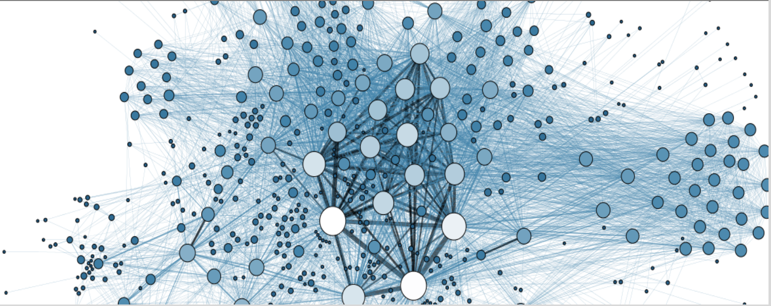
# Grundbegriffe der Informatik
# Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 8.12.2016



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Gliederung

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Kontextfreie Grammatiken

Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Wie kann man diese Sprache darstellen?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Kontextfreie Grammatiken

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- $N$ Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- $T$ Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $N := \{a, b, c\}, T = \{S, A, B\}$: $N \times (N \cup T)^* = \{(a, abSAcB), (a, SSS), (b, BSabc), ...\}$.
- Andere Schreibweise: $P : N \to (N \cup T)^*$.
- Für $(X, w) \in P$ schreibt man $X \to w$
- Statt $\{X \to w_1, X \to w_2\}$ schreibt man auch $\{X \to w_1 | w_2\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Ableitungsschritt

Erinnerung: $N =$ *Nichtterminalsymbole*, $T =$ *Terminalsymbole*.

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in $P$

### Notation

$u \Rightarrow v$

### Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$. Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa! \Rightarrow$ heißt eine Ableitung!

# Ableitungsfolge

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



Karlsruher Institut für Technologie

## Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$ genau dann, wenn ein $w \in (N \cup T)^*$ existiert, für das $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$ gilt. Für $u \Rightarrow^i v$ sagt man "v ist aus $u$ in $i$ Schritten ableitbar".

**Beispiel**

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$

und $aaaSaaa \Rightarrow^2 aaaabaaaa$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



## Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann "v ist aus u ableitbar".

**Beispiel**

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa|aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

aber $aSa \not\Rightarrow abba$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



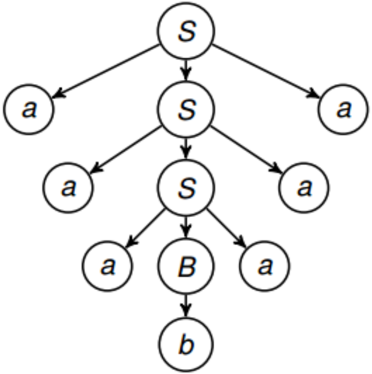
# Ableitungsbaum

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für $X \Rightarrow w$ sind die Zeichen von $w$ die Kinder von X
- Terminale sind die Blätter

**Beispiel**

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaabaaa$



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Übung zu Kontextfreien Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

## Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik (N, T, S, P) mit:

- Nichtterminalsymbolen $N := \{A, B, S\}$.
- Terminalsymbolen $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol $S$
- Produktionen $P := \{S \to aaS | bbS | SAS | \varepsilon, A \to cB, B \to a, b, c, \varepsilon\}$.

Aufgabe: Welche der folgenden Wörter sind ableitbar? Konstruiere den Ableitungsbaum und zeige, wie sie abgeleitet werden.

- $ccbbcbbbbcbbaaaa$?
- $aabbaabbaabb$?
- $c$?

# Formale Sprachen erzeugen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



## Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir $L(G) := \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$ die von G erzeugte Sprache.

## Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache $L$ heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik $G$ existiert, mit $L(G) = L$.

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann ist $L(G) = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_+\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Verständnisfragen

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

  $\to$ $\{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?

  $\to$ $L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik $G$ mit $L(G) = \{\}$?

$\to$ $G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to X\})$ oder $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$
- Wahr oder falsch? Wenn $w_1 \Rightarrow w_2$ gilt, dann gilt auch $w_1 \to w_2$
- Was ist der Unterschied von $\Rightarrow$ und $\Rightarrow^*$ ?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



## Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei $L_1 := \{wbaaw' | w, w' \in \{a, b\}^*\}$. Konstruiere eine Grammatik $G_1$ mit $L(G_1) = L_1$.

$\rightarrow$ $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY | bY | \varepsilon\})$.

- Welche Sprache erzeugt $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$ mit $P_2 = \{S \rightarrow X | Y, X \rightarrow aaXb | aab, Y \rightarrow aYbb | abb\}$?

$\rightarrow$ $L(G_2) = \{a^{2k} b^k | k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{a^k b^{2k} | k \in \mathbb{N}_+\}$

# Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX|(X)|\varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\to$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

$\to$ $N_((w) = N_)(w)$ Ist diese Eigenschaft hinreichend?

$\to$ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe $v$ von $w$ gilt $N_((v) \geq N_)(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

$\to$ $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to (X)X|\varepsilon\})$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Grenze kontextfreier Grammatiken

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Beispiel aus der Vorlesung:
$L_{vv} = \{vcv | v \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Relationen

Karlsruher Institut für Technologie

## Erinnerung Relationen

Es seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt Relation.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



## Definition Produkt von Relationen

Es seinen $A$, $B$ und $C$ Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen. Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \ \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen $R$ und $S$.

**Bemerkung**

$S \circ R$ ist eine Relation auf $A$ und $C$, bildet also von $A$ nach $C$ ab.

## Assoziativität des Produktes

Es seien $A$, $B$, $C$ und $D$ Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ sowie $T \subseteq C \times D$ Relationen. Dann gilt
$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



## Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. $R$ heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

## Identität

Sei $M$ eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

## Potenz von Relationen

Sei $M$ eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Dann definieren wir $R^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle $i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} := R^i \circ R$

Also $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Reflexitivität

## Satz über das neutrale Element

Es seien $A$ und $B$ Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt: $R \circ I_B = R = I_A \circ R$.

## Reflexivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Wenn für alle $x \in M : (x, x) \in R$, nennt man $R$ reflexiv.
Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

## Lemma

Sei $M$ eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. $R$ ist genau dann reflexiv, wenn $I_M \subseteq R$ gilt.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Transitivität

Karlsruher Institut für Technologie

## Transitivität

Sei $M$ eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
R heißt transitiv, wenn:
$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \land (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

## Lemma

Sei $M$ eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. $R$ ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



## Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist $R$ reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ reflexiv? Nein!
- Ist $S$ transitiv? Ja!
- Wie müsste S aussehen, um reflexiv zu sein?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



# Reflexiv-transitive Hülle



## Definition

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
Dann nennt man $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ die reflexiv-transitive Hülle von R.

## Satz

- $R^*$ ist reflexiv
- $R^*$ ist transitiv
- $R^*$ ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und $R \subseteq R^*$ erfüllt.

**Bemerkung**

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene, reflexive und transitive Relation. Dann gilt $R^* = R$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



## Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist $R^*$?

$\rightarrow$ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei $M$ eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Was ist $(R^*)^*$ ?

$\rightarrow$ $(R^*)^* = R^*$

- $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$. Ist R reflexiv? Ist R transitiv? Nein und nein!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu



Die Relationen $R$ und $S$ über $\mathbb{N}_0$ seien gegeben durch:

- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$ ($a$ ist Teiler von $b$)
- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow ggT(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

$\rightarrow$ R ist transitiv, aber nicht reflexiv.

$\rightarrow$ S ist reflexiv, aber nicht transitiv. [TODO]

# Informationen

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - `http://gbi.lukasbach.com`
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - `http://gbi.ira.uka.de`
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul