

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 12.01.2017



Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete
Graphen

Begriffe

- 1 Graphen
 - Praxisbeispiele
 - Ungerichtete Graphen
 - Begriffe

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete Graphen

Begriffe

Definition: Graph

Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Tupel aus:

- Einer endlichen, nichtleeren Knotenmenge V
- Einer endlichen Kantenmenge $E \subseteq V \times V$

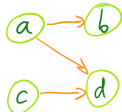
Beispiel: Knotenmenge $V := \{a, b, c, d\}$. Kantenmenge könnte zum Beispiel sein...

- $E := \{(a, b), (c, d), (a, d)\}$
- $E := \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- $E := \emptyset$

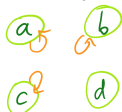
Wie sehen diese Graphen aus?

Beispiel: Knotenmenge $V := \{a, b, c, d\}$. Kantenmenge könnte zum Beispiel sein...

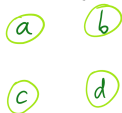
- $V := \{a, b, c, d\}, E := \{(a, b), (c, d), (a, d)\}$



- $V := \{a, b, c, d\}, E := \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$



- $V := \{a, b, c, d\}, E := \emptyset$



Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete
Graphen

Begriffe

Wann Angabe als Menge, wann als Visualisierung?

Graphen

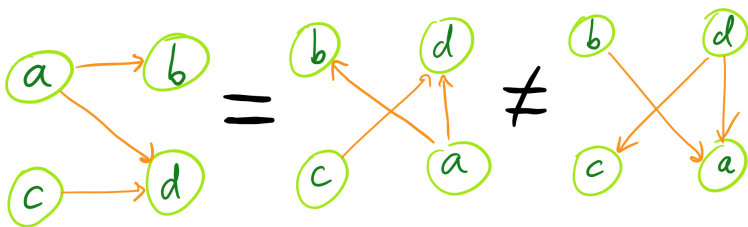
Praxisbeispiele

Ungerichtete Graphen

Begriffe

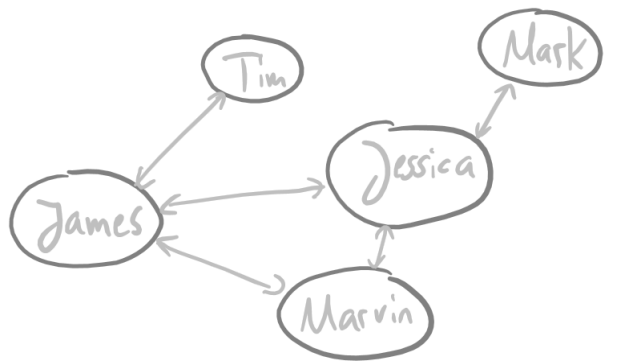
Wir verwenden gezeichnete Graphen und deren Definition als Mengen als äquivalent.

- $\{(a, b), (c, d), (a, d)\} = \{(a, b), (a, d), (c, d)\} \neq$
 $\{(b, a), (d, c), (d, a)\}$, also Kantenmenge mit unterschiedlichen
Reihenfolgen darstellbar. Genauso die Knotenmenge.



Es kann also in jedem Fall der Graph sowohl als “Visualisierung” oder als Menge angegeben werden, beide Varianten sind formal korrekt.

Praxisbeispiel: Soziales Netzwerk



- Ist Person A direkt mit Person B befreundet? \Leftrightarrow Gibt es eine Kante (A, B) ?
- Ist Person A über maximal 2 verschiedene Leute mit Person B befreundet? \Leftrightarrow Gibt es einen Pfad von A nach B mit maximaler Länge 3?
- Wieviele Freunde hat Person A ? \Leftrightarrow Welchen Grad hat Person $A \in V$?

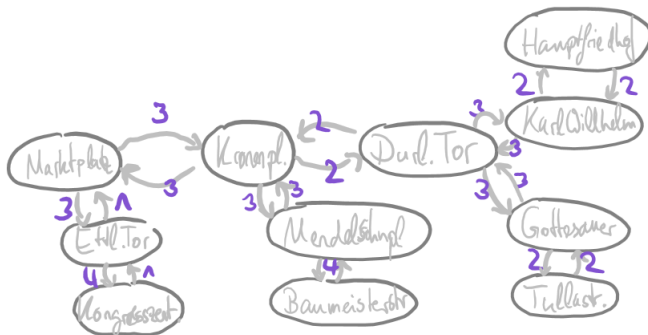
Praxisbeispiel: Wie kommt man am schnellsten von A nach B

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete Graphen

Begriffe



- Kantengewichtung: Jeder Kante wird eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ zugewiesen.
- Wie lange dauert der kürzeste Weg von Kongresszentrum nach Hauptfriedhof? \Leftrightarrow Wie lang ist ein kürzester Pfad von Kongresszentrum nach Hauptfriedhof?
- Wo kommt man von Kronenplatz überall innerhalb von 5 Zeiteinheiten hin? \Leftrightarrow Für welche Orte $v \in V$ existiert ein Pfad $(Kronenplatz, \dots, v)$ mit einer Länge von maximal 5?

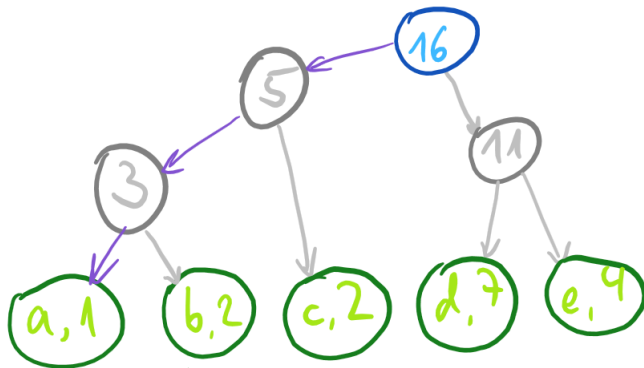
Praxisbeispiel: Huffman-Bäume

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete
Graphen

Begriffe



- Wie lang ist die Kodierung vom Zeichen c ? \Leftrightarrow Wie lang ist der Pfad von Wurzel zu Knoten c ? In diesem Fall 2.
- Wie viele Zeichen werden kodiert? \Leftrightarrow Wie viele Knoten sind von der Wurzel erreichbar, die selbst keine ausgehenden Kanten haben? \Leftrightarrow Wie viele Blätter hat der Baum?

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete Graphen

Begriffe

- Bis jetzt: Gerichtete Graphen, dh. Kanten (u, v) hatten eine Richtung von Knoten u nach Knoten v .

Ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph ist ein Graph, dessen Kanten Mengen, und keine Tupel sind.

- Beispiel: Statt Kante (u, v) jetzt Kante $\{u, v\} = \{v, u\}$.
- Information über Richtung geht also verloren, Kanten verbinden nur noch Knoten, ohne sich zu merken, welcher Knoten Start und welcher Ziel ist.

Teilgraph

Zu einem Graph $G := (V, E)$ ist ein Teilgraph definiert als $G' = (V', E')$, falls gilt $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

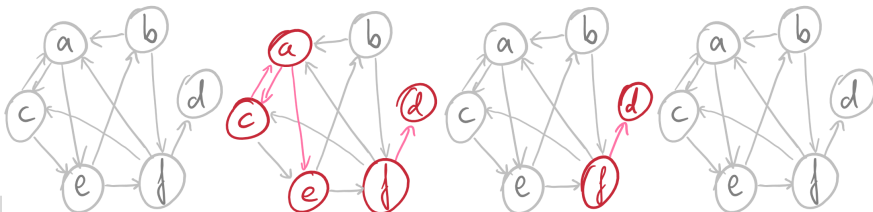
Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete Graphen

Begriffe

- Beispiel: Sei $G := (V, E)$ mit $V := \{a, b, c, d, e, f\}$ und $E := \{(b, a), (b, f), (f, d), (e, f), (f, a), (e, b), (a, e), (f, c), (a, c), (c, a), (c, e)\}$
- Ist ein Graph mit $V_1 := \{a, c, d, e, f\}$, $E_1 := \{(a, c), (c, a), (a, e), (f, d)\}$ ein Teilgraph von G ?
- Ist ein Graph mit $V_2 := \{d, f\}$, $E_2 := \{(f, d)\}$ ein Teilgraph von G ?
- Ist ein Graph mit $V_3 = E_3 = \emptyset$ ein Teilgraph von G ?



Teilgraph

Zu einem Graph $G := (V, E)$ ist ein Teilgraph definiert als $G' = (V', E')$, falls gilt $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

- Beispiel: Sei $G := (V, E)$ mit $V := \{a, b, c, d, e, f\}$ und $E := \{(b, a), (b, f), (f, d), (e, f), (f, a), (e, b), (a, e), (f, c), (a, c), (c, a), (c, e)\}$
- Ist ein Graph mit $V_4 := \{a, b\}$, $E_4 := \{(f, d)\}$ ein Teilgraph von G ?
- Ist ein Graph mit $V_5 := \{g, a\}$, $E_5 := \{(g, a), (a, g)\}$ ein Teilgraph von G ?

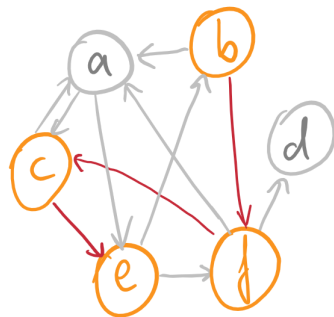
Pfad informell

Ein Pfad (u, \dots, v) ist eine Aneinanderreihung von Knoten, die jeweils mit Kanten verbunden sind, sodass man über das **traversieren** der Kanten vom Startknoten $u \in V$ zum Zielknoten $v \in V$ kommt.

Anmerkung: Wenn man sich einen Knoten $x \in V$ merkt und eine Kante $(x, y) \in E$ traversiert, so gelangt man zu Knoten y .

Pfad formell

Ein Pfad $P := (v_0, v_1, \dots, v_n)$ der Länge n ist eine Permutation auf V , wobei gilt:
 $\forall i \in \mathbb{Z}_n : (v_i, v_{i+1}) \in E$.

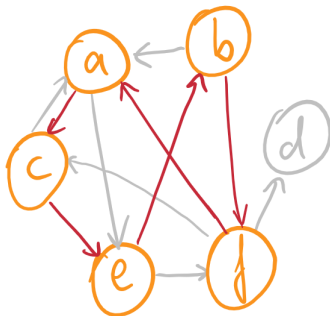


Der Pfad (b, f, c, e) ist ein möglicher Pfad von b nach e der Länge 3.

Gibt es noch andere solcher Pfade?

Zyklus

Ein Zyklus ist ein Pfad (v_1, \dots, v_n) mit $v_1 = v_n$.



Der Pfad (b, f, a, c, e) ist ein möglicher Zyklus.
Gibt es noch andere Zyklen?

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete
Graphen

Begriffe

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete
Graphen

Begriffe

Zusammenhängender Graph

Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn gilt: $\forall u, v \in V \exists$ Pfad von u nach v .

Stark zusammenhängender Graph

Ein gerichteter Graph heißt stark zusammenhängend, wenn gilt:
 $\forall u, v \in V \exists$ Pfad von u nach v .

Schwach zusammenhängender Graph

Ein gerichteter Graph heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichteter Graph zusammenhängend ist.

Eingangsgrad

Der Eingangsgrad eines Knoten $u \in V$ ist definiert als:

$d_-(u) := |\{(v, u) \in E : v \in V\}|$, also die Anzahl der Kanten, die in den Knoten u zeigen.

Ausgangsgrad

Der Ausgangsgrad eines Knoten $u \in V$ ist definiert als:

$d_+(u) := |\{(u, v) \in E : v \in V\}|$, also die Anzahl der Kanten, die vom Knoten u aus weg zeigen.

Grad

Der Grad eines Knoten u ist definiert als: $d(u) := d_+(u) + d_-(u)$, also die Anzahl der Kanten, über die u verbunden ist.

- Kennt ihr schon: Huffman-Baum

Gerichteter Baum

Ein gerichteter Baum ist ein **schwach zusammenhängender kreisfreier gerichteter Graph**.

Ungerichteter Baum

Ein ungerichteter Baum ist ein **zusammenhängender kreisfreier ungerichteter Graph**.

- Bäume haben immer einen Wurzelknoten, von dem alle anderen Knoten ausgehen.
- Ungerichtete Bäume **können** mehrere Wurzeln haben.
- Knoten mit Grad 1 heißen Blätter.

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete
Graphen

Begriffe

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete Graphen

Begriffe

- Wieviele Kanten kann ein Graph mit n Knoten maximal haben? n^2
- Wieviele Kanten kann ein schlingenfreier Graph mit n Knoten maximal haben? $n^2 - n = n(n - 1)$
- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph mit n Knoten maximal haben? $\frac{n(n-1)}{2}$
- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter schlingenfreier Graph mit n Knoten maximal haben? $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
 - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
 - Donnerstags, 14:00 - 15:30
 - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
 - <http://gbi.ira.uka.de>
 - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
 - 06.03.2017, 11:00
 - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
 - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul