List of Contents

[1 Formales 1](#_Toc30166496)

[2 Second Lecture 1](#_Toc30166497)

[3 Third Lecture 2](#_Toc30166498)

[3.1 Operations on Graphs 2](#_Toc30166499)

[3.2 Matchings 3](#_Toc30166500)

[4 Problem class 1 3](#_Toc30166501)

[4.1 Hypergraphs 4](#_Toc30166502)

[5 Lecture 25.10. 4](#_Toc30166503)

[6 Lecture 28.10. 6](#_Toc30166504)

[7 Problem class 30.10. 6](#_Toc30166505)

[8 Lecture 04.11.2019 6](#_Toc30166506)

[8.1 Facts on Colorings 7](#_Toc30166507)

[8.2 H-factors 7](#_Toc30166508)

[8.3 Connectivity 7](#_Toc30166509)

[8.4 Planar graphs 8](#_Toc30166510)

[9 Lecture 8.11. 8](#_Toc30166511)

[10 Lecture 11.11. 9](#_Toc30166512)

[11 Problem class 13.11. 10](#_Toc30166513)

[12 Lecture 15.11. TODO 10](#_Toc30166514)

[13 Lecture 18.11. 11](#_Toc30166515)

[13.1 Minors 12](#_Toc30166516)

[13.2 Topological minors 12](#_Toc30166517)

[14 Lecture 22.11. 13](#_Toc30166518)

[15 Lecture 25.11. 15](#_Toc30166519)

[16 Problem class 27.11. 15](#_Toc30166520)

[17 Lecture 29.11. 15](#_Toc30166521)

[17.1 Colorings 17](#_Toc30166522)

[18 Lecture 02.12. 17](#_Toc30166523)

[18.1 Perfect graphs 18](#_Toc30166524)

[19 Lecture 06.12. 18](#_Toc30166525)

[19.1 Edge-Colorings 19](#_Toc30166526)

[20 Lecture 09.12. 20](#_Toc30166527)

[20.1 Variants 21](#_Toc30166528)

[21 Lecture 13.12. 21](#_Toc30166529)

[22 Lecture 16.12. 21](#_Toc30166530)

[22.1 Knowings on Extremal Theory 22](#_Toc30166531)

[23 Lecture 20.12. 22](#_Toc30166532)

[24 Lecture 10.01. 23](#_Toc30166533)

[24.1 Known bounds 24](#_Toc30166534)

[25 Lecture 13.01. 24](#_Toc30166535)

[25.1 Ramsey theory 25](#_Toc30166536)

[26 Problem class 15.01. 25](#_Toc30166537)

[27 Lecture 17.01. 25](#_Toc30166538)

[27.1 Graph Ramsey number 26](#_Toc30166539)

[27.2 Multicolor Ramsey Numbers 26](#_Toc30166540)

# Formales

21.02. Exam

# Second Lecture

Given and , describes the Hamming-distance between a and b. Example: .

Proposition 3: If for a graph G, then G has a cycle of length at least , .

Proof: Let be a longest path in G. Then . (N as neighbourhood of and P as vertex set of the path) Let . We have . Then is a cycle of length of at least .

Definition: A walk in a graph G is an alternating sequence of vertices and edges: mit .

Example:



Edges may be included redundantly. This definition also holds for multigraphs. For non-multigraphs suffices a sequence of vertices.

In a walk , and are endpoints.

If , the walk is considered closed.

Proposition 4: Given a graph G, with , if there is a walk in G with endpoints u and v, then .

Proof: Let be a u-v-walk with the smallest length. If W corresponds to a path, i.e. it has no repeated vertices: done.

Otherwise, there is a repeated vertex, i.e. with . Then is a shorter walk, which is a contradiction.

Proposition 5: If a graph has a closed walk of odd length (“odd walk”), then it has an odd cycle.



Proof: Let W be a closed odd walk of smallest length. If W corresponds to a cycle: done.

Otherwise is where . Then and . Then and -closed walks. Since length of W is odd 🡺 either W’ or W’’ is an odd walk of length less than length of W, which is an contradiction.

Definition: Let be the distance between u and v. The diameter of a graph is .

Proposition 6: A graph is bipartite it has no odd cycles.

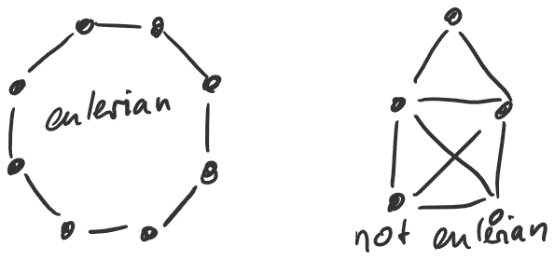
Proof:

* “”: Let G be bipartite with parts A and B. Then any cycle has a form where and for ; Thus any cycle is even.
* “”: Assume G has no odd cycles. Assume tat G is connected. Let . Let and . Let . Let be a shortest path (), has odd length, . Then , and form and odd closed walk. By proposition 5, G has an odd cycle, which is a contradiction. Thus there are no edges with both endpoints in B.

Let , similar argument shows .

Definition: Eulerian Tours are closed walks containing every edge of a given graph exactly once. Graphs having eulerian tours are called eulerian.

Example:



Proposition: A connected graph is eulerian if and only if each vertex has even degree.

Proof:

* “”: Assume G is eulerian. Then there is even number of edges incident to any vertex.
* “”: Assume all vertices of G have even degree. Let be a walk in G that contains the largest number of edges so that no edge in W is repeated. (Any walk will do).

We shall show that W is eulerian.

* + Claim 1: W is closed.

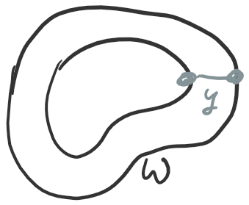
Assume not, i.e. , . Then have odd degrees. But since the degree of is even, .

Then is a longer walk with non-repeated edges, which is a contradiction with the claim.



Assume that W does not contain all edges of G. Let be the set of edges of G not in W.

* + - Case 1: that is incident to a vertex in W.



Then let . Consider . Then W’ has more edges than W, which is a contradiction.

* + - Case 2: , e is not incident to W. Then G is disconnected, which is a contradiction.

Lemma: Each tree on at least 2 vertices has a leaf.

Proof: Apply proposition 3.

# Third Lecture

Lemma 7: , T has a leaf.

## Operations on Graphs

Lemma 8: A tree on n vertices has edges.

Proof: Induction on n.

* Basis: , 1 vertex, 0 edges.
* Step: Assume the statement holds for all trees on n vertices. Let T be a tree with , . By Lemma 7, T has a leaf, v. Let . Since T is acyclic T’ is acyclic. Since T is connected, in T. If , this path does not pass through v. Thus this is a path in T’. Thus T’ is connected. By induction .

Therefore . qed

Lemma 9: Every connected graph contains a spanning tree.

Note: If H is a subgraph of G, H is spanning if .

Proof: Let G be a connected graph, let T be a spanning acyclic subgraph with maximum number of edges. (exists because of empty subgraph). Want to show that T is a tree. For that, we need to verify that T is connected.

Assume T is disconnected.

* Case 1: , x and y are distinct connected components of T. Then is acyclic, contractionary to maximality of T.
* Case 2: , e has endpoints in distinct connected components of T. Contractionary to connectivity of G.

Qed

Lemma 11: The vertices of a connected graph G can be ordered so that is connected for i=1,…,n.

Proof: Induction on G)|.

* Basis .
* Step: Assume the statement holds for any connected graph on vertices.

Let G be connected with .

By Lemma 9, G has a spanning tree T, with a leaf v. Let . Then is still connected, thus is also connected. By induction, so that is connected for.

Qed

Definition: A graph G is k-degenerate for , if each induced subgraph of G has minimum degree of at most K. (TODO minimum!?)

Example: Any tree is 1-degenerate. is -degenerate.

Proposition 1.7 (Tree equivalence theorem): The following statements are equivalent:

1. is a tree, i.e. is connected and acyclic.
2. is connected and is disconnected (minimally connected)
3. is acyclic and , has a cycle. (maximally acyclic).
4. is connected and 1-degenerate.
5. is connected and .
6. is acyclic and .
7. .

Proof: .

. Let G be a connected acyclic graph. Let . G is connected . Then is a cycle.

. G is acyclic and . has a cycle. We need to check that G is connected. If not, pick x,y from distinct connected components of G. Then adding edge does not create a cycle. Which is a contradiction.

## Matchings

Definition: A matching is a 1-regular graph.

Definition: A Forest is an acyclic graph.

Theorem 2.2 (Hall’s matching theorem, Marriage Theorem): In a bipartite graph with parts A and B, there is a matching containing all vertices of A the Hall’s condition is satisfied.

Proof:

* : Obvious. Indeed, if M-matching saturating A,
* : Assume that Hall’s condition holds. Induction on A.
  + Basis: . Obviously holds.
  + Step: Assume the result holds for , prove for .

Case 1: .

(Abbildung)

Let . Let , i.e. a graph obtaining from G by deleting vertices x and y and adjacent edges. . By Induction, has a matching saturating . Thus -saturates A in G.

Case 2: .

(Abbildung)

Let be such a set, i.e. . We shall apply induction to and to . The Hall’s condition holds for , thus saturating A’.

Assume that Hall’s condition fails in . This means so that . Consider .

Which is a contradiction. Thus Hall’s condition holds for G’’, saturating in . Then -matching saturates A in G.

Qed.

Definition: (Hall’s condition): A bipartite graph with parts A and B satisfies Hall’s condition with respect to A if , where .

# Problem class 1

TODO Anne aufschrieb

Claim 3: If and if .

Proof: is acyclic, and the girth of any acyclic is defined to be .

Fix . I claim that has no triangle (i.e. a cycle of length 3). Suppose it does. For , let . Suppose wlog (without loss of generality) that is odd. What can you say about ?: It must be even. Then also, must be odd. But then, is even, which is a contradiction.

(More generally, there are no odd cycles in .

Are there 4 cycles? Yes, the cycle .

Task 2: For any tree T, T has at least leaves.

Solution:

By induction on the order of T. If T has at most 2 vertices, the assumption is true.

Suppose is given and the result holds for all trees of order <n. Let T be a tree with . We know from the lecture that T contains a leaf, say v, and that is a tree.

Let u denote v’s unique neighbor in T. We have that .

By induction hypothesis, has at least leaves.

Case 1: . The leaves of T’ or the leaves of T (Except possibly the vertex u). We get (-1 because we possibly delete u, +1 because v is a leaf in T) many leafs.

Case 2: . This can only happen if and u is the only such vertex.

Suppose . We know that u cannot be a leaf in T’. We get (+1 because v is a leaf in T) leafs. Otherwise . From the base case, there are leafs.

We get (-1 from u, +1 from adding v back).

In all cases T has leafs.

Task 3: Prove that for any graph G, either G or is connected.

Solution:

Suppose that G is not connected. G has connected components .

Pick some vertices .

* If they belong to distinct components, they are connected in (.
* If they belong to the same component, there is a vertex in another component w with edges .

Task 4: Prove that any graph has a vertex partition such that for any vertex of its neighbors belong to the other set.

Idea: Find partition that maximizes the number of edges between the vertex sets, if that partition does not fulfill the requirement, proof that there is a better partition.

Solution:

Let be a our graph and choose a partition of so that it maximizes .

Claim: This partition satisfies the desired property. Suppose not, there is a vector such that .

Consider the partition of given by , . This means there are cross edges lost and cross edges gained.

Net gain in the new partition is , i.e. which is a contradiction, because we have chosen X,Y to maximize that equation. Qed.

For practice: A tournament is an orientation of the complete graph (We choose directions on all edges). Show that any tournament contains a directed path through all vertices.

## Hypergraphs

A hypergraph H is a pair where ( as powerset of X).

A hypergraph is r-uniform if .

Note: A graph is a 2-uniform hypergraph.

We sometimes encounter problems in this more general setting, but these problems have natural graphs associated to them.

as hypergraph. Consider the incidence graph of H: Have vertice sets and . For and , .

Example: Let G be a graph with . Show that there is a connected graph with the same degree sequence as G.

Solution: Apply induction on the number of connected components.

If there is one component, G is already connected, so done.

Let be given and suppose the result is true for all graphs with <n components.

Let be given with n components, . We know that since , that .

(Any graph G has a cycle of length (if ) by considering a longest path in G)

Fix cycles in respectively.

~~Let an edge in and be an edge in .~~

There is an edge in C, in such that are both still connected. (Why? Consider spanning tree in each component).

From a new graph G’ by removing and and connecting and on the now open vertices (add edges ). The degree sequence is preserved. Number of components drops by 1 so we can apply induction. Qed.

# Lecture 25.10.

Hall’s Condition:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


.

Definition: A vertex cover in a graph G is a set of vertices intercepting every edge of G.

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let be the size of a smallest (minimum) vertex cover. Example: .

Let be the size of a maximum vertex matching[[1]](#footnote-2).

König’s Theorem (1931): If G is a connected bipartite graph, then .

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Proof (by Romeo Rizzi 1999): We shall show and .

* : True since , M-max matching e contains a vertex of a vertex cover.
* :
  + Case 1: . Then G is a path or an even cycle.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


* + Case 2: . Let G be a minimal counterexample in its number of edges. Let .

Case 2.1: .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


By minimality of , . Thus, of , . Then will be a vertex cover of of size .

Case 2.2: . matching M of G of size . Let . Let . a vertex cover of of size (by minimality of G). Then W contains only vertices of M. Thus , since . W must contain u. Thus W covers f as well, thus it covers G. Thus .

Qed.

Definition: (G):=number of odd components of G, i.e. components with odd number of vertices.

Example: , .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Tutte’s matching theorem: A graph G has a perfect (spanning) matching .

Proof:

* : Let G have a M-perfect match. Consider

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


odd component Q of an edge of M “from” Q “to” S. Thus .

* : Assume , but G has no perfect matching.

Claim 1: is even.

Indeed, take , , i.e. G has no odd components. Claim 1 qed.

Let with so that has no perfect match but adding any edge to creates such.

We shall show that =Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
 (center component where each vertex is fully connected with all vertices of all other components).

Let , i.e. set of vertices of “full” degree.

Claim 2: Each component of is complete. If not, component in with [Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
] subgraph.

Since , , i.e. . I.e. Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
. By maximality of , has a perfect matching , has a perfect matching .

Consider :

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


It has components, even cycles and edges.

Case 1: belong to different cycles of .

Let , let . is a perfect matching of , which is a contradiction.

Case 2: , C is a cycle of . has a perfect matching , then is a perfect match of , which is a contradiction.

Assume . Since is even and has special structure, has a perfect matching, this is a contradiction.

Thus . Therefore , which is a contradiction.

holds because: Components of subgraphs of component of .

Summary for Tutte’s theorem: G has a perfect matching .

If G-regular bipartite graph with parts .

Proof: if G-k-regular. . Qed.

# Lecture 28.10.

TODO markierungen

Hall’s theorem: For a bipartite it holds that: matching saturating .

(Reminder) Tutte’s theorem: For a graph , it holds that: , where denotes the number of contained odd components.

Idea of classical proof of Königs theorem: Consider a maximum matching M. An alternating path starts in and alternates between edges of and .

Construct a vertex cover U as follows: , pick to be in if an alternating path ending in b. Otherwise pick a.

Abbx1

Corollary 1 of Hall’s theorem: If G is a bipartite graph with parts A and B, .

Then G has a matching of size at least .

Proof: Let G’ be as follows:

Abbx2

Let X be a set of vertices,

by Hall’s theorem, has a matching of size . In this matching at most q edges are incident to X, the rest is in G. Thus G has a matching of size . Qed.

## Colorings in graphs

A vertex coloring is a map . A coloring is proper if . The chromatic number is the minimal number of colors in a proper coloring of G.

Example: Abbx3

Example: Bipartite graphs G always have , by coloring each partition with one color.

The function denotes an edge coloring of G. It is proper if for adjacent edges . The chromatic index or edge chromatic number is the minimum number of colors in a proper edge coloring of G.

Example: Abbx4

Example: .

A color class is a set of objects of the same color. In a proper edge coloring, each color class is a matching. In a proper vertex-coloring, each color class is an independent set (induces empty graph).

Abbx5

Note: If , then G is k-partite, i.e. a subgraph of a complete k-partite graph.

Corollary 2 (of Hall’s Theorem): If G is a k-regular bipartite graph, then .

Proof: Induction on k.

* : For graph G which looks like:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


G is matching, .

* : is -regular it has parts A, B with .

Claim: G has a perfect matching.

Apply Hall’s Theorem (we want ).

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Fix . (“count from A”), .

G has an perfect matching M. Assign all edges and M to the same color, apply induction to (k-regular graph).

Qed.

Definition: A perfect matching is a 1-factor. A k-factor is a k-regular spanning subgraph.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


If , we say that is an f-factor if .

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Claim: Graph G, . There is a graph such that has a pefect matching if and only if G has an f-factor.

Construction of :-pairwise-vertex disjoint union of sets . . ’s induce no edges, there are all edges between and , induces a matching such that unique edge between .

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


G has f-factor has 1-factor.

Proof: See image.

Definition H-factors: H as given graph, G as graph, is divisible by . We say that a spanning subgraph of G is an H-factor if all its components are isomorphic to H.

Example: TODO Abb6

Hajnal & Szemeredi Theorem (1970): If n is divisible by k and G has a -factor, .

# Problem class 30.10.

…

# Lecture 04.11.2019

Last time:

* Perfect matchings
* Tuttes theorem
* k-factors, f-factors
* H-factors
* colors on s.t. adjacent vertices have different colors.

## Facts on Colorings

Given a graph and an ordering of its vertices , we say that a vertex coloring c is greedy if it uses colors from , colors in order, uses smallest available color on , i.e. the smallest color is not on .

Examples:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Claim: For any graph G: with denoting the maximum degree of G.

Proof: Use greedy coloring.

Examples: .

## H-factors

Theorem Hajnal-Szemeredi (1970): If k divides and has a -factor.

Theorem Kühn-Osthns (2009): For graphs , divides and for , then G has an H-factor, and , , where is the size of a smallest color class in a proper coloring of H.

If is divisible by and G has an -factor.

Corollary: divides and H-factor in G.

Definition: A proper coloring of a graph is equitable if color classes differ in size by at most 1.

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Corollary of Hajnal-Szemeredis Theorem: If is divisible by , then there is an equitable coloring of G in colors.

Proof: Let G with divisible by . Then with being the complement of G. .

by Hajnal-Szemeredis Theorem, -factor in .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


## Connectivity

Definition: A graph is connected, if and is connected , .

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Definition: is k-connected is called connectivity of G. .

Definition: is cut-set if has more components than G. If , v is called cut-vertex. If , e is called bridge.

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Definition: Edge-connectivity. , G is e-edge-connected if , , is connected.

Example: .

Lemma: .

Proof: All edges incident to a vertex of minimum degree form an edge-cut, thus . Note . Assume G is not complete. Consider , , F-cutset. Want to find vertex-cut of size .

* Case 1: not incident to F.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let A be a connected component of containing v. Endpoints of F in A form a vertex-cut.

* Case 2: : v is incident to F. Let v be a vertex of degree less than , exists since G is not completed. Claim that forms a cut of size .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Consider edges of F incident to , A is an vertex-set of connected components of containing v and consider , each of these is incident to F (distinct edges respectively), i.e. .

Qed.

## Planar graphs

Preperation for Mengers theorem:

Let be a path, then , , . Let F be a set of graphs, and the set of all vertices in these graphs.

, an is a path with one endpoint in A, another in B and no other vertices in .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Notation: largest member of pairwise vertex-disjoint A-B-paths.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


# Lecture 8.11.

TODO Abbildungen

, a A,B-path in P is a path such that one endpoint is in A and another in B, and no other vertices are in .

For , define pairwise vertex-disjoint A-B-paths. Also vertices that separate .

Definition: seperates if it holds that P contains an (?) of X.

If P is a family of paths, we define set of endpoints of paths in P.

Theorem (Menger’s): .

Proof: Assume that . Let be a family of pairwise vertex-disjoint -paths, . Observe that each vertex-A-B-seperator must have at least one vertex from each . [ABB]. Thus .

Now we want to show that .

Claim: If P is any set of *less* than than pairwise-vertex-disjoint A-B-paths, then there exists a family Q of pair.v.d.A-B-paths with and .

Abb

Proof of claim: Fix G, fix A, apply induction on . Basis: . Apply Königs Theorem. size of largest A-B-match. size of minimum vertex cover. Step: Assume that Claim holds for . Let . (Idea: Abb) Let be our -path-family, . , an -path not containing . (Abb)

Case 1: is disjoint from P. ,then the claim is proofed.

Case 2: Not Case 1: Let x be last vertex in R that is in P. Let such that . Let . Let . , . By induction a path system , , Q’-pairw.-vert.disj.A-B’-paths.

Abb

Let . Let with endpoints x, y, respectively.

Abb (3 cases)

Case 1:

Case 2:

Case 3:

Qed.

Corollary: For . Minimum number of vertices separating a and b = max number of independent a-b-paths, where “independent” means sharing only endpoints.

Proof: Apply Mengers Theorem to and . Qed.

Global version of Mengers Theorem: A graph G is k-connected independent a-b-paths.

Proof:

* : Let . Then . Pick , assume independent a-b-paths.
  + Case 1: . We have pairwise vertex-disjoint -paths. (, “closed Neighbourhood”). By Menger vertices separating a and b, which is a contradiction (Corollary also shows that).
  + Case 2: . Let . There are vertex-disjoint -paths. By Menger there exists s.t. , X seperates and in G’. . Then seperates v from either a or b in G’. Assume that X seperates v from a in G’. Then seperates v from a in G. Since , which is a contradiction.
* : Deleting <k vertices does not destroy all independent a-b-paths for any vertices a,b; thus .

Qed.

Definition: G is k-linked if set X of 2k vertices and any labeling of vertices in X: , pairwise-vertex-disjoint , .

Theorem\* (Thomas-Wollan 2005): G is 10k-connected is k-linked.

For edge-connectivity, apply Menger to line-graph L(G) of G. The Line-graph is defined as .

Theorem (Berheke): G is a line graph if it does not contain any of the following as induced subgraphs: Abb (Siehe Buch)

# Lecture 11.11.

Corollary 1: If G is a graph then

* The min. number of edges separating a from b is equal to the max. number of pairwise edge-disjoint a-b-paths
* G is k-edge-connected edge-disjoint u-v-paths.

Proof (Sketch):

* Given G, two vertices . Consider the graph , first consider , add two new vertices s, t and join s to all edges incident to a, join t to all edges incident to b.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


We know that the min. number of vertices in separating s from t is equal to the max. number of pairwise vertex-disjoint s-t-paths in G’.

* Second statement directly follows from first.

Question: Is there a “simple” procedure which constructs all k-connected graphs for ?

What about 2-connected graphs? A cycle is 2-connected.

Definition: Let H be a graph. An H-path is a path P that meets H exactly in its endpoints. ().

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


An Ear Decomposition of G is a sequence

such that

is a cycle

For each , is obtained from by adding a -path to .

.

Theorem 1: A graph G is 2-connected if and only if G admits an Ear Decomposition.

Proof: Let’s suppose that G has an Ear Decomposition . is a cycle, so it is 2-connected.

Assume is 2-connected, . Any cut-vertex of is on P. But any vertex of P is contained in a cycle in , so cannot be a cut-vertex.

Assume G is 2-connected. G must have a cycle C. Let H be the largest subgraph of G that can be built from C via Ear Decomposition. First, notice that H is induced: if . Then defines an H-path, which contradicts the maximality of H.

Aim: H=G.

Suppose not, . By connectivity, such that . As G is 2-connected, is connected, there is a path P avoiding w. Let w’’ be the first vertex of P in H. But this defines an H-path, which contradicts the maximality of H. So H=G. Qed.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Question: Is there a simple procedure for building 3-connected graphs? Yes!

Lemma 1 (Tutte): Suppose G is 3-connected and . Then such that is also 3-connected.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Proof: Suppose not. Then it holds that has a 2-cut. Let , let be the vertex that x,y are identified with. Let S be a 2-cut in . Then S contains (o.w. (?) get a 2-cut in G) and it contains some other vertex z.

Then defines a 3-cut in G.

Let C be the smallest component in . Pick , z, and C such that is minimized. Every vertex in S has neighbor in every component. Let be a neighbor of z.

has a 2-cut, defines a 3-cut {z,v,w} in G. v has neighbors in C’. However, . C’ does not contain v, so , contradicting minimality(?).

Theorem 2 (Tutte): G is 3-connected if and only if there is a sequence such that

* .
* For each such that and .
* .

Proof: Suppose G is 3-connected, if then apply Lemma 1 to G to find an edge xy with 3-connected.

(Note: , as G is 3-connected)

The number of vertices drops by 1 at each stage, so we repeat until we reach ; as .

The other direction is left to the reader.

Can every graph be decomposed into maximal 2-connected subgraphs? Not quite.

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Definition: Let G be a graph. A block of G is a maximal subgraph with no cut-vertex (with respect to the subgraph, not the whole graph G).

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


X is a cut-vertex of G, but not of .

Observation: If B is a block of G, then either it is a maximal 2-connected subgraph or . B is either an edge or an vertex.

Proposition 1: If are blocks that intersect, then .

Proof: Suppose . We know that , are connected. But then, , is connected, because intersects in vertex. So has no cut-vertex and this contradicts the maximality of .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


# Problem class 13.11.

Let be a bipartite graph with parts A and B. Suppose .

Suppose there is no matching covering A.

Question: At most how many independent s-t-paths can there be? There are of these since there is no matching covering A. By Menger, separating s from t. Write . So we have . Then , which contradicts Halls theorem.

# Lecture 15.11. TODO

TODO eigener Aufschrieb

Last time: Let G be a graph. A block in G is a maximal connected subgraph with no cutvertex.

Proposition: Any two distinct blocks intersect in vertex.

Proposition: If are distinct blocks in G and , then is a cutvertex of .

Proof:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


If is not a cutvertex, obtain a path in . contains a -path, say Q. But is a larger block than , contradicting the maximality of .

We know that every edge of G lies in a unique block.

Example: Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Definition: A Block-cutvertex graph of G is a bipartite graph with partitions B and C, where

cut-vertices of G

blocks of G

Join if and only if .

Theorem: If G is connected, then its block-cutvertex-graph is a tree.

Hint: Suppose it was acyclic and consider a shortest cycle.

Theorem (Mader): If G is a graph with average degree , then G has a subgraph that is -connected.

Proof: works. We prove the following by induction on .

: and , then G has a k-connected subgraph.

(Check: implies Mader.)

Base case: , calculations show that , so it’s a tree.

Let’s assume , and the result holds for smaller value sof n. If , consider , apply induction hypothesis to .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


So we may assume that .

If G is connected, then we are done. Otherwise such that has components.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


By the minimum degree condition, . So if for some , then apply our Induction Hypothesis to . Otherwise .

We have .

Which is a contradiction. Qed.

## Planar graph

Motivation: A graph drawn in a plane without crossing edges is a plane graph.

A graph is planar if it can be drawn in such a way.

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Question: When can you “tell” that an abstract graph is planar?

## Topological Definitions

* , the straight line segment between them is .
* Let . We say they are homomorphic if such that f is a bijection, and are continuous [B can be obtained from A by continuously deforming A].
* A polygon  is a union of finitely many line segments, which is homeomorphic to .
* An arc is a union of finitely many line segments homeomorphic to .

are the endpoints of the arc. This arc is said to link to its endpoints. is P’s “interior”.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


* Let be an open set.

being linked by an arc in U is an equivalence relation on U.

Equivalence classes we call “regions” (they are also open)

* Closed set seperates a region of , if has more than one region.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


* Frontier of a set is the set Every neighbourhood of y intersects .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Theorem (Jordan Curve for Polygons): For any polygon has exactly two regions, both of which have P as frontiers.

Lemma (“Three paths lemma”): Let be internally disjoint arcs with the same endoints.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Then

1. has 3 regions with frontiers .
2. If P is an arc between the interior in and that runs through the region containing , then .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Definition: A plane graph is a pair of sets such that

* Every edge in E is an arc between two vertices.
* Different edges have different sets of endpoints (“no multiple edges”)
* The interior of an edge contains no vertex and no point of any other edge.

A plane graph defines a graph on in the obvious way (“G”, “(V,E)”).

Suppose G is a plane graph. is open, and we call its regions the faces of G.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


* The unbounded face is the outer face of G.
* The other faces are the inner faces.
* denotes the set of faces in G.
* A planar embedding of an abstract graph is a bijection , where is a plane graph such that if and only if there is an arc in between .

“” is a drawing of G.

G is planar if it has a planar embedding.

Lemma: Let G be a plane graph, . Then

1. If X is the frontier of a face of G, either or .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


1. If e lies on a cycle , then e lies on the frontier of exactly two faces, and these are contained in distinct faces of C.
2. If e lies on no cycle, then e lies on the frontier of exactly one face.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Corollary: The frontier of a face f is always the point-set of a subgraph.

[TODO letzte abbildung aus eigenem Aufschrieb]

# Lecture 18.11.

Today: Eulers formular, corollaries minors, topological minors, Kuratowski’s theorem.

* Planar graphs: Graphs
* Plane graphs: Not graphs (, edges are not pairs of vertices but arcs!)

Goal:

* Kuratowski’s theorem – structural character
* Euler’s theorem - #vertices, edges, faces

We use the notation .

Theorem (Euler): Let G be a connected plane graph, then .

Proof: Induction on m.

* Basis: , then G is a tree, thus there are no cycles, thus there is exactly one face. Then .
* Step: : Let and stat. (?) holds for all plane graphs with at most edges. Since , G is not a tree, thus there exists a cycle, . Let , e is on the boundary of distinct faces of G.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let be obtained from G by deleting e.

Then , the set of faces of G’ is equal to the set of faces of G minus .

We have by induction. Qed.

Corollary 1: A plane graph on n vertices has at most edges. (Equality is achieved for triangulations). ()

Proof: Let G be a plane triangulation. Let .

Then , . Thus . Plug in Qed.

Corollary 2: If G is a bipartite plane graph, then . ()

Proof (Outline): Note that each face has a length of at least 4.

## Minors

(Notation: G denotes a large graph, X denotes a small graph)

X is a minor of G if X is obtained from G by edge deletions, contractions or vertex deletions, write .

Examples:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


(assume connectivity) if ( indicates disjoint union or partition) such that is connected for if an edge between .

are called branch sets. Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


We say: , X is a minor of G, G is an X-minor, G contains X as a minor, .

## Topological minors

A graph G is obtained by a single edge-subdivision from graph H if .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


G is a subdivision of H if G is obtained by a series of edge-subdivisons from H. We write .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


X is a topological minor of G if , i.e. if G contains a subdivision of X as a subgraph.

Note: .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Kuratowski’s theorem (Wagner’s theorem): The following statements are equivalent.

* F is a class of planar graphs
* F is a class of graphs with no
* F is a class of graphs with no

Obseration: Let such that G is edge-minimal with respect to this property. If -branch sets of G, is a tree and there is exactly one edge between and if and no edges between and if .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Moreover either has one vertex or it has leaves.

Observation: If -graph, and then .

Proof outline: Consider such that , -minimal.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let be the union of and all edges leaving for a branch set . Since is a tree with at most 3 leaves, is a spider with at most 3 legs. Then form the branch vertices of TX. Qed.

# Lecture 22.11.

Theorem (Kuratowski): The following statements are equivalent:

* is planar

Last time:

* Observation 1: , G is edge-minimal and are branch sets of G corresponding to , then are trees and there is exactly one edge between and if and only if .
* Observation 2: , then .
* Observation 3: or G is not planar
* Lemma 37: or or
* Lemma 38: and G is planar
* Lemma 40: and is edge maximal with regards to not having .

Proof for Observation 3:

Note that are not planar since Eulers formular () fails. We had (planar), (planar no triangle). In : , which is a contradiction.

In which is a contradiction. Thus are also not planar, otherwise embed , take a union of edges on a path between branch vertices to form an arc. (merge subdivisions).

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


We end with a planar embedding of , which is not possible and thus a contradiction. Qed.

Proof for Lemma 37:

* “”: Let with or . We know that .
* “”: Let G with or . If then since (Observation 2). If , let be edge-minimal, . with branch sets .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let be a graph consisting of all edges incident to . .

Case 1: All are then .

Case 2: Without loss of generality .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let be an edge between and . Let be in such that there are three independent paths from to and neighbor of or . Then form branch vertices of .

Qed.

Proof of Lemma 38:

Induction on . Basis (any such graph is planar since is planar). Assume . By Tutte’s Lemma such that . Since and and by induction, is planar. Consider plane embedding of with being the vertex obtained by contracting . Let’s “uncontract” .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let the face of be bounded by a cycle , . Let . Let be a path on C from to .

* Case 1: .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Then there exists with branch vertices with , which is a contradiction.

* Case 2: (with being the interior of )

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


There is with branch vertices .

* Case 3: for some i.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


This actually creates a planar embedding of G.

Qed.

Lemma 39: Let be a graph with , G is edge-maximal with respect to not containing . Let be a vertex-cut, . Then is edge-maximal with respect to and S contains an edge.

Proof of Lemma 40:

Induction on . If . Let . Assume , i.e. vertex-cut , . Let , . We know that (implies Lemma 37). By Lemma 39, - edge-maximal does not contain and . By induction . By Lemma 38, is planar, . Consider planar embeddings of such that is an unbounded face.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Case 1: . at most two internally disjoint path of H outside of . Then these paths (planar graph of two touching cycles where one path on one cycle goes through the other cycle).

Case 2: and contain branch vertices of H. Since , we see that . (We cannot pass subdivided edges of through ). Thus and exactly one branch vertex, say . There are 3 internally disjoint paths in H. But these paths .

Proof of Kuratowskis theorem:

1. G is planar

: Lemma 37

: Observation 3

: . Add edges preserving this property and get G’. Lemma 40 and 37 implies . Lemma 38 G’ is planar, then is also planar.

Qed.

# Lecture 25.11.

[TODO incomplete, see Anne]

Note 1: If G is maximally plane, then .

Note 2: If G is plane, , then each face is bounded by a cycle.

Note 3: If G is planar then .

Proof: By Eulers theorem: . , i.e. .

Fary’s theorem: If G is planar, , then G can be embedded in the plane such that all edges are straight line segments.

Proof outline: Induction on .

Base case: .

Step: Let . Let . Apply Induction to G’. We have

Abb1

Apply induction to to get that a face cont. (?) v in G is a polygon with at most 5 vetices. Insert v such that it can be joined to the corners by straight lines segments.

Qed.

Definition: Poset – partially ordered set. Let X be a set, a relation “” is a subset of . Example: . A relation “” is a partially ordered set if it is reflexive, antisymmetric and transitive.

* Reflexive:
* Antisymmetric:
* Transitive:

Example: “”

Example: “” is a total order or a chain if or .

The incidence poset on a graph is given by .

## Cover Relation diagram

TODO

## Dimension of a poset P

TODO

Schnyders theorem: A graph G is planar , with denoting G’s incidence poset.

4-color-theorem: If G is a planar graph, then .

5-color theorem: If G is a planar graph, then .

Proof: Induction on .

Basis: , works.

Step: Assume the statement is true for any planar graph on less than n vertices. Consider G as planar graph with . Assume that G is maximally planar. Then .

Let such that . Consider a plane embedding of G and .

Abb2

Let be a proper coloring. It exists by induction.

Case 1: . Let . Set if . Then is a proper coloring.

Case 2: . Without loss of generality, .

Abb3

Let be a connected component of a subgraph of spanned by colors and containing .

Observe: If , swap colors in , color v with 1. Thus path with colors on its vertices.

Similarily we could assume that path with colors on its vertices.

Since this path does not share a vertex, there is an edge crossing, contradicting planarity. Qed.

Abb4

Wrong proof of Kempe: TODO

# Problem class 27.11.

Proof techniques

1. Induction
2. Extremal Principle (Contradiction, …)
3. Counting
   1. Dable counting
   2. Pigeonhole Principle
   3. Parity arguments
4. Use a result from the lecture
5. Algorithmic/Iterative
6. Hopeless proof by contradiction

# Lecture 29.11.

Today: for planar graphs G, Heawood formular, general coloring results (Brooks theorem).

For a graph G, the choosability or list chromatic number, , is

I.e. if for any lists of size k assigned to vertices proper coloring from these lists and list assignment with lists of sizes such that no proper coloring from these lists exists.

Example: , .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Note: since we can choose the lists to be {1, 2, …, k}. If it means we cannot color from these lists.

Theorem (Thomassen): If is planar, then .

Note (Mizrakhani): planar graph G, .

Proof of Thomassen: Assume that G is a inner triangulation, i.e. all bounded faces are triangles and its bounded face is bounded by a cycle.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Stronger statement: Let C be the cycle bounding the unbounded face of G, , . Let such that otherwise.

Then G is colorable from these lists. We prove the stronger statement by induction on .

Basis: , thus with . . Let .

Step: Assume and the statement holds for smaller graphs.

* Case 1: C has a chord.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


I.e. an edge between non-adjacent vertices (on C), i.e. , as the chord. . Let w.l.o.g. . By induction proper coloring of from .

Let .

Let such that otherwise.

By induction from lists . This is also an -coloring. Let be a proper coloring of G from lists L.

* Case 2: C has no chord.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let . Apply induction to .

Let .

Let

By induction, is a proper coloring from .

Let .

Let

Let .

Then c is a proper coloring of G from L, which proofs the stronger statements.

Qed.

Heawood formular 1890: Let G be a graph. 2-cell-embeddable on a surface S with Euler characteristic (

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let , then .

Moreover is embeddable on S unless S is a Klein bottle ().

Eulers formular: .

Examples:

* on a torus

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


* on a Klein Bottle

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


## Colorings

Basic facts:

* (with greedy coloring)
* ( being the clique number, i.e. the max k such that )
* ( being the indpeendence number, i.e.
* “Tight” examples:
* “Bad” examples:

if the star has n leafs.

# Lecture 02.12.

Observation 1: Let , then . Why? Color properly with colors, color properly with colors, permute colors in such that color of is the same in both colorings.

Lemma 1: If G is a 2-connected graph, G is not a complete graph, , then such that is connected.

Proof of Lemma 1: Let such that (not a full degree).

* Case 1: has no cutvertex. Since , there is a vertex non-adjacent to w. Thus there exists a vertex y such that . Since y is not a cutvertex of , is connected. Let a vertex in .
* Case 2: has a cut-vertex. Note w is adjacent tp a vertex (that is not a cutvertex of ) in each leaf-block of .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Let be such neighbors of w in distinct leaf blocks, . Note is connected. Since , there is a neighbor of w in . Thus is connected.

Qed.

Brooks theorem: Let G be a connected graph, G is not a complete graph, and G is not an odd cycle, then .

Proof: Induction on , assume that the theorem holds for graphs on less than vertices.

* Case 1: G has a cutvertex v. , .

If is not clique, not an odd cycle, then by induction.

If is a clique or an odd cycle, then . Then . In any case . Thus .

* Case 2: . G is an even cycle or a path, .
* Case 3: .
* Case 3.1: . Order vertices of G: such that . Each vertex , has a neighbor . (we can do this by trimming leaves in a spanning tree with root v).

Use greedy coloring. The number of colored neighbors at each step is at most , so there is color available.

* Case 3.2: is -regular, i.e. . . By Lemma 1, graph {x,y,z} where is connected. Let us order as such that .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


We can do this since is connected. Use greedy coloring. Since , , there is an available color for v.

Qed.

Mycielski’s construction: Let be graphs: , given , construction ( being disjoint unions), , .

Claim: has no triangles, .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Note: . True: . To color : color , using colors, mimic this in , use new color in w.

Claim 1: . Assume triangle in . W is not in the triangle since is an independent set. Inductively, the triangle is not induced by . Let our triangle be . Since , similarly . Then form a triangle in , which is a contradiction.

Claim 2: . By induction on k, . Assume . Assume that . Wlog let be a proper coloring, . Idea: Take recolor in colors from .

Let . Note: . So uses only colors from [k-2].

Claim: is a proper coloring of . Assume not, i.e. . since -twin of , which is a contradiction. Thus is a proper coloring of with k-2 colors, a contradiction to the assumption . Qed.

## Perfect graphs

A graph G is perfect, if for any induced subgraph H of G it holds that .

Example: Any bipartite graph is perfect (both = 2). is perfect (both = 2). The cycle is not perfect, . Any cycle is not perfect.

Strong perfect graph theorem, proven by Chudnowsky, Seymour, Thomas, Robertson 2005: is perfect and

(Weak) perfect graph theorem, proven by Lov´asz: is perfect is perfect

# Lecture 06.12.

Last time: Brooks theorem, Mycielski’s construction, strong perfect graph theorem, perfect graph theorem ( is perfect is perfect).

Today: Tutte’s construction, properties of , edge colorings: König’s & Vizing’s theorem.

Tutte’s construction: Let be a graph with , (e.g. there are no triangles). Construct a graph .

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


is built of vertex disjoint copies of on vertex sets and disjoint from these the set with and extra matchings between elt (?) subsets of U and respective ’s.

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Assume , i.e. 3 colors are used on U. If each color class in U has size , then we have 12 vertices in U, which is a contradiction. Thus there are 5 vertices in U of the same color. Thus the respective copy of can not use this color, so the total number of colors is .

Lemma 1: .

Proof: Let be color classes of a proper coloring of G.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


edge between and . If not, make a new color class , giving a proper coloring with less than colors. Thus . Qed.

Lemma 2: Let be the length of longest directed path in directed graph . Then where is the orientation of G.

Definition: D is a directed graph if . D is an orientation of G if and edge uv of D there is exactly one pair or in .

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


A directed graph is transitive if it does not contain directed cycles. Note: transitive orientation D: Put arrows pointing to the right.

Proof of Lemma 2: We need to show that orientation D of G, . Fix D. Let be the largest transitive (spanning) subdigraph of D.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


Introduce a vertex coloring c of : length of longest directed path in D’ ending at ) + 1.

Claim: c is proper.

Proof of claim: If then . If are joined by a directed path in , then , i.e. . Let . If are on a directed path in , by above. If are not on any directed path in , i.e. , we can add to . If this addition created a directed cycle in the new , then there was a directed path in containing u and v, which is a contradiction. Qed for claim.

Qed for lemma.

Note: s.t. .

Proof: Consider a proper coloring of G with color classes such that v can not be moved to . Orientate edges from “right to left”.

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


## Edge-Colorings

where is the edge chromatic number or chromatic index.

Example:

Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen
Freihandzeichnungen


* .
* since degree of spiders is 2n, #edges in a color class on average is color class on n+1, thus vertices which is a contradiction.

Note: .

Königs theorem (1916): if G is bipartite.

Vizing’s theorem: for any graph G.

Q: Are there 3-regular (cubic) graphs G with ? “Snarks”. (e.g. Petersen graph).

Proof of König’s theorem: Induction of . Basis . Step: Let , G is bipartite. We want . By induction for an edge (because G is bipartite, ). Let be a proper coloring. Let (missing colors). Let be defined analogously.

Note: , since .

Case 1: . Extend c to by .

Case 2: . Let . If a maximal path containing x, colored and such that it does not contain y. Flip colors and on this path and color with .

If such a path contains y, then it is with alternating coloring , thus is used on an edge incident to y, but which is a contradiction.

# Lecture 09.12.

Recall Vizings theorem: .

Recall .

Proof: We want to show that . Induction on . By induction hypothesis, any “proper” subgraph of with satisfies .

Claim: path colored and .

Fix x. Let be a proper coloring of from . Let . Let be the maximal sequence from such that .

Let . Note: .

Claim 2: such that and .

Proof of claim 2: If , then , so which is a contradiction to the first claim.

Thus for some . In this case take , extending the “fan” and contracting the maximality of k. (End of proof of Claim 2).

By claim in path between and , call it P. In path, call it . is between and . and have the same coloring in . Note: is a connected graph with vertices of degree 1. Thus has a vertex of degree 3, but is properly edge-colored with 2 colors and which is a contradiction.

Lemma: .

Proof: (“The list chromatic number could be much larger than ”) Let the parts of G be X and Y. . Let .

Claim: We cannot color this graph from these lists. Assume c is such a list coloring. Let wlog. , let be such that . Let …, Let are distinct. Consider : Let . Then which is a contradiction.

[Notes: G above has vertices in each part and distinct lists of sizes k from the set of colors .]

If , .

## Variants

Total colorings: is proper if no two adjacent or incident objects have the same color. Minimum number of colors in G is denotated as .

Vizing’s conjecture: .

Best known bound (Melloy-Reed): .

In reality often better:

# Lecture 13.12.

TODO eigener Aufschrieb

# Lecture 16.12.

Recall for a given and a graph H,

where denotes the class of extremal graphs (for H).

for odd n, for even n. is either a set of triangles or a star.

Turan theorem: .

Recall: is a Turan graph, that is an n-vertex complete balanced r-partite graph.

Notations: .

Preparations for Turans theorem:

Lemma 58: .

Proof: Let parts of be and parts of be for new distinct .

Abb1

Then . Qed.

Lemma 59: Let G be an r-partite n-vertex graph with largest number of edges. Then .

Proof: G is completely r-partite, otherwise add edges. Assume G is not balanced, i.e. not . Then G has parts and for some i, j. Move one vertex from to to get a complete r-partite G’ with parts . Then it holds that

Which is a contradiction, Qed.

Lemma 60: For a fixed r,

Proof: Each part in has size , , thus

Qed.

Turan theorem: .

Proof: Fix r. Use induction on n. If , then , thus .

Assume and statement is true for any smaller value of n. Let , we want to prove: . Then (if not, add edges to keep G being free). Let , .

since .

.

Since the bounds match, we must have in , i.e. and each vertex in sends exactly edges to K. By induction (since ), i.e. , v is non-adjacent to exactly one vertex in K.

Assume are parts of . Assume . Then and form , which is a contradiction.

Then one can order vertices of K as such that . Then are parts of i.e. .

Qed.

## Knowings on Extremal Theory

is known if .

if thus H bipartite.

.

Conjencture (Erdös): and .

Theorem: . If divides n, the equality holds.

Proof: Induction on n. If , thus .

Let . Let G: . We want: .

* Case 1: G is disconnected, i.e. are disjoint. Then .
* Case 2: G is connected. Claim: . If not, i.e. . Consider the longest path, arrive at a contradiction.

Consider a longest path P on vertices. Since , cycle of length m in G, consider . Such a cycle exists because G is connected. But then exists a longer path P’.

Let . Let . , which is a contradiction.

Claim: for some v. .

Qed.

# Lecture 20.12.

Last time:

Corollary Turans theorem:

Observation 1: Let G be connected, with its longest path having m vertices, then .

Proof: If not, i.e. , path on m+1 vertices, which is a contradiction.

Abb1

Observation 2: If and path if then .

Abb2

Observation 3: Let k divides n, then

Abb3

if .

Theorem: .

Proof: We need to show and . Use induction on n. If . If G is a vertex-disjoint union of .

If G has a vertex v of degree . Thus, assume is connected, . Let vertices in a longest path in G, assume that .

Consider a path . We have , otherwise a longer path exists. By observation 1 and 2, if , i.e. out of , the possible neighbors of , vertices are not allowed, i.e. not in . Then . On the other hand, .

Qed.

Erdös-Süs-Conjencture: G contains any vertex-tree as a subgraph, i.e..

Theorem: Let tree on k edges: .

Proof: Claim: If such that .If not, is -degenerate, i.e. which is a contradiction.

Greedily embed T in G’, more formally: . , we claim by induction on m. Trivial basis is . Induction step for : Let , where v is a leaf of T adjacent to u.

By induction . We have , thus . So, . . Qed.

Note: fixed, as tree, .

Erdös-Stone-Simonovits theorem: as graph: , .

Recall Turans theorem, .

Idea of the proof:

Lower bound: , since

Upper bound: Take a graph G, . Apply induction on the number of parts to show that , where is the complete -partite graph with parts of sizes t, t is “large”. Note that since any graph with is a subgraph of a large r-partite complete graph.

Chratal-Szemeredis theorem: : , then and .

Zarankiewicz function: maximum number of edges in the subgraph of a complete bipartite graph with parts A, B with that contains no subgraph with a part of size s in A and a part of size t in B.

Abb4

Plan: .

Kövari-Sös-Turan-Theorem: .

Proof: with part of size s in A and part of size t in B. Let .

holds since there are at most stars with a leaf-set B’, otherwise they form . The number of such -s is . Thus: .

(TODO next year)

# Lecture 10.01.

Last time:

Turans theorem (alternative):

Erdös-Sös conjecture: and T-tree.

Erdös-Stone theorem (without proof):

Zaarankiewics function: max #edges in a bipartite graph with parts A and B, such that no copy of with part of size s in A and part of size t in B.

Kövari-Sös-Turan: .

Proof: Let , no , s in A, t in B. Let stars of size t with centers in A. ( describes the amount of ways to choose t vertices in B).

Notes: avg. degree of a vertex in A. We want .

Lemma: .

Proof: Let , . We want , thus an upper bound. Let be bipartite with parts .

Abb1

Claim: , otherwise there is in G.

Then . Qed.

Corollary: , .

Theorem: .

Proof: Consider n vertices, choose an edge randomly with probability (independently). .

( describes the ways to choose t2 vertices, is the probability of a fixed to appear).

Let be obtained from G by deleting an edge from each copy of in G. Thus .

Thus .

Qed.

Construction of -free (or -free) G on n vertices and edges.

Let , p being a prime. .

Claim 1: . Assume not.

ABb2

i.e. fixed a, b, c, d the system has distinct solutions.

if unique x . If , qed for Claim 1.

Claim 2: . ().

For a fixed the number of neighbors of of is the number of solutions of . I can choose x in ways, then y is uniquely defined. I.e. the .

If p is large, . Qed.

Big questions: ?

Conjencture (Erdös): . Such r are called Turan exponents.

## Known bounds

for large n.

Recent findings (Tao Jang, Yu Qiv 2019+): is a Turan exponent.

Oliver Janzer (2019): integers is a Turan exponent. Specifically where is a -subdivision of .

# Lecture 13.01.

Szemeredis regularity lemma: For a given graph G, , let #edges between X and Y. Let density of the pair .

For , the pair is -regular if .

Example:

.

Let G be a graph, , let be a partition of V. This partition is -regular if

1. All but at most pairs are -regular.

Note that .

Theorem: Szemeredis Regularity Lemma: such that any graph of order at least m has an -regular partition .

Note: is constant and independent on .

Proof idea:

Mean square density of a partition ,

because . .

Idea of the proof:

* Start with an arbitrary partition.
* If not -regular, refine the partition in doing so, increases by
* Repeat…
* Stop because .

Embedding (blowup) lemma: Let G be a graph. If is an s-blowup of and .

Outline of proof of Erdös-Stöne theorem:

We want: Given G, , then .

Apply the regularity lemma to G with R-reduced graph ().

.

Proof of \*: done in lecture.

## Ramsey theory

Fact: any coloring of in red, blue contains a red or blue triangle .

Proof: Let . Assume wlog. X has three red incident edges.

So, are red. If is red for , then is a red triangle. Otherwise is a blue triangle.

Ramsey numbers:

all edges are red.

Monochromatik H H with all edges of the same color.

Theorem: .

Lemma:

Proof: Let . Let . Let . We construct a sequence of vertices and of subsets of vertices such that colors of , are the same.

Let be chosen arbitrarily…

# Problem class 15.01.

Theorem: are integers and , then constant such that .

Proof: Define a graph G on where we put an edge uniformly at random with probability p, these choices being independent. We want a graph with “many” edges and “few” . random variable counting #edges. random variable counting #.

.

.

# Lecture 17.01.

. Abb1

Theorem: .

Proof: Lower bound.'

We need a coloring of into red and blue with no monochromatik . Consider color E randomly with red and blue, such that , color edges independently. Let .

.

.

For .

Thus

there is a coloring of in red and blue with no monochromatik .

Qed.

Some notations:

– diagonal Ramsay number

– off-diagonal Ramsey number

..

Why: . If red edge red . If there is no red egde, we have blue . Qed.

For the lower bound, color blue, i.e. no red , no blue , i.e. .

Lemma: .

Proof: Let with no red , no blue . Let . Let .

Abb2

Claim: .

If not A contains either red or blue . Note that red K\_(k-1) with x gives red , which is a contradiction. We also have no blue . This proofs the claim.

Similarly .

Thus .

Thus . Qed.

Lemma: .

Proof: Induction on , basis , .

Step: .

Qed.

Corollary: .

## Graph Ramsey number

Let G and H be graphs. .

Note .

Abb3

Lemma 3: .

Proof:

Lower bound: Color no red . In this coloring any blue matching must have an vertex of each edge in B. But . Thus no blue .

Upper bound: Induction of .

: .

Step: Consider , we want to find red or blue . Note

If c is monochromatic, i.e. all edges are either red or blue, then we have either red or blue . Thus c is not monochromatic. I.e. we have Abb4

Consider our colored graph with deleted . This graph has vertices, i.e. . Thus we have either red or blue in . Then, together with either xy or yz we have red or blue in . Qed.

## Multicolor Ramsey Numbers

With graphs .

Lemma 4: .

Proof:

Lower bound: Color edges between bipartite parts with one color, then color the edges between bipartite subparts of each of the bipartite parts with next color, and so on.

Upper bound: Induction. . Consider . color, say K, x is incident to edges of this color.

.

If S induces an edge of color K, we have in color K. Otherwise S uses only colors .

, there is a monochromatic triangle induced by S. Qed.

## Hypergraph Ramsey Numbers

Notation: For a set X,

is an r-clique of order on vertex set X.

# Lecture 20.01.

Definition:

Recall -r-clique, – complete graph, clique.

Theorem (Hypergraph Ramsey): integers: .

Proof: Let . Let , let such that .

We have . Apply “Ramsey” to c’ in inductively.

We have that either red -clique on vertices in under or blue -clique on vertices in under . Assume the former. Recall . Apply “Ramsey” inductively (on ) in under . We have that either (1) red clique in on vertices or (2) blue clique in in vertices.

If (2) happens, we are done. Assume (1) holds. Thus is a red r-clique on p vertices.

Application 1 (Erdös-Szekerös): such that if X is a set of N points in the plane (no three on a line), then X contains vertices of convex -gon.

Proof: Let .

Let X be a set of N points in (generic position). Let such that .

By definition of Ramsey numbers, we have either

1. is red, or
2. is blue.

If (2) happens, then the convex hull of is a triangle. Let be a line through two “internal” vertices . Let be vertices of the convex hull of on the same side of . Then red, which is a contradiction. Thus (2) is impossible.

If (1) holds, , is red. We want to show that forms a vertex set of a convex m-gon. Let , if -convex m-gon we are done.

Otherwise corr. to a convex k-gon, . is a triangle. If z-internal for elf of is internal to some of the triangles. Say . Then , which is a contradiction. Qed.

Andrew Suk 2016: smallest .

Another Erdös-Szekeres theorem: Any list of more than numbers contains a non-decreasing or non-increasing sublist of more than n numbers.

Example: .

Proof: Let be a list of reals. Let the length of a longest nonincreasing sublist ending at , and the length of a longest nondecreasing sublist ending at .

Assume no (monoton) sublist on more than n elfs. Thus #disttinct pairs . But we have . Thus .

If . If , which is a contradiction, Qed.

Application 2 (Schurs theorem): .

( monochromatic solution of this linear equation)

Proof: Let , where . Let such that if , . We know (by definition of R) that monochromatic triangle under , i.e. . Let , then . Qed.

Generalization to systems of equations: Let , A is called r-regular if monochromtic solution of for any coloring .

A matrix A fulfills column condition if partition of set of columns such that if , then (1) , (2) is a rational linear combination of columns from .

Rados theorem: If a matrix A satisfies column condition, then it is regular .

Theorem (Ray-Chaudhuri and Wilson): . Then .

Theorem (Frankl-Wilson):

# Lecture 24.01.

.

, q-prime power.

Theorem (Frankl & Wilson): , k-large. Moreover there is an explicit construction giving this bound.

Proof: We shall construct a graoh G on vertices such that . Later, color red, rest of vertex paris blue. This coloring has no red , has no blue .

, q is a large prime power.

.

If by .

If G contains an independent set of m vertices. Thus, i.e. .

By .

So we have G on vertices such that no clique or independent set on more than m elements, . We want: .

We use . First bound k in terms of q, then bound n terms of k. We have .

Take .

Note: If k-large, then for any . Take log: . On the other hand, for any m-fixed, take log

## Induced Ramsey Numbers

Example: H=Squaregraph, we want G.

Note: . Take .

Conjencture (Erdös): . Best known .

Goal: exists for bipartite H.

Definition: Incidence graph .

.

Lemma 1: Any bipartite graph is an induced subgraph of an appropriate incidence graph. Specifically, if , then .

Proof: Let .

Embed into with . Let , where .

Lemma 2: Any coloring of edges of contains an induced monochromatic , where is multicolor colors hypergraph Ramsey number with uniformity and unavoidable clique size .

Proof: Let .

Color vertices of with . #colors in is . By Ramsey theorem such that have the same color , ex. .

Assume red is the majority color in , i.e. each vertex in send red edges to Z. We shall find in red.

We shall embed X into each vertex of Z.

Let let such that . Then and form a red induced copy of . Qed.

# Lecture 27.01.

. We know .

Chratal-Rüdl-Szemeredi-Trotter: positive

Choonbun Lee (2015): positive .

## Random graphs

Consider a set of all graphs on n vertices.

is the Erdös-Renyi random graph, and is created by choosing edges independently with probability , In particular with a given graph G on n vertices and m edges.

Abb1

Note: , with m being the number of edges of G.

Lemma 1: Let , p constant, H be a fixed graph, , .

Proof: , . Let .

, where r is the and and r is independent on n. We have .

Thus .

Lemma 2: integers, . .

Proof: with being the empty graph. Qed.

Lemma 3: , then , where .

Proof of Lemma 3: Let be a set of all cycles of length k in . For , let . Then cycles of length k in G.

. Qed.

Theorem (Erdös, Hajnal): graph and .

Idea: # cycles of length is . Delete a vertex rom each of these, get a graph with . We know that .

Proof: Fix , let . Let Y be # cycles of length in G. By Lemma 3, . .

By Markov’s inequality because , thus .

By Lemma 2, . Indeed .

Choose n large enough such that and . Thus a graph on n vertices with cycles of length and . Let be obtained from by deleting a vertex from each cycle of length , i.e. . Thus . Qed.

Expand . Thus G’ is the desired graph.

## Graph properties and threshold functions

A graph property is a set of graphs.

Example: .

Let , we say that almost always has the property if .

A function is a threshold function for if

1. , then almost always does not have .
2. , then almost always has
3. 🡪 no
4. 🡪

If for

almost always has

If or

almost alwas has no .

If

(?)

# Problem class 29.01.

## The Probabilistic Method

Example: Any graph G with m edges has a bipartite subgraph with edges. (Trivial proof: Consider bipartite subgraph with maximal edges)

Probabilistic proof: Define a subset by including a vertex by including a vertex with probability . For every edge : (Crossing edge: edge that goes from to ).

Let ; .

There is at least one choice of T such that . Qed.

is a discrete random variable. Suppose .

Example: In Tournaments. Tournament is obtained by orienting the edges of the complete graph (choose directions for the edges).

Consider the property of a graph T. For every k-element subset there exists a vertex y outside of T that “beats all of S” (that has k edges leading *into* S).

Let’s show that such tournaments exist. Let T be a tournament on n vertices choosen uniformly at random (by orienting edges with probability ). consider as “S violates property ”.

Then with positive probability none of the bad events occur, i.e. there is a tournament with property .

# Lecture 31.01.

Recall on Threshold functions: For a property , is a structural function for , if the following conditions hold:

1. .
2. .

Recall: Markov’s inequality for a random variable

[TODO ANNE]

# Lecture 03.02.

## Hamilton Cylcles

Hamilton Cycles were introduced by Sir William Rovan Hamilton 1857 via a game “Icosian game” (Traveling Salesperson problem, min. weight of a Hamilton Cycle, edges are weighted).

A Hamilton Cycle is a cycle in a graph that is spanning, thus if it contains all vertices. A graph that has a Hamilton Cycle is called Hamiltonian graph.

Lemma (necessary condition for Hamiltonicity): If is Hamiltonian, then : #components of is at most .

Proof: Let be a Hamiltonian Cycle of . Let components of . There are at least 2 edges of between each component of and . If edges of between and , we have and (C is 2-regular). Then . Qed.

Theorem (Dirac): If , then G is Hamiltonian.

Proof: Let . Let be the number of vertices in a longest path.

Claim: Any path on k vertices span a cycle. Assume not, consider a path . Then

1. If
2. (maximality of P)

Then #non-neighbors of in #neighbors of in .

#neighbors of nonneighbors of in , which is a contradiction to the Claim.

Case 1: by Claim, spans a cycle on vertices, i.e. Hamiltonian cycles.

Case 2: . Note that is connected, otherwise a vertex in a smallest component has degree . By claim, spans a cycle. There is an edge between a cycle C of length k and a vertex outside of the cycle. Then C and e span a path on vertices, which is a contradiction.

Other degree conditions:

Ore’s theorem: A graph G on vertices is Hamiltonian .

Komlós-Sárkkózy, Szemerédi (gen. of Dirac): , then has a power of a Hamiltonian Cycle, that is a subgraph obtained from a Hamiltonian Cycle by joining all vertices at distance on the cycle by an edge.

Csába, Kühn, Osthus, Lo, Treglown 2014: For sufficiently large , each -regular graph with has an edge-decomposition into Hamilton cycles and at most one matching.

Theorem: Let is Hamiltonian, with denoting G’s vertex connectivity.

Proof: Let be a longest cycle in G. . If is not Hamiltonian, . Let be a -fan, i.e. . ’s share only v pairwise. Moreover, let be of maximal cardinality. By Menger’s theorem, . We have , otherwise C is not longest. .

Thus and is an independent set on elements, which is a contraidction. (). Qed.

Tutte: , G is planar G is Hamiltonian.

Thomassen 1983: , G is planar G is Hamiltonian-connected, i.e. there is a path that is spanning, i.e. a Hamiltonian path.

## Network flows

Let G be a graph (multigraph, no loops), , source s, sink t.

.

Let is a capacity function.

A network is a quadruple .

A function is a network flow if the following conditions hold:

A cut is a pair .

Capacity of a cut .

# Problem class 05.02.

## Proof Techniques v2

1. Induction
2. Extremal Principle/Contradiction
3. Counting arguments

* Pigeonhole Principle
* Parity Arguments (even vs odd)

1. Algorithmic/ Iterative (“Just do it”)
2. “Dichotomy”/Ramsey
3. Probabilistic methods

* Computing
* Alterations [e.g. ]. Choose for appropriate . Compute ’s. Delete an edge from each copy of . (Erdös) Construction of graph G with .

1. Apply a theorem

# Lecture 07.02.

Definition: Given .

Notation:

Lemma 1: where f is a network flow.

(Recall is a cut if )

Proof of Lemma 1:

Qed.

Let the value of the flow f be , denote it .

Theorem (Ford-Fulkerson): Let be a network, then .

Proof:

* :
* : We shall construct an : for some cut. We shall construct N-flows such that . (The sequence is finite since .

Suppose has been constructed.

Case 1: augmented path: . . Let .

Case 2: There exists no such path. Let .

. In thise case, let .

Qed.

## Group valued flows

Let G be a multigraph with loops allowed, T as above. Let , where as an abelian group is a circulation if

1. .

A circulation f is an H-flow if it is nonzero on each triple.

If an H-flow exists for f, in particular -flow exists, then , where denotes the flow value of G.

By Lemma 1, .

This implies that (which does not hold if there exists a bridge) G is bridgeless.

Theorem (Seymour): If G is bridgeless, then it has a nowhere zero -flow.

Theorem (Tutte): multigraph polynomial such that abelian group H, the number of zero H-flows on G is equal to .

(I.e. the number of flows depends on the order of H and not the structure of H)

~~Proof: Induction on the number of non-loop edges .~~

~~Basis: , Multigraph consists only of loops on single vertices. We can assign any nonzero value to any triple. .~~

~~Step: Assume non-loop edge .~~

Tutte: For a plane graph G, is dual, then .

1. maximum = largest size, not maximal, maximal = could not be enlarged. [↑](#footnote-ref-2)