

V46

# Der Faraday-Effekt

Lukas Bertsch

lukas.bertsch@tu-dortmund.de

Tom Troska

tom.troska@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.05.23

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2. Theorie</b>	<b>3</b>
2.1. Bandstruktur . . . . .	3
2.2. Effektive Masse . . . . .	3
2.3. Zirkulare Doppelbrechung . . . . .	4
2.4. Faraday-Effekt . . . . .	5
<b>3. Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1. Versuchsaufbau . . . . .	6
3.2. Justierung der Messapparatur . . . . .	7
3.3. Messung der Faradayrotation . . . . .	7
3.4. Messung des <b>B</b> -Felds . . . . .	7
<b>4. Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1. Bestimmung der maximalen magnetischen Kraftflussdichte . . . . .	8
4.2. Bestimmung der effektiven Masse der Leitungselektronen . . . . .	8
<b>5. Diskussion</b>	<b>11</b>
<b>Literatur</b>	<b>11</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>13</b>
A.1. Originaldaten . . . . .	13

## 1. Zielsetzung

Die effektive Masse beschreibt in der Festkörperphysik die scheinbare Masse von Teilchen in einem Kristall. In diesem Versuch wird die effektive Masse der Leitungselektronen von n-dotiertem Galliumarsenid (n-GaAs) mithilfe des Effekts der Faradayrotation bestimmt. Der Faraday-Effekt bezeichnet die Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht beim Durchgang durch ein Medium in einem Magnetfeld.

## 2. Theorie

### 2.1. Bandstruktur

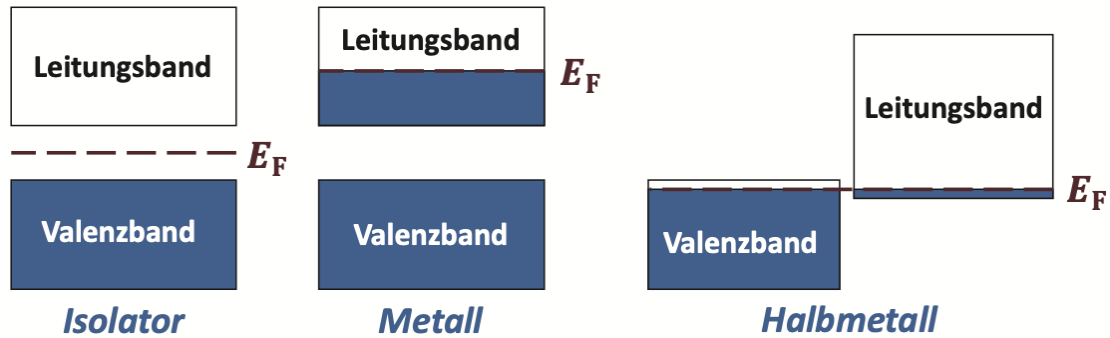
Das Konzept der Bandstruktur ist elementarer Bestandteil der Festkörperphysik und beschreibt die Überlagerung diskreter Energieniveaus von Teilchen in einem Kristall. Das Valenzband entspricht den bei  $T = 0\text{ K}$  höchstem besetzten Energieband. Befinden sich freie Elektronen im darüber liegenden Leitungsband wird das Material leitend. Es ergibt sich für verschiedene Materialien eine Struktur, die bestimmte Eigenschaften definiert. So ergibt es sich, dass Materialien mit einer großen Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband einem Isolator entsprechen. Umgekehrt sind Materialien mit keiner Bandlücke Leiter. Ein schematisches Bild von Bandstrukturen ist in Abbildung 1 zu sehen.

Materialien mit einer relativ kleinen Bandlücke von etwa  $\Delta E_{\text{gap}} = 0\text{ eV}$  bis  $6\text{ eV}$  weisen nochmal andere Eigenschaften auf und werden als Halbleiter bezeichnet. Am absoluten Temperaturnullpunkt von  $T = 0\text{ K}$  ist ein Halbleiter nichtleitend, die Fermienergie liegt demnach in der Bandlücke. Für Raumtemperaturen liegt die thermische Energie von Elektronen bei rund  $E_{\text{therm.}} = 26\text{ meV}$ . Hat ein Halbleiter eine Bandlücke in etwa diesem Energiebereich, treten Elektronen in das Leitungsband über und das Material wird leitend.

Die Bandlücke von dem in diesem Versuch verwendeten Galliumarsenid beträgt  $E_{\text{gap, GaAs}} = 1,42\text{ eV}$ , somit befinden sich bei Raumtemperatur sehr wenig Elektronen im Leitungsband und die Leitfähigkeit ist entsprechend gering. Durch das Einbringen von Fremdatomen kann ein weiteres Energieniveau unterhalb des Leitungsbands geschaffen werden, sodass zwischen diesem Band und dem Leitungsband eine deutlich kleinere Bandlücke ergibt. So hat das hier verwendete, n-dotierte Galliumarsenid eine Bandlücke in der Größenordnung der thermischen Energie der Elektronen und wird somit leitend.

### 2.2. Effektive Masse

Bewegt sich ein Teilchen in einem Kristall, so ist bei der Beschreibung der Bewegung das wirkende, periodische Gitterpotential zu berücksichtigen. Zur besseren Berechnung lässt sich eine effektive Masse des Teilchens einführen, die ähnlich wie die reduzierte Masse zweier Körper in der Mechanik funktioniert. Dazu wird die Energie des Leitungsbandes



**Abbildung 1:** Bandstruktur eines Isolators, Metalls und Halbleiters. Hierbei bezeichnet  $E_F$  die Fermienergie [3].

bis zur 2. Ordnung entwickelt

$$E(\mathbf{k}) = E(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial k_i^2} \bigg|_{k=0} \right) k_i^2 + \dots$$

Der 2. Koeffizient lässt sich durch Umstellen der Gleichung des quantenmechanischen Oszillators

$$E = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

als effektive Masse

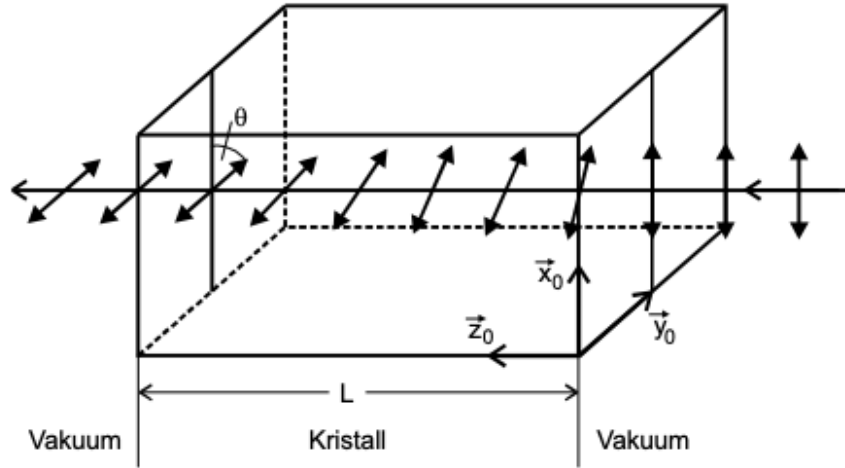
$$m_i^* = \frac{\hbar^2}{\left( \frac{\partial^2 E}{\partial k_i^2} \bigg|_{k=0} \right)}$$

identifizieren. Aufgrund der Tatsache, dass das Gitterpotential für alle drei Raumrichtungen durchaus verschieden sein kann, handelt es sich bei der effektiven Masse um eine tensorielle Größe.

### 2.3. Zirkulare Doppelbrechung

Doppelbrechung tritt in optisch aktiven Medien auf und beschreibt die Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht, was in Abbildung 2 zu sehen ist. Linear polarisiertes Licht kann als Überlagerung von links und rechts polarisiertem Licht verstanden werden. Aufgrund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten kommt es zum beschriebenen Effekt.

Der Rotationswinkel  $\theta$  kann über die Brechungsindizes für rechts und links polarisiertes Licht ((1)) oder letztlich über die Suszeptibilität ((2)) ausgedrückt werden.



**Abbildung 2:** Illustration der zirkularen Doppelbrechung von linear polarisiertem Licht in einem Kristall [1].

$$\theta = \frac{L\omega}{2} \left( \frac{1}{n_r} - \frac{1}{n_l} \right) \quad (1)$$

$$\theta = \frac{L\omega}{2cn} \chi_{xy} \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet  $L$  die Strecke, die das Licht in dem optisch aktiven Medium zurücklegt.

#### 2.4. Faraday-Effekt

In einem optisch inaktiven Medium kann unter normalen Umständen keine zirkulare Doppelbrechung beobachtet werden. Wird jedoch ein hinreichend starkes Magnetfeld parallel zu der Ausbreitungsrichtung des Lichts angelegt, ist eine zirkulare Doppelbrechung zu beobachten. Dies wird als Faraday-Effekt oder Faradayrotation bezeichnet.

Die Suszeptibilität  $\chi_{xy}$  ist von dem angelegten Magnetfeld abhängig

$$\chi_{xy} = \frac{Ne^3\omega B}{\varepsilon_0((-m\omega^2 + K)^2 - (e\omega B))}. \quad (3)$$

Wird für die Suszeptibilität in (2) die Suszeptibilität aus (3) eingesetzt, folgt

$$\theta = \frac{e^3\omega NBL}{2\varepsilon_0 cm^2 XXXXXn}. \quad (4)$$

Hierbei wird  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  als Resonanzfrequenz und  $\omega_{symupc} = \frac{eB}{m}$  als Zyklotronfrequenz eingeführt. Dadurch, dass  $\omega \ll \omega_0$  gilt und durch Definieren von  $\theta_{\text{frei}} = \frac{\theta}{L}$  als Faradayrotation pro Einheitslänge wird (4) zu

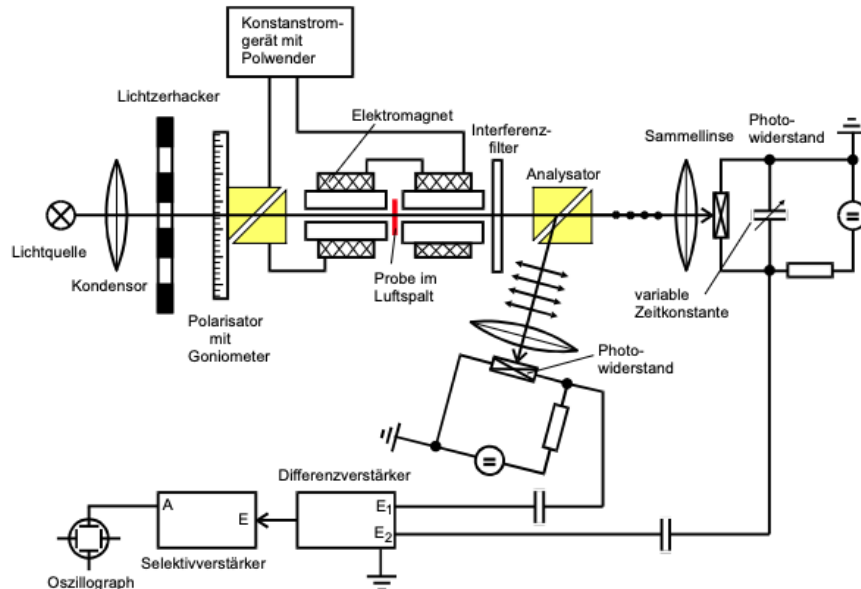
$$\theta_{\text{frei}} = \frac{e^3 NB}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3 (m^*)^2 n} \cdot \lambda^2. \quad (5)$$

### 3. Durchführung

Um die effektive Masse der Leitungselektronen in n-dotierten Galliumarsenid zu bestimmen, werden in diesem Versuch zwei dotierte Proben mit unterschiedlicher Donatorenkonzentration und eine undotierte GaAs Probe analysiert. Dazu wird die Faradayrotation eines Lichtstrahls nach dem Durchqueren der Proben für verschiedene Wellenlängen ermittelt. Aus der Proportionalität des Drehwinkels zum Quadrat der Wellenlänge lässt sich sodann die effektive Masse der Elektronen errechnen.

#### 3.1. Versuchsaufbau

Um den Drehwinkel der Faradayrotation zu ermitteln wird der in Abbildung 3 gezeigte Aufbau verwendet. Als Lichtquelle wird eine Halogenlampe verwendet, die Licht im



**Abbildung 3:** Skizze des verwendeten Versuchsaufbaus zur Messung der Faradayrotation mithilfe des Zweistrahlverfahrens [4].

sichtbaren- und Infrarotbereich aussendet. Die zu analysierende Wellenlänge kann mittels Interferenzfiltern separiert werden. Nach der Fokussierung des Strahles durchläuft dieser ein *Glan-Thompson-Prisma*, welches das emmitierte Licht linear polarisiert. Dieser Polarisator ist um die Strahlachse drehbar gelagert und mit einem Goniometer versehen, anhand dessen sich der Drehwinkel des Prismas genau ablesen lässt. Die Probe wird in der Mitte eines Elektromagneten platziert, dessen Magnetfeld über ein Konstantstromgerät

eingestellt werden kann. Hinter dem Elektromagneten befindet sich eine Haltevorrichtung für die zuvor erwähnten Interferenzfilter und ein weiteres Glan-Thompson-Prisma. Dieses dient als Analysator und teilt den eintreffenden Strahl in zwei genau senkrecht zueinander polarisierte Teilstrahlen auf. Die Intensität der beiden Teilstrahlen kann anschließend über zwei Photowiderstände gemessen werden. Über einen Differenzverstärker kann die Differenz der Signale der beiden Teilstrahlen an einem Oszilloskop dargestellt werden. Wie in Abbildung 3 zu erkennen ist, sind außerdem ein „Lichtzerhacker“ und ein Selektivverstärker verbaut. Mit Hilfe des Lichtzerhackers wird der Lichtstrahl in Einzelbündel mit einer Frequenz von 450 Hz unterteilt. Der Selektivverstärker wird auf dieselbe Frequenz eingestellt, was zur Unterdrückung von Rauschspannungen in anderen Frequenzbereichen dient.

### 3.2. Justierung der Messapparatur

Vor Beginn der eigentlichen Messung muss die Messapparatur justiert werden. Dazu wird zuerst die korrekte Installation der optischen Elemente überprüft. So sollte sich die gemessene Spannung an jeweils einer der beiden Photowiderstände durch Rotation des Polarisator-Prismas mit einer Periodizität von  $90^\circ$  auf Null regeln lassen. Des Weiteren sollte überprüft werden, ob die Teilstrahlen auf die lichtempfindlichen Flächen der Photowiderstände abgebildet werden. Sind alle optischen Elemente justiert, wird der Selektivverstärker auf die Frequenz des Lichtzerhackers abgestimmt. Dazu wird die Frequenz des Selektivverstärkers im Bereich der am Lichtzerhacker eingestellten Frequenz variiert. Es wird die Frequenz eingestellt, bei der die Amplitude des Signals der Photowiderstände maximal ist. Nun kann mit der eigentlichen Messung begonnen werden.

### 3.3. Messung der Faradayrotation

Zur Messung des Drehwinkels der Faradayrotation werden neun verschiedene Interferenzfilter mit Wellenlängenbereichen von  $1,06$  bis  $2,65 \mu\text{m}$  verwendet. Nach dem Einsetzen einer Probe und eines Interferenzfilters wird mithilfe des drehbaren Polarisators ein Winkel  $\theta_1$  eingestellt, der die Amplitude des Signals des Differenzverstärkers minimiert. Anschließend wird die Polung des Elektromagneten umgestellt, sodass ein genau entgegengerichtetes Magnetfeld entsteht. Erneut wird die Amplitude minimiert und der zugehörige Winkel  $\theta_2$  notiert. Da mit dieser Methode das Magnetfeld um  $2B$  geändert wird, berechnet sich der Drehwinkel der Faradayrotation zu

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2). \quad (6)$$

### 3.4. Messung des B-Felds

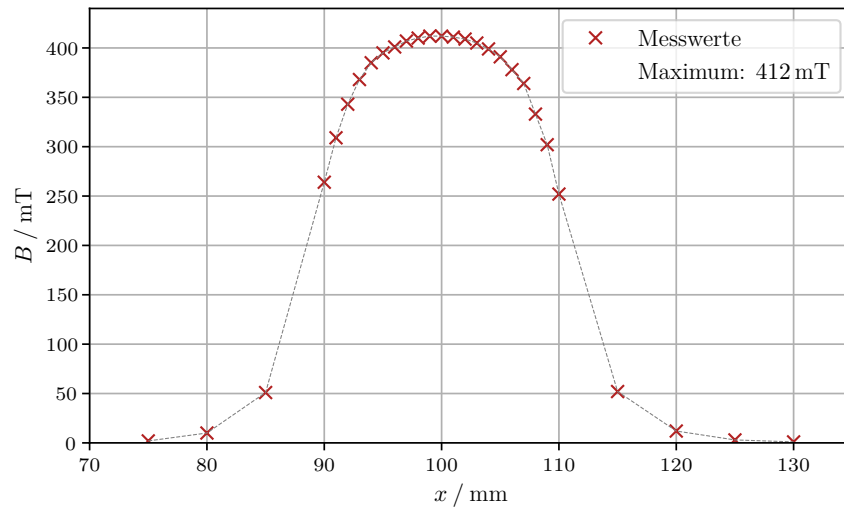
Zur Bestimmung der effektiven Elektronenmasse muss die magnetische Flussdichte  $B$  im Bereich der Probe bekannt sein. Mit einer auf einem Stativ befestigten Hallsonde wird die Flussdichte des Magnetfeldes entlang der Strahlachse vermessen. Es werden Messwerte im Abstand von wenigen Millimetern um den Probenbereich genommen. Das Maximum

der Messreihe wird in der Rechnung zur Bestimmung der effektiven Elektronenmasse verwendet.

## 4. Auswertung

### 4.1. Bestimmung der maximalen magnetischen Kraftflussdichte

Zur Bestimmung der maximalen magnetischen Flussdichte werden die in Abbildung 4 dargestellten Messwerte verwendet. Die genauen Messdaten sind im Anhang A.1 aufgelistet. Anhand des Graphen lässt sich ein eindeutiges Maximum erkennen. Dieses liegt bei einer magnetischen Flussdichte von  $B = 412 \text{ mT}$ .



**Abbildung 4:** Grafische Darstellung der Messdaten zur Bestimmung der magnetischen Kraftflussdichte.

### 4.2. Bestimmung der effektiven Masse der Leitungselektronen

Zur Bestimmung der effektiven Elektronenmasse werden neun Interferenzfilter und drei verschiedene Galliumarsenid Proben verwendet. Eine der Proben ist undotiert und wird verwendet um die Faradayrotation gebundener Ladungsträger zu bestimmen. Die anderen Proben haben Donatorenkonzentrationen von  $1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  (Probe 1) und  $2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  (Probe 2). Die undotierte Kontrollprobe heiße Probe 0. Die Dicken der Proben sind als

$$d_0 = 5,11 \text{ mm} \qquad d_1 = 1,36 \text{ mm} \qquad d_2 = 1,296 \text{ mm}$$

gegeben. Die jeweiligen Messwerte der Drehwinkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$ , sowie die daraus berechnete Differenz  $\theta$  sind den Tabellen 1 - 3 zu entnehmen.



**Tabelle 1:** Messwerte zur undotierten Probe und nach Gleichung 6 bestimmter Drehwinkel der Faradayrotation.

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta / ^\circ$
1,06	94,28	72,58	10,85
1,29	91,35	75,07	8,14
1,45	90,50	80,73	4,88
1,72	86,05	80,00	3,02
1,96	80,73	75,53	2,60
2,156	80,28	74,38	2,95
2,34	55,00	48,00	3,50
2,51	22,52	30,20	-3,84
2,65	71,48	65,17	3,16

**Tabelle 2:** Messwerte zur Probe mit  $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ c}^3\text{m}^{-1}$  und nach Gleichung 6 bestimmter Drehwinkel der Faradayrotation.

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta / ^\circ$
1,06	87,17	80,00	3,58
1,29	87,00	80,17	3,42
1,45	89,00	84,13	2,43
1,72	87,20	80,13	3,53
1,96	82,03	78,02	2,01
2,156	81,15	75,18	2,98
2,34	54,70	46,57	4,07
2,51	35,30	27,22	4,04
2,65	73,52	65,07	4,23

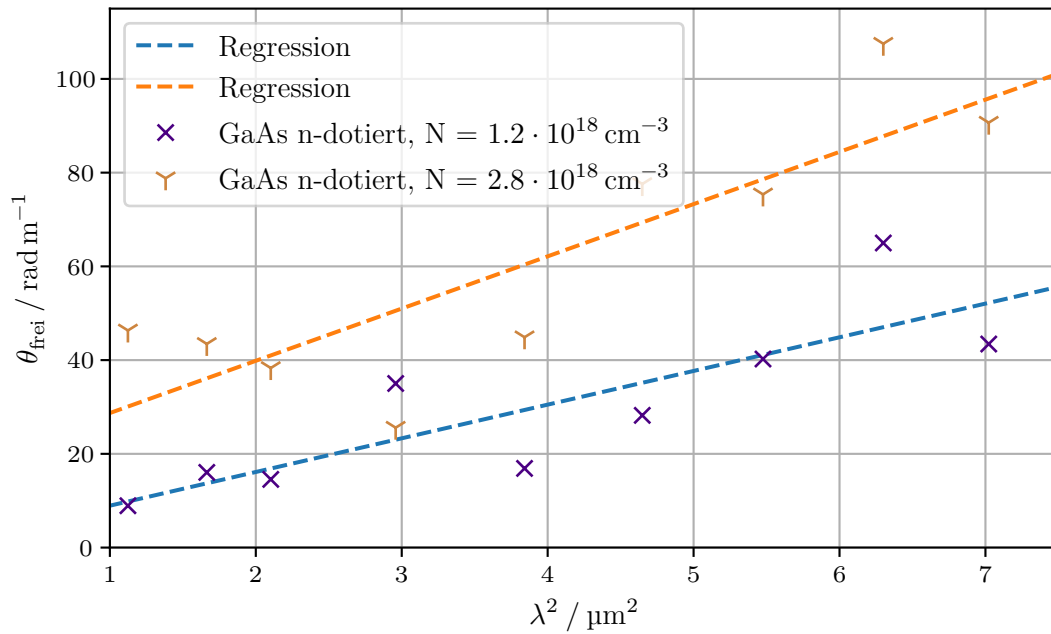
**Tabelle 3:** Messwerte zur Probe mit  $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ c}^3\text{m}^{-1}$  und nach Gleichung 6 bestimmter Drehwinkel der Faradayrotation.

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta / ^\circ$
1,06	91,00	78,62	6,19
1,29	88,83	78,25	5,29
1,45	90,07	81,90	4,08
1,72	85,02	79,68	2,67
1,96	82,13	74,15	3,99
2,156	83,58	70,57	6,51
2,34	56,48	43,52	6,48
2,51	39,10	25,08	7,01
2,65	79,10	64,03	7,53

Die Messwerte der Drehwinkel  $\theta$  werden normiert, indem sie durch die jeweiligen Probenlängen geteilt werden. Durch Subtraktion der Messwerte der undotierten Probe von denjenigen der n-dotierten Proben ergibt sich die Faradayrotation pro Einheitslänge

$$\theta_{\text{frei},i} = \frac{\theta_i}{d_i} - \frac{\theta_0}{d_0}, \quad i = \{1, 2\}.$$

An Gleichung 5 lässt sich erkennen, dass  $\theta_{\text{frei}}$  direkt proportional zum Quadrat der Wellenlänge ( $\lambda^2$ ) ist. Mithilfe des Proportionalitätsfaktors kann die effektive Elektronenmasse  $m^*$  ermittelt werden. Dazu wird eine lineare Funktion der Form  $f(x) = ax + b$  mit  $f(x) = \theta_{\text{frei}}$  und  $x = \lambda^2$  angesetzt. In der Theorie gilt  $b = 0$ , jedoch wird hier der zusätzliche Freiheitsgrad  $b$  dennoch verwendet, um eventuelle systematische Abweichungen zu kompensieren. Es wird eine lineare Regression mittels *scipy* [5] durchgeführt. Die Messwerte der Faradayrotation pro Einheitslänge und die Ausgleichsgeraden sind für beide Galliumarsenid-Proben in Abbildung 5 dargestellt.



**Abbildung 5:** Werte der freien Weglänge  $\theta_{\text{frei}}$  der dotierten Proben und ermittelte Ausgleichsgeraden.

Die Parameter der Geradengleichung ergeben sich zu

$$\begin{aligned} a_1 &= (7,186 \pm 1,752) \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3} & a_2 &= (11,14 \pm 2,61) \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3} \\ b_1 &= (1,76 \pm 7,67) \text{ m}^{-1} & b_2 &= (17,56 \pm 11,41) \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

für Probe 1 und Probe 2 respektive. Durch Umstellen von Gleichung 5 und Einsetzen

des Ansatzes  $\theta_{\text{frei}} = a\lambda^2$  ergibt sich die Gleichung

$$m^* = \sqrt{\frac{e^3 NB}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 na}} \quad (7)$$

zur Berechnung der effektiven Elektronenmasse. Für die magnetische Kraftflussdichte wird  $B = 412 \text{ mT}$  verwendet. Der Brechungsindex von Galliumarsenid ist im vorliegenden Wellenlängenbereich  $n = 3,354$  [2]. Für die bekannten Werte der Elementarladung  $e$ , der Permittivität des Vakuums  $\varepsilon_0$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  werden Werte aus *scipy constants* [5] verwendet. Für die einzelnen Proben ergeben sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung die Werte

$$m_1 = (6,69 \pm 0,82) \cdot 10^{-32} \text{ kg} \quad m_2 = (8,21 \pm 0,96) \cdot 10^{-32} \text{ kg}$$

für die effektive Elektronenmasse. Der Mittelwert der Messungen ergibt sich zu  $(7,45 \pm 0,63) \cdot 10^{-32} \text{ kg}$ .

## 5. Diskussion

Zuerst wurde die maximale magnetische Kraftflussdichte im Probenbereich ermittelt. An Abbildung 4 lässt sich erkennen, dass die Messwerte eine symmetrische Kurve ergeben, was auf eine qualitative Messung hindeutet. Bei der Bestimmung der effektiven Elektronenmasse von Galliumarsenid ergeben sich die Werte  $m_1 = (6,69 \pm 0,82) \cdot 10^{-32} \text{ kg}$  und  $m_2 = (8,21 \pm 0,96) \cdot 10^{-32} \text{ kg}$ . Der Literaturwert beträgt  $m^* = 0,063m_e \approx 5,74 \cdot 10^{-32} \text{ kg}$ , woraus relative Abweichungen von  $(16 \pm 14) \%$  für den ersten Messwert und  $(43 \pm 16) \%$  für den zweiten Messwert folgen. Die relative Abweichung des Mittelwertes lautet  $\Delta_{\text{rel}}(\overline{m}^*) = (29 \pm 11) \%$ . Eine Ursache für die Abweichungen könnte in der Genauigkeit der Winkelbestimmung liegen. Anhand des Graphen des verwendeten Oszilloskops ist es nur schwer möglich, eine exakte Position eines Minimums festzustellen, weshalb die Messdaten der Winkel mit einer gewissen Unsicherheit belastet sind. Auch die Tatsache, dass die Ausgleichsgeraden zur Bestimmung des Proportionalitätsfaktors einen von Null verschiedenen  $y$ -Achsenabschnitt aufweisen, deutet auf systematische Abweichungen hin. Im Rahmen der Messgenauigkeit bestätigen die experimentell ermittelten Werte jedoch den Theoriewert. Die effektive Masse der Leitungselektronen in Galliumarsenid ist erfolgreich bestimmt.

## Literatur

- [1] *Anhang 1, V46 - Faraday-Effekt an Halbleitern*. TU Dortmund.
- [2] *Brechungsindex von Gallium Arsenide*. Filmetrics, Inc. URL: <https://www.filmetrics.de/refractive-index-database/GaAs/Gallium-Arsenide> (besucht am 13.05.2023).
- [3] Rudolf Gross und Achim Marx. Berlin, Boston: De Gruyter Oldenbourg, 2018. ISBN: 9783110782394. DOI: [doi:10.1515/9783110782394-025](https://doi.org/10.1515/9783110782394-025). URL: <https://doi.org/10.1515/9783110782394-025>.

- [4] *V46 -Faraday-Effekt an Halbleitern*. TU Dortmund.
- [5] Pauli Virtanen u. a. „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“. In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

## A. Anhang

### A.1. Originaldaten

GaAs (n-dotiert)

$$N = 2,8 \cdot 10^{18} / \text{cm}^3 ; L = 1,256 \text{ mm}$$

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$
1,06	<del>76,21</del> 81,00	78,37
1,23	88,50	78,15
1,45	90,04	81,54
1,72	89,01	79,41
1,96	82,08	74,09
2,156	82,35	70,34
2,34	56,29	43,31
2,510	39,06	29,05
2,65	29,06	14,02

GaAs (n-dotiert)

$$N = 1,2 \cdot 10^{18} / \text{cm}^3 ; L = 1,36 \text{ mm}$$

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1$	$\theta_2$
1,06	87°10'	80°00'
1,23	87°00'	80°10'
1,45	89°00'	84°08'
1,72	87°12'	80°08'
1,96	82°02'	78°01'
2,156	81°05'	75°11'
2,34	54°42'	46°34'
2,51	35°18'	27°13'
2,65	23°31'	15°04'

GaAs (rein)  $L = 5,11 \text{ mm}$

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1$	$\theta_2$
1,06	<del>8</del> 94°17'	72°55'
1,25	91°21'	75°04'
1,45	90°30'	80°44'
1,72	80°00'03'	80°00'
1,96	80°44'	75°32'
2,156	80°17'	74°23'
2,34	55°00'	48°00'
2,51	22°31'	30°12'
2,65	71°29'	65°10'

Magnetfeld

$x / \text{mm}$	$E / \text{mT}$	$x / \text{mm}$	$B / \text{mT}$
75	2	125	3
80	10	130	1
85	51		
90	264		
91	505		
92	348		
93	368		
94	385		
95	395		
96	401		
97	407		
98	410		
99	412		
100	413		
101	414		
102	409		
103	405		
104	399		
105	391		
106	378		
107	364		
108	333		
109	302		
110	252		
115	52		
120	12		