

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 24.11.2016



Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Übersetzungen

Homomorphismen

Huffman Codierung

Speicher

- 1 Übersetzungen
  - Homomorphismen
  - Huffman Codierung

- 2 Speicher

## Definition der Semantikabbildung

Sei  $Sem$  die Menge der Bedeutungen. Ferner seien  $A$  und  $B$  Alphabete und  $L_A \subseteq A^*$  und  $L_B \subseteq B^*$ .

Weiter sei  $sem_A : L_A \rightarrow Sem$  und  $sem_B : L_B \rightarrow Sem$

Dann heißt  $f : L_A \rightarrow L_B$  Übersetzung, wenn gilt: für jedes  $w \in L_A$  gilt  $sem_A(w) = sem_B(f(w))$ .

- Bedeutungserhaltende Abbildungen von Wörtern auf Wörter

## Beispiel

Betrachte  $Trans_{2,16} : \mathbb{Z}_{16}^* \rightarrow \mathbb{Z}_2^*$  mit  $Trans_{2,16}(w) = Repr_2(Num_{16}(w))$

- $Trans_{2,16}(A3) = Repr_2(Num_{16}(A3)) = Repr_2(163) = 10100011$

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Übersetzungen

Homomorphismen

Huffman Codierung

Speicher

- Lesbarkeit (vergleiche  $DF_{16}$  mit  $11011111_2$ )
- Verschlüsselung
- Kompression (Informationen platzsparend aufschreiben)
- Kontextabhängige Semantiken (Deutsch  $\rightarrow$  Englisch)
- Fehlererkennung

## Übersetzungen

Homomorphismen

Huffman Codierung

Speicher

## Definitionen

- Codewort  $f(w)$  einer Codierung  $f : L_A \rightarrow L_B$
- Code:  $\{f(w) | w \in L_A\} = f(L_A)$
- Codierung: **Injektive** Übersetzung
  - Ich komme immer eindeutig von einem Codewort  $f(w)$  zu  $w$  zurück

## Bemerkung

- Was ist, wenn  $L_A$  unendlich ist (man kann nicht alle Möglichkeiten aufzählen)
- Auswege: Homomorphismen, Block-Codierungen

## Definition von Homomorphismen

Seien  $A, B$  Alphabete. Dann ist  $h : A^* \rightarrow B^*$  ein Homomorphismus, falls für alle  $w_1, w_2 \in A^*$  gilt:

$$h(w_1 w_2) = h(w_1)h(w_2)$$

- Ein Homomorphismus ist Abbildung, die mit Konkatination verträglich ist
- Homomorphismus ist  $\varepsilon$ -frei, wenn für jedes  $x \in A : h(x) \neq \varepsilon$
- Homomorphismen lassen das leere Wort unverändert, also  $h(\varepsilon) = \varepsilon$

Sei  $h$  ein Homomorphismus.

## Übung zu Homomorphismen

1.  $h(a) = 001$  und  $h(b) = 1101$ . Was ist dann  $h(bba)$ ?

→  $h(bba) = h(b)h(b)h(a) = 1101 \cdot 1101 \cdot 001 = 11011101001$

2. Sei  $h(a) = 01$ ,  $h(b) = 11$  und  $h(c) = \varepsilon$ . Nun sei  $h(w) = 011101$ .  
Was war  $w$ ?

→  $aba$  oder  $cabccac$ , ... Allgemein:

$$w \in \{c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{c\}^* \cdot \{b\} \cdot \{c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{c\}^*$$

$\varepsilon$ -Freiheit hat also die Eindeutigkeit zerstört!

3. Kann  $h$  aus 2 eine Codierung sein?

→ Nein, da nicht injektiv!

4. Warum will man  $\varepsilon$ -freie Homomorphismen?

→ Information geht sonst verloren!

5. Was heißt hier "Information geht verloren"?

→ Es gibt  $w_1 \neq w_2$  mit  $h(w_1) = h(w_2)$

- Information kann auch anders "verloren"gehen

→ z.B.  $h(a) = 0$ ,  $h(b) = 1$ ,  $h(c) = 10$  – Wie das?

## Präfixfreiheit

Gegeben ist ein Homomorphismus  $h : A^* \rightarrow B^*$ .

Wenn für keine zwei verschiedenen  $x_1, x_2 \in A$  gilt, dass  $h(x_1)$  Präfix von  $h(x_2)$  ist, dann ist  $h$  präfixfrei.

## Satz

Präfixfreie Codes sind injektiv.

## Beispiele

- $h(a) = 01$  und  $h(b) = 1101$  ist präfixfrei
- $g(a) = 01$  und  $g(b) = 011$  ist nicht präfixfrei



- Komprimiert eine Zeichenkette
- Kodiert häufiger vorkommende Zeichen zu kürzeren Codewörter als Zeichen die seltener vorkommen.
- Vorgehensweise:
  1. Zähle Häufigkeiten aller Zeichen der Zeichenkette
  2. Schreibe alle vorkommenden Zeichen und ihre Häufigkeiten nebeneinander
  3. Wiederhole, bis der Baum fertig ist:
    - Verbinde die zwei Zeichen mit niedrigsten Häufigkeiten zu neuem Knoten über diesen
    - Dieser hat als Zahl die aufsummierte Häufigkeiten
  4. Danach: Alle linken Kanten werden mit 0 kodiert, alle rechten Kanten mit 1

Das Ergebnis ist eine Zeichenkette aus  $\{0, 1\}$ , die kürzer ist als die ursprüngliche Zeichenkette in binär.

# Huffman-Codierung

## Gegeben

■  $w \in A^*$

$w = \text{afebfecaffdeddccefbef}$

■ Anzahl der Vorkommen aller Zeichen in  $w$  ( $N_x(w)$ )

## Häufigkeiten:

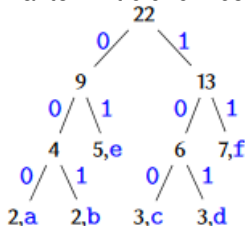
x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	2	3	3	5	7

Zwei Phasen zur Bestimmung eines

## Huffman-Codes

### 1. Konstruieren eines "Baumes"

- Blätter entsprechen den Zeichen
- Kanten mit 0 und 1 beschriftet



## Häufigkeiten:

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	2	3	3	5	7

## Übung

Sei  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

- Codiere das Wort badcf ehg mit Hilfe der Huffman-Codierung

→ Mögliche Lösung: 001 100 010 011 101 000 111 110

- Wie lauten die Codewörter, wenn für das Wort  $w$  gilt:  
 $N_a(w) = 1, N_b(w) = 2, N_c(w) = 2, N_d(w) = 8, N_e(w) = 16, N_f(w) = 32, N_g(w) = 64, N_h(w) = 128$

Mögliche Lösung:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$h(x)$	0000000	0000001	000001	00001	0001	001	01	1

# Grundbegriffe der Informatik

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

## Übersetzungen

### Homomorphismen

### Huffman Codierung

## Speicher

- Wie lang wäre das zweite Wort ( $abbccccc\ d^8 \dots g^{64} h^{128}$ ) mit dem ersten Code codiert?

→ 741 Symbole. Also dreimal so lang wie das Original.

- Wie lang wäre das zweite Wort mit dem zweiten Code codiert?

→ 501 Symbole. Also nur zweimal so lang wie das Original.

- Was fällt euch auf?

## Übersetzungen

### Homomorphismen

### Huffman Codierung

## Speicher

Sei  $h : A^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  eine Huffman-Codierung

- $h$  ist ein  $\varepsilon$ -freier Homomorphismus **Wahr!**
- Häufigere Symbole werden mit langen Worten codiert, seltene mit kürzeren **Falsch!**
- Die Kompression ist am stärksten, wenn die Häufigkeiten aller Zeichen ungefähr gleich sind. **Falsch!**
- $h$  ist präfixfrei **Wahr!**
- Es kann noch kürzere Codierungen geben **Falsch!**

## Eigenschaften

Sei  $A$  ein Alphabet und  $w \in A$ . Dann gilt für die Huffman-Codierung  $h$ :

- $h : A^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$
- $h$  ist  $\varepsilon$ -freier Homomorphismus
- $h$  ist präfixfreier Homomorphismus
- Häufigere Symbole werden mit kurzen Worten codiert, seltene mit längeren
- Produziert kürzestmögliche Codierungen

# Block-Codierung mit Huffman

- Wir betrachten nicht mehr einzelne Symbole, sondern Blöcke von fester Länge  $b > 1$
- Blätter des Huffman-Baums sind jetzt *Wörter der Länge  $b$*

Beispiel an der Tafel: Codierung von  
 $aab \cdot deg \cdot deg \cdot aab \cdot ole \cdot aab \cdot deg \cdot aab$ .

- Alphabet  $A = \{a, b, c, d\}$
- Text über  $A$ , der nur aus Teilwörtern der Länge 10 zusammengesetzt ist, in denen jeweils immer nur ein Symbol vorkommt
- Angenommen  $a^{10}, \dots, d^{10}$  kommen alle gleich häufig vor. Wie lang ist dann die Huffman-Codierung?

→ Ein Fünftel, weil jeder Zehnerblock durch zwei Bits codiert wird

Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Übersetzungen

Homomorphismen

Huffman Codierung

Speicher

- Ein **Bit** ist Zeichen aus  $A = \{0, 1\}$
- Ein **Byte** ist ein Wort aus acht Bits
- Abkürzungen
  - Für Bit: `bit`
  - Für Byte: `B`



Übersetzungen

Homomorphismen

Huffman Codierung

Speicher

## Dezimal

$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-15}$	$10^{-18}$
$1000^{-1}$	$1000^{-2}$	$1000^{-3}$	$1000^{-4}$	$1000^{-5}$	$1000^{-6}$
milli	mikro	nano	pico	femto	atto
m	$\mu$	n	p	f	a
$10^3$	$10^6$	$10^9$	$10^{12}$	$10^{15}$	$10^{18}$
$1000^1$	$1000^2$	$1000^3$	$1000^4$	$1000^5$	$1000^6$
kilo	mega	giga	tera	peta	exa
k	M	G	T	P	E

## Binär

$2^{10}$	$2^{20}$	$2^{30}$	$2^{40}$	$2^{50}$	$2^{60}$
$1024^1$	$1024^2$	$1024^3$	$1024^4$	$1024^5$	$1024^6$
kibi	mebi	gibi	tebi	pebi	exbi
Ki	Mi	Gi	Ti	Pi	Ei

# Gesamtzustand eines Speichers

Zu jedem Zeitpunkt ist

- für jede **Adresse** festgelegt, welcher **Wert** dort ist
- beides meist Bitfolgen

Vorstellung: Tabelle mit zwei Spalten

Adresse	Wert
Adresse 1	Wert 1
Adresse 2	Wert 2
Adresse 3	Wert 3
...	...
Adresse n	Wert n

Übersetzungen

Homomorphismen

Huffman Codierung

Speicher

## Definition des Speicherzustandes

Sei  $Adr$  die Menge aller Adressen und  $Val$  die Menge aller Werte.  
Dann ist

$$m : Adr \rightarrow Val$$

der aktuelle Zustand des Speichers. Dabei ist  $m(a)$  der aktuelle Wert an der Adresse  $a$ .

# Lesen und Speichern

## *Mem*

Menge aller möglichen Speicherzustände, also Menge aller Abbildungen von *Adr* nach *Val*

$$Mem := Val^{Adr}$$

Anmerkung: Für zwei Mengen  $A, B$  gilt:  $A^B := \{f : B \rightarrow A\}$ .

## *memread*

$memread : Mem \times Adr \rightarrow Val$  mit  $(m, a) \mapsto m(a)$

## *memwrite*

$memwrite : Mem \times Adr \times Val \rightarrow Mem$  mit  $(m, a, v) \mapsto m'$

Für  $m'$  wird folgendes gefordert:

$$m(a') := \begin{cases} v & \text{falls } a' = a \\ m(a') & \text{falls } a' \neq a \end{cases}$$

# Eigenschaften von *memread* und *memwrite*

Übersetzungen

Homomorphismen

Huffman Codierung

Speicher

## Eigenschaften (“Invarianten”)

- $\text{memread}(\text{memwrite}(m, a, v), a) = v$  (Also: An  $a$  einen Wert  $v$  zu schreiben und danach bei  $a$  zu lesen gibt den Wert  $v$  zurück  $\Rightarrow$  Konsistente Datenhaltung)
- $\text{memread}(\text{memwrite}(m, a', v'), a) = \text{memread}(m, a)$  (Also: Auslesen einer Speicherstelle ist unabhängig davon, was vorher an eine andere Adresse geschrieben wurde  $\Rightarrow$  Unabhängige Datenhaltung)

## Aufgaben

Aktueller Speicherzustand:

Adresse	Wert
00000	01110
00001	00100
00010	00111
00011	00000
...	...

Was ist?

■ `memread(memwrite(m, memread(m, 00011), 01010), 00000)`

→ 01010

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul