

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 28.10.2016



Organisatorisches

1 Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

2 Signale und Nachrichten

Mengen

3 Mengen

Alphabete

4 Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

5 Relationen und Abbildungen

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

- Vorlesung und Übung
  - Mittwoch 9:45 - 11:15 Vorlesung
  - Freitag 9:45 - 11:15 abwechselnd Vorlesung und Übung
- Tutorium
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107
- Übungsblätter
  - Alle zwei Wochen
  - Ausgabe Mittwochs, Abgabe Donnerstags bis 16:00 zwei Wochen drauf

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

- min. 50% aller Punkte auf Übungsblättern richtig
- Rückgabe im Tutorium
- Bestehen ist *keine* Voraussetzung für die Klausur, *aber* fürs Modul!
- Gemeinsames Abgeben, Abschreiben verboten
- Übungsblätter und später auch Musterlösungen im ILIAS

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

- Alle Tutorienfolien auf:

`http://gbi.lukasbach.com`

- Bei Fragen: `lukas.bach@student.kit.edu`
- Keine Anwesenheitspflicht
- Möglichkeit andere Tutorien zu besuchen

## Organisatorisches

## Signale und Nachrichten

## Mengen

## Alphabete

## Relationen und Abbildungen

### ■ Objekt: 101

- Eins null eins oder 101 als Zahl oder 5 in binär oder zwei merkwürdige Striche mit einem Kreis dazwischen?
- Vom Kontext abhängig.
- Zunächst einfach ein konkretes Objekt.

## ■ Signal

- Physikalische Veränderung
- Lässt sich verschieden interpretieren.
- Beispiele:

- Notfallalarm in Serverraum



- Für Besucher nur schönes Leuchten
- Für Security die Information, zu kommen
- Für Techniker die Information, Ausrüstung zu holen

## ■ Nachricht: Objekt wie oben, das von Signal unabhängig ist

- Roter Notfallalarm ist ein anderes Signal als ein blauer Notfallalarm, aber vielleicht dieselbe Nachricht.

## Organisatorisches

### Signale und Nachrichten

### Mengen

### Alphabete

### Relationen und Abbildungen

- Der interessante Teil: Informationen
- Bedeutung einer Nachricht
- Der vorher fehlende Kontext.
- Im obigen Beispiel:
  - Rote Alarmleuchte ist ein Signal (blaue Signalleuchte in Raum nebendran vielleicht auch)
  - “Alarm”: Nachricht
  - Information: Security soll herkommen, Techniker sollen das Werkzeug bereit halten, Besucher sollten Platz machen.



Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

■ Erster wirklich wichtiger Teil.

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Zeichnung

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

## Definition: Mengen

“Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente dieser Menge genannt werden) zu einem Ganzen.”

- Beispiel:  $\{a, b, c, d\} =: A$   $\{a, c, 4\} =: B$ ,  $\{10, 11\} =: C$
- Das Objekt  $c$  ist in  $A$  enthalten:  $c \in A$ ,  $c \in B$ ,  $c \notin C$
- Reihenfolge gleich:  $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Elemente doppelt?  $\{a, a, b, a\} = \{a, b\}$

## ■ Kardinalität oder Größe: Die Anzahl der Elemente der Menge

- $A := \{a, b, c\}$ .  $|A| = 3$
- $B := \{c, d\}$ .  $|B| = 2$
- Was ist  $|\{1, 2, 3, 2\}|$ ? 3!
- Was ist  $|\{\}|$ ? 0

## Leere Menge

Die Menge, die nichts enthält, nennen wir die leere Menge, und schreiben sie als  $\{\}$  oder  $\emptyset$ .

Was ist  $|\{\{\}\}|$ ? 1!  $\{\emptyset\}$  enthält eine leere Menge, die selbst ein Element ist.

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Zeichnung

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Seien  $A := \{a, b, c\}$ ,  $B := \{b, c\}$ ,  $C := \{c, b\}$ ,  $D := \{b, c, d\}$ .

- Teilmenge:  $A \subseteq B$ , also  $A$  ist Teilmenge von  $B$  genau dann, wenn alle Elemente aus  $A$  auch in  $B$  sind.
- Echte Teilmenge:  $A \subset B$  genau dann, wenn  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$ .
  - Beispiele:  $B \subseteq A$ , sogar  $B \subset A$ .  
 $C \subseteq B$  und  $B \subseteq C$ , aber  $C \not\subseteq B$  und  $B \not\subseteq C$ .
- Schnittmenge:  $A \cap B = \{b, c\}$ .  
 $A \cap B$  enthält *genau* die Elemente, die in  $A$  und in  $B$  sind.
- Vereinigungsmenge:  $A \cup D = \{a, b, c, d\}$ .  
 $A \cup B$  enthält *genau* die Elemente, die in  $A$  oder in  $B$  sind.
- Mengendifferenz:  $A \setminus B = \{a\}$ , also alle Elemente in  $A$ , die nicht in  $B$  sind.
- Komplementärmenge:  $\bar{A}$  enthält alle Elemente des *Universums*, die nicht in  $A$  sind. Angenommen, Universum = Lateinisches Alphabet:  
 $\bar{A} = \{d, e, f, g, \dots, y, z\}$

## Potenzmenge

Die Potenzmenge  $2^M$  einer Menge  $M$  enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von  $M$  sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist  $2^M$  mit  $M = \{0, 1\}$ ?
  - Natürlich  $\emptyset \in 2^M$  und  $\{0, 1\} \in 2^M$ .
  - $\{0\} \in 2^M$  und  $\{1\} \in 2^M$ .
  - Weitere? Nein, diese vier Mengen sind alle möglichen Teilmengen.
  - $\Rightarrow 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ .

$$M = \{0, 1\}, 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Was ist  $2^{2^M}$ ?

■ Also  $2^{\{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}}$ .

■ Natürlich  $\emptyset \in 2^M$  und  $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \in 2^{2^M}$ .

$$\begin{aligned} 2^{2^M} = \{ & \{\}, \\ & \{\{\}\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0, 1\}\}, \\ & \{\{\}, \{0\}\}, \{\{\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \\ & \quad \{\{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1\}, \{0, 1\}\}, \\ & \{\{\}, \{0\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \\ & \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \\ & \} \end{aligned}$$



## Alphabet

Ein Alphabet ist eine *endliche, nichtleere* Menge von Zeichen.

Was davon sind Alphabete?  $\{d, 34, \pi, \%\}$ ,  $\{a, b, c, \dots, y, z\}$ ,  $\emptyset$ ,  $\mathbb{N}$ .

- $\{d, 34, \pi, \%\}$  und  $\{a, b, c, \dots, y, z\}$  sind Alphabete.
- $\emptyset$  ist leer und damit kein Alphabet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  enthält alle natürlichen Zahlen und ist damit nicht endlich, also kein Alphabet.
- $\{0, 1\}$  ist das Alphabet, das alle Binärzahlen enthält.
- $\{\cdot, +, -, /\} =: R$  ist ein Alphabet von Rechenzeichen.  $R \cup \{0, 1, \dots, 9\}$  ist ein Alphabet, das ein Taschenrechner als Eingabealphabet benutzen könnte.

## Paar

Ein Paar ist eine geordnete Menge der Kardinalität 2.

Schreibweise mit runden Klammern ().

- Beispiel:  $(a, 4) \neq (4, a)$
- Beispiel für eine Menge aus Tupeln:  $\{ ("AgeOfEmpires", "Strategie"), ("Battlefield", "Shooter"), ("SeriousSam", "Shooter") \}$

## Tupel

Ein Tupel ist eine geordnete Menge. Konkret ist ein  $n$ -Tupel ein Tupel der Kardinalität  $n$ .

Also wie ein Paar, nur mit beliebiger Kardinalität. Ein Paar ist spezifisch ein 2-Tupel.

Beispiel:  $(4tb, 512gb, 128gb, 4mb) \neq (512gb, 4mb, 4tb, 128gb)$ .

Zwei Mengen:  $A := \{a, b, c\}$  und  $B := \{1, 2, 3\}$ .

Wir wollen alle Tupel mit erstem Element aus  $A$  und zweiten Element aus  $B$ .  
 $\{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3) \}$   
 $= A \times B$

## Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist das Kreuzprodukt definiert als Menge aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ .

## Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist das Kreuzprodukt  $A \times B$  definiert als Menge aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ .

## Kreuzprodukt von $n$ Mengen

Zu  $n$  Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ist das Kreuzprodukt  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  definiert als Menge aller  $n$ -Tupel  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  mit  $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$ .

## Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \times \text{mal}} = A^n.$$

## Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist das Kreuzprodukt  $A \times B$  definiert als Menge aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ .

$$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}. A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

## Kreuzprodukt von $n$ Mengen

Zu  $n$  Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ist das Kreuzprodukt  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  definiert als Menge aller  $n$ -Tupel  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  mit  $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$ .

$$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}, C := \{\omega\}. A \times B \times C \\ = \{(a, 1, \omega), (a, 2, \omega), (b, 1, \omega), (b, 2, \omega)\}.$$

## Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{mal}} = A^n.$$

- $A := \{a, b\}$ .  $A^2 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$   
 $A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, b), \dots\}$ .
- $A$  beliebige Menge.  $A^0 = \emptyset$
- Achtung!  $2^M \neq M^2$ . Potenzmengen nicht mit Mengenpotenz verwechseln!



## Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist eine Menge  $R \subseteq A \times B$ .

- Für die Mengen

$M_{\text{Spiele}} = \{ \text{"Battlefield"}, \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"SeriousSam"} \},$

$M_{\text{Genre}} = \{ \text{"Shooter"}, \text{"Strategie"} \}$  sind folgendes mögliche

Relationen:

- $\{ ( \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Strategie"} ), ( \text{"Battlefield"}, \text{"Shooter"} ), ( \text{"SeriousSam"}, \text{"Shooter"} ) \}$
- $\{ ( \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Strategie"} ), ( \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Shooter"} ) \}$
- $\emptyset$
- "Kleiner gleichrelation" auf  $M = \{1, 2, 3\}$ :  
 $R_{\leq} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3) \} \in M \times M$

## Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist eine Menge  $R \subseteq A \times B$ .

## Ternäre Relation

Eine ternäre Relation auf drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  ist eine Menge  
 $R \subseteq A \times B \times C$ .

## $n$ -äre Relation

Eine  $n$ -äre Relation auf  $n$  Mengen  $M_1, M_2 \dots M_n$  ist eine Menge  
 $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ .

## Linkstotale Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt linkstotal, wenn für jedes  $a \in A$  ein  $b \in B$  existiert mit  $(a, b) \in R$ .

Die linke Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.



Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

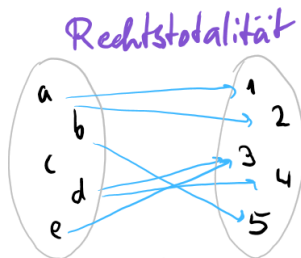
Relationen und  
Abbildungen

## Rechtstotale Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt rechtstotal, wenn für jedes  $b \in B$  ein  $a \in A$  existiert mit  $(a, b) \in R$ .

Die rechte Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann **surjektiv**.



„jedes  $b$  hat min. einen Partner  $a$ “

## Linkseindeutige Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt linkseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente  $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$  aus der Relation  $R$  gilt: wenn  $a \neq b$ , dann gilt auch  $\alpha \neq \beta$ .

Also: Keine zwei Elemente der linken Seite der Relation haben dasselbe rechte Element.

Angenommen,  $a \neq b$  und  $\alpha = \beta$ .  $\Rightarrow$  offenbar nicht linkseindeutig.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann **injektiv**.



## Rechtseindeutige Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt rechtseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente  $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$  aus der Relation  $R$  gilt: wenn  $\alpha \neq \beta$ , dann gilt auch  $a \neq b$ .

Also: Keine zwei Elemente der rechten Seite der Relation haben dasselbe linke Element.

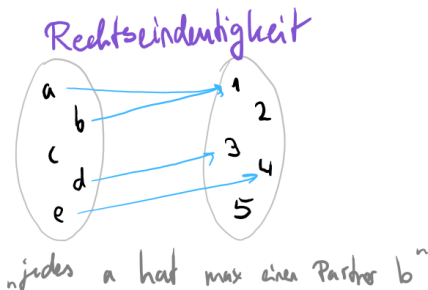
Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen



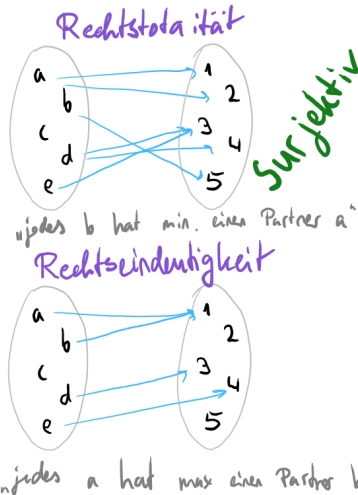
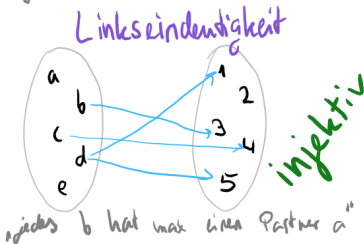
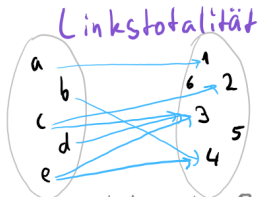
Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen



## Abbildung

Eine Relation  $R$  heißt eine Abbildung, wenn sie linkstotal *und* rechtseindeutig sind.

- Injektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, linkseindeutig
- Surjektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, rechtstotal

## Bijektivität

Eine Relation heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Damit ist sie linkstotal und rechtseindeutig (weil es eine Abbildung ist) und linkseindeutig (injektiv) und rechtstotal (surjektiv).

Tolle Eigenschaft: Für jedes Element  $(a, b) \in R$  der bijektiven Relation  $R$  ist *jedem*  $a$  *genau ein*  $b$  zugeordnet.



Seien  $A = B = \mathbb{R}$ ,  $f \subseteq A \times B$ . Wir suchen Relation, die für jedes  $a \in A$  ein Element  $(a, b) \in f$  enthält mit  $b = a^2$ .

$$f = \{(0, 0), (0.1, 0.01), (2, 4), \dots\}$$

Unendlich viele Elemente, und unmöglich alle zu nennen.

(Mathematische) Schreibweise für Abbildungen:

$f : A \rightarrow B, a \mapsto a^2$ , also Quadratfunktion.

Ist diese Funktion injektiv oder surjektiv?

- Nicht injektiv, da z.B.  $f(1) = f(-1)$ , also  $(1, 1) \in f$  und  $(-1, 1) \in f$ .
- Nicht surjektiv, da z.B.  $-1$  nie als Funktionswert angenommen wird, daher  $(a, -1) \notin f$  für beliebige  $a \in A$ .

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul