

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 15.12.2016



Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Prädikatenlogik

1 Prädikatenlogik

Grundlagen zu Prädikatenlogik

Prädikatenlogik (PL) **erweitert** Aussagenlogik durch Ergänzen von “Prädikaten”, einer Art von Funktionen, die Wahrheitswerte zurückgeben.
Alphabet der Prädikatenlogik:

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,),$ also Alphabet der Aussagenlogik.
- \forall Allquantor ($\forall x$ heißt “für alle x gilt...”)
- \exists Existenzquantor ($\exists x$ heißt “es existiert min. ein x ... für das gilt...”)
- $x, y, z, x_i \in Var_{PL}$ Variablen
- $c, d, c_i \in Const_{PL}$ Konstanten
- $f, g, h, f_i \in Fun_{PL}$ Funktionen
- $R, S, R_i \in Rel_{PL}$ Relationen (funktionieren ähnlich wie Funktionen)
- \doteq Objektgleichheit
- $,$ Komma

Terme

Ein Term ist ein Element aus der Sprache über

$$A_{Ter} := \{ (,), , \} \cup Var_{PL} \cup Const_{PL} \cup Fun_{PL}.$$

Atomare Formeln

Atomare Formeln sind zum Beispiel

- Objektgleichheiten $f_1 \doteq f_2$
- Relation von Termen $R(t_1, t_2, \dots)$

Stelligkeit einer Funktion

Die Stelligkeit $ar(f) \in \mathbb{N}_+$ einer Funktion gibt die Anzahl der Parameter von f an. (Analog Stelligkeit von Relationen $ar(R)$)

Verständnis von Termen, Atomaren Formeln, Stelligkeit

Prädikatenlogik

- Woraus kann ein Term bestehen?

→ Aus Klammern $(,)$, Kommas $,$, Variablen, Konstanten, Funktionen.

- Was davon sind atomare Formeln: $R(x) \wedge S(f(x, c)),$
 $R(x, g(c, f(y, x)))$?

→ Nein, ja.

- Was sind die Stelligkeiten folgender Funktionen:
 $f(a, b, c), g(a), h(a, b)$?

→ 3, 1, 2.

Grammatik der Prädikatenlogik

Prädikatenlogische Formeln werden durch die Grammatik

$G := (N_{Ter}, A_{Ter}, T, P_{Ter})$ erzeugt mit:

- $m + 1$ Nichtterminalsymbolen $N_{Ter} := \{T\} \cup \{L_i | i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m\}$
(m = Maximale Stelligkeit von Funktionen)
- Terminalsymbolen: Alphabet, aus dem Terme erzeugbar sind
- Produktionen

$L_{i+1} \rightarrow L_i, T$ für jedes $i \in \mathbb{N}_+$ mit $i < m$

$L_1 \rightarrow T$

$T \rightarrow c_i$ für jedes $c_i \in Const_{PL}$

$T \rightarrow x_i$ für jedes $x_i \in Var_{PL}$

$T \rightarrow f_i(L_{ar(f_i)})$ für jedes $f_i \in Fun_{PL}$

Beispiel: Seien Funktionen f, g mit $ar(f) = 2, ar(g) = 1$, Konstante c und Variablen x, y gegeben. Was kann man damit machen?

Grammatik der Prädikatenlogik

Beispiel: Seien Funktionen f, g mit $ar(f) = 2, ar(g) = 1$, Konstante c und Variablen x, y gegeben. Was kann man damit machen?

Dann:

- $N_{Ter} = \{T, L_1, L_2\}$
- $P_{Ter} = \{L_2 \rightarrow L_1, T$
 $L_1 \rightarrow T$
 $T \rightarrow c$
 $T \rightarrow x$
 $T \rightarrow y$
 $T \rightarrow g(L_1)$
 $T \rightarrow f(L_2)\}$

Aufgabe zu Grammatiken und Prädikatenlogik

Welche dieser Formeln
entsprechen dieser
Grammatik?

- $f(c, g(x))$
- $f(x, y, c)$
- $g(f(c, c))$
- $g(g(f(g(x), g(f(c, c)))))$
- $g(c, f)c$

Bilde die Ableitungsbäume zu
den korrekten Formeln.

Bindungsstärke

Verschiedene Operanden “binden” stärker als andere. Wenn ein Operand stärker als die umliegenden Operanden bindet, tritt derselbe Effekt auf, wie wenn Klammerung geschehen würde.

Bindungsstärken absteigend:

- $\forall/\exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow / \leftarrow, \leftrightarrow$

Finde äquivalente Formeln, die mit möglichst wenig Klammern auskommen:

- $\exists x \forall y (R(f(x), g(x)) \vee \forall z R(c, x))$

Prädikatenlogik

- $\forall x p(x)$ heißt: für alle $x \in D$ gilt die Aussage $p(x)$.
- $\exists x p(x)$ heißt: für (mindestens) ein $x \in D$ gilt die Aussage $p(x)$.
- Gilt $\forall x \exists y \ p(x, y) = \exists y \forall x \ p(x, y)$?
 - Zum Beispiel $p(x, y) :=$ "Person x ist mit Person y verheiratet."
 - Also:
 - $\forall x \exists y \ p(x, y)$ = Für jede Person x gibt es eine Person y , mit der x verheiratet ist.
 - $\exists y \forall x \ p(x, y)$ = Es gibt eine Person y , sodass für alle Personen x gilt, dass x mit allen Personen y verheiratet ist.
 - Eher nicht. Reihenfolge ist also wichtig!

Prädikatenlogik

Quantoren binden Variablen nur zu der zugehörigen Teilformel.

- Zum Beispiel: $p(x) \wedge \forall x \exists y (p(x) \wedge q(x, y, z) \rightarrow r(x))$
- Welcher Teil der Formel muss für alle x gelten? Welcher für alle y ?
- Variablen, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors liegen, nennt man **frei**.

Überschattung ist möglich, daher durch Quantoren definierte Variablen beziehen sich immer auf den **nächsten** Quantor.

- Ist $\forall x (p(x) \wedge \forall x (\neg p(x)))$ erfüllbar?
- Ja: $\forall x (p(x) \wedge \forall \hat{x} (\neg p(\hat{x})))$

Bindungsbereich von Quantoren

Substitution ist möglich. Dabei wird eine **freie** Variable durch einen Term ersetzt, die Substitution wird mit $\beta[a/b]$ bezeichnet, wobei a durch b ersetzt wird.

Führe die folgenden Substitutionen durch:

- $\beta[x/5](p(x) \vee q(x, y)) = p(5) \vee q(5, y)$
- $\beta[x/5](p(x) \vee \forall x(q(x, y))) = p(5) \vee \forall x(q(x, y))$
- $\beta[x/y, y/x, z/f(z)](p(z) \wedge q(x, y)) = p(f(z)) \wedge q(y, x)$

Welche der Variablen sind gebunden (und durch welche Quantoren), welche sind frei?

- $p(x) \rightarrow \forall x \exists y (p(x) \wedge q(y, z) \leftrightarrow \forall z (q(x, z)))$
- $\forall y (p(f(x, y))) \vee \exists z (q(z, f(y, z)))$

Semantik von prädikatenlogischen Formeln

Um prädikatenlogische Formeln zu interpretieren, brauchen wir einige neue Mengen:

- Interpretation (D, I) , bestehend aus...
 - Universum $D \neq \emptyset$ mit...
 - $I(c_i) \in D$ für $c_i \in \text{Const}_{PL}$
 - $I(f_i) : D^{ar(f_i)} \rightarrow D$ für $f_i \in \text{Fun}_{PL}$
 - $I(R_i) \subseteq D^{ar(R_i)}$ für $R_i \in \text{Rel}_{PL}$
 - I weist also den Komponenten Bedeutungen zu, “definiert diese”
 - Variablenbelegung $\beta : \text{Var}_{PL} \rightarrow D$, z.B. $\beta(x) := 3, \beta(y) := 11$
 - β definiert also Variablenwerte
- Damit können wir prädikatenlogische Formeln definieren!

$val_{D,I,\beta}$

Die Funktion $val_{D,I,\beta} : L_{Ter} \cup L_{For} \rightarrow D \cup \mathbb{B}$ weist einer prädikatenlogischen Formel eine Bedeutung (Wahrheitsgehalt für Formeln und Element des Universums für Terme) zu.

Unterschied zwischen $val_{D,I,\beta}$ und I ? I ist für Einzelteilen (Konstanten, Funktionen, Relationen) eine Bedeutung zuweist, und $val_{D,I,\beta}$ einer ganzen Formel eine Bedeutung zuweist.

Beispiel:

Sei $D := \mathbb{N}_0$, $I(c) := 10$, $ar(f) := 2$, $ar(p) := 1$, $ar(q) := 2$, $\beta(x) := 7$.

Sei $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $(x, y) \mapsto x - y$.

Sei $ar(R) := 2$, $I(R) := \{(x, y) | x \leq y\}$.

Sei $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5$, $I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$.

Beispiel zur Semantik

Sei $D := \mathbb{N}_0$, $I(c) := 10$, $ar(f) := 2$, $ar(p) := 1$, $ar(q) := 2$, $\beta(x) := 7$.

Sei $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $(x, y) \mapsto x - y$.

Sei $ar(R) := 2$, $I(R) := \{(x, y) | x \leq y\}$.

Sei $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5$, $I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$.

- $T_1 := p(x) \rightarrow \exists y(q(y, x) \wedge p(y))$, was ist $val_{D,I,\beta}(T_1)$?
 - Wähle $y = 8 \in \mathbb{N}_0$. Dann: $I(q(8, 7)) = w$, $I(p(8)) = w$, also $val_{D,I,\beta}(\exists y(q(y, x) \wedge p(y))) = w$, und $val_{D,I,\beta}(T_1) = w$.
- $T_2 := p(x) \rightarrow \exists y(q(f(c, y), x) \wedge p(y))$, was ist $val_{D,I,\beta}(T_2)$?
 - $val_{D,I,\beta}(p(x)) = w$
 - $val_{D,I,\beta}(q(f(c, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(f(10, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(10 - y, 7)) = w$ für $y \in \{0, 1, 2\}$.
 - $val_{D,I,\beta}(p(y)) = w$ für $y \geq 5$.
 - Also: $val_{D,I,\beta}(T_2) = f$.

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $Vater(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ Vater von } y \text{ ist, analog } Mutter(x, y).$
- $Männlich(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ männlich ist, analog } Weiblich(x).$
- $Verheiratet(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ und } y \text{ verheiratet sind.}$

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede männliche Person hat eine Mutter.
 - $\forall x \exists y (Männlich(x) \rightarrow Mutter(y, x))$
 - Kann eine Person jetzt auch mehr als eine Mutter haben? Widerspricht das der ursprünglichen Aussage?
- Jeder Mann hat Kinder (plural!).
 - $\forall x \exists y \exists z (Männlich(x) \rightarrow (Vater(x, y) \wedge Vater(x, z) \wedge \neg(y = z)))$

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $Vater(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ Vater von } y \text{ ist, analog } Mutter(x, y).$
- $Männlich(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ männlich ist, analog } Weiblich(x).$
- $Verheiratet(x, y) := \text{wahr, gdw. } x \text{ und } y \text{ verheiratet sind.}$

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede Frau ist mit höchstens einem Mann verheiratet.
 - $\forall x \forall y \forall z (Weiblich(x) \wedge ((Männlich(y) \wedge Männlich(z) \wedge \neg(y = z) \wedge Verheiratet(x, y)) \rightarrow \neg Verheiratet(x, z)))$
- Wer männlich ist, ist nicht weiblich und umgekehrt.
 - $\forall x (Männlich(x) \rightarrow \neg Weiblich(x) \wedge Weiblich(x) \rightarrow \neg Männlich(x))$

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
 - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
 - Donnerstags, 14:00 - 15:30
 - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
 - <http://gbi.ira.uka.de>
 - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
 - 06.03.2017, 11:00
 - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
 - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul