

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 26.01.2017



Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Komplexitätstheorie

Mastertheorem

Automaten

- 1 Komplexitätstheorie
 - Mastertheorem

- 2 Automaten

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Komplexitätstheorie

Mastertheorem

Automaten

- Was ist $\Omega(f)$, $\Theta(f)$, $\mathcal{O}(f)$?
- Wieso messen wir nicht einfach Laufzeit in “Anzahl Operationen”?

Obere Schranke (Worst-Case Approximation)

$$O(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

Untere Schranke (Best-Case Approximation)

$$\Omega(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n)\}$$

Average-Case Approximation

$$\Theta(f) = \{g | \exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n) \leq c' \cdot f(n)\}$$

Auf welche Weise wird hier approximiert?

Gelten folgende Approximationen?

- $4n^2 + \pi n + 2\sqrt{n} \in \Theta(n^2)$? Ja.
- $5n^2 + \pi n + 2\sqrt{n} \in \Theta(n^2)$? Ja.
- $4n^{2,1} + \pi n + 2\sqrt{n} \in \Theta(n^2)$? Nein.

Es sind immer nur die höchsten Faktoren interessant!

- $4n^4 + 3c^6 \in \Theta(n^4)$? Ja, c ist eine Konstante, $3c^6 = (3c^6)n^0$ hat eine kleinere Potenz als n^4 .
- $\log_{4213}(n) \in \Theta(\log_2(n))$ Ja, die Basis des Logarithmus ist im O-Kalkül egal.
 - Grund: $\mathcal{O}(\log_b n) = \mathcal{O}(\frac{\log_a n}{\log_a b}) = \mathcal{O}(\frac{1}{\log_a b} \log_a n) = \mathcal{O}(\log_a n)$.
- $n! \in \Theta(n^{\pi e^{2000}})$ Nein, Fakultät wächst asymptotisch schneller als fast alles andere.

Gelten folgende Approximationen?

Komplexitätstheorie

■ $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^5)$? Ja.

Mastertheorem

■ $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^4)$? Ja.

■ $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$? Ja.

■ $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$? Nein.

■ $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^5)$? Nein.

■ $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^4)$? Nein.

■ $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^3)$? Ja.

■ $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^2)$? Ja.

Automaten

Übungsaufgabe

Entscheide für jede Zelle, ob die Formel der Zeile in der Menge der Spalte liegt.

	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n)$	$\Theta(c!)$	$\Theta(n^\pi)$	$\Omega(n^6)$	$\Omega(n!)$
$2n^2 + 4n$	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin
π	\in	\in	\in	\notin	\notin	\notin
$\log(n)$	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin
$n \log(n)$	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin
n^π	\notin	\notin	\notin	\in	\notin	\notin
$12n^3 + 7000n^2$	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin
n^3	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin
$n!$	\notin	\notin	\notin	\notin	\in	\in

Grundbegriffe der Informatik

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Komplexitätstheorie

Mastertheorem

Automaten

- $\mathcal{O}(n^2) \cap \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(?) = \mathcal{O}(n).$
- $\mathcal{O}(n^2) \cap \Omega(n^3) = \emptyset$

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Komplexitätstheorie

Mastertheorem

Automaten

$$1 \ll \log n \ll n \log n \ll n^2 \ll n^3 \ll n^{10000} \ll n^2 \ll 3^n \ll 1000^n \ll n! \ll n^n$$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq \infty$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$$

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$$

Z

eige:

- $3n^2 + 14n + 159 \in \Theta(n^2)$
- $\log n^2 \in \Theta(\log n^3)$
- $\log^2 n \in \mathcal{O}(\log^3 n)$

Z

eige mittels vollständiger Induktion:

- $2^n \in \Theta(n^3)$
- $(n+1)! \in \Theta(n! + 2^n)$

Grundbegriffe der Informatik

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Komplexitätstheorie

Mastertheorem

Automaten

Größenordnung	Bezeichnung
$\mathcal{O}(1)$	konstante Laufzeit
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmische Laufzeit
$\mathcal{O}(\log^2 n)$	quadratisch logarithmische Laufzeit
$\mathcal{O}(n)$	lineare Laufzeit
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratische Laufzeit
$\mathcal{O}(n^3)$	kubische Laufzeit
$\mathcal{O}(n^k)$	polynomielle Laufzeit

```
r ← 0
for i ← 0 to n/2 do
    s ← 0
    for j ← i to n - i do
        s ← s + j
    od
    r ← s + n * i
    r ← r + s
od
```

- Wie oft wird die innere Schleife durchlaufen? $n - 2i + 1$ mal.
- Wie kommen wir jetzt auf die Gesamtlaufzeit?

- $$\sum_{i=0}^{n/2} (n - 2i + 1) = \frac{n}{2}n - 2 \sum_{i=0}^{n/2} i + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 2 \frac{\frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} + 1)}{2} =$$
$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} = \frac{1}{4}n^2$$

- Kann man das einfacher machen?

Formel für Mastertheorem

Rekursive Komplexitätsformeln der Form

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

lassen sich mit dem Mastertheorem Komplexitätsklassen zuordnen.

Auflösung des Mastertheorem

Fall 1: Wenn $f \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, dann ist
 $T \in \Theta(n^{\log_b a})$.

Fall 2: Wenn $f \in \Theta(n^{\log_b a})$ ist, dann ist $T \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.

Fall 3: Wenn $f \in \mathcal{O}(n^{\log_b a + \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, und wenn es eine Konstante d gibt mit $0 < d < 1$, so dass für alle hinreichend großen n gilt $af(n/b) \leq df$, dann ist $T \in \Theta(f)$.

Komplexitätstheorie

Mastertheorem

Automaten

- $T(n) := 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$, also $a = 2, b = 4, f(n) = \sqrt{n}$, also zweiter Fall des Mastertheorems. $T \in \Theta(\sqrt{n} \log n)$
- $T(n) := 3T(\frac{n}{2}) + n \log n$, also $a = 3, b = 2, f(n) = n \log n$, also erster Fall des Mastertheorems, $T \in \Theta(n^{\log_2 3})$
- $T(n) := 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \sqrt{n}$, also $a = 4, b = 2, f(n) = n^2 \sqrt{n}$, also dritter Fall des Mastertheorems, $T \in \Theta(n^2 \sqrt{n})$.

Endlicher Automat

Ein endlicher Automat ist ein Tupel $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit...

- endliche Zustandsmenge Z
- Anfangszustand $z_0 \in Z$
- Eingabealphabet X
- Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \rightarrow Z$
- Ausgabealphabet Y
- Ausgabefunktion
 - Mealy-Automat: $g : Z \times X \rightarrow Y^*$
 - Moore-Automat: $h : Z \rightarrow Y^*$

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
 - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
 - Donnerstags, 14:00 - 15:30
 - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
 - <http://gbi.ira.uka.de>
 - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
 - 06.03.2017, 11:00
 - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
 - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul