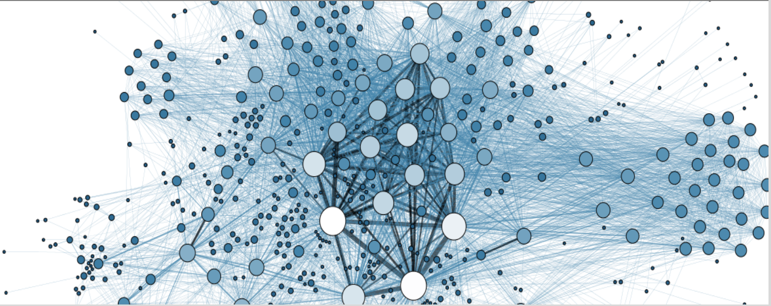
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 15.12.2016



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Gliederung

1. Prädikatenlogik

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Grundlagen zu Prädikatenlogik

Prädikatenlogik (PL) erweitert Aussagenlogik durch Ergänzen von "Prädikaten", einer Art von Funktionen, die Wahrheitswerte zurückgeben. Alphabet der Prädikatenlogik:

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$, also Alphabet der Aussagenlogik.
- $\forall$ Allquantor ($\forall x$ heißt "für alle x gilt...)
- $\exists$ Existenzquantor ($\exists x$ heißt "es existiert min. ein x... für das gilt...)
- $x, y, z, x_i \in Var_{PL}$ Variablen
- $c, d, c_i \in Const_{PL}$ Konstanten
- $f, g, h, f_i \in Fun_{PL}$ Funktionen
- $R, S, R_i \in Rel_{PL}$ Relationen (funktionieren ähnlich wie Funktionen)
- $\doteq$ Objektgleichheit
- , Komma

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Gliederung der Prädikatenlogik

Terme

Ein Term ist ein Element aus der Sprache über $A_{Ter} := \{(,), ,\} \cup Var_{PL} \cup Const_{PL} \cup Fun_{PL}$.

Atomare Formeln

Atomare Formeln sind zum Beispiel

- Objektgleichheiten $f_1 \doteq f_2$
- Relation von Termen $R(t_1, t_2, ...)$

Stelligkeit einer Funktion

Die Stelligkeit $ar(f) \in \mathbb{N}_+$ einer Funktion gibt die Anzahl der Parameter von f an. (Analog Stelligkeit von Relationen $ar(R)$)

Verständnis von Termen, Atomaren Formeln, Stelligkeit

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

- Woraus kann ein Term bestehen?

$\longrightarrow$ Aus Klammern $($, $)$, Kommas $,$, Variablen, Konstanten, Funktionen.

- Was davon sind atomare Formeln: $R(x) \wedge S(f(x, c))$, $R(x, g(c, f(y, x)))$?

$\longrightarrow$ Nein, ja.

- Was sind die Stelligkeiten folgender Funktionen: $f(a, b, c)$, $g(a)$, $h(a, b)$?

$\longrightarrow$ $3, 1, 2$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Grammatik der Prädikatenlogik

Karlsruher Institut für Technologie

Prädikatenlogische Formeln werden durch die Grammatik $G := (N_{Ter}, A_{Ter}, T, P_{Ter})$ erzeugt mit:

- $m + 1$ Nichtterminalsymbolen $N_{Ter} := \{T\} \cup \{L_i | i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m\}$ ($m =$ Maximale Stelligkeit von Funktionen)
- Terminalsymbolen: Alphabet, aus dem Terme erzeugbar sind
- Produktionen

$$
\begin{aligned}
L_{i+1} &\to L_i, T && \text{für jedes } i \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } i < m \\
L_1 &\to T \\
T &\to c_i && \text{für jedes } c_i \in Const_{PL} \\
T &\to x_i && \text{für jedes } x_i \in Var_{PL} \\
T &\to f_i(L_{ar(f_i)}) && \text{für jedes } f_i \in Fun_{PL}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Seien Funktionen f, g mit $ar(f) = 2, ar(g) = 1$, Konstante c und Variablen x, y gegeben. Was kann man damit machen?

Grammatik der Prädikatenlogik

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel: Seien Funktionen f, g mit $ar(f) = 2, ar(g) = 1$, Konstante c und Variablen x, y gegeben. Was kann man damit machen?

Dann:

- $N_{Ter} = \{T, L_1, L_2\}$
- $P_{Ter} = \{L_2 \rightarrow L_1, T$

$$L_1 \rightarrow T$$
$$T \rightarrow c$$
$$T \rightarrow x$$
$$T \rightarrow y$$
$$T \rightarrow g(L_1)$$
$$T \rightarrow f(L_2)\}$$

Aufgabe zu Grammatiken und Prädikatenlogik

Welche dieser Formeln entsprechen dieser Grammatik?

- $f(c, g(x))$
- $f(x, y, c)$
- $g(f(c, c))$
- $g(g(f(g(x), g(f(c, c)))))$
- $g(c, f)c)$

Bilde die Ableitungsbäume zu den korrekten Formeln.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Bindungsstärken

Karlsruher Institut für Technologie

Bindungsstärke

Verschiedene Operanden “binden” stärker als andere. Wenn ein Operand stärker als die umliegenden Operanden bindet, tritt derselbe Effekt auf, wie wenn Klammerung geschehen würde.

Bindungsstärken absteigend:

- $\forall / \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow / \leftarrow, \leftrightarrow$

Finde äquivalente Formeln, die mit möglichst wenig Klammern auskommen:

- $\exists x \forall y (R(f(x), g(x)) \vee \forall z R(c, x))$

Quantoren

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

- $\forall x p(x)$ heißt: für alle $x \in D$ gilt die Aussage $p(x)$.
- $\exists x p(x)$ heißt: für (mindestens) ein $x \in D$ gilt die Aussage $p(x)$.
- Gilt $\forall x \exists y \quad p(x, y) = \exists y \forall x \quad p(x, y)$?
  - Zum Beispiel $p(x, y)$:=“Person x ist mit Person y verheiratet.
  - Also:
    - $\forall x \exists y \quad p(x, y) =$ Für jede Person x gibt es eine Person y, mit der x verheiratet ist.
    - $\exists y \forall x \quad p(x, y) =$ Es gibt eine Person y, sodass für alle Personen x gilt, dass x mit allen Personen y verheiratet ist.
  - Eher nicht. Reihenfolge ist also wichtig!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Bindungsbereich von Quantoren

Quantoren binden Variablen nur zu der zugehörigen Teilformel.

- Zum Beispiel: $p(x) \wedge \forall x \exists y (p(x) \wedge q(x, y, z)) \to r(x)$
- Welcher Teil der Formel muss für alle x gelten? Welcher für alle y?
- Variablen, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors liegen, nennt man frei.

Überschattung ist möglich, daher durch Quantoren definierte Variablen beziehen sich immer auf den nächsten Quantor.

- Ist $\forall x (p(x) \wedge \forall x (\neg p(x)))$ erfüllbar?
- Ja: $\forall x (p(x) \wedge \forall \hat{x} (\neg p(\hat{x})))$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Bindungsbereich von Quantoren

Substitution ist möglich.Dabei wird eine freie Variable durch einen Term ersetzt, die Substitution wird mit $\beta[a/b]$ bezeichnet, wobei *a* durch *b* ersetzt wird.

Führe die folgenden Substitutionen durch:

- $\beta[x/5](p(x) \vee q(x, y)) = p(5) \vee q(5, y)$
- $\beta[x/5](p(x) \vee \forall x(q(x, y)) = p(5) \vee \forall x(q(x, y))$
- $\beta[x/y, y/x, z/f(z)](p(z) \wedge q(x, y)) = p(f(z)) \wedge q(y, x)$

Welche der Variablen sind gebunden (und durch welche Quantoren), welche sind frei?

- $p(x) \rightarrow \forall x \exists y(p(x) \wedge q(y, z) \leftrightarrow \forall z(q(x, z)))$
- $\forall y(p(f(x, y))) \vee \exists z(q(z, f(y, z)))$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Semantik von prädikatenlogischen Formeln

Um prädikatenlogische Formeln zu interpretieren, brauchen wir einige neue Mengen:

- Interpretation (D, I), bestehend aus...
  - Universum $D \neq \emptyset$ mit...
    - $I(c_i) \in D$ für $c_i \in Const_{PL}$
    - $I(f_i) : D^{ar(f_i)} \to D$ für $f_i \in Fun_{PL}$
    - $I(R_i) \subseteq D^{ar(R_i)}$ für $R_i \in Rel_{PL}$
    - I weißt also den Komponenten Bedeutungen zu, "definiert diese"
  - Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$, z.B. $\beta(x) := 3$, $\beta(y) := 11$
    - β definiert also Variablenwerte
- Damit können wir prädikatenlogische Formeln definieren!

$val_{D,I,\beta}$

Die Funktion $val_{D,I,\beta} : L_{Ter} \cup L_{For} \to D \cup \mathbb{B}$ weißt einer prädikatenlogischen Formel eine Bedeutung (Wahrheitsgehalt für Formeln und Element des Universums für Terme) zu.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel zur Semantik

Unterschied zwischen $val_{D,I,\beta}$ und I? I ist für Einzelteilen (Konstanten, Funktionen, Relationen) eine Bedeutung zuweist, und $val_{D,I,\beta}$ einer ganzen Formel eine Bedeutung zuweist.

Beispiel:

Sei $D := \mathbb{N}_0, I(c) := 10, ar(f) := 2, ar(p) := 1, ar(q) := 2, \beta(x) := 7$.
Sei $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto x - y$.
Sei $ar(R) := 2, I(R) := \{(x, y) | x \leq y\}$.
Sei $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5, I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel zur Semantik

Sei $D := \mathbb{N}_0, I(c) := 10, ar(f) := 2, ar(p) := 1, ar(q) := 2, \beta(x) := 7$.
Sei $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto x - y$.
Sei $ar(R) := 2, I(R) := \{(x, y) | x \leq y\}$.
Sei $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5, I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$.

- $T_1 := p(x) \to \exists y(q(y, x) \wedge p(y))$, was ist $val_{D,I,\beta}(T_1)$?
  - Wähle $y = 8 \in \mathbb{N}_0$. Dann: $I(q(8, 7)) = w, I(p(8)) = w$, also $val_{D,I,\beta}(\exists y(q(y, x) \wedge p(y))) = w$, und $val_{D,I,\beta}(T_1) = w$.
- $T_2 := p(x) \to \exists y(q(f(c, y), x) \wedge p(y))$, was ist $val_{D,I,\beta}(T_2)$?
  - $val_{D,I,\beta}(p(x)) = w$
  - $val_{D,I,\beta}(q(f(c, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(f(10, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(10 - y, 7)) = w$ für $y \in \{0, 1, 2\}$.
  - $val_{D,I,\beta}(p(y)) = w$ für $y \geq 5$.
  - Also: $val_{D,I,\beta}(T_2) = f$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $\mathit{Vater}(x, y) :=$ wahr, gdw. x Vater von y ist, analog $\mathit{Mutter}(x, y)$.
- $\mathit{Männlich}(x, y) :=$ wahr, gdw. x männlich ist, analog $\mathit{Weiblich}(x)$.
- $\mathit{Verheiratet}(x, y) :=$ wahr, gdw. x und y verheiratet sind.

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede männliche Person hat eine Mutter.
  - $\forall x \exists y (\mathit{Männlich}(x) \rightarrow \mathit{Mutter}(y, x))$
  - Kann eine Person jetzt auch mehr als eine Mutter haben? Widerspricht das der ursprünglichen Aussage?
- Jeder Mann hat Kinder (plural!).
  - $\forall x \exists y \exists z (\mathit{Männlich}(x) \rightarrow (\mathit{Vater}(x, y) \wedge \mathit{Vater}(x, z) \wedge \neg(y \doteq z)))$

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $Vater(x, y) :=$ wahr, gdw. x Vater von y ist, analog $Mutter(x, y)$.
- $Männlich(x, y) :=$ wahr, gdw. x männlich ist, analog $Weiblich(x)$.
- $Verheiratet(x, y) :=$ wahr, gdw. x und y verheiratet sind.

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede Frau ist mit höchstens einem Mann verheiratet.
  - $\forall x \forall y \forall z (Weiblich(x) \wedge ((Männlich(y) \wedge Männlich(z) \wedge \neg(y \doteq z) \wedge Verheiratet(x, y)) \rightarrow \neg Verheiratet(x, z)))$
- Wer männlich ist, ist nicht weiblich und umgekehrt.
  - $\forall x (Männlich(x) \rightarrow \neg Weiblich(x) \wedge Weiblich(x) \rightarrow \neg Männlich(x))$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Informationen

Karlsruher Institut für Technologie

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - `http://gbi.lukasbach.com`
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - `http://gbi.ira.uka.de`
  - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul