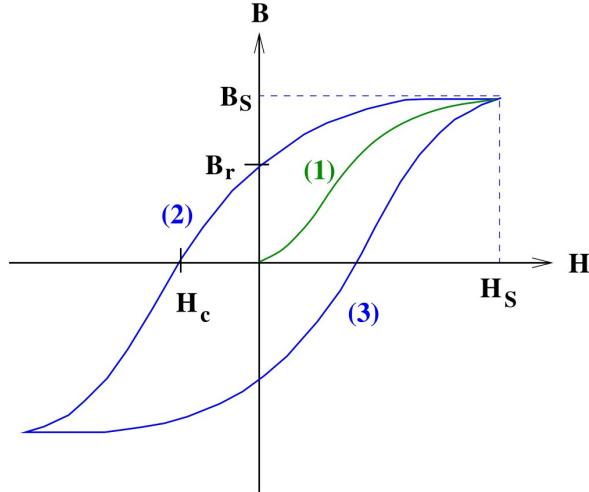
berechnen [1]. Die Variable x beschreibt dabei die Auslenkung vom Mittelpunkt und d den Abstand der Spulen. Auch der Feldgradient $\frac{dB}{dx}$ ist im Idealfall in einem relativ großen Bereich vernachlässigbar gering.

2.2 Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe

Wie schon zuvor erwähnt, verhalten sich Magnetfelder in Materie anders als im Vakuum. Die magnetische Flussdichte wird in Materie je nach Art des Mediums abgeschwächt oder verstärkt. Auf verschiedene Arten des Magnetismus und deren Ursachen wird in Unterabschnitt 3.1 näher eingegangen. Bei ferromagnetischen Stoffen gilt der lineare Zusammenhang aus Gleichung (1) nicht mehr. Für die relative Permeabilität μ_r solcher Stoffe lässt sich kein fester Wert feststellen. Vielmehr wird ein komplexerer Zusammenhang deutlich, der sich durch Auftragen der Feldstärke H gegen die Flussdichte B

veranschaulichen lässt. Die dadurch entstehende Kurve wird *Hysteresekurve* genannt. Ein exemplarischer Verlauf einer Hysteresekurve ist in Abbildung 2 zu sehen.

Abbildung 2: Schematischer Verlauf einer Hysteresekurve. [4]



Wird ein ferromagnetischer Stoff, wie zum Beispiel Eisen, zum ersten Mal einem Magnetfeld ausgesetzt, nimmt die Magnetisierung zuerst zu, bis ein Sättigungswert B_S erreicht wird. Dieser Kurvenverlauf unterscheidet sich von dem eines bereits magnetisierten Werkstoffes und wird *Neukurve* genannt. In Abbildung 2 ist Diese grün dargestellt. Nach Abschalten des externen Magnetfeldes bleibt eine Restmagnetisierung zurück, die mit der Remanenz $B_r \neq 0$ bezeichnet wird. Durch ein Gegenfeld kann die Magnetisierung des Materials wieder auf 0 eingestellt werden. Die dazu notwendige Feldstärke wird *Koerzitivkraft* H_c genannt. Bei weiterem Erhöhen des externen Gegenfeldes wird der negative Wert $-B_S$ des Sättigungswertes erreicht. Wird nun wieder das Gegenfeld verringert und das ursprüngliche Feld erhöht, schließt sich die Kurve im Punkt des Sättigungswertes B_S . So entsteht ein zum Ursprung symmetrischer Kurvenverlauf.

3 Durchführung

In diesem Versuch werden, wie in Abschnitt 1 bereits beschrieben, die Magnetfelder verschiedener Spulenkonstellationen gemessen. Die Messmethoden dazu werden im folgenden Kapitel erläutert. Zuerst werden jedoch die Vorbereitungsaufgaben diskutiert.

3.1 Vorbereitungsaufgaben

In der ersten Vorbereitungsaufgabe sollte die magnetische Flussdichte im Zentrum eines Helmholtzspulenpaars berechnet werden. Dies geschieht nach Gleichung 4. Die Spulen des Helmholtzspulenpaars haben einen Durchmesser $d = 125$ mm, der Abstand der

Spulen beträgt $x = d/2$ gilt. Das Spulenpaar wird von einem Strom mit 1 A durchflossen. Mit diesen Werten und der magnetischen Feldkonstante $\mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$ [3] ergibt sich $B(0) = 0.71 \text{ mT}$ für das Magnetfeld.

Im zweiten Teil der Vorbereitung sollten die Begriffe Dia-, Para- und Ferromagnetismus erklärt werden.

3.1.1 Diamagnetismus

Diamagnetische Stoffe sind durch eine Permeabilität $\mu_r < 1$ ausgezeichnet. Liegt ein äußeres Magnetfeld an, bilden sie ein Gegenfeld, welches das anliegende Magnetfeld abschwächt. Ohne äußeres Magnetfeld sind diamagnetische Stoffe nicht magnetisch.

3.1.2 Paramagnetismus

Paramagnetische Stoffe verhalten sich gegenteilig. Sie sind ebenfalls ohne äußeres Magnetfeld nicht magnetisch, aber erzeugen in einem äußeren Magnetfeld ein paralleles Feld. Die Felder überlagern sich, was zur Folge hat, dass das Gesamtfeld im Inneren des paramagnetischen Materials verstärkt wird. Paramagnetische Stoffen zeichnen sich durch eine Permeabilität $\mu_r > 1$ aus.

3.1.3 Ferromagnetismus

Ferromagnetische Stoffe können ohne ein äußeres Magnetfeld eigene permanente Magnetfelder besitzen. Diese bilden sich, da die einzelnen Atome jeweils magnetische Momente besitzen, welche dazu neigen, sich parallel zueinander auszurichten. Die ferromagnetischen Stoffe, die kein Magnetfeld besitzen, werden meist sehr stark von einem äußeren Pol angezogen. Solche Stoffe sind durch eine Permeabilität $\mu_r \gg 1$ gekennzeichnet. Eine weitere wichtige Eigenschaft solcher Stoffe ist, dass sie sich magnetisieren lassen. Diese Magnetisierung findet durch ein äußeres Magnetfeld statt und bewirkt, dass ein ferromagnetischer Stoff sein eigenes Magnetfeld aufbaut oder verändert. Hysteresekurven, wie zum Beispiel die in Abbildung 10, geben die Magnetisierung gegen eine gewisse Größe an. In diesem Fall wird sie gegen den Strom angegeben.

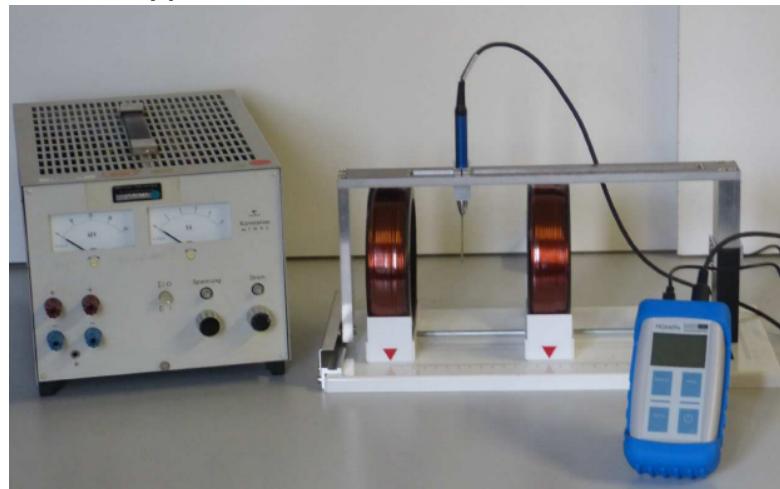
3.2 Messung des Magnetfeldes einer langen Spule

Zur Messung des Magnetfeldes einer langen Spule benötigt man die Spule selbst, eine longitudinale Hall-Sonde und ein Netzgerät. Zunächst wird die Spule an das Netzgerät angeschlossen. Dieses wird dann so eingestellt, dass die Spule von 1 A durchflossen wird. Anschließend wird die Hallsonde in einem Gestell befestigt, sodass die Messung möglichst auf einer Achse erfolgt. Es wird ein Messnullpunkt festgelegt und die Sonde langsam in die Spule eingeführt. Dabei wird die relative Auslenkung zum Messnullpunkt und die Magnetfeldstärke an verschiedenen Stellen gemessen. Aus Symmetriegründen reicht es aus, bis zur Mitte der Spule zu messen.

Abbildung 3: In diesem Bild ist die verwendete lange Spule abgebildet. Die Länge der Spule wurde auf 16.4 cm bestimmt.



Abbildung 4: In diesem Bild ist der Versuchsaufbau zum Helmholtzspulenpaar dargestellt.[4]



3.3 Messung des Magnetfelds eines Spulenpaars

Für diese Messung wird ein Helmholtzspulepaar benötigt, dessen Abstand variiert werden kann. Außerdem wird eine transversale Hall-Sonde zur Messung des Magnetfeldes benötigt. Zunächst werden die beiden Spulen in Reihe an ein Netzgerät angeschlossen, sodass beide Spulen gleichsinnig vom Strom durchflossen werden. Nun wird ein Abstand zwischen den Spulen festgelegt. Die Hall-Sonde wird, wie in Abbildung 4 dargestellt ist, in eine Führungsschiene eingesetzt. Dadurch ist garantiert, dass stets entlang einer Achse gemessen wird. Anschließend werden Wertepaare der Position auf der Achse und der

magnetischen Flussdichte in sinnvollen Abständen notiert. Dabei wird sowohl der Bereich zwischen den Spulen, als auch der Bereich außerhalb der Spulen gemessen. Dies wird für drei unterschiedliche Abstände der Spulen wiederholt.

3.4 Messung des Magnetfeldes einer Toroid-Spule zur Bestimmung der Hysteresekurve

Für diese Messung wird eine Toroidspule und eine transversale Hall-Sonde benötigt. Die Hall-Sonde wird über eine Vorrichtung in den Luftspalt der Toroidspule gehalten. Die Toroidspule wird an ein Netzgerät angeschlossen. Bevor dieses eingeschaltet wird, muss die Spule ausreichend gut entmagnetisiert werden. Nun wird der Strom der Spule langsam erhöht, wobei die dazugehörigen Feldstärken notiert werden. Es bietet sich an, eine Schrittweite von 1 A zu wählen. Es wird gemessen, bis die gesamte Hysteresekurve abgemessen wurde. Dies bedeutet, dass die Stromstärke bis zu einem Wert von 10 A erhöht wird und anschließend stückweise verringert wird, bis wieder 0 A eingestellt sind. Um die Messung im negativen Bereich fortzusetzen, wird die Verkabelung gegenpolig angeschlossen. Der vorherige Messprozess wird für die negative Polarität wiederholt. Zuletzt werden die Kabel wie zu Anfang angeschlossen und bis zu einer Stromstärke von 10 A gemessen.

Abbildung 5: Zu sehen ist der Versuchsaufbau zur Toroidspule.[4]



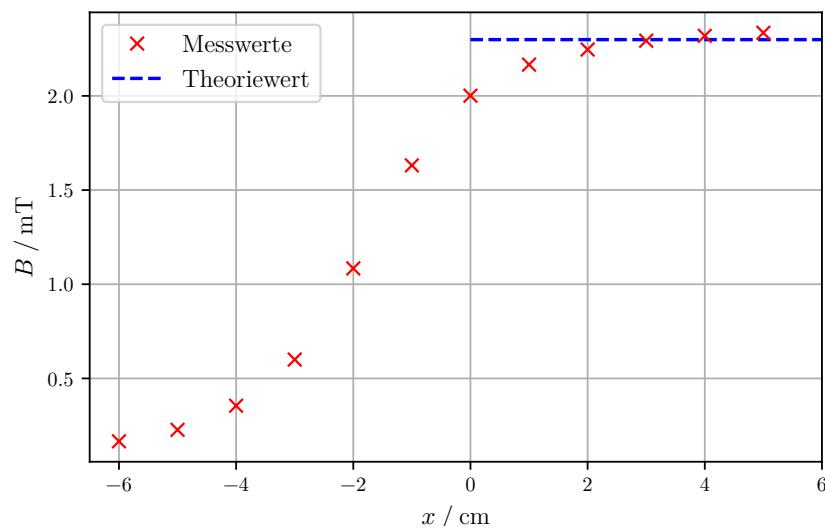
4 Auswertung

Die Material- und Gerätekonstanten befinden sich im Anhang. Ebenso werden alle Messtabellen nur im Anhang aufgeführt, da die Daten auch den Plots entnommen werden können.

4.1 Magnetfeld einer langen Spule

Die Messwerte dieser Spule sind in Abbildung 6 grafisch dargestellt. Der Spuleneingang befindet sich in der Grafik bei circa 0 cm. Innerhalb der Spule scheinen die Messwerte ein Plateau konstanter Feldstärke zu erreichen, was an den eingezeichneten Theoriegeraden deutlich wird. Für den Verlauf des Magnetfeldes außerhalb der Spule, ist ein Abfallen der Feldstärke zu erkennen. Da der letzte Messwert in der Mitte der Spule liegt, sollte dieser auch den geeigneten experimentellen Wert für das homogene Magnetfeld innerhalb der Spule liefern. Daher lautet $B_{\text{exp}} = 2.335 \text{ mT}$. Für den Theoriewert des Magnetfeldes folgt mit Gleichung 3 $B_{\text{Theorie}} = 2.299 \text{ mT}$

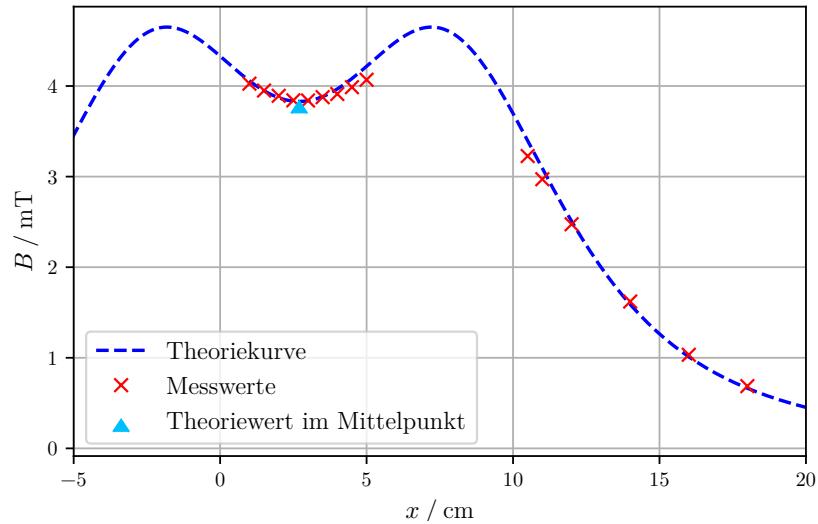
Abbildung 6: Die Messwerte der langen Spule. Erstellt mit *matplotlib* [2]



4.2 Magnetfeld des Helmholtzspulenpaars

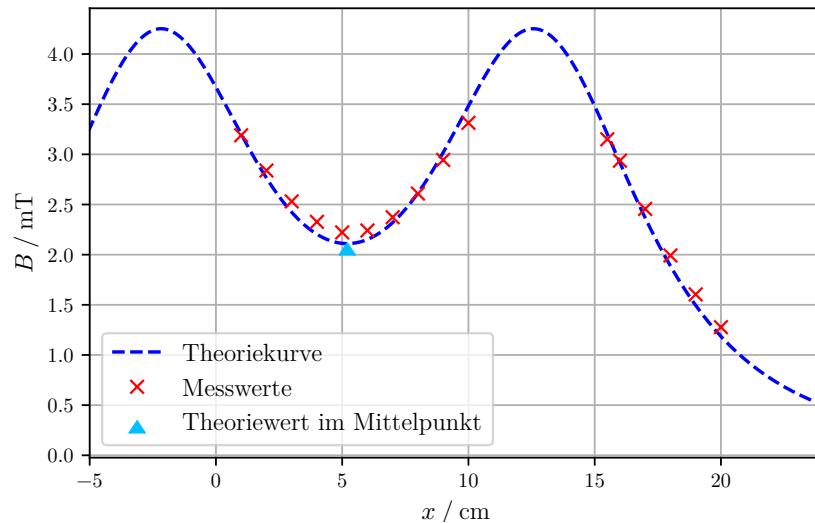
Die gemessenen Magnetfelder des Helmholtzspulenpaars sind neben den theoretisch zu erwartenden Kurven, für die drei verwendeten Abstände in den Abbildungen 7, 8 und 9 grafisch dargestellt. Die experimentellen Werte des Magnetfeldes in der Mitte des Spulenpaars lassen sich den Abbildungen entnehmen. Da die Skalen am Helmholtzspulenpaar um 2.3 cm zueinander versetzt sind, muss der Wert genommen werden, welcher am nächsten bei $\frac{d}{2} - 2.3 \text{ cm}$ liegt. Für den Abstand von $d = 10 \text{ cm}$ beträgt der experimentelle Wert $B_{\text{exp},1} = 3.840 \text{ mT}$. Der Theoriewert berechnet sich gemäß Formel (4) zu $B_{\text{Theorie},1} = 3.829 \text{ mT}$.

Abbildung 7: Die Messwerte des Helmholtzspulenpaars zum Abstand $d = 10\text{cm}$. Erstellt mit *matplotlib* [2]



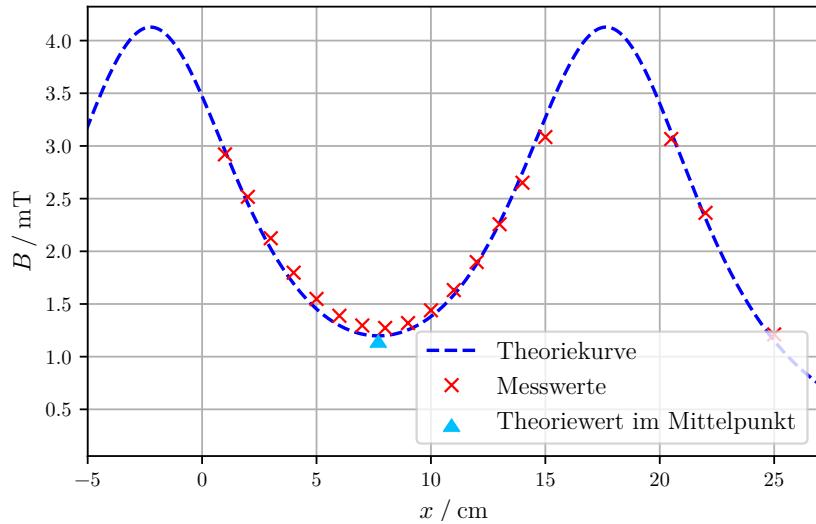
Für den Abstand von $d = 15 \text{ cm}$ folgt $B_{\text{exp},2} = 2.222 \text{ mT}$, wie in Abbildung 8 zu sehen ist. Der dazugehörige Theoriewert lautet $B_{\text{Theorie},2} = 2.110 \text{ mT}$.

Abbildung 8: Die Messwerte des Helmholtzspulenpaars zum Abstand $d = 15\text{cm}$. Erstellt mit *matplotlib* [2]



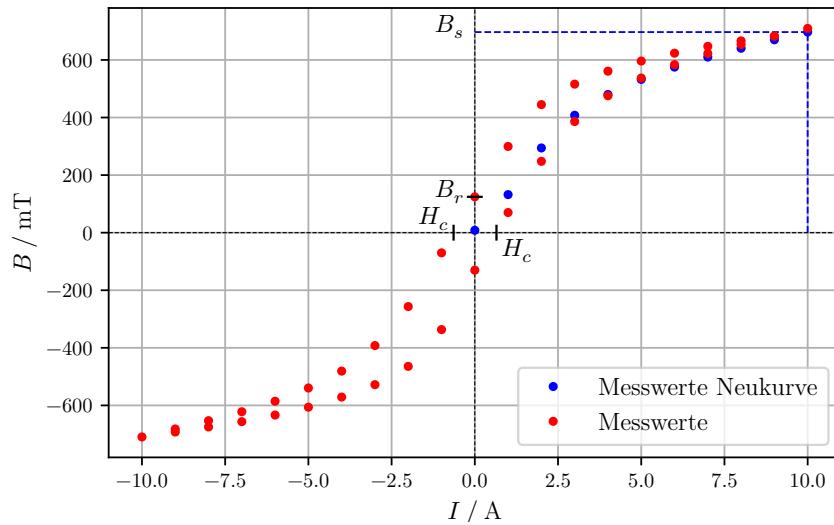
Zu $d = 20 \text{ cm}$ ergeben sich die Werte $B_{\text{exp},3} = 1.273 \text{ mT}$ und $B_{\text{Theorie},3} = 1.197 \text{ mT}$.

Abbildung 9: Die Messwerte des Helmholtzspulenpaars zum Abstand $d = 20\text{cm}$. Erstellt mit *matplotlib* [2]



4.3 Bestimmung der Hysteresekurve

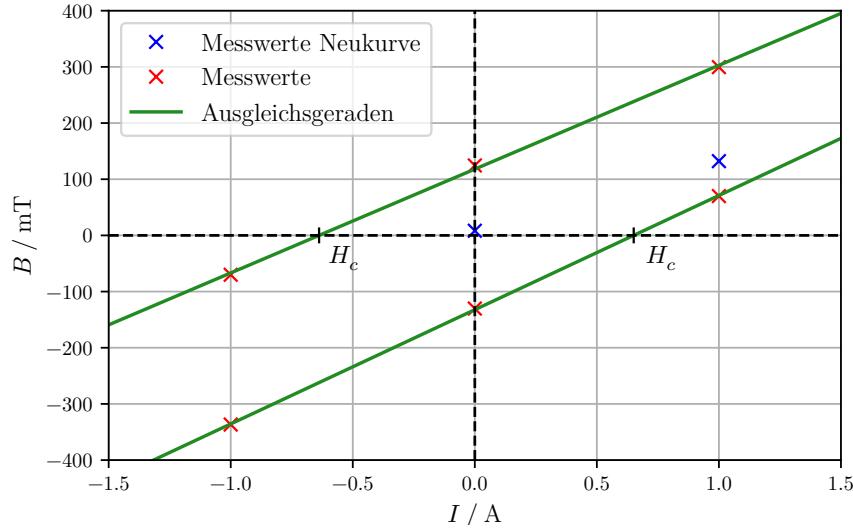
Abbildung 10: Hysteresekurve des Materials in der Ringspule. Erstellt mit *matplotlib* [2]



Zunächst wird das gemessene Magnetfeld gegen den Strom I aufgetragen, wie in Abbildung 10 zu sehen ist. Für den experimentell bestimmten Sättigungswert B_S wird

der letzte Messpunkt der Neukurve verwendet. Dieser kann Abbildung 10 entnommen werden und liegt im Punkt ($I = 10 \text{ A}$, $B_s = 696.8 \text{ mT}$). Die Remenanz B_r entspricht dem y -Achsenabschnitt und lautet $B_r = 124.5 \text{ mT}$. Auch dies kann der Gafik 10, beziehungsweise den Messwerten entnommen werden. Die Koerzitivkraft H_c kann nicht direkt aus

Abbildung 11: Lineare Regression zur Bestimmung der Koerzitivkraft. Erstellt mit *matplotlib* [2]



den Messwerten entnommen werden. Da die Hysteresekurve einen relativ linearen Verlauf um die Stelle des Nulldurchgangs aufweist, lässt sich eine lineare Regression der Form

$$f(x) = ax + b$$

durchführen. Unter Verwendung der Messwerte zwischen $I = -1\text{A}$ und $I = 1\text{A}$ ergeben sich die Parameter

$$\begin{array}{ll} a_1 = 184.8 \frac{\text{mT}}{\text{A}} & a_2 = 203.35 \text{ mT} \\ b_1 = 117.97 \frac{\text{mT}}{\text{A}} & b_2 = -132.3 \text{ mT} \end{array}$$

für die beiden Geraden an der linken- und rechten Flanke der Hysteresekurve. Daraus lassen sich die Nulldurchgänge der Geraden bestimmen, die der Koerzitivkraft entsprechen. Die Stromstärken bei denen diese auftritt lauten $I_1 = -0.638 \text{ A}$ und $I_2 = 0.651 \text{ A}$.

5 Diskussion

Die im Folgenden genannten relativen Abweichungen einer Größe x werden über den Zusammenhang

$$\Delta_{\text{rel}} = \frac{|x_{\text{Theorie}} - x_{\text{exp}}|}{x_{\text{Theorie}}}$$

berechnet.

Zuerst werden die Messergebnisse zur langen Spule betrachtet. Der theoretische Wert für die magnetische Flussdichte innerhalb der Spule beträgt $B_{\text{Theorie}} = 2.299 \text{ mT}$, der experimentelle Wert wurde zu $B_{\text{exp}} = 2.335 \text{ mT}$ bestimmt. Dies entspricht einer relativen Abweichung von $\Delta_{\text{rel}} = 1.57\%$, was in Anbetracht der aufbaubedingten Messungenauigkeiten eine sehr geringe Abweichung ist. Auffällig ist, dass das gemessene Magnetfeld im Inneren der Spule nicht homogen verläuft, sondern bis zu einer Eindringtiefe von ca. 2 cm noch deutlich ansteigt und auch bis 5 cm nicht eindeutig als homogen betrachtet werden kann. Dies zeigt, dass die theoretischen Näherungen einer "langen" Spule nicht vollständig den realen Verhältnissen entsprechen, da die Randeffekte in einem größeren Bereich zu Abweichungen führen. Eine Ursache dafür ist, dass die verwendete Spule mit einer Länge von etwa $l = 16.4 \text{ cm}$ und einem Radius von $r = 2.05 \text{ cm}$ nicht den Idealbedingungen einer langen Spule entspricht.

Bei der Messung zum Helmholtzspulenpaar wurden die drei Abstände $d_1 = 10 \text{ cm}$, $d_2 = 15 \text{ cm}$ und $d_3 = 20 \text{ cm}$ betrachtet. Die experimentell bestimmten Werte im Mittelpunkt der Spulen haben die relativen Abweichungen $\Delta_{\text{rel1}} = 0.29\%$, $\Delta_{\text{rel2}} = 5.31\%$ und $\Delta_{\text{rel3}} = 6.35\%$ zu den Theoriwerten, wobei in allen drei Messungen keine experimentellen Werte vorhanden waren, die exakt in der Spulenmitte lagen. Des Weiteren sind die Skalen, mit denen der Spulenabstand und die Position der Hallsonde bestimmt wurden um ca. 2.3 cm zueinander verschoben, weshalb der Mittelpunkt der Spulen nicht genau ermittelt werden konnte. Da alle experimentellen Werte über den Theoriwerten liegen, ist es möglich, dass die Ursache dafür eine zu hohe Stromstärke ist. Diese wurde an einem analogen Messgerät auf 4 A geregelt, wobei eine Ungenauigkeit von 0.1 A durchaus denkbar ist. Selbiges gilt für die Bestimmung des Spulenabstandes über die Längenskala. Insgesamt stimmen die Messwerte mit dem Verlauf der Theoriekurven weitgehend überein, was auf die Qualität dieser hindeutet.

Die Hysteresekurve des Kernmaterials der Ringspule lässt sich nicht mit Theoriwerten vergleichen. Jedoch stimmt sie mit dem allgemeinen Verlauf einer Hysteresekurve überein und weist eine hohe Symmetrie auf, was ebenfalls ein Indikator für die Qualität der Messung ist. So weichen beispielsweise die Werte der positiven- und negativen Sättigung $+B_S = 709.5 \text{ mT}$ und $-B_S = -709.6 \text{ mT}$ nur um 0.1 mT voneinander ab.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Messergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit mit der Theorie übereinstimmen. Die berechneten Abweichungen liegen trotz der möglichen Fehlerquellen in einem akzeptablen Bereich.

Literatur

- [1] Siegfried Finke. *Versuchsanleitungen zum Anfänger-Praktikum in Physik*. 2. Aufl. Fachbereich Physik Universität Dortmund, 1992.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] *V308 - Spulen und Magnetfelder*. TU Dortmund. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1884546/mod_resource/content/1/V308.pdf (besucht am 15.12.2021).