

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 28.10.2016



Organisatorisches

1 Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

2 Signale und Nachrichten

Mengen

3 Mengen

Alphabete

4 Alphabete

Relationen und
Abbildungen

5 Relationen und Abbildungen

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

- Vorlesung und Übung
 - Mittwoch 9:45 - 11:15 Vorlesung
 - Freitag 9:45 - 11:15 abwechselnd Vorlesung und Übung
- Tutorium
 - Donnerstags, 14:00 - 15:30
 - 50.34 Informatikbau, -107
- Übungsblätter
 - Alle zwei Wochen
 - Ausgabe Mittwochs, Abgabe Donnerstags bis 16:00 zwei Wochen drauf

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

- min. 50% aller Punkte auf Übungsblättern richtig
- Rückgabe im Tutorium
- Bestehen ist *keine* Voraussetzung für die Klausur, *aber* fürs Modul!
- Gemeinsames Abgeben, Abschreiben verboten
- Übungsblätter und später auch Musterlösungen im ILIAS

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

- Alle Tutorienfolien auf:

`http://gbi.lukasbach.com`

- Bei Fragen: `lukas.bach@student.kit.edu`
- Keine Anwesenheitspflicht
- Möglichkeit andere Tutorien zu besuchen

Organisatorisches

Signale und Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und Abbildungen

■ Objekt: 101

- Eins null eins oder 101 als Zahl oder 5 in binär oder zwei merkwürdige Striche mit einem Kreis dazwischen?
- Vom Kontext abhängig.
- Zunächst einfach ein konkretes Objekt.

■ Signal

- Physikalische Veränderung
- Lässt sich verschieden interpretieren.
- Beispiele:

- Notfallalarm in Serverraum



- Für Besucher nur schönes Leuchten
- Für Security die Information, zu kommen
- Für Techniker die Information, Ausrüstung zu holen

■ Nachricht: Objekt wie oben, das von Signal unabhängig ist

- Roter Notfallalarm ist ein anderes Signal als ein blauer Notfallalarm, aber vielleicht dieselbe Nachricht.

Organisatorisches

Signale und Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und Abbildungen

- Der interessante Teil: Informationen
- Bedeutung einer Nachricht
- Der vorher fehlende Kontext.
- Im obigen Beispiel:
 - Rote Alarmleuchte ist ein Signal (blaue Signalleuchte in Raum nebendran vielleicht auch)
 - “Alarm”: Nachricht
 - Information: Security soll herkommen, Techniker sollen das Werkzeug bereit halten, Besucher sollten Platz machen.

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

■ Erster wirklich wichtiger Teil.

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Zeichnung

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

Definition: Mengen

“Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente dieser Menge genannt werden) zu einem Ganzen.”

- Beispiel: $\{a, b, c, d\} =: A$ $\{a, c, 4\} =: B$, $\{10, 11\} =: C$
- Das Objekt c ist in A enthalten: $c \in A$, $c \in B$, $c \notin C$
- Reihenfolge gleich: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Elemente doppelt? $\{a, a, b, a\} = \{a, b\}$

■ Kardinalität oder Größe: Die Anzahl der Elemente der Menge

- $A := \{a, b, c\}. |A| = 3$
- $B := \{c, d\}. |B| = 2$
- Was ist $|\{1, 2, 3, 2\}|$? 3!
- Was ist $|\{\}\|$? 0

Leere Menge

Die Menge, die nichts enthält, nennen wir die leere Menge, und schreiben sie als $\{\}$ oder \emptyset .

Was ist $|\{\{\}\}|$? 1! $\{\emptyset\}$ enthält eine leere Menge, die selbst ein Element ist.

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Zeichnung

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

Seien $A := \{a, b, c\}$, $B := \{b, c\}$, $C := \{c, b\}$, $D := \{b, c, d\}$.

- Teilmenge: $A \subseteq B$, also A ist Teilmenge von B genau dann, wenn alle Elemente aus A auch in B sind.
- Echte Teilmenge: $A \subset B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.
 - Beispiele: $B \subseteq A$, sogar $B \subset A$.
 $C \subseteq B$ und $B \subseteq C$, aber $C \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq C$.
- Schnittmenge: $A \cap B = \{b, c\}$.
 $A \cap B$ enthält *genau* die Elemente, die in A und in B sind.
- Vereinigungsmenge: $A \cup D = \{a, b, c, d\}$.
 $A \cup B$ enthält *genau* die Elemente, die in A oder in B sind.
- Mengendifferenz: $A \setminus B = \{a\}$, also alle Elemente in A , die nicht in B sind.
- Komplementärmenge: \bar{A} enthält alle Elemente des *Universums*, die nicht in A sind. Angenommen, Universum = Lateinisches Alphabet:
 $\bar{A} = \{d, e, f, g, \dots, y, z\}$

Potenzmenge

Die Potenzmenge 2^M einer Menge M enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von M sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist 2^M mit $M = \{0, 1\}$?
 - Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $\{0, 1\} \in 2^M$.
 - $\{0\} \in 2^M$ und $\{1\} \in 2^M$.
 - Weitere? Nein, diese vier Mengen sind alle möglichen Teilmengen.
 - $\Rightarrow 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

$$M = \{0, 1\}, 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Was ist 2^{2^M} ?

■ Also $2^{\{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}}$.

■ Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \in 2^{2^M}$.

$$\begin{aligned} 2^{2^M} = \{ & \{\}, \\ & \{\{\}\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0, 1\}\}, \\ & \{\{\}, \{0\}\}, \{\{\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \\ & \quad \{\{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1\}, \{0, 1\}\}, \\ & \{\{\}, \{0\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \\ & \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \\ & \} \end{aligned}$$

Alphabet

Ein Alphabet ist eine *endliche, nichtleere* Menge von Zeichen.

Was davon sind Alphabete? $\{d, 34, \pi, \%\}$, $\{a, b, c, \dots, y, z\}$, \emptyset , \mathbb{N} .

- $\{d, 34, \pi, \%\}$ und $\{a, b, c, \dots, y, z\}$ sind Alphabete.
- \emptyset ist leer und damit kein Alphabet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ enthält alle natürlichen Zahlen und ist damit nicht endlich, also kein Alphabet.
- $\{0, 1\}$ ist das Alphabet, das alle Binärzahlen enthält.
- $\{\cdot, +, -, /\} =: R$ ist ein Alphabet von Rechenzeichen. $R \cup \{0, 1, \dots, 9\}$ ist ein Alphabet, das ein Taschenrechner als Eingabealphabet benutzen könnte.

Paar

Ein Paar ist eine geordnete Menge der Kardinalität 2.

Schreibweise mit runden Klammern ().

- Beispiel: $(a, 4) \neq (4, a)$
- Beispiel für eine Menge aus Tupeln: $\{ ("AgeOfEmpires", "Strategie"), ("Battlefield", "Shooter"), ("SeriousSam", "Shooter") \}$

Tupel

Ein Tupel ist eine geordnete Menge. Konkret ist ein n -Tupel ein Tupel der Kardinalität n .

Also wie ein Paar, nur mit beliebiger Kardinalität. Ein Paar ist spezifisch ein 2-Tupel.

Beispiel: $(4tb, 512gb, 128gb, 4mb) \neq (512gb, 4mb, 4tb, 128gb)$.

Zwei Mengen: $A := \{a, b, c\}$ und $B := \{1, 2, 3\}$.

Wir wollen alle Tupel mit erstem Element aus A und zweiten Element aus B .
 $\{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3) \}$
 $= A \times B$

Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das Kreuzprodukt definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das Kreuzprodukt $A \times B$ definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Kreuzprodukt von n Mengen

Zu n Mengen M_1, M_2, \dots, M_n ist das Kreuzprodukt $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ definiert als Menge aller n -Tupel (e_1, e_2, \dots, e_n) mit $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$.

Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \times \text{mal}} = A^n.$$

Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das Kreuzprodukt $A \times B$ definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

$$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}. A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

Kreuzprodukt von n Mengen

Zu n Mengen M_1, M_2, \dots, M_n ist das Kreuzprodukt $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ definiert als Menge aller n -Tupel (e_1, e_2, \dots, e_n) mit $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$.

$$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}, C := \{\omega\}. A \times B \times C \\ = \{(a, 1, \omega), (a, 2, \omega), (b, 1, \omega), (b, 2, \omega)\}.$$

Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{mal}} = A^n.$$

- $A := \{a, b\}$. $A^2 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$
 $A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, b), \dots\}$.
- A beliebige Menge. $A^0 = \emptyset$
- Achtung! $2^M \neq M^2$. Potenzmengen nicht mit Mengenpotenz verwechseln!

Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen A und B ist eine Menge $R \subseteq A \times B$.

- Für die Mengen

$M_{\text{Spiele}} = \{ \text{"Battlefield"}, \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"SeriousSam"} \},$

$M_{\text{Genre}} = \{ \text{"Shooter"}, \text{"Strategie"} \}$ sind folgendes mögliche

Relationen:

- $\{ (\text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Strategie"}), (\text{"Battlefield"}, \text{"Shooter"}), (\text{"SeriousSam"}, \text{"Shooter"}) \}$
- $\{ (\text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Strategie"}), (\text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Shooter"}) \}$
- \emptyset
- "Kleiner gleichrelation" auf $M = \{1, 2, 3\}$:
 $R_{\leq} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3) \} \in M \times M$

Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen A und B ist eine Menge $R \subseteq A \times B$.

Ternäre Relation

Eine ternäre Relation auf drei Mengen A , B und C ist eine Menge
 $R \subseteq A \times B \times C$.

n -äre Relation

Eine n -äre Relation auf n Mengen $M_1, M_2 \dots M_n$ ist eine Menge
 $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

Linkstotale Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal, wenn für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in R$.

Die linke Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.



Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

Rechtstotale Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtstotal, wenn für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $(a, b) \in R$.

Die rechte Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann **surjektiv**.

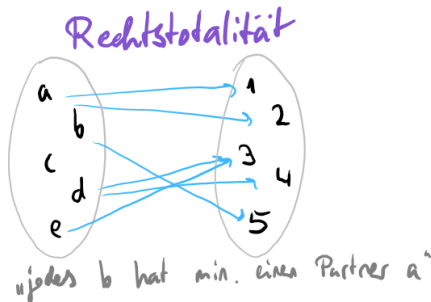
Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen



Linkseindeutige Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$ aus der Relation R gilt: wenn $a \neq b$, dann gilt auch $\alpha \neq \beta$.

Also: Keine zwei Elemente der linken Seite der Relation haben dasselbe rechte Element.

Angenommen, $a \neq b$ und $\alpha = \beta$. \Rightarrow offenbar nicht linkseindeutig.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann **injektiv**.



Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen

Rechtseindeutige Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$ aus der Relation R gilt: wenn $\alpha \neq \beta$, dann gilt auch $a \neq b$.

Also: Keine zwei Elemente der rechten Seite der Relation haben dasselbe linke Element.

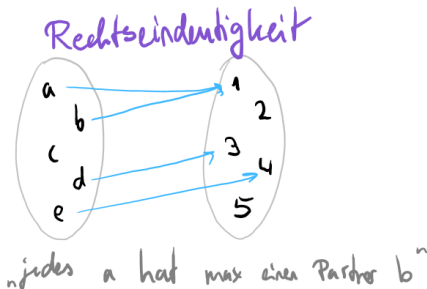
Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen



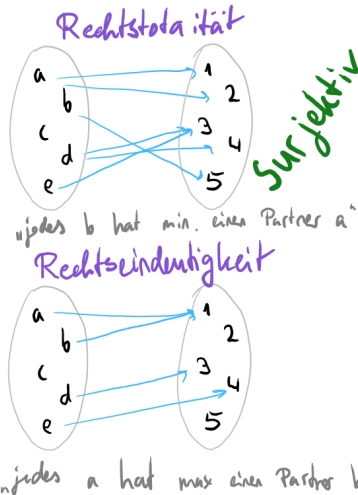
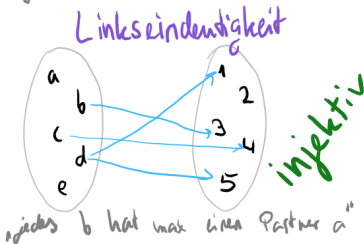
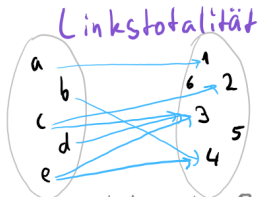
Organisatorisches

Signale und
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und
Abbildungen



Abbildung

Eine Relation R heißt eine Abbildung, wenn sie linkstotal *und* rechtseindeutig sind.

- Injektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, linkseindeutig
- Surjektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, rechtstotal

Bijektivität

Eine Relation heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Damit ist sie linkstotal und rechtseindeutig (weil es eine Abbildung ist) und linkseindeutig (injektiv) und rechtstotal (surjektiv).

Tolle Eigenschaft: Für jedes Element $(a, b) \in R$ der bijektiven Relation R ist *jedem* a *genau ein* b zugeordnet.

Seien $A = B = \mathbb{R}$, $f \subseteq A \times B$. Wir suchen Relation, die für jedes $a \in A$ ein Element $(a, b) \in f$ enthält mit $b = a^2$.

$$f = \{(0, 0), (0.1, 0.01), (2, 4), \dots\}$$

Unendlich viele Elemente, und unmöglich alle zu nennen.

(Mathematische) Schreibweise für Abbildungen:

$f : A \rightarrow B, a \mapsto a^2$, also Quadratfunktion.

Ist diese Funktion injektiv oder surjektiv?

- Nicht injektiv, da z.B. $f(1) = f(-1)$, also $(1, 1) \in f$ und $(-1, 1) \in f$.
- Nicht surjektiv, da z.B. -1 nie als Funktionswert angenommen wird, daher $(a, -1) \notin f$ für beliebige $a \in A$.

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
 - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
 - Donnerstags, 14:00 - 15:30
 - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
 - <http://gbi.ira.uka.de>
 - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
 - 06.03.2017, 11:00
 - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
 - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul