



## **Grundbegriffe der Informatik Tutorium 33**

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 19.01.2017



## Repräsentation von Graphen



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Wie stellen wir Graphen da?

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Repräsentation von Graphen



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Wie stellen wir Graphen da?

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

A B D

Anschaulich ja, aber wie können wir Graphen z.B. mit Java realisieren?

Komplexitätstheorie

# Objektorientierte Repräsentation von Graphen



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Klassenmodell?

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# Objektorientierte Repräsentation von Graphen



```
Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu
```

```
Repräsentation von Graphen
```

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Komplexitätstheorie

O-Notation

Algorithmus

```
Klassenmodell?
```

```
class Vertex {
   String name; //Genauer Inhalt interessiert uns nicht
class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
```

# **Objektorientierte Repräsentation von Graphen**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# Objektorientierte Repräsentation von Graphen



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

+ Intuitiv

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# Objektorientierte Repräsentation von Graphen



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

- + Intuitiv
- Es lassen sich nur schwer Algorithmen hierfür entwerfen (z.B. gilt  $(x, y) \in E$ ?)

## Repräsentation mit Adjazenzlisten



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

```
Jeder Knoten speichert seine Nachbarn:
von Graphen
                class Vertex {
Adjazenzlisten
                   String name; //Genauer Inhalt interessiert uns nicht
                   Vertex[] neighbours; //Alle Nachbarknoten
Zwei-Erreichbarkeit
                class Graph {
Erreichbarkeit
                   Vertex[] vertices;
Algorithmus
                   Edge[] edges;
Komplexitätstheorie }
```

## Repräsentation mit Adjazenzlisten



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentatio von Graphen

#### Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

- + Speicherplatzeffizient bei wenigen Kanten im Vergleich zur Knotenanzahl ( $|E| << |V|^2$ )
- + Flexibel mit verketteten Listen statt Arrays (Leichtes Hinzufügen und Entfernen)

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Was ist eine Adjazenzmatrix?

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Was ist eine Adjazenzmatrix?

■ Zu allen Paaren (i,j) mit  $i,j \in V$  wird gespeichert, ob  $(i,j) \in E$  gilt

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

#### Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

- Was ist eine Adjazenzmatrix?
- Zu allen Paaren (i,j) mit  $i,j \in V$  wird gespeichert, ob  $(i,j) \in E$  gilt
- Zweidimensionales Array

```
class Graph { boolean[][] edges; //Größe |V| 	imes |V|
```

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

+ Speicherplatzeffizient bei annähernd maximaler Anzahl von Kanten  $(|E| \approx |V|^2)$ 

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentatio von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

- + Speicherplatzeffizient bei annähernd maximaler Anzahl von Kanten  $(|E| \approx |V|^2)$
- + Algorithmen aus linearer Algebra können verwendet werden (Matrizenrechnung)

## Repräsentation mit Adjazenzmatrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentatio von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

- + Speicherplatzeffizient bei annähernd maximaler Anzahl von Kanten  $(|E| \approx |V|^2)$
- + Algorithmen aus linearer Algebra können verwendet werden (Matrizenrechnung)
- nicht flexibel

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation

## **Aufgabe**

Gebe alle Adjazenlisten und die Adjazenzmatrix für diesen Graphen an:

von Graphen
Adjazenzlisten

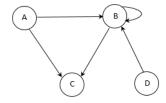
Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgabe

Gebe alle Adjazenlisten und die Adjazenzmatrix für diesen Graphen an:

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

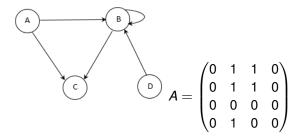
Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie



## Repräsentation von zweistelligen Relationen durch Matrizen



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

Wir können jede endliche zweistellige Relation durch eine Matrix darstellen! **Aufgabe** 

Stelle die Kleiner-Gleich-Relation auf der Menge  $\{0, 1, 2, 3\}$  dar!

## Repräsentation von zweistelligen Relationen durch Matrizen



Lukas Bach Jukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie O-Notation

Wir können jede endliche zweistellige Relation durch eine Matrix darstellen! Aufgabe

Stelle die Kleiner-Gleich-Relation auf der Menge {0, 1, 2, 3} dar!

$$R_{\leq} = egin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \ 0 & 1 & 1 & 1 \ 0 & 0 & 1 & 1 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmisches Problem

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

- Algorithmisches Problem
- Intuitiv: Gibt es einen Weg von i nach j?

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Algorithmisches Problem

Intuitiv: Gibt es einen Weg von i nach j?

Adjazenzlisten

## Wege-Problem

#### Erreichbarkeit

Gegeben einem Graphen G = (V, E). Ist für  $i, j \in V$  auch  $(i, j) \in E^*$ ?

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Algorithmisches Problem

Intuitiv: Gibt es einen Weg von i nach j?

Adjazenzlisten

## Wege-Problem

Erreichbarkeit

Gegeben einem Graphen G = (V, E). Ist für  $i, j \in V$  auch  $(i, j) \in E^*$ ?

Zwei-Erreichbarkeit

Ziel

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Algorithmisches Problem

Intuitiv: Gibt es einen Weg von i nach j?

Adjazenzlisten

## Wege-Problem

#### Erreichbarkeit

Gegeben einem Graphen G = (V, E). Ist für  $i, j \in V$  auch  $(i, j) \in E^*$ ?

Zwei-Erreichbarkeit

Ziel

Erreichbarkeit

Gegeben: Adjazenzmatrix

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Algorithmisches Problem

Intuitiv: Gibt es einen Weg von i nach j?

Adjazenzlisten

## Wege-Problem

#### Erreichbarkeit

Gegeben einem Graphen G = (V, E). Ist für  $i, j \in V$  auch  $(i, j) \in E^*$ ?

Zwei-Erreichbarkeit

Ziel

Erreichbarkeit

Gegeben: Adjazenzmatrix

Algorithmus

Gesucht: Zugehörige Wegematrix, für die gilt:

Komplexitätstheorie

## Wege-Problem



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Algorithmisches Problem

Intuitiv: Gibt es einen Weg von i nach j?

Adjazenzlisten

## Wege-Problem

#### Erreichbarkeit

Gegeben einem Graphen G = (V, E). Ist für  $i, j \in V$  auch  $(i, j) \in E^*$ ?

Zwei-Erreichbarkeit

Z

Erreichbarkeit

Algorithmus

Ziel

Gegeben: Adjazenzmatrix

Gesucht: Zugehörige Wegematrix, für die gilt:

Komplexitätstheorie

O-Notation

 $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls ein Weg von i nach j existiert} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$ 

## **Einschub Matrizen**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Was wisst ihr zu folgenden Begriffen?

Adjazenzlisten

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Einschub Matrizen**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Was wisst ihr zu folgenden Begriffen?

Adjazenzlisten

Matrizenmultiplikation

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Einschub Matrizen**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Was wisst ihr zu folgenden Begriffen?

Adjazenzlisten

Matrizenmultiplikation

#### Erreichbarkeit

Matrizenaddition

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Einschub Matrizen**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Was wisst ihr zu folgenden Begriffen?

Adjazenzlisten

Matrizenmultiplikation

#### Erreichbarkeit

Matrizenaddition

Zwei-Erreichbarkeit

Potenzieren

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Einschub Matrizen**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Was wisst ihr zu folgenden Begriffen?

Adjazenzlisten

Matrizenmultiplikation

#### Erreichbarkeit

Matrizenaddition

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Potenzieren

Einheitsmatrix

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Einschub Matrizen**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Was wisst ihr zu folgenden Begriffen?

Adjazenzlisten

Matrizenmultiplikation

#### Erreichbarkeit

Matrizenaddition

Zwei-Erreichbarkeit

Potenzieren

Erreichbarkeit

Einheitsmatrix

Algorithmus

Nullmatrix

Komplexitätstheorie

# **Quadrierte Adjazenzmatrix**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

**Aufgabe** 

Adjazenzlisten

Quadriere die Adjazenzmatrix von vorhin:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# **Quadrierte Adjazenzmatrix**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

**Aufgabe** 

Adjazenzlisten

Quadriere die Adjazenzmatrix von vorhin:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

**Ergebnis** 

Erreichbarkeit Algorithmus

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

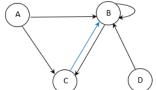
Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

## **Aufgabe**

Bilde und quadriere die Adjazenzmatrix des veränderten Graphen:



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

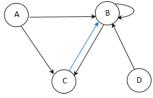
Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

## **Aufgabe**

Bilde und quadriere die Adjazenzmatrix des veränderten Graphen:



$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Was fällt euch auf? Wann steht in  $A^{\prime 2}$  eine 1, wann eine 2 und was bedeutet das für unseren Graphen?

von Graphen

Adjazenzlisten

Adjazenzlisten
Erreichbarkeit
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Zwei-Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

**Erreichbarkeit** 

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Aufgabe

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Was fällt euch auf? Wann steht in  $A^{\prime 2}$  eine 1, wann eine 2 und was bedeutet das für unseren Graphen?

von Graphen

Adjazenzlisten

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \end{array}$$

Erreichbarkeit

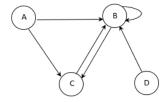
Zwei-Erreichbarkeit

**Erreichbarkeit** 

Algorithmus

Komplexitätstheorie

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

#### **Aufgabe**

Was fällt euch auf? Wann steht in  $A^{\prime 2}$  eine 1, wann eine 2 und was bedeutet das für unseren Graphen?

# Repräsentatio von Graphen

Adjazenzlisten

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

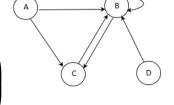
## Komplexitätstheorie

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{31} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

**Tipp:** 
$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

#### Lösung

Repräsentation von Graphen

In der i-ten Zeile und j-ten Spalte von  $A^2$  steht die Anzahl der Wege von i nach j der Länge zwei.

Adjazenzlisten

 $\rightarrow (A^2)_{ij}$  = Anzahl der Pfade von i nach j der Länge zwei.

#### Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

#### Lösung

Repräsentation von Graphen

In der i-ten Zeile und j-ten Spalte von  $A^2$  steht die Anzahl der Wege von i nach j der Länge zwei.

Adjazenzlisten

 $\rightarrow (A^2)_{ij}$  = Anzahl der Pfade von i nach j der Länge zwei.

#### Erreichbarkeit

#### Aufgabe

Zwei-Erreichbarkeit

Haht ihr

Erreichbarkeit

Habt ihr Ideen, wie man herausfindet, zwischen welchen Knoten Pfade der Länge *n* existieren?

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

#### Lösung

von Graphen

In der i-ten Zeile und j-ten Spalte von  $A^2$  steht die Anzahl der Wege von i nach j der Länge zwei.

Adjazenzlisten

 $\rightarrow (A^2)_{ij}$  = Anzahl der Pfade von i nach j der Länge zwei.

#### Erreichbarkeit

#### **Aufgabe**

Zwei-Erreichbarkeit

Habt ihr Ideen, wie man herausfindet, zwischen welchen Knoten Pfade der Länge *n* existieren?

Erreichbarkeit

Lösung

Algorithmus

Betrachte A<sup>n</sup>!

Komplexitätstheorie

## Zwei-Erreichbarkeit



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Eigentlich interessiert uns nur, ob ein Pfad der Länge zwei existiert und nicht wie viele...

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Zwei-Erreichbarkeit



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Eigentlich interessiert uns nur, ob ein Pfad der Länge zwei existiert und nicht wie viele...

Adjazenzlisten

#### **Definition Signum-Funktion**

Erreichbarkeit

 $sgn: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 

Zwei-Erreichbarkeit

 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ -1 & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$ 

**Erreichbarkeit** Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Zwei-Erreichbarkeit



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Eigentlich interessiert uns nur, ob ein Pfad der Länge zwei existiert und nicht wie viele...

Adjazenzlisten

#### **Definition Signum-Funktion**

$$sgn:\mathbb{R} o\mathbb{R}$$

Zwei-Erreichbarkeit

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ -1 & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

**Erreichbarkeit** 

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

Algorithmus

$$-1$$
 , falls  $x < 0$ 

 $_{ ext{Komplexitätstheorie}} sgn(A^2)$  liefert uns die Zwei-Erreichbarkeitsmatrix

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

**Aufgabe** 

Adjazenzlisten

Gebe  $A^0$ ,  $A^2$  und die Wegematrix W an!

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

**Aufgabe** 

Adjazenzlisten

Gebe  $A^0$ ,  $A^2$  und die Wegematrix W an!

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit  $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Erreichbarkeit Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

**Aufgabe** 

Adjazenzlisten

Gebe  $A^0$ ,  $A^2$  und die Wegematrix W an!

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit  $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

#### Aufgabe

Adjazenzlisten

Gebe  $A^0$ ,  $A^2$  und die Wegematrix W an!

Erreichbarkeit

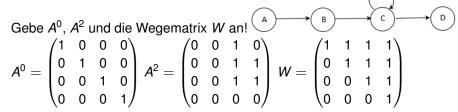
$$A^0 = \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie



# **Erreichbarkeit**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Für Pfade beliebiger Länge erhalten wir:

Erreichbarkeit

$$W = sgn(A^{0} + A^{1} + A^{2} + A^{3} + ...) = sgn(\sum_{i=0}^{\infty} A^{i})$$

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Erreichbarkeit**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Für Pfade beliebiger Länge erhalten wir:

Erreichbarkeit

$$W = sgn(A^{0} + A^{1} + A^{2} + A^{3} + ...) = sgn(\sum_{i=0}^{\infty} A^{i})$$

Zwei-Erreichbarkeit

Wir können nicht unendlich lange addieren... Ist das ein Problem?

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Erreichbarkeit- unendlich addieren?



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Erreichbarkeit- unendlich addieren?



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Wenn ein Pfad p der Länge  $\geq n := |V|$  zwischen  $i \neq j$  existiert, muss mindestens ein Knoten doppelt vorgekommen sein!

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Erreichbarkeit- unendlich addieren?



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Wenn ein Pfad p der Länge  $\geq n := |V|$  zwischen  $i \neq j$  existiert, muss mindestens ein Knoten doppelt vorgekommen sein! Der Pfad p enthält also einen Zyklus, den wir raus kürzen können.

Erreichbarke

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Erreichbarkeit- unendlich addieren?



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

Wenn ein Pfad p der Länge  $\geq n := |V|$  zwischen  $i \neq j$  existiert, muss mindestens ein Knoten doppelt vorgekommen sein! Der Pfad p enthält also einen Zyklus, den wir raus kürzen können.

#### **Ergebnis**

Wenn ein Pfad p der Länge  $\geq n := |V|$  zwischen  $i \neq j$  existiert, existiert auch ein Pfad p' der Länge < n.

## Erreichbarkeit- unendlich addieren?



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

Wenn ein Pfad p der Länge  $\geq n := |V|$  zwischen  $i \neq j$  existiert, muss mindestens ein Knoten doppelt vorgekommen sein! Der Pfad p enthält also einen Zyklus, den wir raus kürzen können.

#### **Ergebnis**

Wenn ein Pfad p der Länge  $\geq n := |V|$  zwischen  $i \neq j$  existiert, existiert auch ein Pfad p' der Länge < n.

Für Pfade beliebiger Länge erhalten wir:

$$W = sgn(A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + ...) = sgn(\sum_{i=0}^{\infty} A^i) = sgn(\sum_{i=0}^{n-1} A^i)$$

# Einfacher Algorithmus zu Berechnung der Wegematrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation (Matrix A sei die Adjazenzmatrix)

von Graphen  $W \leftarrow 0$ 

for  $i \leftarrow 0$  to n-1 do

 $M \leftarrow I$ 

Erreichbarkeit for  $j \leftarrow 1$  to i do

 $M \leftarrow M \cdot A$ 

od

Erreichbarkeit

Algorithmus  $W \leftarrow W + M$ 

Komplexitätstheorie

O-Notation

od  $W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$ 

# Einfacher Algorithmus zu Berechnung der Wegematrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

(Matrix A sei die Adjazenzmatrix)

Repräsentation  $W \leftarrow 0$  von Graphen

for  $i \leftarrow 0$  to n-1 do

Adjazenzlisten  $M \leftarrow I$ 

for  $j \leftarrow 1$  to i do  $M \leftarrow M \cdot A$ 

Zwei-Erreichbarkeit

od

 $\{ M = A^i \}$ 

Algorithmus

**Erreichbarkeit** 

 $W \leftarrow W + M$   $\{ W = \sum_{k=0}^{i} A^k \}$ 

Komplexitätstheorie

od  $W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$ 

O-Notation

{ W ist die Wegematrix }

Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2$$
$$= n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

# Einfacher Algorithmus zu Berechnung der Wegematrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

(Matrix A sei die Adjazenzmatrix)

$$W \leftarrow 0$$

for 
$$i \leftarrow 0$$
 to  $n-1$  do

$$M \leftarrow 1$$

for 
$$j \leftarrow 1$$
 to  $i$  do  $M \leftarrow M \cdot A$ 

od

$$\{\; M=A^i\;\}$$

$$W \leftarrow W + M$$

$$\{\ W = \textstyle\sum_{k=0}^{i} A^k\ \}$$

od

$$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$$

Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2$$

$$= n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Wie könnte man diesen Algorithmus schneller machen?

# Einfacher Algorithmus zu Berechnung der Wegematrix



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

$$W \leftarrow 0$$
 $M \leftarrow 1$ 

od

Erreichbarkeit

for 
$$i \leftarrow 0$$
 to  $n-1$  do

Zwei-Erreichbarkeit

$$W \leftarrow W + M$$
$$M \leftarrow M \cdot A$$

Erreichbarkeit

Algorithmus 
$$W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)$$

Komplexitätstheorie

O-Notation

für  $A^i$  kann man  $A^{i-1}$  wiederverwenden

Aufwand:

$$n\cdot (n^2+(2n^3-n^2))+n^2=2n^4+n^2$$

# Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Wichtige Komplexitätsmaße:

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Wichtige Komplexitätsmaße:

Adjazenzlisten

Speicherplatzbedarf

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Wichtige Komplexitätsmaße:

Adjazenzlisten

Speicherplatzbedarf

Erreichbarkeit

Rechen- bzw. Laufzeit

Zwei-Erreichbarkeit

Unterscheidung in

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

# Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

#### Wichtige Komplexitätsmaße:

- Speicherplatzbedarf
- Rechen- bzw. Laufzeit

#### Unterscheidung in

Best Case (oft uninteressant)

# Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

#### Wichtige Komplexitätsmaße:

- Speicherplatzbedarf
- Rechen- bzw. Laufzeit

#### Unterscheidung in

- Best Case (oft uninteressant)
- Average Case (schwierig zu finden, deswegen selten angegeben)

Nompiexitatistricon

# Komplexitätstheorie



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

Wichtige Komplexitätsmaße:

- Speicherplatzbedarf
- Rechen- bzw. Laufzeit

Unterscheidung in

- Best Case (oft uninteressant)
- Average Case (schwierig zu finden, deswegen selten angegeben)
- Worst Case (meistens angegeben)

# Ignorieren konstanter Faktoren



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

#### Definition

Adjazenzlisten

Seien  $g, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$  Funktionen. Dann wächst g asymptotisch genauso schnell wie f genau dann, wenn gilt:

Erreichbarkeit

 $\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n) \leq c' \cdot f(n)$ 

Zwei-Erreichbarkeit

ZWEI-LITEICHDAIR

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## Ignorieren konstanter Faktoren



Lukas Bach Jukas.bach@student.kit.edu

von Graphen

### Definition

Adjazenzlisten

Seien  $g, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$  Funktionen. Dann wächst g asymptotisch genauso schnell wie f genau dann, wenn gilt:

 $\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n) \leq c' \cdot f(n)$ 

Zwei-Erreichbarkeit

Notation

**Erreichbarkeit** 

Algorithmus

 $f \approx g$  oder  $f(n) \approx g(n)$  (äsymptotisch gleich")

Bemerkung

 $\approx$  ist eine Äquivalenzrelation

Komplexitätstheorie

## **Theta**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

## Definition

 $\Theta(f) = \{g|g \asymp f\}$ Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Theta**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten Definition

 $\Theta(f) = \{g|g \asymp f\}$ 

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Satz

Errojohbarkoit

 $\forall a, b \in \mathbb{R}_+ : \Theta(a \cdot f) = \Theta(b \cdot f)$ 

Algorithmus

Komplexitätstheorie

### **Obere und untere Schranke**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

## Obere Schranke (Worst-Case Approximation)

 $O(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \ge n_0 : g(n) \le c \cdot f(n)\}$ 

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

### **Obere und untere Schranke**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

## Obere Schranke (Worst-Case Approximation)

Repräsentation von Graphen

 $O(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \ge n_0 : g(n) \le c \cdot f(n)\}$ 

Adjazenzlisten

Untere Schranke (Best-Case Approximation)

Erreichbarkei

 $\Omega(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \ge n_0 : g(n) \ge c \cdot f(n)\}$ 

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie

## **Obere und untere Schranke**



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

## epräsentatio

von Graphen

Adjazenzlisten

#### Erreichbarkei

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

### Obere Schranke (Worst-Case Approximation)

$$O(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \ge n_0 : g(n) \le c \cdot f(n)\}$$

### Untere Schranke (Best-Case Approximation)

$$\Omega(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \ge n_0 : g(n) \ge c \cdot f(n)\}$$

#### Notation

- ullet  $g 
  ightharpoonup {\it of} f$  falls  $g \in {\it O}(f)$  bzw. g wächst asymptotisch höchstens so schnell wie f
- g > f falls  $g \in \Omega(f)$  bzw. g wächst asymptotisch mindestens so schnell wie f

## Obere und untere Schranke



Lukas Bach Jukas.bach@student.kit.edu

## Obere Schranke (Worst-Case Approximation)

von Graphen

$$O(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \ge n_0 : g(n) \le c \cdot f(n)\}$$

 $\Omega(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n > n_0 : g(n) > c \cdot f(n)\}$ 

Adjazenzlisten

## Untere Schranke (Best-Case Approximation)

### Notation

Zwei-Erreichbarkeit

**Erreichbarkeit** 

Algorithmus

Komplexitätstheorie

O-Notation

- $q \not = q f$  falls  $q \in O(f)$  bzw. q wächst asymptotisch höchstens so schnell wie f
- g > f falls  $g \in \Omega(f)$  bzw. g wächst asymptotisch mindestens so schnell wie f

#### Bemerkung

Es gilt 
$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation

von Graphen

Adjazenzlisten

 $log_a n \in \Theta(log_b n)$ 

**Beispiel** 

Lemma

Erreichbarkeit

 $log_2 n \in \Theta(log_8 n)$ 

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Lemma

 $\textit{log}_{\textit{a}}\textit{n} \in \Theta(\textit{log}_{\textit{b}}\textit{n})$ 

Adjazenzlisten

**Beispiel** 

Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

 $\textit{log}_2\textit{n} \in \Theta(\textit{log}_8\textit{n})$ 

Zwei-Erreichbarkeit

**Beweis** 

wei-Fileiciparkeit Beweis

 $\frac{1}{3}log_2n$ 

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Lemma

 $log_a n \in \Theta(log_b n)$ 

Adjazenzlisten

**Beispiel** 

Erreichbarkeit

 $log_2 n \in \Theta(log_8 n)$ 

Zwei-Erreichbarkeit

**Beweis** 

 $\frac{1}{3}log_2n = \frac{1}{log_28}log_2n$ 

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation

von Graphen

Lemma

 $log_a n \in \Theta(log_b n)$ 

Adjazenzlisten

**Beispiel** 

Erreichbarkeit

 $log_2 n \in \Theta(log_8 n)$ 

Zwei-Erreichbarkeit

**Beweis** 

 $\frac{1}{3}log_2n = \frac{1}{log_28}log_2n = \frac{log_2n}{log_28}$ 

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

### Lemma

 $log_a n \in \Theta(log_b n)$ 

Adjazenzlisten

Beispiel

Erreichbarkeit

 $log_2 n \in \Theta(log_8 n)$ 

Zwei-Erreichbarkeit

**Beweis** 

 $\frac{1}{3}log_2n = \frac{1}{log_28}log_2n = \frac{log_2n}{log_28} = log_8n \le log_2n$ 

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Aufgabe

Adjazenzlisten Gilt  $log_2(\mathit{n}^{20}) \in \Theta(\mathit{logn})$ 

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

ZWEI-LITEIGIDAIREIL

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

**Aufgabe** 

Adjazenzlisten

Gilt  $log_2(n^{20}) \in \Theta(logn)$  Lösung

Erreichbarkeit

Ja, denn  $log_2(n^{20}) = 20 \cdot log_2 n$ 

Zwei-Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Probeklausur

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

ZWEI-LITEICHDAIREI

Erreichbarkeit Algorithmus

Komplexitätstheorie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Erreichbarkeit

Zwei-Erreichbarkeit

Erreichbarkeit

Algorithmus

Komplexitätstheorie

