Versuch V105: Das Magnetische Moment

Ziel: Es soll das magnetische Moment eines Permanentmagneten auf drei unterschiedliche Arten bestimmt werden.

Stichworte: Biot-Savartsches Gesetz, Drehimpuls, Drehmoment, Gravitation, Helmholtz-Spulen, Kreisel, magnetischer Dipol, magnetisches Moment, magnetische Induktion, Maxwellsche Gleichungen, Magnetische Resonanz, Trägheitsmoment, Präzession

Theoretische Grundlagen

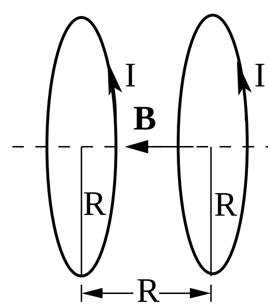
Anders als bei elektrischen Ladungen gibt es in der Natur keine magnetischen Monopole. Die 'einfachste Form' des Magnetismus ist der *magnetische Dipol* mit in sich geschlossenen Magnetfeldlinien. Ein makroskopischer magnetischer Dipol kann z.B. durch einen Permanentmagneten oder durch eine stromdurchflossene Leiterschleife realisiert werden, die das *magnetische Moment*

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \tag{1}$$

besitzt, wobei I der Strom in der Leiterschleife und A die Querschnittsfläche der Schleife ist. Für einen Permanentmagneten ist $\vec{\mu}$ nicht so einfach zu berechnen; es kann aber auf verschiedene Weise experimentell bestimmt werden.

In einem homogenen Magnetfeld wirkt auf einen Dipol[1] ein *Drehmoment* $\vec{\mathrm{D}} = \vec{\mu} \times \vec{\mathrm{B}}$. Der Dipol erfährt hierbei solange eine Drehung, bis das magnetische Moment $\vec{\mu}$ und die magnetische Flußdichte $\vec{\mathrm{B}}$ gleichgerichtet sind.

Zum Aufbau eines *homogenen Magnetfeldes* werden häufig zwei gleichsinnig vom Strom I durchflossene Kreisspulen so angeordnet, daß die Achsen zusammenfallen und daß der gegenseitige Abstand der Spulen dem Spulenradius R entspricht (Abb. rechts). Das Magnetfeld im Inneren des *Helmholtz-Spulenpaares* ist auf der Symmetrieachse homogen und läßt sich aus aus dem *Biot-Savartschen Gesetz* (Abb. rechts unten)



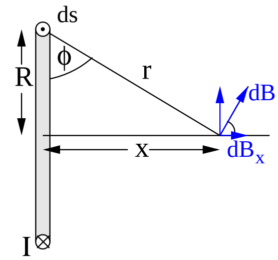
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I}{4\,\pi} \, \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \tag{2}$$

für eine stromdurchflossene Spule mit einer Windung

[1] Im folgenden wird mit Dipol ein magnetischer Dipol bezeichnet. Dabei kann es sich um einen Permanentmagneten oder auch um einen stromdurchflossenen Leiter handeln.

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0\, I}{2}\, \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot \hat{x} \tag{3}$$

herleiten. Das Feld im Zentrum des Helmholtz-Spulenpaares findet man durch Überlagerung der Einzelfelder, wobei der Ursprung im Idealfall in der Mitte des Spulenpaares gelegt wird. In diesem Experiment unterscheidet sich der Spulenradius R geringfügig vom Abstand $\mathrm{d} = 2 \cdot \mathrm{x}$, sodaß der allgemeine Fall berechnet wird. Das Feld in der Mitte der Helmholtz-Spulen ergibt sich dann zu



$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0\, I\, R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} \tag{4}$$

Der Feldgradient $\frac{dB}{dx}$ entlang der Symmetrieachse ergibt sich dann zu:

$$\frac{dB}{dx} = -3\,\mu_0\, I\, R^2 \frac{x}{(R^2+x^2)^{5/2}} \tag{5}$$

Im Idealfall ist der Feldgradient auf der Symmetrieachse in einen relativ großen Bereich vernachlässigbar, sodaß sich ein nahezu homogenes Feld ergibt.

Vorbereitung

- Berechnen Sie die magnetische Flußdichte B in der Mitte des Helmholtz-Spulenpaares (N=195, $d = 0.138$ m, $R_{Spule} = 0.109$ m) für einen Strom $I = 1\ A$.
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_K einer Kugel mit $r_K = 2.5\ cm$ und $m_K = 150\ g$.

Aufgaben

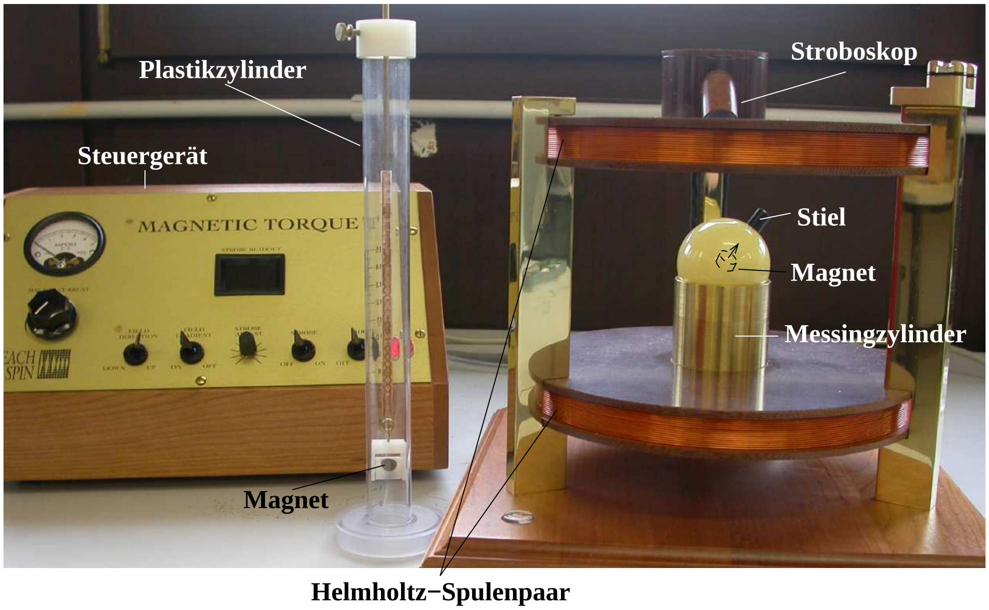
Bestimmen Sie das magnetische Moment der Kugel

- unter Ausnutzung der Gravitation.
- unter Ausnutzung der Schwingungsdauer T

Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung unten dargestellt. Ein kleiner zylindrischer Permanentmagnet befindet sich in der Mitte einer Billiardkugel, dessen magnetisches Moment μ_{Dipol} in Richtung des Stiels gerichtet ist, der sich auf der Kugel befindet. Das äußere Magnetfeld wird durch ein Helmholtz-Spulenpaar (N=195) erzeugt, dessen Spulen einen Abstand von $\mathrm{d} = 0.138$ m und einen Radius von $\mathrm{R_{Spule}} = 0.109$ m haben.

In der Mitte der Helmholtz-Spulen befindet sich ein Messingzylinder, auf dem sich die Kugel mit dem Permanentmagneten mittels eines Luftkissens reibungsfrei bewegen kann. Zur Bestimmung der Drehbewegung befindet sich ein Stroboskop an der oberen Spule des Helmholtz-Spulenpaares. Der Spulenstrom und somit auch das externe Magnetfeld, das Stoboskop und das Luftkissen können über ein Steuergerät angesteuert werden. Sie haben dabei die Möglichkeit den Spulenstrom, die Feldrichtung, den Feldgradienten und das Stroboskop einzustellen. Da bei großer Belastung (d.h. großen Strömen) die Temperatur des Spulendrahtes steigt, und



somit auch der Widerstand des Drahtes, kann bei längerer Belastung der Spulenstrom sinken. Das Magnetfeld kann dann seine maximale Stärke nicht erreichen! Drehen Sie aus diesem Grund den Spulenstrom immer herunter, wenn Sie das externe Magnetfeld nicht benötigen.

Durchführung und Auswertung

Bestimmung der Apparatekonstanten

- Die geometrischen Abmessungen der Helmholtz-Spulen wurden im vorherigen Kapitel angegeben. Überprüfen Sie die Vollständigkeit der dort gemachten Angaben.
- Messen Sie den Radius der $\mathrm{r_K}$ der Billiardkugel und deren Masse $\mathrm{m_K}$ und berechnen Sie aus den gewonnenen Ergebnissen das Trägheitsmoment $J_K = 2/5\, m_K\, r_K^2$. Hierbei kann die Kugel in guter Näherung als eine Vollkugel angesehen werden.
- Bestimmen Sie die Länge des Stiels, der sich an der Billiardkugel befindet.

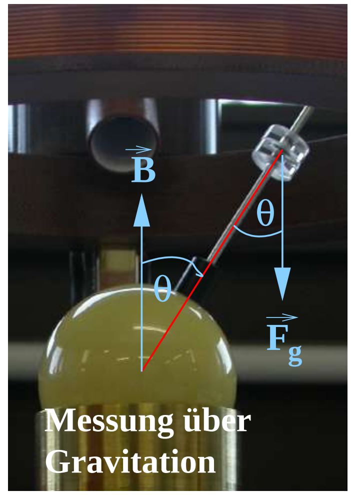
Bestimmung des magnetischen Momentes eines Magnetens unter Ausnutzung der Gravitation:

Bei dieser statischen Methode wirkt auf eine Masse m die Gravitationskraft $\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{g} = \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{g}}$, die ein Drehmoment $\vec{\mathrm{D}}_\mathrm{g} = \mathrm{m} \cdot (\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{g}})$ auf die Billiardkugel ausübt (Abb. rechts). Die verschiebbare Masse m ist auf eine Aluminiumstange gesteckt, die wiederum in den Stiel der Kugel gesteckt werden kann. Der für die Berechnung des Drehmoments relevante Abstand r ist die Strecke von der aufgesteckten Masse m bis zum Anfang des Stiels. Die geometrischen Abmessungen der Kugel wurden dabei so gewählt, daß $|\vec{r}|$ dem Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Masse und dem Zentrum der Kugel entspricht. Der Gravitationskraft wirkt das Magnetfeld $\vec{B}$ der Helmholtz-Spulen entgegen. Bei **einer** gegebenen Magnetfeldstärke liegt ein Gleichgewicht vor, zwischen dem Drehmoment $\vec{D}_B = \vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}$ und dem Drehmoment $\vec{D}_g$, welches die Gravitation verursacht.

$$\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}) \tag{6}$$

Die Kreuzprodukte kann man durch $r\,m\,g\,\sin(\theta) = \mu_{Dipol}\,B\,\sin(\theta)$ ersetzten, wobei θ der von der Aluminiumstange und dem Magnetfeld (bzw. der Gravitationskraft) eingeschlossene Winkel ist (siehe Abb. 3). Da $\vec{g}$ und $\vec{B}$ parallel sind, fällt die Winkelabhängigkeit weg und man kann das magnetische Moment μ_{Dipol} über den Abstand r und das Magnetfeld der Helmholtz-Spulen bestimmen.

$$\mu_{Dipol} \cdot B = m \cdot r \cdot g \tag{7}$$



- Stecken Sie die Aluminiumstange mit der verschiebbaren Masse m in die Billardkugel und setzen Sie die Kugel auf den Messingzylinder in der Mitte der Helmholtz-Spulen.

- Schalten Sie das Gebläse für das Luftkissen an und stellen Sie die Feldrichtung auf "up" (Feldgradient "off"). Regeln Sie für ein gegebenes r das Magnetfeld $\vec{B}$ so ein, daß sich das System in einem Gleichgewicht befindet. Notieren Sie sich das eingestellte Magnetfeld und den Abstand r .

- Wiederholen Sie die Messung mindestens 9 mal.

- Tragen Sie r gegen B auf und berechnen Sie Mit Hilfe linearer Ausgleichsrechnung das magnetische Moment μ_{Dipol} der Kugel. Hinweis: Die verschiebbare Masse kann als Punktmasse angesehen werden und die Masse der Aluminiumstange kann bei der Berechnung von μ vernachlässigt werden.

Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magnetens

Bei dieser Meßmethode wird die Billiardkugel in Schwingung versetzt. Die Kugel verhält sich im homogenen magnetischem Feld der Helmholtz-Spulen wie ein harmonischer Oszillator, dessen Bewegung sich durch

$$-|\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\theta}{d\,t^2} \tag{8}$$

beschreiben läßt. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die Schwingungsdauer T der oszillierenden Kugel. Das magnetische Moment μ_{Dipol} läßt sich dann quantitativ über das Trägheitsmoment J_K der Kugel, der Magnetfeldstärke B und der Schwingungsdauer

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,J_K}{\mu_{Dipol}}\;\frac{1}{B} \tag{9}$$

bestimmen.

- Setzen Sie die Kugel auf das Luftkissen und schalten Sie das Magnetfeld ein. Berechnen Sie aus der eingestellten Stromstärke die Magnetfeldstärke.

- Lenken Sie den Stiel an der Kugel um einen **kleinen Winkel** aus. Die Kugel führt dann wie ein Pendel Schwingungen aus und läßt sich mathematisch wie ein harmonischen Oszillator behandeln. Zur Verbesserung der Genauigkeit messen Sie für das eingestellte Magnetfeld mindestens 10 Periodendauern T und mitteln Sie das Ergebnis.
- Wiederholen Sie die Messung für mindestens 9 weitere Stromstärken.
- Tragen Sie T^2 gegen $1/B$ auf und berechnen Sie das magnetische Moment μ_{Dipol} des Dipols mittels linearer Regression.

Vergleichen Sie die Ergebnisse für das magnetische Moment μ_{Dipol} des Dipols, die Sie aus den einzelnen Messungen erhalten haben. Welche Meßmethode ist genauer?

Literatur

[1] K. Lüders, R.O. Pohl, Einführung in die Physik (Elektrizitätslehre und Optik), Springer Verlag (2006)