

V407

Fresnelsche Formeln

Lukas Bertsch

lukas.bertsch@tu-dortmund.de

Steffen Kober

steffen.kober@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.05.2022

Abgabe: 31.05.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Herleitung der Fresnelschen Formeln	3
2.2 Der Brewster-Winkel	5
3 Durchführung	5
4 Auswertung	7
4.1 Bestimmung der Brechungsindizes über die Fresnelschen Formeln	7
4.2 Bestimmung des Brechungsindizes über den Brewsterwinkel	9
5 Diskussion	9
Literatur	10
Anhang	11

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuches ist die Verifikation der Fresnelschen Formeln durch Intensitätsmessungen eines an Silizium reflektierten Laserstrahls. Es soll ein experimenteller Wert des Brechungsindizes von Silizium und des Brewsterwinkels bestimmt werden.

2 Theorie

Trifft Licht auf eine Grenzfläche zweier Medien, so wird in aller Allgemeinheit ein Teil des Lichtstrahls reflektiert und ein Teil transmittiert. Der reflektierte Teil wird im selben Winkel zum Lot reflektiert, indem die einfallende Welle auf die Grenzfläche trifft. Der transmittierte Teil wird aufgrund der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den zwei Medien gebrochen und läuft anschließend in einem Winkel β weiter. Das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta) \quad (1)$$

liefert einen Zusammenhang zwischen den Brechungsindizes n_1 und n_2 der beiden Medien und den jeweiligen Winkeln. In diesem Versuch wird die Grenzfläche zwischen Luft und Silizium betrachtet, weshalb der Brechungsindex $n_1 = n_{\text{Luft}} \approx 1$ in den folgenden Rechnungen verwendet wird.

Da Licht eine elektromagnetische Welle (*e-m-Welle*) ist, wird die Ausbreitung von Licht durch die *Maxwellschen Gleichungen* beschrieben. Die messbare Intensität einer Lichtquelle verhält sich proportional zur Amplitude des \vec{E} -Feld-Anteiles der *e-m-Welle*, welcher aufgrund der hohen Frequenz nicht direkt gemessen werden kann. Dies bietet die Möglichkeit durch eine Intensitätsmessung auf die Amplitude des \vec{E} -Feldes eines Lichtstrahls zu schließen.

2.1 Herleitung der Fresnelschen Formeln

Die Strahlungsleistung einer *e-m-Welle* wird durch den *Poynting-Vektor* $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ beschrieben. Durch den Zusammenhang der elektrostatischen- und magnetischen Felder über die Maxwell-Gleichungen ergibt sich der Betrag

$$|\vec{S}| = c\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}^2 \quad (2)$$

des Poynting-Vektors. Dabei sind ε_0 und ε die Permittivität des Vakuums, beziehungsweise die materialabhängige relative Permittivität und c die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Medium. Über eine Energiebetrachtung der Strahlenbündel kann mithilfe des Betrages des Poynting-Vektors die Gleichung

$$S_e \cos(\alpha) = S_r \cos(\alpha) + S_t \cos(\beta)$$

hergeleitet werden, wobei S_i der Betrag des Poynting-Vektors der einfallenden (e), transmittierten (t) und reflektierten (r) Teilstrahlen ist. Eine geometrische Veranschaulichung

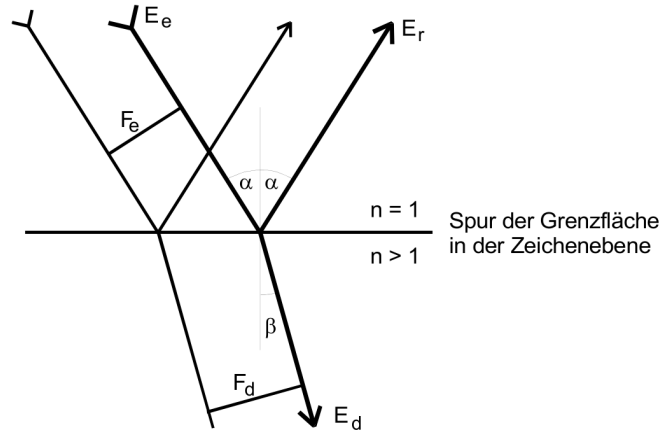


Abbildung 1: Darstellung der Reflexion und Brechung einer einfallenden Welle an einer Grenzfläche [3].

der Situation ist in Abbildung 1 dargestellt. Durch Einsetzen von (2), $n^2 = \varepsilon$ (für nicht ferromagnetische Stoffe) und $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ folgt

$$\left(\vec{E}_e^2 - \vec{E}_r^2\right) \cos(\alpha) = n \vec{E}_t^2 \cos(\beta).$$

Wenn der Feldvektor \vec{E}_e der eintreffenden Welle in seine senkrecht- (s) und parallel- (p) zur Einfallsebene polarisierten Anteile

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e,s} + \vec{E}_{e,p}$$

unterteilt wird, lassen sich mit den Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{E}_{e,s} + \vec{E}_{r,s} &= \vec{E}_{t,s} \\ \left(\vec{E}_{e,p} - \vec{E}_{r,p}\right) \cos(\alpha) &= \vec{E}_{t,p} \cos(\beta) \end{aligned}$$

an der Grenzfläche die Fresnelschen Formeln herleiten. Dazu werden die p- und s-polarisierten Anteile einzeln betrachtet, \vec{E}_t durch die Stetigkeitsbedingungen eliminiert und der Brechungswinkel β mithilfe des Snelliusschen Brechungsgesetz (1) ersetzt. Für die reflektierte Amplitude des senkrecht polarisierten Anteils folgt

$$\vec{E}_{r,s} = -\vec{E}_{e,s} \cdot \frac{\left(\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} - \cos(\alpha)\right)^2}{n^2 - 1} \quad (3)$$

Der parallel polarisierte Anteil kann durch

$$\vec{E}_{r,p} = \vec{E}_{e,p} \cdot \frac{n^2 \cos(\alpha) - \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}{n^2 \cos(\alpha) + \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}} \quad (4)$$

berechnet werden.

2.2 Der Brewster-Winkel

Die Fresenelsche Formel für den parallel polarisierten Anteil lässt sich auch als

$$\vec{E}_{r,p} = \vec{E}_{e,p} \cdot \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

schreiben und verschwindet somit für $\alpha_B + \beta_B = \pi/2$ aufgrund der Divergenz des Tangens. Daraus folgt mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz und $n_1 = 1$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_B) &= n \cdot \sin(\pi/2 - \alpha_B) = n \cdot \cos(\alpha_B) \\ \Leftrightarrow n &= \tan(\alpha_B) \end{aligned} \quad (5)$$

für den Brechungsindex n des betrachteten Materials (hier Silizium). Ein Lichtstrahl, der unter dem Brewster-Winkel α_B einfällt wird also vollständig transmittiert.

3 Durchführung

Für die Durchführung dieses Versuches wird grundlegend ein Laser, ein drehbarer Spiegel und ein schwenkbares Photoelement benötigt. Damit Information aus dem Photoelement gezogen werden kann, wird dieses über ein Amperemeter ausgewertet. Der schematische Aufbau des Versuches wird in Abbildung 2 dargestellt. Da der verwendete Laser kein polarisiertes Licht emittiert, muss zwischen dem Laser und dem Spiegel noch ein *Polarisationsfilter* platziert werden.

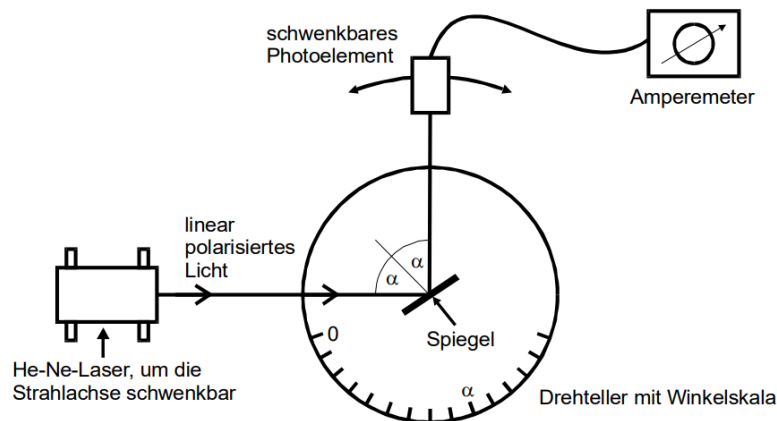


Abbildung 2: Schematischer Versuchsaufbau des Experimentes [3].

Der drehbare Spiegel wird über einen Aufbau realisiert, welcher in Abbildung 3 dargestellt ist. Der Winkel α , welcher in Abbildung 2 eingezeichnet ist, wird über ein *Goniometer* gemessen. Bevor die Messung durchgeführt werden kann muss der gesamte Versuchsaufbau einjustiert werden, damit systematische Fehler ausgeschlossen werden können.

Zunächst wird der Laserstrahl auf die Goniometerachse einjustiert. Das bedeutet, dass bei dem verwendeten Versuchsaufbau zunächst das Goniometer auf $\alpha = 0^\circ$ eingestellt

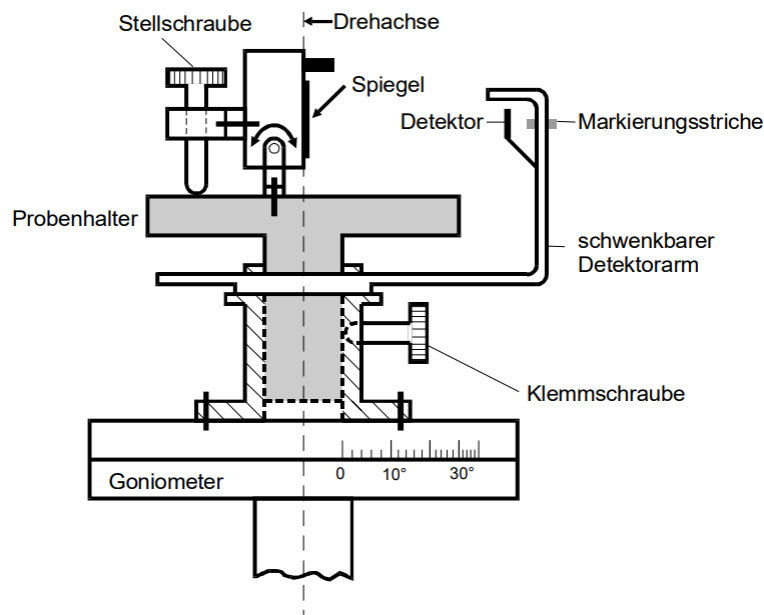


Abbildung 3: Versuchsaufbau des Experimentes [3].

werden muss. Dann wird der Spiegel durch die entsprechende Stellschraube gelöst und gedreht, sodass der Laserstrahl so genau wie möglich in die Laseröffnung reflektiert wird. Dann wird die Stellschraube festgezogen. Die Höhe des Spiegels kann dabei ebenfalls durch eine in den Skizzen dargestellte Stellschraube variiert werden. Nach dieser Justierung ist die Apparatur messbereit. Bevor die Messung beginnt wird noch der Dunkelstrom des Photoelementes und die Gesamtintensität des Laser bestimmt. Der Dunkelstrom wird bestimmt indem der Laser ausgeschaltet wird und ein Messwert an dem Amperemeter abgelesen wird. Dieser Wert entsteht durch das Umlicht und wird in der Auswertung dieses Versuches zur Korrektur verwendet. Die Gesamtintensität des Laser kann bestimmt werden, indem der Spiegel ausgebaut wird. Anschließend wird das Photoelement direkt von dem p- und s-polarisierten Licht bestrahlt und der Messwert am Amperemeter abgelesen.

Mit der einjustierten Messapparatur werden nun Messwerte in einem Intervall von $\alpha \in [6^\circ; 88^\circ]$ aufgenommen. Dies geschieht jeweils zu p- und s-polarisierten Licht. Dabei wird das Messintervall in 2° -Schritten durchlaufen. Nach dieser Messung wird zu p-polarisiertem Licht noch eine Detailmessung durchgeführt. Dabei werden im Bereich des Brewsterwinkels α_p feinere Winkelschritte durchlaufen. Diese Messwerte werden zu den bereits aufgenommenen Daten hinzugefügt.

4 Auswertung

Zur Auswertung des Versuches werden Mittelwerte gebildet. Diese führen zu einem Standardfehler des Mittelwertes, welcher gemäß

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

berechnet werden kann. Die Fehlerrechnung der Messwerte genügt der gaußschen Fehlerfortpflanzung und wird in *Python* mittels *Scipy* [2] durchgeführt.

4.1 Bestimmung der Brechungsindizes über die Fresnelschen Formeln

Die Messwerte der gemessenen Ströme des Photoelements sind in Tabelle 1 aufgeführt. Von den aufgeführten Strömen wird der gemessene Dunkelstrom von $I_D = 62 \text{ nA}$ subtrahiert, auch wenn dies die Ergebnisse kaum beeinflusst, da der Dunkelstrom um Größenordnungen unter den gemessenen Strömen liegt.

Es werden die Brechungsindizes n_p und n_s aus den Messreihen zum parallel- und senkrecht polarisierten Licht bestimmt. Dazu werden die Fresnelschen Formeln für p-polarisiertes Licht (4) und für s-polarisiertes Licht (3) jeweils auf den Brechungsindex umgestellt. Dabei wird ausgenutzt, dass die Intensität des Lichtes proportional zum Quadrat der Amplitude des \vec{E} -Feldes ist. Daher gilt $\frac{E_r}{E_e} = \sqrt{\frac{I_r}{I_0}} = E$. Mit dieser Konvention folgt nach Auflösen der Gleichung (4) nach n

$$n_p(\alpha, E) = \left(\frac{E+1}{E-1}\right)^2 \frac{1}{2 \cos^2(\alpha)} + \sqrt{\frac{1}{4 \cos^2(\alpha)} \left(\frac{E+1}{E-1}\right)^4 - \left(\frac{E+1}{E-1}\right)^2 \tan^2(\alpha)} \quad (6)$$

für den Brechungsindex in Abhängigkeit zum Winkel α und dem Quotienten der Intensitäten. Nun wird verwendet, dass die Intensität I_r, I_0 auch proportional zur gemessenen Stromstärke ist. Daher gilt $E = \sqrt{\frac{I_p}{I_0}}$ für p-polarisiertes Licht, wobei I_p die gemessene Stromstärke beschreibt. Diese Bedingung gilt gleichermaßen für s-polarisiertes Licht. Aus den Messwertepaaren der Winkel und Stromstärken I_p können Brechungsindizes n_p berechnet werden. Diese werden in Tabelle 1 dargestellt. Der Mittelwert der Brechungsindizes ergibt sich zu $\bar{n}_p = 3,98 \pm 0,15$, wobei offensichtliche Ausreißer (hier: $n > 4,5$) verworfen werden.

Die Fresnelsche Formel für s-polarisiertes Licht (3) wird ebenfalls auf den Brechungsindex n_s umgestellt. Hierbei ergibt sich

$$n_s(\alpha, E) = \sqrt{\frac{1 + E^2 + 2E \cos(2\alpha)}{1 - 2E + E^2}} \quad (7)$$

für den Brechungsindex bei s-polarisiertem Licht. Die durch Gleichung 7 berechneten Brechungsindizes werden ebenfalls in Tabelle 1 dargestellt. Der Mittelwert lautet $\bar{n}_s = 3,85 \pm 0,30$. Wieder werden Ausreißer (hier: $n < 3$) nicht berücksichtigt.

Tabelle 1: Messwerte der Ströme des Photoelements und daraus resultierende Brechungsindizes. Der Strom des einfallenden Lichtbündels beträgt $I_0 = 180 \mu\text{A}$, der Dunkelstrom $I_D = 62 \text{ nA}$. Die mit '*' markierten Werte werden in der Auswertung dieses Versuches nicht einbezogen.

	p-polarisiert		s-polarisiert	
$\alpha / ^\circ$	$I_r / \mu\text{A}$	$n_p(\alpha)$	$I_r / \mu\text{A}$	$n_p(\alpha)$
6	66	4,09	64	3,93
8	66	4,11	66	4,03
10	64	4,01	62	3,79
12	64	4,04	64	3,87
14	66	4,19	66	3,96
16	66	4,23	68	4,04
18	64	4,15	68	4,00
20	62	4,07	68	3,95
22	56	3,78	62	3,58
24	60	4,06	70	3,96
26	56	3,89	68	3,79
28	60	4,20	76	4,19
30	52	3,81	68	3,66
32	52	3,88	72	3,80
34	54	4,09	80	4,18
36	52	4,07	80	4,09
38	50	4,05	82	4,11
40	48	4,04	86	4,24
42	44	3,92	86	4,12
44	42	3,93	90	4,25
46	38	3,82	90	4,11
48	36	3,84	88	3,85
50	32	3,74	92	3,94
52	28	3,65	90	3,67
54	28	3,83	100	4,11
56	26	3,89	100	3,92
58	24	3,96	105	4,05
60	20	3,90	110	4,17
62	16	3,83	110	3,93
64	14	3,94	115	4,03
66	10	3,86	110	3,44
68	7.6	3,94	120	3,82
70	4.8	3,95	120	3,51
72	2.1	3,90	120	3,20
73	1.8	4,06		
74	1.2	4,16	125	3,18
75	0.92	4,35		
76	1.0	4,70*	135	3,51
77	1.4	5,21*		
78	2.6	6,04*	140	3,45
79	4.4	7,11*		
80	7.0	8,53*	145	3,36
82	16	13,25*	150	3,21
84	30	22,75*	150	2,50*
86	52	47,64*	140	1,49*
88	82	147,65*	130	1,09*

4.2 Bestimmung des Brechungsindex über den Brewsterwinkel

Der Brewsterwinkel stellt im Idealfall den Winkel der gemessenen Intensität $I_B = 0$ dar. Da immer ein gewisser Reststrom gemessen wurde, wird das Minimum der Messwerte I_p aus Tabelle 1 festgestellt. Es folgt der experimentelle Wert des Brewsterwinkels $\alpha_B = 75^\circ$. Mithilfe von Gleichung 5 kann ein hieraus resultierender Brechungsindex berechnet werden. Dieser ergibt sich zu $n_{\alpha_p} = 3,73$.

Abbildung 4 zeigt den Verlauf der Messwerte und die zugehörigen Theoriekurven, welche durch Einsetzen der Mittelwerte der Brechungsindizes für p- und s-polarisiertes Licht in die Gleichungen (4) und (3) folgen.

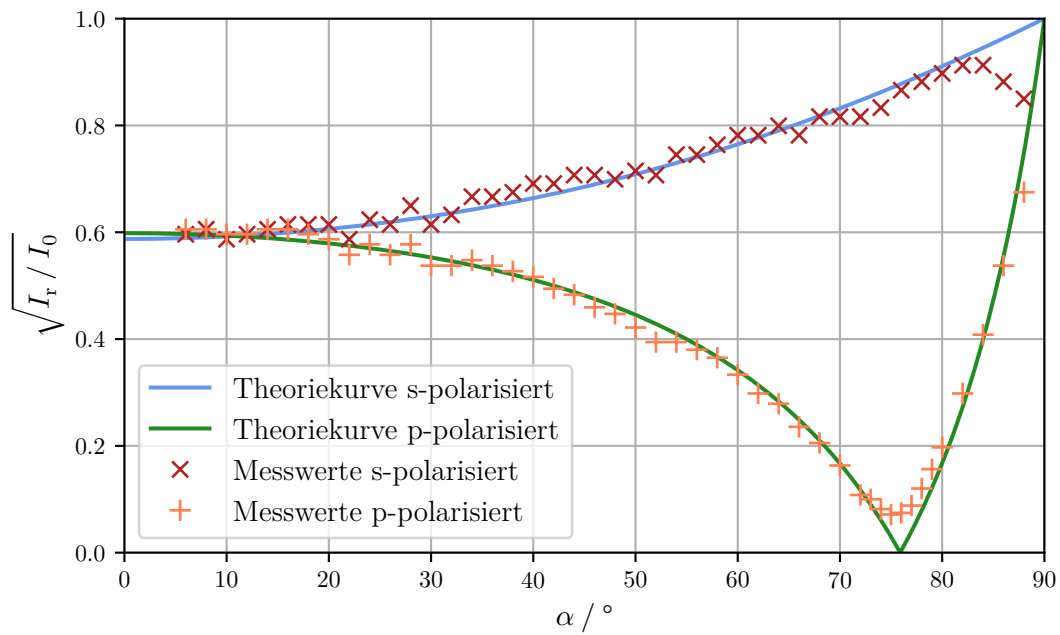


Abbildung 4: Messpunkte und zugehörige, aus \bar{n} folgende Theoriekurven. Erstellt mit *matplotlib* [1].

5 Diskussion

Ziel des Versuches war die Bestimmung des Brechungsindex eines Silizium-Spiegels bei der Wellenlänge des verwendeten (roten) Lasers. Der gesuchte Brechungsindex wurde aus Messreihen zu parallel- und senkrecht polarisiertem Licht und über Bestimmung des Brewsterwinkels ermittelt. Die Ergebnisse der errechneten Brechungsindizes werden in Tabelle 3 dargestellt.

Die aus den verschiedenen Methoden resultierenden Brechungsindizes liegen alle in einem relativ kleinen Bereich von 3,7 bis ca. 4. Auf Grund der aus dem Standardfehler des Mittelwertes resultierenden Unsicherheiten stehen die verschiedenen Werte nicht im

Tabelle 3: Experimentell ermittelte Brechungsindizes von Silizium.

\bar{n}_p	\bar{n}_s	n_{α_B}
3.98 ± 0.15	3.85 ± 0.30	3.73

Widerspruch zueinander, was zeigt, dass die verschiedenen Bestimmungsmethoden zu gleichwertigen Ergebnissen führen. Beim Vergleich der Werte mit Literaturwerten des Brechungsindizes von Silizium bei Wellenlängen im roten Bereich, bestätigt sich die Qualität dieser. Auch der Literaturwert ist bei Wellenlängen zwischen 600 und 700 nm in einem Bereich von ca. 3,7 bis 4 zu verorten.

Ungenauigkeiten bei der Einstellung der Messapparatur und beim Ablesen der Messwerte führen zu den relativ großen Messunsicherheiten der Werte. Beispielsweise war eine exakte Ausrichtung des Photoelements sehr schwierig umzusetzen. Des Weiteren können sich äußere Einflüsse wie Licht- und Schattenänderungen auf die Messwerte auswirken. Dies erklärt die in Abbildung 4 sichtbaren Fluktuationen der Messpunkte um die Theoriekurven.

Insgesamt ist das Ziel, die Fresnelschen Formeln experimentell zu Verifizieren und den Brechungsindex von Silizium zu bestimmen, mit einer im Rahmen der Messunsicherheiten guten Präzision erreicht worden

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] *V407 - Fresnelsche Formeln*. TU Dortmund. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1977241/mod_resource/content/2/V407.pdf (besucht am 24.05.2022).

Anhang

w V407

Justierung:

0° (s) : ~~0,12 μA~~ 180 μA

90° (p) : ~~0,2 μA~~ 180 μA

Messung 1: (90° ⇒ p-polarisiert)

(0° 4° 20 μA)

6° ~~56~~ μA

8° 66 μA

10° 64 μA

12° 64 μA

14° 66 μA

16° 66

18° 64

20° 62

22° 56

24° 60

26° 56

28° ~~60~~

30° 52

32° 52

34° 54

36° 52

38° 50

40° 48

42° 44

44° 42

46° 38

48° 36

50° 32

52° 28

α / °

54

56

58

60

62

64

66

68

70

72

74

76

78

80

82

84

86

88

90

~~92~~

~~94~~

~~96~~

~~98~~

~~100~~

~~102~~

~~104~~

~~106~~

~~108~~

~~110~~

~~112~~

~~114~~

~~116~~

~~118~~

~~120~~

I / μA

(24)

(18)

(14)

(10)

(7,4)

(5,2)

(3)

28

26

24

20

16

14

10

7,6

4,8

3,6

1,6

1,2

1,0

2,6

7,0

16,0

30,0

52

82

Messung 2: ($0^\circ \Rightarrow$ s-polarisiert)

θ	$I / \mu A$	$\alpha / ^\circ$	$I / \mu A$
6°	64 μA		
8°	66 μA	70	120
		72	120
10°	62 μA	74	125
		76	135
12°	64 μA	78	140
		80	145
14°	66 μA	82	150
16°	68 μA	84	150
18°	68 μA	86	140
20°	68	88	130
22°	62	90	
24°	70		
26°	68		
28°	76		
30°	68		
32°	72		
34°	80		
36°	80		
38°	82		
40°	86		
42°	86		
44°	90		
46°	90		
48°	88		
50°	92		
52°	90		
54°	86	100	
56°	82	100	
58°	76	105	
60°	66	110	
62°	56	110	
64°	50	115	
66°	40	110	
68°		110	
		120	

Dunkelstrom: 62 nA

K. Popp
24.05.2022