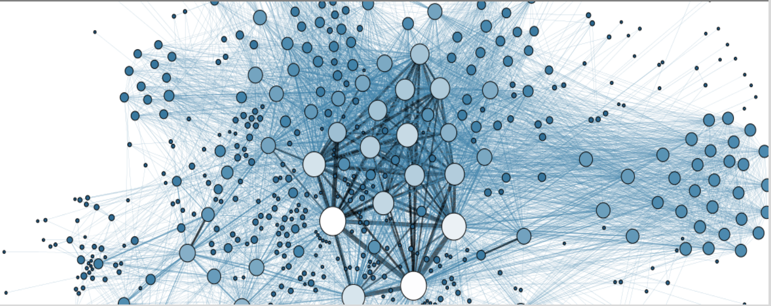
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 8.12.2016



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

Zur Rekapitulation...

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Wie kann man diese Sprache darstellen?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel $G = (N, T, S, P)$ mit

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)

Kontextfreie Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$?

Kontextfreie Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $N := \{a, b, c\}$, $T = \{S, A, B\}$

Kontextfreie Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $N := \{a, b, c\}$, $T = \{S, A, B\}$: $N \times (N \cup T)^* = \{(a, abSAcB), (a, SSS), (b, BSabc), ...\}$.

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $N := \{a, b, c\}$, $T = \{S, A, B\}$:
  $N \times (N \cup T)^* = \{(a, abSAcB), (a, SSS), (b, BSabc), ...\}$.
- Andere Schreibweise: $P : N \to (N \cup T)^*$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $N := \{a, b, c\}$, $T = \{S, A, B\}$: $N \times (N \cup T)^* = \{(a, abSAcB), (a, SSS), (b, BSabc), ...\}$.
- Andere Schreibweise: $P : N \to (N \cup T)^*$.
- Für $(X, w) \in P$ schreibt man $X \to w$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $N := \{a, b, c\}$, $T = \{S, A, B\}$: $N \times (N \cup T)^* = \{(a, abSAcB), (a, SSS), (b, BSabc), ...\}$.
- Andere Schreibweise: $P : N \to (N \cup T)^*$.
- Für $(X, w) \in P$ schreibt man $X \to w$
- Statt $\{X \to w_1, X \to w_2\}$ schreibt man auch $\{X \to w_1 | w_2\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: $N =$ *Nichtterminalsymbole*, $T =$ *Terminalsymbole*.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Karlsruher Institut für Technologie

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Karlsruher Institut für Technologie

Erinnerung: $N =$ *Nichtterminalsymbole*, $T =$ *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Karlsruher Institut für Technologie

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Karlsruher Institut für Technologie

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- S

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: $N =$ *Nichtterminalsymbole*, $T =$ *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa|aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa.$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$. Fertig.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: $N =$ *Nichtterminalsymbole*, $T =$ *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$. Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa$!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsschritt

Erinnerung: $N =$ *Nichtterminalsymbole*, $T =$ *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$. Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa$! $\Rightarrow$ heißt eine Ableitung!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Ableitungsfolge

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Ableitungsfolge

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

Ableitungsfolge

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$ genau dann, wenn ein $w \in (N \cup T)^*$ existiert, für das $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$ gilt. Für $u \Rightarrow^i v$ sagt man "v ist aus u in i Schritten ableitbar".

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Karlsruher Institut für Technologie

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$ genau dann, wenn ein $w \in (N \cup T)^*$ existiert, für das $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$ gilt. Für $u \Rightarrow^i v$ sagt man "v ist aus u in i Schritten ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$ genau dann, wenn ein $w \in (N \cup T)^*$ existiert, für das $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$ gilt. Für $u \Rightarrow^i v$ sagt man "v ist aus u in i Schritten ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa|aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsfolge

Karlsruher Institut für Technologie

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$ genau dann, wenn ein $w \in (N \cup T)^*$ existiert, für das $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$ gilt. Für $u \Rightarrow^i v$ sagt man "v ist aus u in i Schritten ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa|aSa, B \rightarrow b\})$
Dann gilt $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$
und $aaaSaaa \Rightarrow^2 aaaabaaaa$

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann "v ist aus u ableitbar".

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann "v ist aus u ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann "v ist aus u ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa|aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann "v ist aus u ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann "v ist aus u ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

aber $aSa \not\Rightarrow^* abba$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Ableitungsbaum

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsbaum

- Startsymbol ist Wurzel

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsbaum

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsbaum

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für $X \Rightarrow w$ sind die Zeichen von w die Kinder von X

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Ableitungsbaum

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für $X \Rightarrow w$ sind die Zeichen von w die Kinder von X
- Terminale sind die Blätter

Ableitungsbaum

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa|aSa, B \to b\})$

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für $X \Rightarrow w$ sind die Zeichen von w die Kinder von X
- Terminale sind die Blätter

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

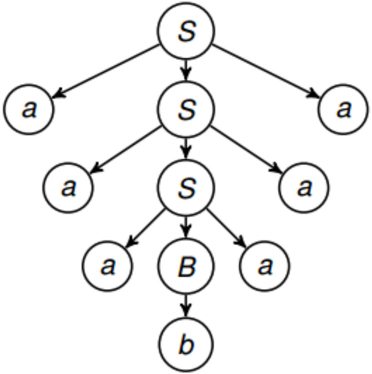
Ableitungsbaum

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für $X \Rightarrow w$ sind die Zeichen von w die Kinder von X
- Terminale sind die Blätter

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaabaaa$



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übung zu Kontextfreien Grammatiken

Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik (N, T, S, P) mit:

- Nichtterminalsymbolen $N := \{A, B, S\}$.
- Terminalsymbolen $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol S
- Produktionen $P := \{S \to aaS | bbS | SAS | \varepsilon, A \to cB, B \to a, b, c, \varepsilon\}$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übung zu Kontextfreien Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik (N, T, S, P) mit:

- Nichtterminalsymbolen $N := \{A, B, S\}$.
- Terminalsymbolen $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol S
- Produktionen $P := \{S \rightarrow aaS|bbS|SAS|\varepsilon, A \rightarrow cB, B \rightarrow a, b, c, \varepsilon\}$.

Aufgabe: Welche der folgenden Wörter sind ableitbar? Konstruiere den Ableitungsbaum und zeige, wie sie abgeleitet werden.

- $ccbbcbbbcbbaaaa$?
- $aabbaabbaabb$?
- c?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Formale Sprachen erzeugen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Formale Sprachen erzeugen

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Formale Sprachen erzeugen

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir $L(G) := \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$ die von G erzeugte Sprache.

Formale Sprachen erzeugen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir $L(G) := \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$ die von G erzeugte Sprache.

Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache L heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik G existiert, mit $L(G) = L$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Formale Sprachen erzeugen

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir $L(G) := \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$ die von G erzeugte Sprache.

Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache L heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik G existiert, mit $L(G) = L$.

$$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Formale Sprachen erzeugen

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir $L(G) := \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$ die von G erzeugte Sprache.

Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache L heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik G existiert, mit $L(G) = L$.

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann ist $L(G) = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_+\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Verständnisfragen

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Verständnisfragen

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

$\to \{aa, ab, ba, bb\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Verständnisfragen

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

  $\to \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Verständnisfragen

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

  $\to$ $\{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?

  $\to$ $L(G) = \{a, b\}^*$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Verständnisfragen

Karlsruher Institut für Technologie

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

  $\to$ $\{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?

  $\to$ $L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Verständnisfragen

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

  $\to$ $\{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?

  $\to$ $L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

$\to$ $G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to X\})$ oder $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$

Verständnisfragen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?
  - $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?
  - $\rightarrow L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

$\rightarrow$ $G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow X\})$ oder $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$

- Wahr oder falsch? Wenn $w_1 \Rightarrow w_2$ gilt, dann gilt auch $w_1 \rightarrow w_2$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Verständnisfragen

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

  $\to$ $\{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?

  $\to$ $L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

$\to$ $G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to X\})$ oder $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$

- Wahr oder falsch? Wenn $w_1 \Rightarrow w_2$ gilt, dann gilt auch $w_1 \to w_2$
- Was ist der Unterschied von $\Rightarrow$ und $\Rightarrow^*$?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei $L_1 := \{wbaaw' | w, w' \in \{a, b\}^*\}$. Konstruiere eine Grammatik G_1 mit $L(G_1) = L_1$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei $L_1 := \{wbaaw' | w, w' \in \{a,b\}^*\}$. Konstruiere eine Grammatik G_1 mit $L(G_1) = L_1$.

$\rightarrow$ $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY | bY | \varepsilon\})$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei $L_1 := \{wbaaw' | w, w' \in \{a, b\}^*\}$. Konstruiere eine Grammatik G_1 mit $L(G_1) = L_1$.

$\rightarrow$ $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY | bY | \varepsilon\})$.

- Welche Sprache erzeugt $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$ mit $P_2 = \{S \rightarrow X | Y, X \rightarrow aaXb | aab, Y \rightarrow aYbb | abb\}$?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei $L_1 := \{wbaaw' | w, w' \in \{a, b\}^*\}$. Konstruiere eine Grammatik G_1 mit $L(G_1) = L_1$.

$\rightarrow$ $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY | bY | \varepsilon\})$.

- Welche Sprache erzeugt $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$ mit $P_2 = \{S \rightarrow X | Y, X \rightarrow aaXb | aab, Y \rightarrow aYbb | abb\}$?

$\rightarrow$ $L(G_2) = \{a^{2k} b^k | k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{a^k b^{2k} | k \in \mathbb{N}_+\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon\})$$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\to$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

Karlsruher Institut für Technologie

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX|(X)|\varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\longrightarrow$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\rightarrow$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

$\rightarrow N_((w) = N_)(w)$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\to$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

$\to$ $N_((w) = N_)(w)$ Ist diese Eigenschaft hinreichend?

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\to$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

$\to$ $N_((w) = N_)(w)$ Ist diese Eigenschaft hinreichend?

$\to$ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe v von w gilt $N_((v) \geq N_)(v)$

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\to$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

$\to$ $N_((w) = N_)(w)$ Ist diese Eigenschaft hinreichend?

$\to$ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe v von w gilt $N_((v) \geq N_)(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\rightarrow$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

$\rightarrow$ $N_((w) = N_)(w)$ Ist diese Eigenschaft hinreichend?

$\rightarrow$ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe v von w gilt $N_((v) \geq N_)(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

$\rightarrow$ $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to (X)X | \varepsilon\})$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Grenze kontextfreier Grammatiken

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Grenze kontextfreier Grammatiken

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Beispiel aus der Vorlesung:
$L_{vv} = \{vcv | v \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

Relationen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Relationen

Erinnerung Relationen

Es seien A und B Mengen.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Relationen

Karlsruher Institut für Technologie

Erinnerung Relationen

Es seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt Relation.

Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen.
Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \, \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen. Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Bemerkung

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen. Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \; \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Bemerkung
$S \circ R$ ist eine Relation auf A und C

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen.
Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Bemerkung

$S \circ R$ ist eine Relation auf A und C, bildet also von A nach C ab.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen. Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \, \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Bemerkung
$S \circ R$ ist eine Relation auf A und C, bildet also von A nach C ab.

Assoziativität des Produktes

Es seien A, B, C und D Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ sowie $T \subseteq C \times D$ Relationen.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen. Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Bemerkung

$S \circ R$ ist eine Relation auf A und C, bildet also von A nach C ab.

Assoziativität des Produktes

Es seien A, B, C und D Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ sowie $T \subseteq C \times D$ Relationen. Dann gilt

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen. Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Bemerkung

$S \circ R$ ist eine Relation auf A und C, bildet also von A nach C ab.

Assoziativität des Produktes

Es seien A, B, C und D Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ sowie $T \subseteq C \times D$ Relationen. Dann gilt
$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Potenz von Relationen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Potenz von Relationen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Dann definieren wir R^i für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Potenz von Relationen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Dann definieren wir R^i für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Potenz von Relationen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Dann definieren wir R^i für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle $i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} := R^i \circ R$

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Potenz von Relationen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Dann definieren wir R^i für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle $i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} := R^i \circ R$

Also $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexitivität

Karlsruher Institut für Technologie

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexitivität

Satz über das neutrale Element

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt: $R \circ I_B = R = I_A \circ R$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexitivität

Karlsruher Institut für Technologie

Satz über das neutrale Element

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt: $R \circ I_B = R = I_A \circ R$.

Reflexivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Wenn für alle $x \in M : (x, x) \in R$, nennt man R reflexiv.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexitivität

Satz über das neutrale Element

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt: $R \circ I_B = R = I_A \circ R$.

Reflexivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Wenn für alle $x \in M : (x, x) \in R$, nennt man R reflexiv.
Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexivität

Satz über das neutrale Element

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt: $R \circ I_B = R = I_A \circ R$.

Reflexivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Wenn für alle $x \in M : (x, x) \in R$, nennt man R reflexiv.

Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

Lemma

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. R ist genau dann reflexiv, wenn $I_M \subseteq R$ gilt.

Transitivität

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Transitivität

Karlsruher Institut für Technologie

Transitivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Transitivität

Transitivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
R heißt transitiv, wenn:

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Transitivität

Transitivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
R heißt transitiv, wenn:
$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \land (y, z) \in R \to (x, z) \in R$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Transitivität

Transitivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
R heißt transitiv, wenn:
$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Lemma

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. R ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$ transitiv?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ reflexiv?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ reflexiv? Nein!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ reflexiv? Nein!
- Ist S transitiv?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ reflexiv? Nein!
- Ist S transitiv? Ja!
- Wie müsste S aussehen, um reflexiv zu sein?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
Dann nennt man $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ die reflexiv-transitive Hülle von R.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
Dann nennt man $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ die reflexiv-transitive Hülle von R.

Satz

- R^* ist reflexiv
- R^* ist transitiv
- R^* ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und $R \subseteq R^*$ erfüllt.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Reflexiv-transitive Hülle

Definition

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
Dann nennt man $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ die reflexiv-transitive Hülle von R.

Satz

- R^* ist reflexiv
- R^* ist transitiv
- R^* ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und $R \subseteq R^*$ erfüllt.

Bemerkung

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene, reflexive und transitive Relation. Dann gilt $R^* = R$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^*?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^*?

$\rightarrow$ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^*?

$\rightarrow$ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Was ist $(R^*)^*$?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^*?

$\rightarrow$ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Was ist $(R^*)^*$?

$\rightarrow$ $(R^*)^* = R^*$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^*?

$\rightarrow$ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Was ist $(R^*)^*$?

$\rightarrow$ $(R^*)^* = R^*$

- $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$. Ist R reflexiv? Ist R transitiv?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^*?

$\rightarrow$ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Was ist $(R^*)^*$?

$\rightarrow$ $(R^*)^* = R^*$

- $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$. Ist R reflexiv? Ist R transitiv? Nein und nein!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Die Relationen R und S über $\mathbb{N}_0$ seien gegeben durch:

- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$ (a ist Teiler von b)
- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow ggT(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Die Relationen R und S über $\mathbb{N}_0$ seien gegeben durch:

- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$ (a ist Teiler von b)
- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow ggT(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

$\rightarrow$ R ist transitiv, aber nicht reflexiv.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Die Relationen R und S über $\mathbb{N}_0$ seien gegeben durch:

- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$ (a ist Teiler von b)
- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow ggT(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

$\longrightarrow$ R ist transitiv, aber nicht reflexiv.

$\longrightarrow$ S ist reflexiv, aber nicht transitiv. [TODO]

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu