

V105

Das magnetische Moment

Lukas Bertsch

lukas.bertsch@tu-dortmund.de

Steffen Kober

steffen.kober@tu-dortmund.de

Durchführung: 23.11.2021

Abgabe: 30.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Drehmomente auf Körper im Gravitations- und Magnetfeld	3
2.2 Erzeugung homogener Magnetfelder	4
2.3 Schwingung eines Dipols	4
3 Durchführung	5
3.1 Materialien und Versuchsaufbau	5
3.2 Vorbereitungsaufgaben	6
3.3 Methode 1: Ausnutzung der Erdgravitation	7
3.4 Methode 2: Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwin- gungsdauer	7
4 Auswertung	8
4.1 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Erdgravitation	8
4.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer . . .	10
5 Diskussion	12
Literatur	12

1 Ziel

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung des magnetischen Moments eines Permanentmagneten unter Verwendung zweier unterschiedlicher Methoden. Die Ergebnisse dienen anschließend für einen Vergleich der Genauigkeit der beiden Messmethoden.

2 Theorie

Die elementarste Gestalt des Magnetismus ist der magnetische Dipol. Magnetische Monopole gibt es nicht. Da nur Monopole zu Quellen der Feldlinien führen, müssen Magnetfeldlinien immer geschlossen sein.

Zur Untersuchung von Dipolen eignen sich Permanentmagneten oder geschlossene, stromdurchflossene Leiterschleifen, da diese sich mikroskopisch wie magnetische Dipole verhalten. Das magnetische Moment $\vec{\mu}_{\text{Dipol}}$ ist eine wichtige Größe in der Magnetostatik und der Elektrodynamik, dass zur Beschreibung der Stärke eines magnetischen Dipols genutzt werden kann. Das magnetische Moment einer stromdurchflossenen Leiterschleife kann durch

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$$

berechnet werden, wobei I der Strom und \vec{A} die orientierte Querschnittsfläche der Leiterschleife ist.

2.1 Drehmomente auf Körper im Gravitations- und Magnetfeld

Das magnetische Moment eines Permanentmagneten kann nur experimentell bestimmt werden. Dazu wird häufig ein makroskopischer magnetischer Dipol in einem homogenen Magnetfeld betrachtet. Befindet sich ein Dipol im Magnetfeld, so wirkt dieses ein Drehmoment \vec{D}_B auf den Dipol aus. Dieses Drehmoment richtet den Dipol parallel zu den Feldlinien aus.

Ein anderes Drehmoment wirkt auf einen drehbar gelagerten Körper, der nicht bereits parallel zum Schwerfeld \vec{F}_G ausgerichtet ist und dessen Schwerpunkt sich nicht auf der Drehachse befindet. Dieses Drehmoment \vec{D}_G ergibt sich aus der Erdbeschleunigung \vec{g} und dem Verbindungsvektor von Drehachse und Schwerpunkt \vec{r} . Falls sich ein Gleichgewicht

$$\vec{D}_B = \vec{D}_G$$

zwischen diesen Drehmomenten einstellt ergibt sich die eine Gleichung für μ_{Dipol} . Auf Grund der Parallelität der Drehmomente im Gleichgewichtszustand folgt

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{m \cdot r \cdot g}{B} \quad (1)$$

zur Berechnung des magnetischen Moments.

2.2 Erzeugung homogener Magnetfelder

Homogene Magnetfelder kommen nie natürlich vor. Allerdings lassen sich hinreichend homogene Magnetfelder konstruieren. Dies kann durch ein Helmholtzspulenpaar realisiert werden. Durch die Anordnung der Spulen in Abbildung 1 bildet sich in der Mitte zwischen

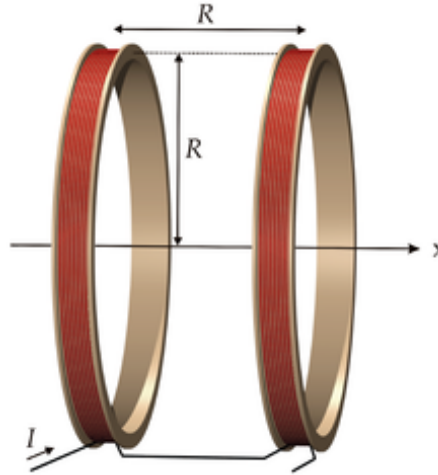


Abbildung 1: Skizze eines Helmholtzspulenpaares [5].

den beiden Spulen ein homogenes Magnetfeld entlang der Symetrieachse, welches jedoch nach außen inhomogener wird. Die Spulen müssen gleichsinnig vom Strom durchlaufen werden und der Radius der Spulen muss dem Abstand der beiden Spulen entsprechen. Das Magnetfeld entlang der Symetrieachse für Spulen mit je einer Windung kann über das Biot-Savart-Gesetz

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

nach Integration durch

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$$

berechnet werden. Hierbei wird die Symetrieachse als x-Achse definiert (vgl. Abbildung 2). Das "x" entspricht hier dem halben Abstand der beiden Spulen. Das Magnetfeld im inneren des Helmholtzspulenpaares lässt sich nun durch Überlagerung der Einzelfelder bestimmen. Der Ursprung der gewählten Koordinaten wird dafür in die Mitte gesetzt und es werden pro Spule N Windungen betrachtet. Daher ergibt sich das Magnetfeld an dieser Stelle zu

$$B(0) = N \cdot B(-x) + N \cdot B(x) = \frac{N\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (2)$$

2.3 Schwingung eines Dipols

In einem weiteren Teil des Versuchs wird das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}_{\text{Dipol}}$ über die Messung der Schwingungsdauer eines Dipols, welcher im homogenen Magnetfeld in

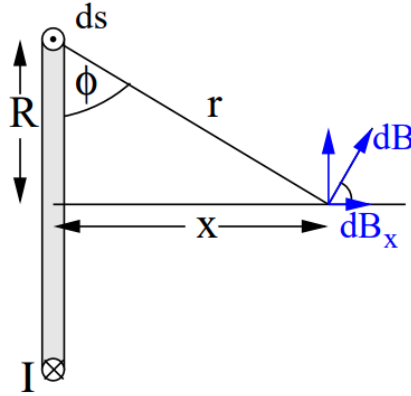


Abbildung 2: Ergänzungsskizze der Achsen zum Helmholtzspulenpaar [6].

Schwingung versetzt wird, bestimmt. Da sich ein schwingender Dipol im homogenen Magnetfeld wie ein harmonische Oszillator verhält, kann man dessen Bewegung beschreiben durch

$$-|\vec{\mu}_{\text{Dipol}} \times \vec{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung wird gelöst durch die Schwingungsdauer T . T ist dabei bestimmt durch

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J}{\mu_{\text{Dipol}} B} \quad (3)$$

J ist das Trägheitsmoment des Körpers. Das Trägheitsmoment beschreibt die Trägheit eines rotierenden Körpers gegenüber der Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit. Allgemein gilt für J die Formel:

$$J = \int_V r_{\perp}^2 dm = \int_V r_{\perp}^2 \rho dV$$

[2]

Bei einer Kugel ist demnach

$$J_K = \frac{2}{5} m R^2 \quad (4)$$

das Trägheitsmoment.

3 Durchführung

3.1 Materialien und Versuchsaufbau

Bei diesem Experiment soll das magnetische (Dipol-)Moment eines Permanentmagneten unter Ausnutzung zweier Verfahren bestimmt werden. Der Permanentmagnet befindet sich dabei in einer Billiardkugel der Masse m_K . Das Dipolmoment μ_{Dipol} des Magneten ist entlang eines Stiels, welcher sich an der Kugel befindet, ausgerichtet. In diesen Stiel lässt

sich wiederum eine kleine Aluminiumstange befestigen, an der eine Masse m verschoben werden kann.

Die Billiardkugel wird für beide Verfahren in ein homogenes Magnetfeld gesetzt. Dies geschieht mit Hilfe eines Helmholtz-Spulenpaares, in dessen Mitte sich eine Messinghalterung befindet, auf der die Kugel abgelegt werden kann. In der Halterung befindet sich ein Loch, über das ein „Luftkissen“ erzeugt werden kann, auf dem die Kugel reibungsarm gelagert ist. Die Apparatur wird über ein Steuergerät reguliert. An diesem lässt sich das Luftkissen einschalten, die Feldrichtung des Magnetfeldes anpassen und die Stromstärke einstellen. Die Stromstärke kann an einer analogen Anzeige abgelesen werden. Der Aufbau kann Abbildung 3 entnommen werden.

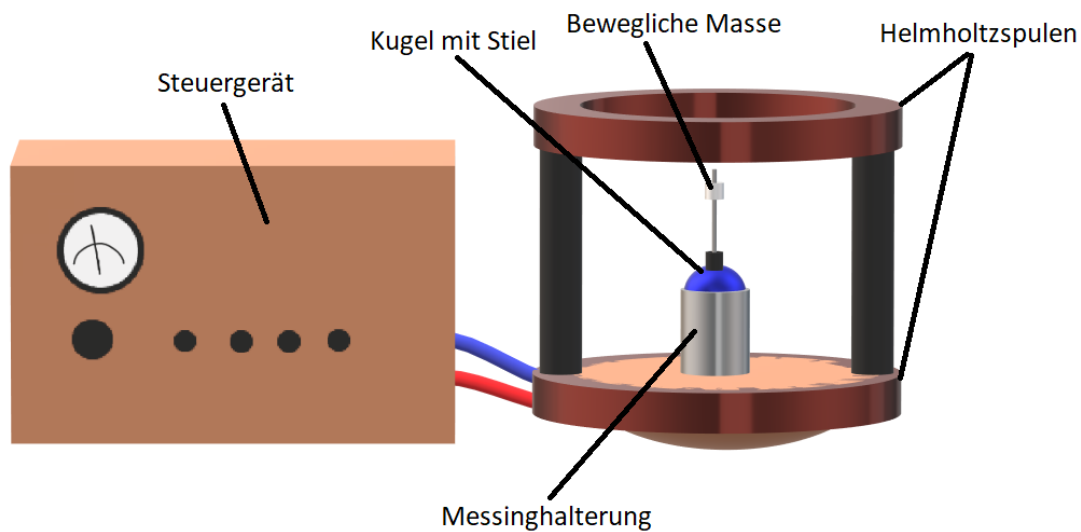


Abbildung 3: Skizze des Versuchsaufbaus. [1]

Vor der eigentlichen Durchführung der Messung müssen alle Apparatenkonstanten festgestellt werden. Dazu zählen die Eigenschaften des Helmholtzspulenpaares, die Massen der Kugel und der beweglichen Masse, sowie die geometrischen Abmessungen der Kugel. Die Werte für die Maße der Kugel und die Massen finden sich in Abschnitt 4. Das Helmholtzspulenpaar hat $N = 195$ Windungen, die einzelnen Spulen einen Radius von $R_{\text{Spule}} = 0.109\text{m}$ und der Abstand der Spulen beträgt $d = 0.138\text{m}$.

3.2 Vorbereitungsaufgaben

Zur Vorbereitung sollte der Betrag der Flussdichte B in der Mitte des Spulenpaares bei einem Strom von $I = 1\text{A}$ und das Trägheitsmoment J_K einer Kugel mit Radius $r_k = 2.5\text{cm}$ und Masse $m_k = 150\text{g}$ bestimmt werden. Ersteres berechnet sich nach Gleichung 2 zu:

$$B = 195 \cdot \frac{\mu_0 1\text{A} (0.109\text{m})^2}{((0.109\text{m})^2 + (0.5 \cdot 0.138\text{m})^2)^{3/2}} = 1.356\text{mT}$$

(Magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 1.25663706212 \cdot 10^{-6} \text{N/A}^2$ [4])

Das Trägheitsmoment ergibt sich nach Gleichung 4 zu:

$$J_K = \frac{2}{5} \cdot 0.150 \text{kg} \cdot (0.025 \text{m})^2 = 3.75 \cdot 10^{-5} \text{kg m}^2$$

3.3 Methode 1: Ausnutzung der Erdgravitation

Bei der ersten Methode zur Bestimmung des Dipolmoments wird ein Kräftegleichgewicht zwischen der Gravitationskraft F_g und der magnetischen Kraft, die auf den Dipol wirkt, ausgenutzt. Dazu wird der Aluminiumstab in die Kugel gesteckt. Auf diesem kann nun eine kleine Masse vertikal verschoben werden. Die Kugel wird in der Messinghalterung platziert und das Luftkissen eingeschaltet. Die Magnetfeldrichtung muss dabei auf "up" eingestellt sein. Solange kein Strom fließt gibt es kein Magnetfeld, was zur Folge hat, dass der Aluminiumstab auf dem Gestell der Helmholtzspulen aufliegt. Wird nun der Strom eingeschaltet wirkt das Magnetfeld der Gravitationskraft entgegen. Auf den Dipol wirken nun zwei Drehmomente: eines auf Grund des Magnetfeldes, da Dipole sich parallel zu diesem ausrichten wollen, und eines, welches an der verschiebbaren Masse angreift und durch die Wirkung der Gravitation auf diese Masse verursacht wird.

Wird nun die Stromstärke langsam erhöht stellt sich an einem gewissen Punkt ein Gleichgewicht ein, bei dem die Kugel samt Stab in einer stabilen Position verweilt. Dabei ist darauf zu achten, dass die Kugel nicht rotiert, da es sonst zu Präzessionseffekten kommen kann.

Mit diesem Verfahren wird nun bei verschiedenen Abständen r der verschiebbaren Masse zur Kugel der Gleichgewichtszustand eingestellt und die Stromstärke I zu jedem r notiert. Dies wird für mindestens neun Wertepaare wiederholt.

3.4 Methode 2: Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer

Bei der zweiten Methode befindet sich die Kugel im Magnetfeld auf dem Luftkissen. Der Aluminiumstab ist nicht montiert. Wird nun die Kugel um einen **kleinen Winkel** aus der Ruhelage (Stiel oben) ausgelenkt, wirkt – wie bei der ersten Methode – ein Drehmoment auf den Dipol. Dieses Drehmoment wirkt als rückstellende Kraft, sodass die Billiardkugel wieder in Richtung der Ruhelage beschleunigt wird. Die Kugel führt nun eine Schwingung aus, da sie immer wieder über die Ruhelage hinaus schwingt. Die ausgeführte Schwingung ist die eines harmonischen Oszillators mit Schwingungsdauer T . Zur Messung wird nun die Stromstärke I variiert und die Kugel mit Hilfe des Stiels aus der Ruhelage ausgelenkt. Es werden 10 Schwingungsdauern abgezählt und die Zeit ($10 T$) mit einer Stoppuhr gemessen. Beide Werte werden notiert und das Messverfahren wird für mindestens 9 andere Stromstärken wiederholt. Das Messen von 10 Schwingungsdauern hat den Grund, dass grade bei großen Stromstärken eine einzelne Schwingungsperiode sehr kurz ist und somit eine Ungenauigkeit beim Stoppen mit der Stoppuhr zu großen Abweichungen führen kann. Zusätzlich wurde in unserem Fall die Zeit auf zwei verschiedenen Stoppuhren unabhängig voneinander gestoppt, um den Messumfang zu erhöhen und

eventuelle Ungenauigkeiten, die durch den Experimentator verursacht werden könnten, heraus mitteln zu können. Die beiden 10 fachen Periodendauern werden anschließend zu einem Wert für eine Schwingungsdauer T gemittelt.

4 Auswertung

Vorab: Die Messunsicherheiten wurden gemäß der gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{dF}{dy_i} \Delta y_i \right)^2}$$

mittels Scipy [4] berechnet.

Gerätekonstanten zu den Bauteilen:
Helmholtzspulenpaar:

Windungen	$N = 195$
Radius	$r_H = 0.109\text{m}$
Abstand der Spulen	$d_H = 0.138\text{m}$

Materialkonstanten:

Kugeldurchmesser	$d_K = (5.40 \pm 0.01)\text{cm}$
Kugelmasse	$m_K = 141.76\text{g}$
Masse des Zylinders am Stab	$m_1 = 1.39\text{g}$
Masse des Zylinders am Stab mit Stab	$m_{1,s} = 1.64\text{g}$
Höhe des Zylinders	$d_{1,s} = (0.995 \pm 0.01)\text{cm}$
Länge des Alustabs	$l_s = (10.79 \pm 0.01)\text{cm}$
Länge des Kugelstiels	$l_{Ks} = (1.25 \pm 0.01)\text{cm}$

4.1 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Erdgravitation

In Abbildung 4 wird die Magnetfeldstärke B gegen den Abstand r der aufgesteckten Masse zum Dipol aufgetragen. Der Abstand r wurde mit einer Ungenauigkeit von $\pm 0.001\text{cm}$ gemessen. Die Magnetfeldstärke B in der Mitte des Helmholtzspulenpaares lässt sich gemäß der Gleichung (2) aus der gemessenen Stromstärke I berechnen (vgl. Tabelle 1). Die gemessene Stromstärke ist mit einer Messunsicherheit von $\pm 0.05\text{A}$ behaftet. Zur Berechnung von B werden $R = r_H$ und $x = \frac{d_H}{2}$ verwendet.

Tabelle 1: Messdaten zur Methode 1: Ausnutzung der Gravitation.

r : gemessener Abstand der verschiebbaren Masse, r_{ges} : reale Hebellänge,
 B : Magnetfeldstärke errechnet aus I

r / cm	I / A	r_{ges} / cm	B / mT
6,03	2,65	10,48	3,59
5,5	2,50	9,95	3,39
5,0	2,40	9,45	3,25
4,5	2,30	8,95	3,12
4,0	2,20	8,45	2,98
3,5	2,05	7,95	2,78
3,0	1,90	7,45	2,58
2,5	1,80	6,95	2,44
2,0	1,70	6,45	2,31
1,5	1,60	5,95	2,17
1,0	1,50	5,45	2,03
0,5	1,40	4,95	1,90
0,0	1,25	4,45	1,70

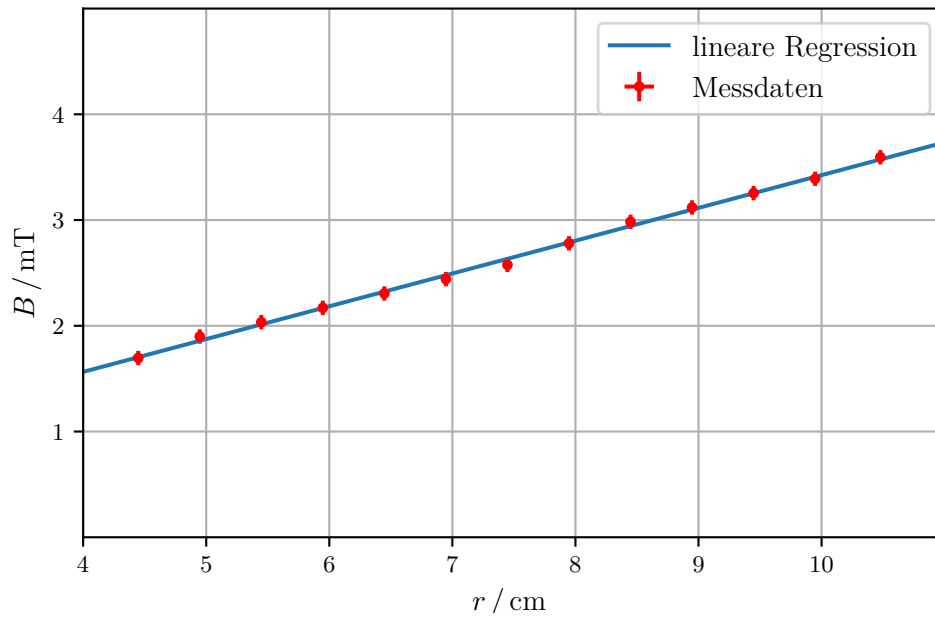


Abbildung 4: Linearer Fit mit Scipy [4] zu den Messwerten der Gravitationsmethode.
Der Plot wurde mit dem Paket Matplotlib [3] erstellt.

Mittels einer linearen Regression mit dem Paket Scipy [4] und der Gleichung

$$B = ar_{ges} + b$$

ergeben sich die Parameter

$$a = (3.10 \pm 0.04)10^{-2} \frac{\text{T}}{\text{m}}$$

$$b = (3.24 \pm 0.34)10^{-4} \text{T}$$

für den Fit. Dieser Fit wird dann in Formel (1) eingesetzt. Dabei kann b vernachlässigt werden. Nach umstellen der Formel (1) kann das magnetische Moment berechnet werden.

$$\mu_{\text{Dipol}} = (0.440 \pm 0.006) \frac{\text{A}^2}{\text{m}} \quad (5)$$

4.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer

Wie in Unterabschnitt 3.4 beschrieben, wird beim zweiten Messverfahren das Dipolmoment über die Schwingungsdauer bestimmt. Dazu wird der Zusammenhang (3) ausgenutzt. In Tabelle 2 finden sich die gemessenen Größen und die Schwingungsdauer T , die sich aus den Messwerten berechnet.

Tabelle 2: Messdaten zur Methode 2: Schwingungsdauer.

Es wurden jeweils 2 unabhängige Werte für die 10-fache Schwingungsdauer gemessen und daraus der Mittelwert T einer einzigen Periode gebildet.

I / A	$10T_1 / \text{s}$	$10T_2 / \text{s}$	T / s
0,5	23,66	24,07	2,39
1,0	16,44	16,61	1,65
1,5	13,52	13,55	1,35
2,0	11,53	11,61	1,16
2,5	10,30	10,66	1,05
3,0	9,40	9,41	0,94
3,25	9,04	9,12	0,91
3,5	8,69	8,81	0,88
4,0	8,13	8,24	0,82
4,1	8,10	8,14	0,81

Wie man an Gleichung 3 erkennen kann, besteht ein linearer Zusammenhang

$$T^2 = a \cdot \frac{1}{B}$$

zwischen dem Quadrat der Schwingungsdauer und dem Kehrwert des Betrags der magnetischen Flussdichte B

Zur Ermittlung des Parameters a werden die aus den Messwerten berechneten Größen B^{-1} und T^2 gegeneinander aufgetragen, wie es in Abbildung 5 zu erkennen ist.

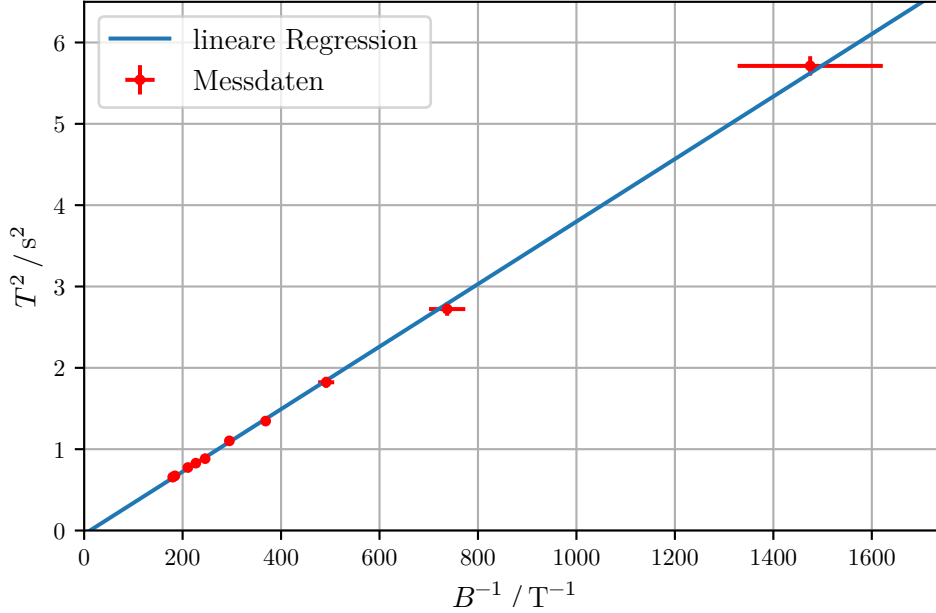


Abbildung 5: Linearer Fit mit Scipy [4] zu den Messwerten der Schwingungsmethode.
(Erstellt mit Matplotlib [3])

Wie auch bei der ersten Methode lässt sich dadurch mittels linearer Regression eine Gerade finden, die den Verlauf der Messwerte am geeignetsten modelliert. Die bestimmten Parameter der Geraden $f(x) = ax + b$ lauten:

$$a = (3.84 \pm 0.04) \cdot 10^{-3} \text{T s}^2$$

$$b = (-0.046 \pm 0.014) \text{s}^2$$

Das Trägheitsmoment J_K der Kugel berechnet sich mit den oben genannten Abmessungen und Gleichung 4. Es hat den Betrag

$$J_K = \frac{2}{5} m_K r_K^2 = (4.1337 \pm 0.0031) \cdot 10^{-5} \text{kg m}^2$$

. Damit folgt aus Formel (3), unter Vernachlässigung von b (da theoretisch $b = 0$ gilt):

$$a = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{\text{Dipol}}}$$

Umgestellt nach μ_{Dipol} ergibt sich:

$$\mu_{\text{Dipol}} = \frac{4\pi^2 J_K}{a} = (0.425 \pm 0.004) \frac{\text{A}^2}{\text{m}} \quad (6)$$

5 Diskussion

Zunächst wird die Gravitationsmethode diskutiert. Durch diese Methode wurde das magnetische Dipolmoment zu

$$\mu_{\text{Dipol, Gravitation}} = (0.440 \pm 0.006) \frac{\text{A}^2}{\text{m}}$$

bestimmt. Da es zu diesem Versuch keinen Literaturwert gibt, kann man keine genaue Aussage über die Qualität des Wertes machen. Lediglich der sehr lineare Verlauf der Messwerte, wie in Abbildung 4 zu sehen ist, deutet auf die Qualität des bestimmten Wertes hin. Dennoch lassen sich auch hier mögliche Fehlerquellen feststellen. So ist es aus reiner Betrachtung nicht möglich das exakte Kräftegleichgewicht zu erkennen, wodurch sich Fehler in der eingestellten Stromstärke für das Magnetfeld ergeben. Dazu kommt der Energieverlust des Systems durch die Reibung des Luftkissens, sowie eine leicht ungleichmäßige und unregelmäßige Verteilung der Luftkissenströmung. Einer weitere Fehlerquelle liegt in dem nicht komplett ebenen Aufbau. Abgesehen von diesen nicht konkret bestimmbar messunsicherheiten ergibt sich nur eine Unsicherheit von $\pm 0.006 \text{A}^2/\text{m}$ durch diverse Ablesungenauigkeiten. Diese fällt in Relation zu der Größe des bestimmten Wertes nur sehr klein aus.

Das Dipolmoment der Schwingungsmethode ergab sich zu

$$\mu_{\text{Dipol, Schwingung}} = (0.425 \pm 0.005) \frac{\text{A}^2}{\text{m}}$$

Auch hier liegen ebenfalls potenzielle, aufbaubedingte Fehlerquellen vor. Dazu zählen vor allem durch die Schwingung verursachte Unsicherheiten. So gilt zum Beispiel die zur Bestimmung verwendete Formel lediglich für kleine Winkel. Diese sind aber durch händisches Auslenken nicht unbedingt eingehalten. Dazu kommt noch, dass das Pendel nicht perfekt in einer Ebene schwingt und man auch nicht den genauen Zeitpunkt der maximalen Auslenkung bestimmen kann. Auch in dieser Methode ist das einzige Qualitätsmaß wieder die Linearität der in Abbildung 5 aufgetragenen Messwerte. Die bestimmte Messunsicherheit ist mit $\pm 0.005 \text{A}^2/\text{m}$ ebenfalls relativ klein.

Verleicht man nun die beiden Methoden erkennt man, dass die beiden errechneten Werte jeweils nicht in der Fehlertoleranz des anderen liegen. Dies ist durch die teilweise nicht bestimmbar Fehler, wie z.B das Augenmaß beim Ermitteln des Gleichgewichtszustandes oder die händische Auslenkung bei der Schwingung, zu erklären.

Betrachtet man die relative Abweichung der magnetischen Dipolmomente

$$\Delta_{\text{Abweichung}} = (3.5 \pm 0.02)\%$$

kann man sagen, dass die beiden Methoden von ähnlicher Qualität sind.

Literatur

- [1] Microsoft Corporation. *Paint 3D*. Version 6.2105.4017.0. URL: <https://www.microsoft.com/de-de/p/paint-3d/9nblggh5fv99>.

- [2] Professor Dr. Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme*. 4. Aufl. Springer, 24. Nov. 2021.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] *Skizze eines Helmholtzspulenpaares*. Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Helmholtz-Spule#/media/Datei:Helmholtz_coils.png (besucht am 24.11.2021).
- [6] *V105 - Das Magnetische Moment*. TU Dortmund. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1884522/mod_resource/content/1/V105.pdf (besucht am 24.11.2021).