

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) |



## Gliederung

- 1 Organisatorisches
- 2 Signale und Nachrichten
- 3 Mengen
- 4 Alphabete
- 5 Relationen und Abbildungen
- 6 Wiederholung
- 7 Wörter
- 8 Formale Sprachen
- 9 Vollständige Induktion
- 10 Formale Sprache
- 11 Übersetzung und Kodierung
  - Kodierung von Zahlen
  - Repräsentation von Zahlen
  - Zweierkomplement-Darstellung

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

### ■ Vorlesung und Übung

- Mittwoch 9:45 - 11:15 Vorlesung
- Freitag 9:45 - 11:15 abwechselnd Vorlesung und Übung

### ■ Tutorium

- Donnerstags, 14:00 - 15:30
- 50.34 Informatikbau, -107

### ■ Übungsblätter

- Alle zwei Wochen
- Ausgabe Mittwochs, Abgabe Donnerstags bis 16:00 zwei Wochen drauf

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

- min. 50% aller Punkte auf Übungsblättern richtig
- Rückgabe im Tutorium
- Bestehen ist *keine* Voraussetzung für die Klausur, *aber* fürs Modul!
- Gemeinsames Abgeben, Abschreiben verboten
- Übungsblätter und später auch Musterlösungen im ILIAS

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

- Alle Tutorienfolien auf:

`http://gbi.lukasbach.com`

- Bei Fragen: `lukas.bach@student.kit.edu`
- Keine Anwesenheitspflicht
- Möglichkeit andere Tutorien zu besuchen

## Organisatorisches

## Signale und Nachrichten

## Mengen

## Alphabete

## Relationen und Abbildungen

## Wiederholung

## Wörter

## Formale Sprachen

### ■ Objekt: 101

- Eins null eins oder 101 als Zahl oder 5 in binär oder zwei merkwürdige Striche mit einem Kreis dazwischen?
- Vom Kontext abhängig.
- Zunächst einfach ein konkretes Objekt.

## ■ Signal

- Physikalische Veränderung
- Lässt sich verschieden interpretieren.
- Beispiele:

- Notfallalarm in Serverraum



- Für Besucher nur schönes Leuchten
- Für Security die Information, zu kommen
- Für Techniker die Information, Ausrüstung zu holen

## ■ Nachricht: Objekt wie oben, das von Signal unabhängig ist

- Roter Notfallalarm ist ein anderes Signal als ein blauer Notfallalarm, aber vielleicht dieselbe Nachricht.

## Organisatorisches

### Signale und Nachrichten

### Mengen

### Alphabete

### Relationen und Abbildungen

### Wiederholung

### Wörter

### Formale Sprachen

- Der interessante Teil: Informationen
- Bedeutung einer Nachricht
- Der vorher fehlende Kontext.
- Im obigen Beispiel:
  - Rote Alarmleuchte ist ein Signal (blaue Signalleuchte in Raum nebendran vielleicht auch)
  - “Alarm”: Nachricht
  - Information: Security soll herkommen, Techniker sollen das Werkzeug bereit halten, Besucher sollten Platz machen.



Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen ■ Erster wirklich wichtiger Teil.

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Zeichnung

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

## Definition: Mengen

“Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente dieser Menge genannt werden) zu einem Ganzen.”

- Beispiel:  $\{a, b, c, d\} =: A$   $\{a, c, 4\} =: B$ ,  $\{10, 11\} =: C$
- Das Objekt  $c$  ist in  $A$  enthalten:  $c \in A$ ,  $c \in B$ ,  $c \notin C$
- Reihenfolge gleich:  $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Elemente doppelt?  $\{a, a, b, a\} = \{a, b\}$

## ■ Kardinalität oder Größe: Die Anzahl der Elemente der Menge

- $A := \{a, b, c\}. |A| = 3$
- $B := \{c, d\}. |B| = 2$
- Was ist  $|\{1, 2, 3, 2\}|$ ? 3!
- Was ist  $|\{\}|$ ? 0

## Leere Menge

Die Menge, die nichts enthält, nennen wir die leere Menge, und schreiben sie als  $\{\}$  oder  $\emptyset$ .

Was ist  $|\{\{\}\}|$ ? 1!  $\{\emptyset\}$  enthält eine leere Menge, die selbst ein Element ist.

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Zeichnung

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

Seien  $A := \{a, b, c\}$ ,  $B := \{b, c\}$ ,  $C := \{c, b\}$ ,  $D := \{b, c, d\}$ .

- Teilmenge:  $A \subseteq B$ , also  $A$  ist Teilmenge von  $B$  genau dann, wenn alle Elemente aus  $A$  auch in  $B$  sind.
- Echte Teilmenge:  $A \subset B$  genau dann, wenn  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$ .
  - Beispiele:  $B \subseteq A$ , sogar  $B \subset A$ .  
 $C \subseteq B$  und  $B \subseteq C$ , aber  $C \not\subseteq B$  und  $B \not\subseteq C$ .
- Schnittmenge:  $A \cap B = \{b, c\}$ .  
 $A \cap B$  enthält *genau* die Elemente, die in  $A$  und in  $B$  sind.
- Vereinigungsmenge:  $A \cup D = \{a, b, c, d\}$ .  
 $A \cup B$  enthält *genau* die Elemente, die in  $A$  oder in  $B$  sind.
- Mengendifferenz:  $A \setminus B = \{a\}$ , also alle Elemente in  $A$ , die nicht in  $B$  sind.
- Komplementärmenge:  $\bar{A}$  enthält alle Elemente des *Universums*, die nicht in  $A$  sind. Angenommen, Universum = Lateinisches Alphabet:  
 $\bar{A} = \{d, e, f, g, \dots, y, z\}$

## Potenzmenge

Die Potenzmenge  $2^M$  einer Menge  $M$  enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von  $M$  sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist  $2^M$  mit  $M = \{0, 1\}$ ?
  - Natürlich  $\emptyset \in 2^M$  und  $\{0, 1\} \in 2^M$ .
  - $\{0\} \in 2^M$  und  $\{1\} \in 2^M$ .
  - Weitere? Nein, diese vier Mengen sind alle möglichen Teilmengen.
  - $\Rightarrow 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ .

$$M = \{0, 1\}, 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Was ist  $2^{2^M}$ ?

■ Also  $2^{\{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}}$ .

■ Natürlich  $\emptyset \in 2^M$  und  $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \in 2^{2^M}$ .

$$2^{2^M} = \{ \begin{aligned} &\{\}, \\ &\{\{\}\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0, 1\}\}, \\ &\{\{\}, \{0\}\}, \{\{\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \\ &\quad \{\{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1\}, \{0, 1\}\}, \\ &\{\{\}, \{0\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \\ &\{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \end{aligned} \}$$

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen



## Alphabet

Ein Alphabet ist eine *endliche, nichtleere* Menge von Zeichen.

Was davon sind Alphabete?  $\{d, 34, \pi, \%\}$ ,  $\{a, b, c, \dots, y, z\}$ ,  $\emptyset$ ,  $\mathbb{N}$ .

- $\{d, 34, \pi, \%\}$  und  $\{a, b, c, \dots, y, z\}$  sind Alphabete.
- $\emptyset$  ist leer und damit kein Alphabet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  enthält alle natürlichen Zahlen und ist damit nicht endlich, also kein Alphabet.
- $\{0, 1\}$  ist das Alphabet, das alle Binärzahlen enthält.
- $\{\cdot, +, -, /\} =: R$  ist ein Alphabet von Rechenzeichen.  $R \cup \{0, 1, \dots, 9\}$  ist ein Alphabet, das ein Taschenrechner als Eingabealphabet benutzen könnte.

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

## Paar

Ein Paar ist eine geordnete Menge der Kardinalität 2.

Schreibweise mit runden Klammern ().

- Beispiel:  $(a, 4) \neq (4, a)$
- Beispiel für eine Menge aus Tupeln:  $\{ ("AgeOfEmpires", "Strategie"), ("Battlefield", "Shooter"), ("SeriousSam", "Shooter") \}$

## Tupel

Ein Tupel ist eine geordnete Menge. Konkret ist ein  $n$ -Tupel ein Tupel der Kardinalität  $n$ .

Also wie ein Paar, nur mit beliebiger Kardinalität. Ein Paar ist spezifisch ein 2-Tupel.

Beispiel:  $(4tb, 512gb, 128gb, 4mb) \neq (512gb, 4mb, 4tb, 128gb)$ .

Zwei Mengen:  $A := \{a, b, c\}$  und  $B := \{1, 2, 3\}$ .

Wir wollen alle Tupel mit erstem Element aus  $A$  und zweiten Element aus  $B$ .  
 $\{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3) \}$   
 $= A \times B$

## Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist das Kreuzprodukt definiert als Menge aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ .

## Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist das Kreuzprodukt  $A \times B$  definiert als Menge aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ .

## Kreuzprodukt von $n$ Mengen

Zu  $n$  Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ist das Kreuzprodukt  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  definiert als Menge aller  $n$ -Tupel  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  mit  $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$ .

## Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \times \text{mal}} = A^n.$$

## Kreuzprodukt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist das Kreuzprodukt  $A \times B$  definiert als Menge aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ .

$$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}. A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

## Kreuzprodukt von $n$ Mengen

Zu  $n$  Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ist das Kreuzprodukt  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  definiert als Menge aller  $n$ -Tupel  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  mit  $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, \dots, e_n \in M_n$ .

$$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}, C := \{\omega\}. A \times B \times C \\ = \{(a, 1, \omega), (a, 2, \omega), (b, 1, \omega), (b, 2, \omega)\}.$$

## Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{mal}} = A^n.$$

- $A := \{a, b\}$ .  $A^2 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$   
 $A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, b), \dots\}$
- $A$  beliebige Menge.  $A^0 = \emptyset$
- Achtung!  $2^M \neq M^2$ . Potenzmengen nicht mit Mengenpotenz verwechseln!



## Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist eine Menge  $R \subseteq A \times B$ .

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

- Für die Mengen

$M_{\text{Spiele}} = \{ \text{"Battlefield"}, \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"SeriousSam"} \},$

$M_{\text{Genre}} = \{ \text{"Shooter"}, \text{"Strategie"} \}$  sind folgendes mögliche

Relationen:

- $\{ ( \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Strategie"} ), ( \text{"Battlefield"}, \text{"Shooter"} ), ( \text{"SeriousSam"}, \text{"Shooter"} ) \}$
- $\{ ( \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Strategie"} ), ( \text{"AgeOfEmpires"}, \text{"Shooter"} ) \}$
- $\emptyset$
- "Kleiner Gleichrelation" auf  $M = \{1, 2, 3\}$ :  
 $R_{\leq} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3) \} \in M \times M$

## Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist eine Menge  $R \subseteq A \times B$ .

## Ternäre Relation

Eine ternäre Relation auf drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  ist eine Menge  
 $R \subseteq A \times B \times C$ .

## $n$ -äre Relation

Eine  $n$ -äre Relation auf  $n$  Mengen  $M_1, M_2 \dots M_n$  ist eine Menge  
 $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ .

## Linkstotale Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt linkstotal, wenn für jedes  $a \in A$  ein  $b \in B$  existiert mit  $(a, b) \in R$ .

Die linke Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.



Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

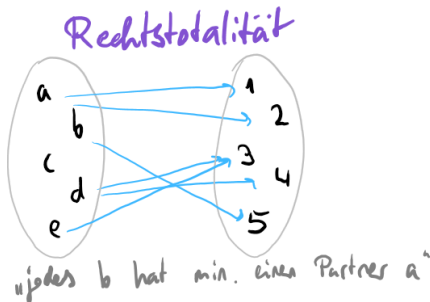
Formale  
Sprachen

## Rechtstotale Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt rechtstotal, wenn für jedes  $b \in B$  ein  $a \in A$  existiert mit  $(a, b) \in R$ .

Die rechte Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann **surjektiv**.



Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

## Linkseindeutige Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt linkseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente  $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$  aus der Relation  $R$  gilt: wenn  $a \neq b$ , dann gilt auch  $\alpha \neq \beta$ .

Also: Keine zwei Elemente der linken Seite der Relation haben dasselbe rechte Element.

Angenommen,  $a \neq b$  und  $\alpha = \beta$ .  $\Rightarrow$  offenbar nicht linkseindeutig.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann **injektiv**.



Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

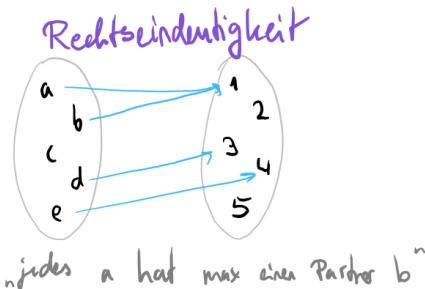
Wörter

Formale  
Sprachen

## Rechtseindeutige Relation

Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt rechtseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente  $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$  aus der Relation  $R$  gilt: wenn  $\alpha \neq \beta$ , dann gilt auch  $a \neq b$ .

Also: Keine zwei Elemente der rechten Seite der Relation haben dasselbe linke Element.



Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

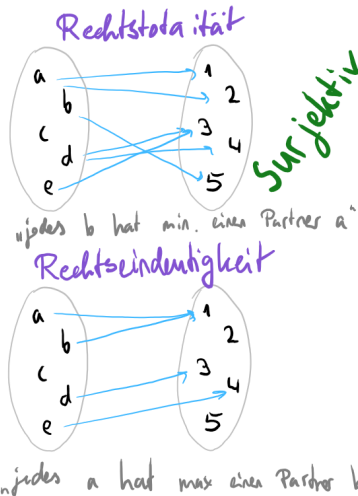
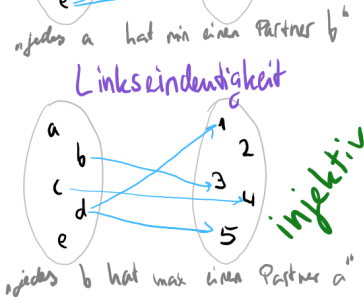
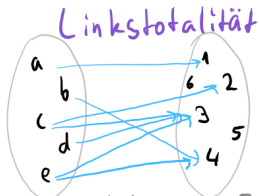
Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen



## Abbildung

Eine Relation  $R$  heißt eine Abbildung, wenn sie *linkstotal* *und* *rechtseindeutig* sind.

- Injektive Funktion: *linkstotal*, *rechtseindeutig*, *linkseindeutig*
- Surjektive Funktion: *linkstotal*, *rechtseindeutig*, *rechtstotal*

## Bijektivität

Eine Relation heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Damit ist sie *linkstotal* und *rechtseindeutig* (weil es eine Abbildung ist) und *linkseindeutig* (injektiv) und *rechtstotal* (surjektiv).

Tolle Eigenschaft: Für jedes Element  $(a, b) \in R$  der bijektiven Relation  $R$  ist *jedem*  $a$  *genau ein*  $b$  zugeordnet.



Seien  $A = B = \mathbb{R}$ ,  $f \subseteq A \times B$ . Wir suchen Relation, die für jedes  $a \in A$  ein Element  $(a, b) \in f$  enthält mit  $b = a^2$ .

$$f = \{(0, 0), (0.1, 0.01), (2, 4), \dots\}$$

Unendlich viele Elemente, und unmöglich alle zu nennen.

(Mathematische) Schreibweise für Abbildungen:

$f : A \rightarrow B, a \mapsto a^2$ , also Quadratfunktion.

Ist diese Funktion injektiv oder surjektiv?

- Nicht injektiv, da z.B.  $f(1) = f(-1)$ , also  $(1, 1) \in f$  und  $(-1, 1) \in f$ .
- Nicht surjektiv, da z.B.  $-1$  nie als Funktionswert angenommen wird, daher  $(a, -1) \notin f$  für beliebige  $a \in A$ .

$$A := \{a, b, c\}, B := \{b, c, d\}, C := \{a, d\}$$

- $A \cap B = \{b, c\}$
- $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
- $A \setminus B = \{a\}$
- $C^2 = C \times C = \{(a, a), (a, d), (d, a), (d, d)\}$
- $2^C = \{\emptyset, \{a, d\}, \{a\}, \{d\}\}$
- Unterschied zwischen  $\{a, b\}$  und  $(a, b)$ ?
- Definition von...
  - Alphabet?
  - Abbildung?

## Konkatenation

Durch Konkatenation werden einzelne Buchstaben aus einem Alphabet miteinander verbunden.

- Symbol:  $\cdot$ , also zwei Buchstaben  $a$  und  $b$  miteinander konkateniert:  
 $a \cdot b$ .
- Nicht kommutativ:  $a \cdot b \neq b \cdot a$
- Aber assoziativ:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kurzschreibweise: Ohne Punkte, also  $a \cdot b = ab$

## Wörter: Intuitivere Definition

Ein Wort  $w$  entsteht durch die Konkatenation durch Buchstaben aus einem Alphabet.

Also Abfolge von Zeichen.

Sei  $A := \{a, b, c\}$ .

- Mögliche Worte:  $w_1 := a \cdot b$ ,  $w_2 = b \cdot c \cdot c$ ,  $w_3 = a \cdot c \cdot c \cdot b \cdot a$ .
- Keine möglichen Worte:  $d$ .
- Konkatenation nicht kommutativ: Wort  $abc$  ist ungleich dem Wort  $bca$ .

## Wörter: Abstraktere Definition

Ein Wort  $w$  über dem Alphabet  $A$  ist definiert als surjektive Abbildung  $w : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$ . Dabei heißt  $n$  die Länge  $|w|$  des Wortes.

- $\mathbb{Z}_n = \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < n\}$   
 $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}, \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, \mathbb{Z}_0 = \emptyset.$
- Länge oder Kardinalität eines Wortes:  $|w|$ .  $|abcde| = 5.$
- Wort  $w = abdec$  als Relation aufgeschrieben:  
 $w = \{(0, a), (1, b), (2, d), (3, e), (4, c)\}$ . Also  
 $w(0) = a, w(1) = b, w(2) = d, \dots$   
Damit sieht man auch:  
 $|w| = |\{(0, a), (1, b), (2, d), (3, e), (4, c)\}| = 5.$

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

- Wort der Kardinalität 0?

## Das leere Wort

Das leere Wort  $\varepsilon$  ist definiert ein Wort mit Kardinalität 0, also mit 0 Zeichen.

- Leere Wort wird interpretiert als “nicht sichtbar” und kann überall platziert werden:  $aabc = a\varepsilon abc = \varepsilon\varepsilon a\varepsilon bc\varepsilon$ .
- $|\{\varepsilon\}| = 1$ , die Menge ist nicht leer! Das leere Wort ist nicht *nichts*! (Vergleiche leere Menge)
- $|\varepsilon| = 0$ .

$A^n$

Zu einem Alphabet  $A$  ist  $A^n$  definiert als die Menge aller Wörter der Länge  $n$  über dem Alphabet  $A$ .

- Nicht mit Mengenpotenz verwechseln!
- $A := \{a, b, c\}$ ,  $A^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$ .  
 $A^1 = A$ ,  $A^0 = \{\varepsilon\}$ .

Die Menge aller Wörter *beliebiger* Länge:

- $A^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$
- $A := \{a, b, c\}$ .  $aa \in A^*$ ,  $abcabcabc \in A^*$ ,  $aaaa \in A^*$ ,  $\varepsilon \in A^*$ .

## Konkatenation von Wörtern:

- $lager \cdot regal = lagerregal$
- $lag \cdot erregal = lagerregal$

## Konkatenation von Wörtern.

$$w_1 \cdot w_2 : \mathbb{Z}_{m+n} \rightarrow A_1 \cup A_2$$

$$i \mapsto \begin{cases} w_1(i) & \text{falls } 0 \leq i < m \\ w_2(i - m) & \text{falls } m \leq i < m + n \end{cases}$$

- Warum  $\mathbb{Z}_{m+n}$ ? Wörter  $w_1$  und  $w_2$  mit  $|w_1| = m$  und  $|w_2| = n$  werden konkateniert, also neues Wort hat Länge  $m + n$ .

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen



## Konkatenation von Wörtern.

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

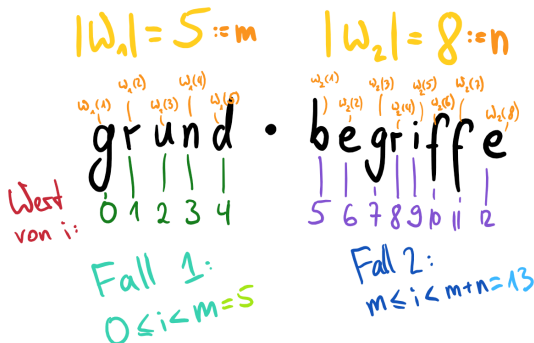
Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

$$w_1 \cdot w_2 : \mathbb{Z}_{m+n} \rightarrow A_1 \cup A_2$$

$$i \mapsto \begin{cases} w_1(i) & \text{falls } 0 \leq i < m \\ w_2(i - m) & \text{falls } m \leq i < m + n \end{cases}$$



## Organisatorisches

## Signale und Nachrichten

## Mengen

## Alphabete

## Relationen und Abbildungen

## Wiederholung

## Wörter

## Formale Sprachen

- Immernoch: Reihenfolge ist wichtig!  
 $OTT \cdot O = OTTO \neq OOTT = O \cdot OTT$
- Auf wieviele Weisen kann man  $abc$  als Konkatenation nichtleerer Wörter schreiben?  $abc$ ,  $a \cdot bc$ ,  $ab \cdot c$ ,  $a \cdot b \cdot c$ .
- Wortkonkatenation mit dem leeren Wort:  $w \cdot \varepsilon = w = \varepsilon \cdot w$ .

## Wort Potenzen

Sich direkt wiederholende Teilworte kann man als Wortpotenz darstellen, daher  $w_i^n = w_i \cdot w_i \cdots w_i$  ( $n \times$  mal).

■  $a^4 = aaaa, b^3 = bbb, c^0 = \varepsilon, d^1 = d.$

■  $a^3 c^2 b^6 = aaaccbbbbb.$

■  $b \cdot a \cdot (n \cdot a)^2 = banana.$

■  $(a^3 b^2)^2 c (a^2 b c b^3)^3 dd = (aaabb)^2 c (aabcbbb)^3 dd$   
 $= aaabb \cdot aaabb \cdot c \cdot aabcbbb \cdot aabcbbb \cdot aabcbbb \cdot dd.$

Sei  $A$  ein Alphabet.

## Übung zu Wörter

1. Finde Abbildung  $f : A^* \rightarrow A^*$ , sodass für alle  $w \in A^*$  gilt:  
 $2 \cdot |w| = |f(w)|$ .
2. Finde Abbildung  $g : A^* \rightarrow A^*$ , sodass für alle  $w \in A^*$  gilt:  
 $|w| + 1 = |g(w)|$ .
3. Finde Abbildung  $h : A^* \rightarrow A^*$ , sodass für alle  $w \in A^*$  gilt:  
 $\lfloor \frac{|w|}{2} \rfloor = |h(w)|$ . (Zusatz)
4. Sind  $f, g, h$  injektiv und/oder surjektiv?

1.  $f : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto w \cdot w$ .

2.  $g : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto w \cdot x, x \in A$ .

3.  $h : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto \hat{w}$  mit  $\hat{w}_i = \begin{cases} w_i & \text{wenn } i \leq \lfloor \frac{|w|}{2} \rfloor \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$  und  $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ .

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

1.  $f : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto w \cdot w.$

- $f$  ist injektiv, denn jedes  $w$  aus der Bildmenge wird von maximal einem Wort abgebildet.
- $f$  ist nicht surjektiv, denn z.B. bildet nichts auf  $x \in A$  ab (oder auf andere Wörter mit ungerader Anzahl an Buchstaben).

2.  $g : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto w \cdot x, x \in A.$

- $g$  ist injektiv.
- $g$  ist nicht surjektiv, denn z.B. bildet nichts auf  $\varepsilon$  ab.

3.  $h : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto \hat{w}$  mit  $\hat{w}_i = \left\{ \begin{array}{ll} w_i & \text{wenn } i \leq \lfloor \frac{|w|}{2} \rfloor \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{array} \right\}$  und  $i \in \mathbb{Z}_{|w|}.$

- $h$  ist nicht injektiv, denn z.B.  $x = h(xy) = h(xz)$  mit  $x, y, z \in A.$
- $h$  ist surjektiv, denn für jedes  $w \in A^*$  existiert ein  $\hat{w} \in A^*$  mit  $\hat{w} = w \cdot w$  sodass  $h(\hat{w}) = w.$

- Was war nochmal  $A^*$ ? Menge aller Wörter *beliebiger* Länge über Alphabet  $A$ .

## Formale Sprache

Eine Formale Sprache  $L$  über einem Alphabet  $A$  ist eine Teilmenge  $L \subseteq A^*$ .

- Zufälliges Beispiel:  $A := \{b, n, a\}$ .
  - $L_1 := \{ban, baan, nba, aa\}$  ist eine mögliche formale Sprache über  $A$ .
  - $L_2 := \{banana, bananana, banananana, \dots\}$   
 $= \{w : w = bana(na)^k, k \in \mathbb{N}\}$  auch.
  - $L_3 := \{ban, baan, baaan, \dots\}$  auch. Andere Schreibweise?  
 $L_3 = \{w : w = ba^k n, k \in \mathbb{N}\}$
- Formale Sprachen sind also nicht zwangsweise endliche Mengen.
- Praktischeres Beispiel:  $A := \{w : w \text{ ist ein ASCII Symbol}\}$ .
  - $L_4 := \{class, if, else, while, for, \dots\}$  ist eine formale Sprache über  $A$ .
  - $L_5 := \{w : w = a \cdot b \text{ mit } a \text{ als Großbuchstabe und } b \text{ als Groß- oder Kleinbuchstabe}\} \setminus L_4$  ist eine formale Sprache von korrekten Klassennamen in Java.

$A := \{a, b\}$

- Sprache  $L$  aller Wörter über  $A$ , die nicht das Teilwort  $ab$  enthalten?
  - Was passiert wenn ein solches Wort ein  $a$  enthält? Dann keine  $b$ 's mehr!
  - $L = \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in \{b\}^* \text{ und } w_2 \in \{a\}^*\}$
  - Andere Möglichkeit: Suche Wörter mit  $ab$  und nehme diese Weg.
  - $L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 \cdot ab \cdot w_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$

Sei  $A := \{a, b\}$ ,  $B := \{0, 1\}$ .

## Aufgabe zu formalen Sprachen

1. Sprache  $L_1 \subseteq A^*$  von Wörtern, die mindestens drei  $b$ 's enthalten.
2. Sprache  $L_2 \subseteq A^*$  von Wörtern, die gerade Zahl von  $a$ 's enthält.
3. Sprache  $L_3 \subseteq B^*$  von Wörtern, die, interpretiert als Binärzahl eine gerade Zahl sind.

1.  $L_1 = \{w = w_1 b w_2 b w_3 b w_4 : w_1, w_2, w_3, w_4 \in A^*\}$
2.  $L_2 = \{w = (w_1 a w_2 a w_3)^* : w_1, w_2, w_3 \in \{b\}^*\}$  (Ist da  $\varepsilon$  drin?)
3.  $L_3 = \{w = w \cdot 0 : w \in B^*\}$



## Organisatorisches

## Signale und Nachrichten

## Mengen

## Alphabete

## Relationen und Abbildungen

## Wiederholung

## Wörter

## Formale Sprachen

- Was macht die Funktion  $val_l$ ?
- Was bedeutet Äquivalenz?
- Was bedeutet Tautologie und Erfüllbarkeit?
- Welche dieser Aussagen sind Tautologien, welche sind erfüllbar?
  - $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
  - $P \wedge P = P \vee P$

# Wahrheitsgehalt von unendlich Aussagen

Beispielsituation: Wir haben unendlich viele Dominosteine. Behauptung:  
Alle Dominosteine fallen um.

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

- Wir haben Aussagen: {"1. Stein fällt um", "2. Stein fällt um", ...}
- Wie zeigen wir unendlich viele Aussagen?
- Stelle Aussagen in Abhängigkeit einer Laufvariable  $n$  dar:
  - $A(n) := \text{"n-ter Stein fällt um"} \forall n \in \mathbb{N}$ .
- Aussage  $A := \text{"Alle Steine fallen um"} \equiv A(i)$  ist wahr  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Wir haben immernoch unendlich viele Aussagen...

- Zeige:  $A(1)$  ist wahr, sowie  $A(i)$  gilt  $\rightarrow A(i+1)$  gilt für beliebiges  $i \in \mathbb{N}$ .
- Also: Der erste Stein fällt, sowie: falls der  $i$ -te Stein fällt, so fällt auch der  $i+1$ -te Stein.
- Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion fallen dann alle Steine um.

## Organisatorisches

## Signale und Nachrichten

## Mengen

## Alphabete

## Relationen und Abbildungen

## Wiederholung

## Wörter

## Formale Sprachen

- Beweisverfahren
- In der Regel zu zeigen: Eine Aussage gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_+$ , manchmal auch für alle  $n \in \mathbb{N}_0$
- Man schließt “induktiv” von einem  $n$  auf  $n+1$
- Idee: Wenn die Behauptung für ein beliebiges **festes**  $n$  gilt, dann gilt sie auch für den Nachfolger  $n+1$  (und somit auch für dessen Nachfolger und schließlich für alle  $n$ )

# Struktur des Beweises

Behauptung: (*kurz Beh.:*)

Beweis: (*kurz Bew.:*)

- Induktionsanfang: (*kurz IA:*)

- Zeigen, dass Behauptung für Anfangswert gilt (oft  $n = 1$ )
- Auch mehrere (z.B. zwei) Anfangswerte möglich

- Induktionsvoraussetzung: (*kurz IV:*)

- Sei  $n \in \mathbb{N}_+$  (bzw.  $n \in \mathbb{N}_0$ ) fest aber beliebig und es gelte [Behauptung einsetzen]

- Induktionsschritt: (*kurz IS:*)

- Behauptung für  $n+1$  auf  $n$  zurückführen
- Wenn induktive Definition gegeben: verwenden!
- Sonst: Versuche Ausdruck, in dem  $(n+1)$  vorkommt umzuformen in einen Ausdruck, in dem nur  $n$  vorkommt

Vorhin:

$$\underbrace{A(1) \text{ ist wahr}}_{IA}, \text{ sowie } \underbrace{A(i) \text{ gilt}}_{IV} \rightarrow \underbrace{A(i+1) \text{ gilt}}_{IS} \text{ für beliebiges } i \in \mathbb{N}$$

## Organisatorisches **Aufgabe**

Signale und  
Nachrichten

$$x_0 := 0$$

Mengen

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := x_n + 2n + 1$$

Alphabete

*Zeige mithilfe vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$*

Relationen und  
Abbildungen

$$x_n = n^2$$

Wiederholung **gilt.**

Wörter

Formale  
Sprachen

## Übungsaufgaben

Zeige die Wahrheit folgender Aussagen mit vollständiger Induktion:

■  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

■  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Was war nochmal  $A^*$ ? Menge aller Wörter *beliebiger* Länge über Alphabet  $A$ .
- Was war nochmal eine formale Sprache?

## Formale Sprache

Eine Formale Sprache  $L$  über einem Alphabet  $A$  ist eine Teilmenge  $L \subseteq A^*$ .

Als Beispiel von vorigen Folien:

- $A := \{b, n, a\}$ .
  - $L_1 := \{ban, baan, nba, aa\}$  ist eine mögliche formale Sprache über  $A$ .
  - $L_2 := \{banana, bananana, banananana, \dots\}$   
 $= \{w : w = bana(na)^k, k \in \mathbb{N}\}$  auch.
  - $L_3 := \{ban, baan, baaan, \dots\}$  auch. Andere Schreibweise?  
 $L_3 = \{w : w = ba^k n, k \in \mathbb{N}\}$

## Produkt von formalen Sprachen

Von zwei formalen Sprachen  $L_1, L_2$  lässt sich das Produkt  $L_1 \cdot L_2$  bilden mit  $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$ .

Sei  $A := \{a, b\}, B := \{A, B, C, D, E, F\}$ .

- Sprache  $L_1 \subseteq A^*$ , die zuerst drei  $a$ 's enthält und dann entweder zwei  $b$ 's oder vier  $a$ 's?  $L_1 = \{aaa\} \cdot \{bb, aaaa\}$ .
- Sprache  $L_2 \subseteq A^*$ , die alle Wörter über  $A$  enthält außer  $\varepsilon$ ?  
 $L_2 = A \cdot A^* = A^* \setminus \{\varepsilon\}$ .
- Sprache  $L_3 \subseteq B^*$ , die alle Wörter über  $B$  enthält, mit:
  - Zwei beliebigen Zweichen aus  $B$ .
  - Dann einem  $C$  oder zwei  $D$ 's.
  - Dann vier Zeichen aus  $A$ .
- $L_3 = B \cdot B \cdot \{C, DD\} \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A$ .

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen



Sei  $A$  ein beliebiges Alphabet und  $M := \{L : L \text{ ist formale Sprache über } A\} = 2^A$ . Produkt von Sprachen lässt sich auch als Abbildung bzw. Verknüpfung  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  darstellen.

Zeige:

- Die Verknüpfung  $\cdot$  ist assoziativ.
- Es gibt (mindestens) ein Element  $e \in M$ , sodass für alle  $x \in M$  gilt:  
 $x \cdot e = e \cdot x = x$ . (Neutrales Element)
- Es gibt ein Element  $o \in M$ , sodass für alle  $x \in M$  gilt:  
 $x \cdot o = o = o \cdot x$ . (Absorbierendes Element)

Seien  $L_1, L_2, L_3 \in M$ .

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

■ Die Verknüpfung  $\cdot$  ist assoziativ:

$$\begin{aligned} (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 &= (\{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}) \cdot L_3 = \{w_1 w_2 w_3 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, w_3 \in L_3\} \\ &= L_1 \cdot (\{w_2 w_3 : w_2 \in L_2, w_3 \in L_3\}) = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3). \end{aligned}$$

■ Es gibt (mindestens) ein Element  $e \in M$ , sodass für alle  $x \in M$  gilt:  
 $x \cdot e = e \cdot x = x$ . (neutrales Element)

$$\text{■ } e := \{\varepsilon\}.$$

$$\text{■ } L_1 \cdot \{\varepsilon\} = L_1 = \{\varepsilon\} \cdot L_1$$

■ Es gibt ein Element  $o \in M$ , sodass für alle  $x \in M$  gilt:  
 $x \cdot o = o = o \cdot x$ . (Absorbierendes Element)

$$\text{■ } o := \emptyset$$

$$\text{■ } L_1 \cdot \emptyset = \emptyset = \emptyset \cdot L_1$$

$(M, \cdot)$  ist damit trotzdem keine Gruppe, denn es existieren keine Invers-Element.

## Potenz von Sprachen

Potenz von formellen Sprachen ist wie folgt definiert:

- $L^0 := \{\varepsilon\}$
- $L^{i+1} := L^i \cdot L$  für  $i \in \mathbb{N}_+$ .
- $L_1 := \{a\}$ .
  - $L_1^0 = \{\varepsilon\}$ .  $L_1^1 = \{\varepsilon\} \cdot L_1 = L_1$ .
  - $L_1^2 = (\{\varepsilon\} \cdot L_1) \cdot L_1 = \{aa\}$ .
- $L_2 := \{ab\}^3 \{c\}^4$ 
  - $L_2^0 = \{\varepsilon\}$ ,  $L_2^1 = \dots$
  - $L_2^2 = (\{ab\}^3 \{c\}^4)^2 = (\{ab\}^3 \{cccc\})^2 = \{abababcccc\}^2 = \{abababccccabababcccc\}$ .
- $L_3 := (\{a\} \cup \{b\})^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

# Konkatenationsabschluss bei formalen Sprachen

## Konkatenationsabschluss

Zu einer formalen Sprache  $L$  ist der Konkatenationsabschluss  $L^*$  definiert als  $L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} L^i$ .

## $\varepsilon$ -freie Konkatenationsabschluss

Zu einer formalen Sprache  $L$  ist der  $\varepsilon$ -freie Konkatenationsabschluss  $L^+$  definiert als  $L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i$ .

- Warum gilt  $\varepsilon \notin L^+$  von beliebiger formeller Sprache  $L$ ?
- $L := \{a, b, c\}.L^* = \{\varepsilon, a, aa, ab, ac, aaa, aab, \dots, b, ba, bb, \dots\}$
- $L := \{aa, bc\}.L^* = \{\varepsilon, aa, bc, aa \cdot aa, aa \cdot bc, bc \cdot aa, bc \cdot bc, aa \cdot aa \cdot aa, \dots\}$

Sei  $A := \{a, b\}$ ,  $B := \{A, B, C, D, E, F\}$ .

- Sprache  $L_1 \subseteq A^*$ , die das Teilwort  $ab$  nicht enthält?  $L_1 = \{b\}^* \{a\}^*$ .
- Sprache  $L_2 \subseteq B^*$ , die alle erlaubten Java Variablennamen enthält.
  - $B := \{\_, a, b, \dots, z, A, B, \dots, Z\}$
  - $C := B \cup \mathbb{Z}_9$
  - $L_2 \subseteq C = (B \cdot C^*) \setminus \{if, class, while, \dots\}$

Sei  $L := \{a\}^* \{b\}^*$ .

■ Was ist alles in  $L$  drin?

- $aaabbabbbaaabbba$ ? Nein.
- $aaabb, abbaaabbba$ ? Ja, nein.
- $aaabb, abb, aaabba$ ? Ja, ja, nein.
- $aaabb, abb, aaabb, a$ ? Alles drin.

■ Was ist alles in  $L^*$  drin?

- $aaabbabbbaaabbba$ ? Ja.
- $aaabb, abbaaabbba$ ? Ja.
- $aaabb, abb, aaabba$ ? Ja.
- $aaabb, abb, aaabb, a$ ? Ja.
- Alle Wörter aus  $\{a, b\}^* \rightarrow L^* = \{a, b\}^*$ .

## Erinnerung

$$L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} L^i \quad L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i$$

## Beweisaufgabe

**Beweise:**  $L^* \cdot L = L^+$ .

$\subseteq$ :

**Voraussetzung:**  $w \in L^* \cdot L$   
mit  $w = w'w''$ ,  $w' \in L^*$  und  
 $w'' \in L$ .

Dann existiert ein  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  
 $w' \in L^i$ , also  
 $w = w'w'' \in L^i \cdot L = L^{i+1}$ .

Weil  $i + 1 \in \mathbb{N}_+$ , gilt:  
 $L^{i+1} \subseteq L^+$ , also  $w \in L^+$ .

$\supseteq$ :

**Voraussetzung:**  $w \in L^* \cdot L$ .

Dann existiert ein  $i \in \mathbb{N}_+$  mit  $w \in L^i$ . Da  
 $i \in \mathbb{N}_+$ , existiert ein  $j \in \mathbb{N}_0$  mit  $i = j + 1$ , also  
für ein solches  $j \in \mathbb{N}_0$ :  $w \in L^{j+1} = L^j \cdot L$ .

Also  $w = w'w''$  mit  $w' \in L^j$  und  $w'' \in L$ .

Wegen  $L^j \subseteq L^*$  ist  $w = w'w'' \in L^* \cdot L$ .

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

## Organisatorisches

## Signale und Nachrichten

## Mengen

## Alphabete

## Relationen und Abbildungen

## Wiederholung

## Wörter

## Formale Sprachen

$L_1, L_2$  seien formale Sprachen.

- Wie sieht  $L_1 \cdot L_2$  aus?
- Wie sieht  $L_1^3$  aus?
- Wie sieht  $L_1^2 \cdot L_2 \cdot L_2^0 \cdot L_1^*$  aus?
- Wie sieht  $(L_1^*)^0 \cdot L_2^+$  aus?



Wir betrachten die Alphabete  $A_{dez} := \mathbb{Z}_{10}$ ,  $A_{bin} := \{0, 1\}$ ,  $A_{oct} := \mathbb{Z}_8$ .

- Was können wir daraus machen?
- $A_{dez}^* \supset \{42, 1337, 999\}$ .
- $A_{bin}^* \supset \{101010, 10100111001, 1111100111\}$ .
- $A_{oct}^* \supset \{52, 2471, 1747\}$ .
- Wir suchen eine Möglichkeit, diese **Zahlen** zu **deuten**.
- Aber irgendwie so, dass  $42_{\in A_{dez}} \stackrel{\text{Deutung}}{=} 101010_{\in A_{bin}} \stackrel{\text{Deutung}}{=} 52_{\in A_{oct}}$ .

## $Num_k$

Einer Zeichenkette  $Z_k$  aus Ziffern wird mit  $Num_k$  eine eindeutige Zahl zugeordnet:

$$Num_k(\varepsilon) = 0$$

$$Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x) \text{ mit } w \in Z_k^* \text{ und } x \in Z_k.$$

## $num_k$

Einer einzelnen Ziffer  $x \in Z_k$  aus einem Alphabet von Ziffern  $Z_k$  wird mit  $num_k(x)$  der Wert der Zahl zugewiesen.

- Wichtig:  $Num_k(w) \neq num_k(w)$ !
- Was ist:  $num_{10}(3) = 3$ ,  $num_{10}(7) = 7$ ,  $num_{10}(11) =$  nicht definiert.
- Für Zahlen  $\geq k$ : Benutze  $Num_k$ !

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

## Beispiel zu Zahlendarstellungen

$$Num_k(\varepsilon) = 0.$$

$$Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x) \text{ mit } w \in Z_k^* \text{ und } x \in Z_k.$$

Was ist  $Num_{10}(123)$ ?

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & Num_{10}(123) = 10 \cdot Num_{10}(12) + num_{10}(3) = \\ & 10 \cdot (Num_{10}(1) + num_{10}(2)) + num_{10}(3) = \\ & 10 \cdot (num_{10}(1) + 10 \cdot num_{10}(2)) + num_{10}(3) = 10 \cdot (1 + 10 \cdot 2) + 3 = 123. \end{aligned}$$

Yay?

Was ist der dezimale Zahlenwert der Binärzahl 1010? Diesmal Basis  $k = 2$ .

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & Num_2(1010) = 2 \cdot Num_2(101) + num_2(0) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot Num_2(10) + num_2(1) + num_2(0)) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot Num_2(1) + num_2(0)) + num_2(1)) + num_2(0) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot num_2(1) + num_2(0)) + num_2(1)) + num_2(0) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 1 + 0) + 1) + 0 = 10. \end{aligned}$$

Yay!

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

$$Num_k(\varepsilon) = 0.$$

$$Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x) \text{ mit } w \in Z_k^* \text{ und } x \in Z_k.$$

## Übungen zu Zahlendarstellungen

Berechne den numerischen Wert der folgenden Zahlen anderer Zahlensysteme nach dem vorgestellten Schema:

- $Num_8(345)$ .
- $Num_2(11001)$ .
- $Num_2(1000)$ .
- $Num_4(123)$ .
- $Num_{16}(4DF)$ . (Zusatz)

Anmerkung: Hexadezimalzahlen sind zur Basis 16 und verwenden als Ziffern (in aufsteigender Reihenfolge: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

Lösungen:

- $Num_8(345) = 229.$
- $Num_2(11001) = 25.$
- $Num_2(1000) = 8.$
- $Num_4(123) = 27.$
- $Num_{16}(4DF) = 1247.$

Es gilt:

$$2(2(2(2(2 \cdot 1 + 0) + 1) + 0) + 1) + 0 = 2^4 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0.$$

Daher, einfachere Rechenweise:

$$Num_k(w) = k^0 \cdot w(0) + k^1 \cdot w(1) + k^2 \cdot w(2) + \dots$$

Was sind folgende Zahlen in Dezimal im Kopf gerechnet?

- $Num_2(10101) = 21.$
- $Num_2(11101) = 29.$
- $Num_2(1111111111) = 1023.$

$$Num_k(w) = k^0 \cdot w(0) + k^1 \cdot w(1) + k^2 \cdot w(2) + \dots$$

Was sind folgende Zahlen in Dezimal im Kopf gerechnet?

- $Num_{16}(A1) = 161.$

- $Num_{16}(BC) = 188.$

- $Num_{16}(14) = 20.$

## *div* Funktion

Die Funktion *div* **dividiert ganzzahlig**. (Schneidet also den Rest ab).

## *mod* Funktion

Die Modulo Funktion *mod* gibt den **Rest einer ganzzahligen Division** zurück.

■  $22 \text{ div } 8 = 2 \left( \frac{22}{8} = 2,75 \right).$

■  $22 \text{ mod } 8 = 6.$

Fülle die Tabelle aus:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x \text{ div } 4$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3
$x \text{ mod } 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0



Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

$11101_2$  ist also  $29_{10}$ . Was ist  $29_{10}$  in binär?

## $k$ -äre Darstellung

Die Repräsentation einer Zahl  $n$  zur Basis  $k$  lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\mathbf{Repr}_k(n) = \begin{cases} \mathbf{repr}_k(n) & \text{falls } n < k \\ \mathbf{Repr}_k(n \text{ div } k) \cdot \mathbf{repr}_k(n \bmod k) & \text{falls } n \geq k \end{cases}$$

Achtung! Das  $\cdot$  Symbol steht für Konkatenation, nicht für Multiplikation!

$$\text{Repr}_k(n) = \begin{cases} \text{repr}_k(n) & \text{falls } n < k \\ \text{Repr}_k(n \text{ div } k) \cdot \text{repr}_k(n \bmod k) & \text{falls } n \geq k \end{cases}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Repr}_2(29) &= \text{Repr}_2(29 \text{ div } 2) \cdot \text{repr}_2(29 \bmod 2) \\ &= \text{Repr}_2(14) \cdot \text{repr}_2(1) \\ &= \text{Repr}_2(14 \text{ div } 2) \cdot \text{repr}_2(14 \bmod 2) \cdot 1 \\ &= \text{Repr}_2(7) \cdot \text{repr}_2(0) \cdot 1 \\ &= \text{Repr}_2(7 \text{ div } 2) \cdot \text{repr}_2(7 \bmod 2) \cdot 01 \\ &= \text{Repr}_2(3) \cdot \text{repr}_2(1) \cdot 01 \\ &= \text{Repr}_2(3 \text{ div } 2) \cdot \text{repr}_2(3 \bmod 2) \cdot 101 \\ &= \text{Repr}_2(1) \cdot \text{repr}_2(1) \cdot 101 \\ &= 11101 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Repr}_k(n) = \begin{cases} \mathbf{repr}_k(n) & \text{falls } n < k \\ \mathbf{Repr}_k(n \text{ div } k) \cdot \mathbf{repr}_k(n \bmod k) & \text{falls } n \geq k \end{cases}$$

Beispiel mit Hexadezimalzahlen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Repr}_{16}(29) &= \mathbf{Repr}_{16}(29 \text{ div } 16) \cdot \mathbf{repr}_{16}(29 \bmod 16) \\ &= \mathbf{Repr}_{16}(1) \cdot \mathbf{repr}_{16}(13) \\ &= 1 \cdot D = 1D \end{aligned}$$

$$\text{Repr}_k(n) = \begin{cases} \text{repr}_k(n) & \text{falls } n < k \\ \text{Repr}_k(n \text{ div } k) \cdot \text{repr}_k(n \bmod k) & \text{falls } n \geq k \end{cases}$$

## Übung zu $\text{Repr}_k$

Berechne die Repräsentationen folgender Zahlen in gegebenen Zahlensystemen:

- $\text{Repr}_2(13)$ .
- $\text{Repr}_4(15)$ .
- $\text{Repr}_{16}(268)$ .

Lösungen:

- $\text{Repr}_2(13) = 1101$ .
- $\text{Repr}_4(15) = 33$ .
- $\text{Repr}_{16}(268) = 10C$ .

## $\text{bin}_\ell$

Die Funktion  $\text{bin}_\ell: \mathbb{Z}_2^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$  bringt eine gegebene Binärzahl auf eine feste Länge, indem sie mit Nullen vorne aufgefüllt wird. Formell wird sie definiert als:

$$\text{bin}_\ell(n) = 0^{\ell - |\text{Repr}_2(n)|} \text{Repr}_2(n)$$

Beispiel:

- $\text{bin}_8(3) = 0^{8 - |\text{Repr}_2(3)|} \text{Repr}_2(3) = 0^{8 - |11|} \cdot 11 = 0^{8-2} \cdot 11 = 0^6 \cdot 11 = 00000011.$
- $\text{bin}_{16}(3) = 0000000000000011.$

## Was ist mit negative Zahlen?

- Idee: Verwende das erste Bit, um zu speichern, ob die Zahl positiv oder negativ ist.
- Beispiel:  $5 = 0101_{zkpl}$ ,  $-5 = 1101_{zkpl}$ .

## Zweierkomplement Darstellung

Die Zweierkomplementdarstellung einer Zahl  $x$  mit der Länge  $\ell$  ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{zkpl}_{\ell}(x) = \begin{cases} 0\mathbf{bin}_{\ell-1}(x) & \text{falls } x \geq 0 \\ 1\mathbf{bin}_{\ell-1}(2^{\ell-1} + x) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

- Wieso  $\ell - 1$ ?

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

# Aufgaben zu Zweierkomplement-Darstellung

Organisatorisches

Signale und  
Nachrichten

Mengen

Alphabete

Relationen und  
Abbildungen

Wiederholung

Wörter

Formale  
Sprachen

$$\mathbf{Zkpl}_\ell(x) = \begin{cases} 0\mathbf{bin}_{\ell-1}(x) & \text{falls } x \geq 0 \\ 1\mathbf{bin}_{\ell-1}(2^{\ell-1} + x) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Was sind folgende Zahlen in Zweierkomplement-Darstellung?

- $\mathbf{Zkpl}_4(3) = 0011$ .
- $\mathbf{Zkpl}_4(7) = 0111$ .
- $\mathbf{Zkpl}_4(-5) = 1101$ .
- $\mathbf{Zkpl}_8(13) = 00001101$ .
- $\mathbf{Zkpl}_8(-34) = 10100010$ .
- $\mathbf{Zkpl}_8(-9) = 10001001$ .

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul