

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 15.12.2016



Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Prädikatenlogik

## 1 Prädikatenlogik

# Grundlagen zu Prädikatenlogik

Prädikatenlogik (PL) **erweitert** Aussagenlogik durch Ergänzen von “Prädikaten”, einer Art von Funktionen, die Wahrheitswerte zurückgeben.  
Alphabet der Prädikatenlogik:

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (, )$ , also Alphabet der Aussagenlogik.
- $\forall$  Allquantor ( $\forall x$  heißt “für alle  $x$  gilt...”)
- $\exists$  Existenzquantor ( $\exists x$  heißt “es existiert min. ein  $x$ ... für das gilt...”)
- $x, y, z, x_i \in Var_{PL}$  Variablen
- $c, d, c_i \in Const_{PL}$  Konstanten
- $f, g, h, f_i \in Fun_{PL}$  Funktionen
- $R, S, R_i \in Rel_{PL}$  Relationen (funktionieren ähnlich wie Funktionen)
- $\doteq$  Objektgleichheit
- $,$  Komma

## Terme

Ein Term ist ein Element aus der Sprache über

$$A_{Ter} := \{ (, ), , \} \cup Var_{PL} \cup Const_{PL} \cup Fun_{PL}.$$

## Atomare Formeln

Atomare Formeln sind zum Beispiel

- Objektgleichheiten  $f_1 \doteq f_2$
- Relation von Termen  $R(t_1, t_2, \dots)$

## Stelligkeit einer Funktion

Die Stelligkeit  $ar(f) \in \mathbb{N}_+$  einer Funktion gibt die Anzahl der Parameter von  $f$  an. (Analog Stelligkeit von Relationen  $ar(R)$ )

# Verständnis von Termen, Atomaren Formeln, Stelligkeit

## Prädikatenlogik

- Woraus kann ein Term bestehen?
  - Aus Klammern  $(, )$ , Kommas  $,$ , Variablen, Konstanten, Funktionen.
- Was davon sind atomare Formeln:  $R(x) \wedge S(f(x, c))$ ,  
 $R(x, g(c, f(y, x)))$ ?
  - Nein, ja.
- Was sind die Stelligkeiten folgender Funktionen:  
 $f(a, b, c)$ ,  $g(a)$ ,  $h(a, b)$ ?
  - 4, 1, 2.

# Grammatik der Prädikatenlogik

Prädikatenlogische Formeln werden durch die Grammatik

$G := (N_{Ter}, A_{Ter}, T, P_{Ter})$  erzeugt mit:

- $m + 1$  Nichtterminalsymbolen  $N_{Ter} := \{T\} \cup \{L_i | i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m\}$   
( $m$  = Maximale Stelligkeit von Funktionen)
- Terminalsymbolen: Alphabet, aus dem Terme erzeugbar sind
- Produktionen

$$L_{i+1} \rightarrow L_i, T \quad \text{für jedes } i \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } i < m$$

$$L_1 \rightarrow T$$

$$T \rightarrow c_i \quad \text{für jedes } c_i \in Const_{PL}$$

$$T \rightarrow x_i \quad \text{für jedes } x_i \in Var_{PL}$$

$$T \rightarrow f_i(L_{ar(f_i)}) \quad \text{für jedes } f_i \in Fun_{PL}$$

Beispiel: Seien Funktionen  $f, g$  mit  $ar(f) = 2$ ,  $ar(g) = 1$ , Konstante  $c$  und Variablen  $x, y$  gegeben. Was kann man damit machen?

# Grammatik der Prädikatenlogik

Beispiel: Seien Funktionen  $f, g$  mit  $ar(f) = 2, ar(g) = 1$ , Konstante  $c$  und Variablen  $x, y$  gegeben. Was kann man damit machen?

Dann:

- $N_{Ter} = \{T, L_1, L_2\}$
- $P_{Ter} = \{L_2 \rightarrow L_1, T$   
 $L_1 \rightarrow T$   
 $T \rightarrow c$   
 $T \rightarrow x$   
 $T \rightarrow y$   
 $T \rightarrow g(L_1)$   
 $T \rightarrow f(L_2)\}$

## Aufgabe zu Grammatiken und Prädikatenlogik

Welche dieser Formeln  
entsprechen dieser  
Grammatik?

- $f(c, g(x))$
- $f(x, y, c)$
- $g(f(c, c))$
- $g(g(f(g(x), g(f(c, c)))))$
- $g(c, f)c$

Bilde die Ableitungsbäume zu  
den korrekten Formeln.

## Bindungsstärke

Verschiedene Operanden “binden” stärker als andere. Wenn ein Operand stärker als die umliegenden Operanden bindet, tritt derselbe Effekt auf, wie wenn Klammerung geschehen würde.

Bindungsstärken absteigen:

- $\forall/\exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow / \leftarrow, \leftrightarrow$

Finde äquivalente Formeln, die mit möglichst wenig Klammern auskommen:

- $\exists x \forall y (R(f(x), g(x)) \vee \forall z R(c, x))$



## Prädikatenlogik

- $\forall x p(x)$  heißt: für alle  $x \in D$  gilt die Aussage  $p(x)$ .
- $\exists x p(x)$  heißt: für (mindestens) ein  $x \in D$  gilt die Aussage  $p(x)$ .
- Gilt  $\forall x \exists y \ p(x, y) = \exists y \forall x \ p(x, y)$ ?
  - Zum Beispiel  $p(x, y) :=$  "Person  $x$  ist mit Person  $y$  verheiratet."
  - Also:
    - $\forall x \exists y \ p(x, y) =$  Für jede Person  $x$  gibt es eine Person  $y$ , mit der  $x$  verheiratet ist.
    - $\exists y \forall x \ p(x, y) =$  Es gibt eine Person  $y$ , sodass für alle Personen  $x$  gilt, dass  $x$  mit allen Personen  $y$  verheiratet ist.
  - Eher nicht. Reihenfolge ist also wichtig!

## Prädikatenlogik

Quantoren binden Variablen nur zu der zugehörigen Teilformel.

- Zum Beispiel:  $p(x) \wedge \forall x \exists y (p(x) \wedge q(x, y, z) \rightarrow r(x))$
- Welcher Teil der Formel muss für alle  $x$  gelten? Welcher für alle  $y$ ?
- Variablen, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors liegen, nennt man **frei**.

Überschattung ist möglich, daher durch Quantoren definierte Variablen beziehen sich immer auf den **nächsten** Quantor.

- Ist  $\forall x (p(x) \wedge \forall x (\neg p(x)))$  erfüllbar?
- Ja:  $\forall x (p(x) \wedge \forall \hat{x} (\neg p(\hat{x})))$

# Bindungsbereich von Quantoren

Substitution ist möglich. Dabei wird eine **freie** Variable durch einen Term ersetzt, die Substitution wird mit  $\beta[a/b]$  bezeichnet, wobei  $a$  durch  $b$  ersetzt wird.

Führe die folgenden Substitutionen durch:

- $\beta[x/5](p(x) \vee q(x, y)) = p(5) \vee q(5, y)$
- $\beta[x/5](p(x) \vee \forall x(q(x, y))) = p(5) \vee \forall x(q(x, y))$
- $\beta[x/y, y/x, z/f(z)](p(x) \wedge q(x, y)) = p(f(z)) \wedge q(y, x)$

Welche der Variablen sind gebunden (und durch welche Quantoren), welche sind frei?

- $p(x) \rightarrow \forall x \exists y (p(x) \wedge q(y, z) \leftrightarrow \forall z (q(x, z)))$
- $\forall y (p(f(x, y))) \vee \exists z (q(z, f(y, z)))$

# Semantik von prädikatenlogischen Formeln

Um prädikatenlogische Formeln zu interpretieren, brauchen wir einige neue Mengen:

- Interpretation  $(D, I)$ , bestehend aus...
  - Universum  $D \neq \emptyset$  mit...
    - $I(c_i) \in D$  für  $c_i \in \text{Const}_{PL}$
    - $I(f_i) : D^{\text{ar}(f_i)} \rightarrow D$  für  $f_i \in \text{Fun}_{PL}$
    - $I(R_i) \subseteq D^{\text{ar}(R_i)}$  für  $R_i \in \text{Rel}_{PL}$
    - $I$  bildet weißt also den Komponenten Bedeutungen zu, “definiert diese”
  - Variablenbelegung  $\beta : \text{Var}_{PL} \rightarrow D$ , z.B.  $\beta(x) := 3, \beta(y) := 11$ 
    - $\beta$  definiert also Variablenwerte
- Damit können wir prädikatenlogische Formeln definieren!

$val_{D,I,\beta}$

Die Funktion  $val_{D,I,\beta} : L_{Ter} \cup L_{For} \rightarrow D \cup \mathbb{B}$  weißt einer prädikatenlogischen Formel eine Bedeutung (Wahrheitsgehalt für Formeln und Element des Universums für Terme) zu.

Unterschied zwischen  $val_{D,I,\beta}$  und  $I$ ?  $I$  ist für Einzelteilen (Konstanten, Funktionen, Relationen) eine Bedeutung zuweist, und  $val_{D,I,\beta}$  einer ganzen Formel eine Bedeutung zuweist.

Beispiel:

Sei  $D := \mathbb{N}_0$ ,  $I(c) := 10$ ,  $ar(f) := 2$ ,  $ar(p) := 1$ ,  $ar(q) := 2$ ,  $\beta(x) := 7$ .

Sei  $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $(x, y) \mapsto x - y$ .

Sei  $ar(R) := 2$ ,  $I(R) := \{(x, y) | x \leq y\}$ .

Sei  $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5$ ,  $I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$ .

## Beispiel zur Semantik

Sei  $D := \mathbb{N}_0$ ,  $I(c) := 10$ ,  $ar(f) := 2$ ,  $ar(p) := 1$ ,  $ar(q) := 2$ ,  $\beta(x) := 7$ .

Sei  $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $(x, y) \mapsto x - y$ .

Sei  $ar(R) := 2$ ,  $I(R) := \{(x, y) \mid x \leq y\}$ .

Sei  $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5$ ,  $I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$ .

- $T_1 := p(x) \rightarrow \exists y(q(y, x) \wedge p(y))$ , was ist  $val_{D,I,\beta}(T_1)$ ?
  - Wähle  $y = 8 \in \mathbb{N}_0$ . Dann:  $I(q(8, 7)) = w$ ,  $I(p(8)) = w$ , also  $val_{D,I,\beta}(\exists y(q(y, x) \wedge p(y))) = w$ , und  $val_{D,I,\beta}(T_1) = w$ .
- $T_2 := p(x) \rightarrow \exists y(q(f(c, y), x) \wedge p(y))$ , was ist  $val_{D,I,\beta}(T_2)$ ?
  - $val_{D,I,\beta}(p(x)) = w$
  - $val_{D,I,\beta}(q(f(c, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(f(10, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(10 - y, 7)) = w$  für  $y \in \{0, 1, 2\}$ .
  - $val_{D,I,\beta}(p(y)) = w$  für  $y \geq 5$ .
  - Also:  $val_{D,I,\beta}(T_2) = f$ .

## Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $Vater(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ Vater von } y \text{ ist, analog } Mutter(x, y).$
- $Männlich(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ männlich ist, analog } Weiblich(x).$
- $Verheiratet(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ und } y \text{ verheiratet sind.}$

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede männliche Person hat eine Mutter.
  - $\forall x \exists y (Männlich(x) \rightarrow Mutter(y, x))$
  - Kann eine Person jetzt auch mehr als eine Mutter haben? Widerspricht das der ursprünglichen Aussage?
- Jeder Mann hat Kinder (plural!).
  - $\forall x \exists y \exists z (Männlich(x) \rightarrow (Vater(x, y) \wedge Vater(x, z) \wedge \neg(y = z)))$

## Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $Vater(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ Vater von } y \text{ ist, analog } Mutter(x, y).$
- $Männlich(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ männlich ist, analog } Weiblich(x).$
- $Verheiratet(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ und } y \text{ verheiratet sind.}$

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede Frau ist mit höchstens einem Mann verheiratet.
  - $\forall x \forall y \forall z (Weiblich(x) \wedge ((Männlich(y) \wedge Männlich(z) \wedge \neg(y = z) \wedge Verheiratet(x, y)) \rightarrow \neg Verheiratet(x, z)))$
- Wer männlich ist, ist nicht weiblich und umgekehrt.
  - $\forall x (Männlich(x) \rightarrow \neg Weiblich(x) \wedge Weiblich(x) \rightarrow \neg Männlich(x))$



## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul