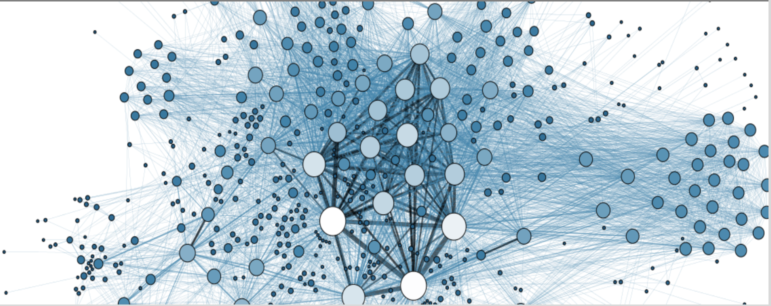
Karlsruher Institut für Technologie

lukasbach

Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 10. November 2016



Gliederung

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

1. Organisatiorisches
2. Signale und Nachrichten
3. Mengen
4. Alphabete
5. Relationen und Abbildungen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Termine

- Vorlesung und Übung
  - Mittwoch 9:45 - 11:15 Vorlesung
  - Freitag 9:45 - 11:15 abwechselnd Vorlesung und Übung
- Tutorium
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107
- Übungsblätter
  - Alle zwei Wochen
  - Ausgabe Mittwochs, Abgabe Donnerstags bis 16:00 zwei Wochen drauf

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übungsschein

- min. 50% aller Punkte auf Übungsblättern richtig
- Rückgabe im Tutorium
- Bestehen ist *keine* Voraussetzung für die Klausur, *aber* fürs Modul!
- Gemeinsames Abgeben, Abschreiben verboten
- Übungsblätter und später auch Musterlösungen im ILIAS

Tutorium

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

- Alle Tutorienfolien auf:

  `http://gbi.lukasbach.com`

- Bei Fragen: lukas.bach@student.kit.edu
- Keine Anwesenheitspflicht
- Möglichkeit andere Tutorien zu besuchen

Signale und Nachrichten

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

- Objekt: 101
  - Eins null eins oder 101 als Zahl oder 5 in binär oder zwei merkwürdige Striche mit einem Kreis dazwischen?
  - Vom Kontext abhängig.
  - Zunächst einfach ein konkretes Objekt.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Signale und Nachrichten

- Signal
  - Physikalische Veränderung
  - Lässt sich verschieden interpretieren.
  - Beispiele:
    - Notfallalarm in Serverraum

    - Für Besucher nur schönes Leuchten
    - Für Security die Information, zu kommen
    - Für Techniker die Information, Ausrüstung zu holen
- Nachricht: Objekt wie oben, das von Signal unabhängig ist
  - Roter Notfallalarm ist ein anderes Signal als ein blauer Notfallalarm, aber vielleicht dieselbe Nachricht.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Signale und Nachrichten

- Der interessante Teil: Informationen
- Bedeutung einer Nachricht
- Der vorher fehlende Kontext.
- Im obigen Beispiel:
  - Rote Alarmleuchte ist ein Signal (blaue Signalleuchte in Raum nebendran vielleicht auch)
  - “Alarm”: Nachricht
  - Information: Security soll herkommen, Techniker sollen das Werkzeug bereit halten, Besucher sollten Platz machen.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Mengen

- Erster wirklich wichtiger Teil.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Mengen

Zeichnung

Mengen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition: Mengen

"Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente dieser Menge genannt werden) zu einem Ganzen."

- Beispiel: $\{a, b, c, d\} =: A$ $\{a, c, 4\} =: B$, $\{10, 11\} =: C$
- Das Objekt c ist in A enthalten: $c \in A$, $c \in B$, $c \notin C$
- Reihenfolge gleich: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Elemente doppelt? $\{a, a, b, a\} = \{a, b\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Mehr über Mengen

Karlsruher Institut für Technologie

- Kardinalität oder Größe: Die Anzahl der Elemente der Menge
  - $A := \{a, b, c\}$. $|A| = 3$
  - $B := \{c, d\}$. $|B| = 2$
  - Was ist $|\{1, 2, 3, 2\}|$? 3!
  - Was ist $|\{\}|$? 0

Leere Menge

Die Menge, die nichts enthält, nennen wir die leere Menge, und schreiben sie als $\{\}$ oder $\emptyset$.

Was ist $|\{\{\}\}|$? 1! $\{\emptyset\}$ enthält eine leere Menge, die selbst ein Element ist.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Mehr über Mengen

Zeichnung

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Mehr über Mengen

Karlsruher Institut für Technologie

Seien $A := \{a, b, c\}, B := \{b, c\}, C := \{c, b\}, D := \{b, c, d\}$.

- Teilmenge: $A \subseteq B$, also A ist Teilmenge von B genau dann, wenn alle Elemente aus A auch in B sind.
- Echte Teilmenge: $A \subset B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ *und* $A \neq B$.
  - Beispiele: $B \subseteq A$, sogar $B \subset A$.
    $C \subseteq B$ und $B \subseteq C$, aber $C \not\subset B$ und $B \not\subset C$.
- Schnittmenge: $A \cap B = \{b, c\}$.
  $A \cap B$ enthält *genau* die Elemente, die in A *und* in B sind.
- Vereinigungsmenge: $A \cup D = \{a, b, c, d\}$.
  $A \cup B$ enthält *genau* die Elemente, die in A *oder* in B sind.
- Mengendifferenz: $A \setminus B = \{a\}$, also alle Elemente in A, die nicht in B sind.
- Komplementärmenge: $\bar{A}$ enthält alle Elemente des *Universums*, die nicht in A sind. Angenommen, Universum = Lateinisches Alphabet: $\bar{A} = \{d, e, f, g, \ldots, y, z\}$

Potenzmenge

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Potenzmenge

Die Potenzmenge 2^M einer Menge M enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von M sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist 2^M mit $M = \{0, 1\}$?
  - Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $\{0, 1\} \in 2^M$.
  - $\{0\} \in 2^M$ und $\{1\} \in 2^M$.
  - Weitere? Nein, diese vier Mengen sind alle möglichen Teilmengen.
  - $\Rightarrow 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Potenzmenge

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

$M = \{0, 1\}$, $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
Was ist 2^{2^M}?

- Also $2^{\{\{\},\{0\},\{1\},\{0,1\}\}}$.
- Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \in 2^{2^M}$.

$$
\begin{aligned}
2^{2^M} = \{ & \\
& \{\}, \\
& \{\{\}\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0, 1\}\}, \\
& \{\{\}, \{0\}\}, \{\{\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \\
& \quad \{\{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1\}, \{0, 1\}, \\
& \{\{\}, \{0\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \\
& \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \\
\} &
\end{aligned}
$$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Alphabete

Alphabet

Ein Alphabet ist eine *endliche*, *nichtleere* Menge von Zeichen.

Was davon sind Alphabete? $\{d, 34, \pi, \%\}$, $\{a, b, c, \dots, y, z\}$, $\emptyset$, $\mathbb{N}$.

- $\{d, 34, \pi, \%\}$ und $\{a, b, c, \dots, y, z\}$ sind Alphabete.
- $\emptyset$ ist leer und damit kein Alphabet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ enthält alle natürlichen Zahlen und ist damit nicht endlich, also kein Alphabet.
- $\{0, 1\}$ ist das Alphabet, das alle Binärzahlen enthält.
- $\{\cdot, +, -, /\} =: R$ ist ein Alphabet von Rechenzeichen. $R \cup \{0, 1, \dots, 9\}$ ist ein Alphabet, das ein Taschenrechner als Eingabealphabet benutzen könnte.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Paare und Tupel

Karlsruher Institut für Technologie

Paar

Ein Paar ist eine geordnete Menge der Kardinalität 2.

Schreibweise mit runden Klammern ().

- Beispiel: $(a, 4) \neq (4, a)$
- Beispiel für eine Menge aus Tupeln: $\{(``AgeOfEmpires", ``Strategie"), (``Battlefield", ``Shooter"), (``SeriousSam", ```Shooter")\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Tupel

Tupel

Ein Tupel ist eine geordnete Menge. Konkret ist ein n-Tupel ein Tupel der Kardinalität n.

Also wie ein Paar, nur mit beliebiger Kardinalität. Ein Paar ist spezifisch ein 2-Tupel.

Beispiel: $(4tb, 512gb, 128gb, 4mb) \neq (512gb, 4mb, 4tb, 128gb)$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kartesisches Produkt

Zwei Mengen: $A := \{a, b, c\}$ und $B := \{1, 2, 3\}$.
Wir wollen alle Tupel mit erstem Element aus A und zweiten Element aus B.
$\{ \quad (a, 1), (a, 2), (a, 3), \qquad (b, 1), (b, 2), (b, 3), \qquad (c, 1), (c, 2), (c, 3) \quad \}$
$= A \times B$

Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das Kreuzprodukt definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kreuzprodukt

Karlsruher Institut für Technologie

Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das Kreuzprodukt $A \times B$ definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Kreuzprodukt von n Mengen

Zu n Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das Kreuzprodukt $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ definiert als Menge aller n-Tupel $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ mit $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$.

Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \times mal} = A^n.$$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kreuzprodukt: Beispiele

Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das Kreuzprodukt $A \times B$ definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}$. $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kreuzprodukt: Beispiele

Kreuzprodukt von n Mengen

Zu n Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das Kreuzprodukt $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ definiert als Menge aller n-Tupel $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ mit $e_1 \in M_1$, $e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$.

$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}, C := \{\omega\}$. $A \times B \times C$
$= \{(a, 1, \omega), (a, 2, \omega), (b, 1, \omega), (b, 2, \omega)\}$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kreuzprodukt: Beispiele

Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{nmal} = A^n.$$

- $A := \{a, b\}$. $A^2 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$
  $A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, b), \dots\}$.
- A beliebige Menge. $A^0? = \emptyset$
- Achtung! $2^M \neq M^2$. Potenzmengen nicht mit Mengenpotenz verwechseln!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Relation

Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen A und B ist eine Menge $R \subseteq A \times B$.

- Für die Mengen $M_{Spiele} = \{``Battlefield'', ``AgeOfEmpires'', ``SeriousSam''\}$, $M_{Genre} = \{``Shooter'', ``Strategie''\}$ sind folgendes mögliche Relationen:
  - $\{(``AgeOfEmpires'', ``Strategie''), (``Battlefield'', ``Shooter''), (``SeriousSam'', ```Shooter''))\}$
  - $\{(``AgeOfEmpires'', ``Strategie''), (``AgeOfEmpires'', ``Shooter'')$
  - $\emptyset$
- "Kleinergleichrelation" auf $M = \{1, 2, 3\}$: $R_{\leq} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\} \in M \times M$

Relation

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen A und B ist eine Menge $R \subseteq A \times B$.

Ternäre Relation

Eine ternäre Relation auf drei Mengen A, B und C ist eine Menge $R \subseteq A \times B \times C$.

n-äre Relation

Eine n-äre Relation auf n Mengen M_1, M_2 ... M_n ist eine Menge $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$.

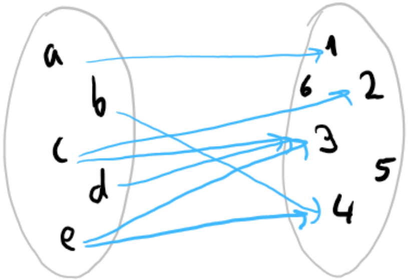
Linkstotalität

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Linkstotale Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal, wenn für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in R$.

Die linke Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.



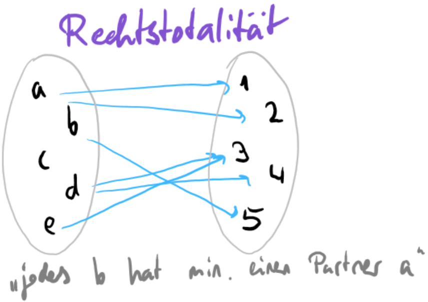
Rechtstotalität

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Rechtstotale Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtstotal, wenn für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $(a, b) \in R$.

Die rechte Seite der Relation ist also "total" aufgefüllt.
Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann surjektiv.



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

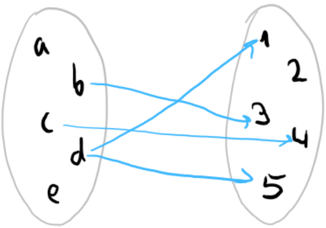
Linkseindeutigkeit

Karlsruher Institut für Technologie

Linkseindeutige Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$ aus der Relation R gilt: wenn $a \neq b$, dann gilt auch $\alpha \neq \beta$.

Also: Keine zwei Elemente der linken Seite der Relation haben dasselbe rechte Element.
Angenommen, $a \neq b$ und $\alpha = \beta$. $\Rightarrow$ offenbar nicht linkseindeutig.
Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann injektiv.



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

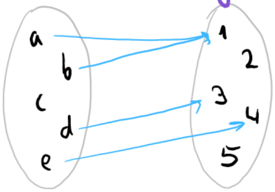
Rechtseindeutig

Rechtseindeutige Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$ aus der Relation R gilt: wenn $\alpha \neq \beta$, dann gilt auch $a \neq b$.

Also: Keine zwei Elemente der rechten Seite der Relation haben dasselbe linke Element.

Rechtseindeutigkeit

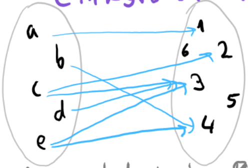


„jedes a hat max einen Partner b"

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

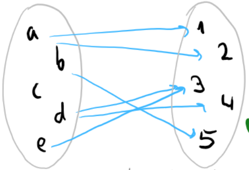
Eigenschaften von Relationen

Linkstotalität



„jedes a hat min einen Partner b"

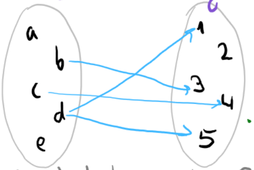
Rechtstotaität



Surjektiv

„jedes b hat min. einen Partner a"

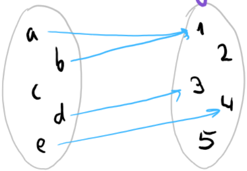
Linkseindeutigkeit



injektiv

„jedes b hat max einen Partner a"

Rechtseindeutigkeit



„jedes a hat max einen Partner b"

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Abbildung

Karlsruher Institut für Technologie

Abbildung

Eine Relation R heißt eine Abbildung, wenn sie linkstotal *und* rechtseindeutig sind.

- Injektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, linkseindeutig
- Surjektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, rechtstotal

Bijektivität

Eine Relation heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Damit ist sie linkstotal und rechtseindeutig (weil es eine Abbildung ist) und linkseindeutig (injektiv) und rechtstotal (surjektiv).
Tolle Eigenschaft: Für jedes Element $(a, b) \in R$ der bijektiven Relation R ist *jedem a genau ein b* zugeordnet.

Abbildungen Schreibweise

Karlsruher Institut für Technologie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Seien $A = B = \mathbb{R}$, $f \subseteq A \times B$. Wir suchen Relation, die für jedes $a \in A$ ein Element $(a, b) \in f$ enthält mit $b = a^2$.
$f = \{(0, 0), (0.1, 0.01), (2, 4), \dots\}$
Unendlich viele Elemente, und unmöglich alle zu nennen.
(Mathematischere) Schreibweise für Abbildungen:
$f : A \to B, a \mapsto a^2$, also Quadratfunktion.
Ist diese Funktion injektiv oder surjektiv?

- Nicht injektiv, da z.B. $f(1) = f(-1)$, also $(1, 1) \in f$ und $(-1, 1) \in f$.
- Nicht surjektiv, da z.B. -1 nie als Funktionswert angenommen wird, daher $(a, -1) \notin f$ für beliebige $a \in A$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Informationen

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - `http://gbi.lukasbach.com`
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Mehr Material

- ILIAS der Vorlesung:
  - kommt noch.
- Ehemalige GBI Webseite:
  - `http://gbi.ira.uka.de`
  - Altklausuren!

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul