

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 12.01.2017



Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete  
Graphen

Begriffe

- 1 Graphen
  - Praxisbeispiele
  - Ungerichtete Graphen
  - Begriffe

## Graphen

### Praxisbeispiele

### Ungerichtete Graphen

### Begriffe

## Definition: Graph

Ein Graph  $G = (V, E)$  ist ein Tupel aus:

- Einer endlichen, nichtleeren Knotenmenge  $V$
- Einer endlichen Kantenmenge  $E \subseteq V \times V$

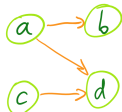
Beispiel: Knotenmenge  $V := \{a, b, c, d\}$ . Kantenmenge könnte zum Beispiel sein...

- $E := \{(a, b), (c, d), (a, d)\}$
- $E := \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- $E := \emptyset$

# Wie sehen diese Graphen aus?

Beispiel: Knotenmenge  $V := \{a, b, c, d\}$ . Kantenmenge könnte zum Beispiel sein...

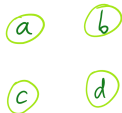
- $V := \{a, b, c, d\}, E := \{(a, b), (c, d), (a, d)\}$



- $V := \{a, b, c, d\}, E := \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$



- $V := \{a, b, c, d\}, E := \emptyset$



Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete  
Graphen

Begriffe

# Wann Angabe als Menge, wann als Visualisierung?

## Graphen

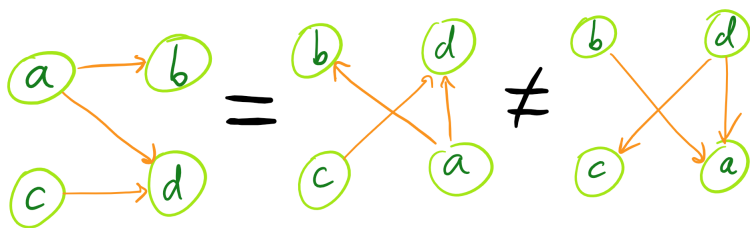
### Praxisbeispiele

### Ungerichtete Graphen

### Begriffe

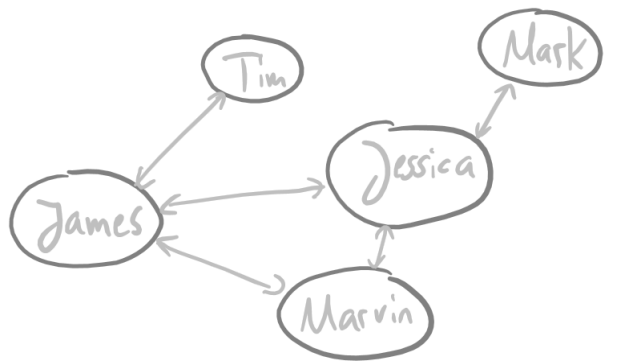
Wir verwenden gezeichnete Graphen und deren Definition als Mengen als äquivalent.

- $\{(a, b), (c, d), (a, d)\} = \{(a, b), (a, d), (c, d)\} \neq \{(b, a), (d, c), (d, a)\}$ ,  
also Kantenmenge mit unterschiedlichen Reihenfolgen darstellbar.  
Genauso die Knotenmenge.



Es kann also in jedem Fall der Graph sowohl als “Visualisierung” oder als Menge angegeben werden, beide Varianten sind formal korrekt.

## Praxisbeispiel: Soziales Netzwerk



- Ist Person  $A$  direkt mit Person  $B$  befreundet?  $\Leftrightarrow$  Gibt es eine Kante  $(A, B)$ ?
- Ist Person  $A$  über maximal 2 verschiedene Leute mit Person  $B$  befreundet?  $\Leftrightarrow$  Gibt es einen Pfad von  $A$  nach  $B$  mit maximaler Länge 3?
- Wieviele Freunde hat Person  $A$ ?  $\Leftrightarrow$  Welchen Grad hat Person  $A \in V$ ?

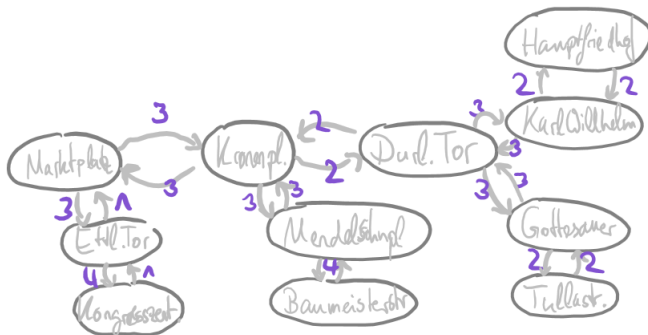
# Praxisbeispiel: Wie kommt man am schnellsten von A nach B

## Graphen

### Praxisbeispiele

### Ungerichtete Graphen

### Begriffe



- Kantengewichtung: Jeder Kante wird eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  zugewiesen.
- Wie lange dauert der kürzeste Weg von Kongresszentrum nach Hauptfriedhof?  $\Leftrightarrow$  Wie lang ist ein kürzester Pfad von Kongresszentrum nach Hauptfriedhof?
- Wo kommt man von Kronenplatz überall innerhalb von 5 Zeiteinheiten hin?  $\Leftrightarrow$  Für welche Orte  $v \in V$  existiert ein Pfad  $(Kronenplatz, \dots, v)$  mit einer Länge von maximal 5?

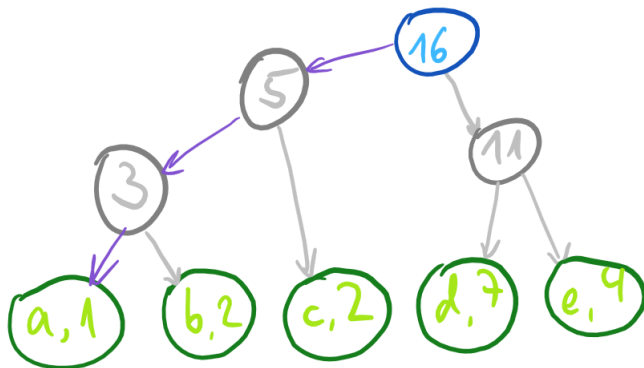
## Praxisbeispiel: Huffman-Bäume

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete  
Graphen

Begriffe



- Wie lang ist die Kodierung vom Zeichen  $c$ ?  $\Leftrightarrow$  Wie lang ist der Pfad von Wurzel zu Knoten  $c$ ? In diesem Fall 2.
- Wie viele Zeichen werden kodiert?  $\Leftrightarrow$  Wie viele Knoten sind von der Wurzel erreichbar, die selbst keine ausgehenden Kanten haben?  $\Leftrightarrow$  Wie viele Blätter hat der Baum?



## Graphen

### Praxisbeispiele

### Ungerichtete Graphen

### Begriffe

- Bis jetzt: Gerichtete Graphen, dh. Kanten  $(u, v)$  hatten eine Richtung von Knoten  $u$  nach Knoten  $v$ .

## Ungerichteter Graph

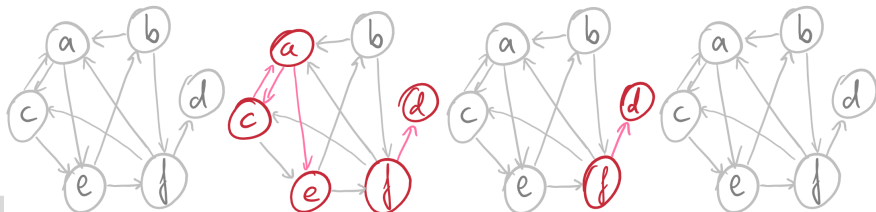
Ein ungerichteter Graph ist ein Graph, dessen Kanten Mengen, und keine Tupel sind.

- Beispiel: Statt Kante  $(u, v)$  jetzt Kante  $\{u, v\} = \{v, u\}$ .
- Information über Richtung geht also verloren, Kanten verbinden nur noch Knoten, ohne sich zu merken, welcher Knoten Start und welcher Ziel ist.

## Teilgraph

Zu einem Graph  $G := (V, E)$  ist ein Teilgraph definiert als  $G' = (V', E')$ , falls gilt  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ .

- Beispiel: Sei  $G := (V, E)$  mit  $V := \{a, b, c, d, e, f\}$  und  $E := \{(b, a), (b, f), (f, d), (e, f), (f, a), (e, b), (a, e), (f, c), (a, c), (c, a), (c, e)\}$
- Ist ein Graph mit  $V_1 := \{a, c, d, e, f\}$ ,  $E_1 := \{(a, c), (c, a), (a, e), (f, d)\}$  ein Teilgraph von  $G$ ?
- Ist ein Graph mit  $V_2 := \{d, f\}$ ,  $E_2 := \{(f, d)\}$  ein Teilgraph von  $G$ ?
- Ist ein Graph mit  $V_3 = E_3 = \emptyset$  ein Teilgraph von  $G$ ?



## Teilgraph

Zu einem Graph  $G := (V, E)$  ist ein Teilgraph definiert als  $G' = (V', E')$ , falls gilt  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ .

- Beispiel: Sei  $G := (V, E)$  mit  $V := \{a, b, c, d, e, f\}$  und  $E := \{(b, a), (b, f), (f, d), (e, f), (f, a), (e, b), (a, e), (f, c), (a, c), (c, a), (c, e)\}$
- Ist ein Graph mit  $V_4 := \{a, b\}$ ,  $E_4 := \{(f, d)\}$  ein Teilgraph von  $G$ ?
- Ist ein Graph mit  $V_5 := \{g, a\}$ ,  $E_5 := \{(g, a), (a, g)\}$  ein Teilgraph von  $G$ ?

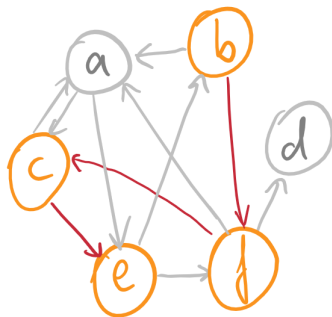
## Pfad informell

Ein Pfad  $(u, \dots, v)$  ist eine Aneinanderreihung von Knoten, die jeweils mit Kanten verbunden sind, sodass man über das **traversieren** der Kanten vom Startknoten  $u \in V$  zum Zielknoten  $v \in V$  kommt.

Anmerkung: Wenn man sich einen Knoten  $x \in V$  merkt und eine Kante  $(x, y) \in E$  traversiert, so gelangt man zu Knoten  $y$ .

## Pfad formell

Ein Pfad  $P := (v_0, v_1, \dots, v_n)$  der Länge  $n$  ist eine Permutation auf  $V$ , wobei gilt:  
 $\forall i \in \mathbb{Z}_n : (v_i, v_{i+1}) \in E$ .

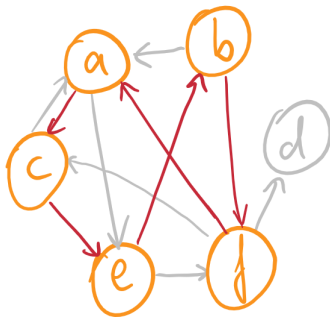


Der Pfad  $(b, f, c, e)$  ist ein möglicher Pfad von  $b$  nach  $e$  der Länge 3.

Gibt es noch andere solcher Pfade?

## Zyklus

Ein Zyklus ist ein Pfad  $(v_1, \dots, v_n)$  mit  $v_1 = v_n$ .



Der Pfad  $(b, f, a, c, e)$  ist ein möglicher Zyklus.  
Gibt es noch andere Zyklen?

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete  
Graphen

Begriffe

## Zusammenhängender Graph

Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn gilt:  $\forall u, v \in V \exists$  Pfad von  $u$  nach  $v$ .

## Stark zusammenhängender Graph

Ein gerichteter Graph heißt stark zusammenhängend, wenn gilt:  
 $\forall u, v \in V \exists$  Pfad von  $u$  nach  $v$ .

## Schwach zusammenhängender Graph

Ein gerichteter Graph heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichteter Graph zusammenhängend ist.

## Eingangsgrad

Der Eingangsgrad eines Knoten  $u \in V$  ist definiert als:

$d_-(u) := |\{(v, u) \in E : v \in V\}|$ , also die Anzahl der Kanten, die in den Knoten  $u$  zeigen.

## Ausgangsgrad

Der Ausgangsgrad eines Knoten  $u \in V$  ist definiert als:

$d_+(u) := |\{(u, v) \in E : v \in V\}|$ , also die Anzahl der Kanten, die vom Knoten  $u$  aus weg zeigen.

## Grad

Der Grad eines Knoten  $u$  ist definiert als:  $d(u) := d_+(u) + d_-(u)$ , also die Anzahl der Kanten, über die  $u$  verbunden ist.

- Kennt ihr schon: Huffman-Baum

## Gerichteter Baum

Ein gerichteter Baum ist ein **schwach zusammenhängender kreisfreier gerichteter Graph**.

## Ungerichteter Baum

Ein ungerichteter Baum ist ein **zusammenhängender kreisfreier ungerichteter Graph**.

- Bäume haben immer einen Wurzelknoten, von dem alle anderen Knoten ausgehen.
- Ungerichtete Bäume **können** mehrere Wurzeln haben.
- Knoten mit Grad 1 heißen Blätter.

Graphen

Praxisbeispiele

Ungerichtete  
Graphen

Begriffe



## Graphen

### Praxisbeispiele

### Ungerichtete Graphen

### Begriffe

- Wieviele Kanten kann ein Graph mit  $n$  Knoten maximal haben?  $n^2$
- Wieviele Kanten kann ein schlingenfreier Graph mit  $n$  Knoten maximal haben?  $n^2 - n = n(n - 1)$
- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter Graph mit  $n$  Knoten maximal haben?  $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Wieviele Kanten kann ein ungerichteter schlingenfreier Graph mit  $n$  Knoten maximal haben?  $\frac{n(n-1)}{2}$

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul