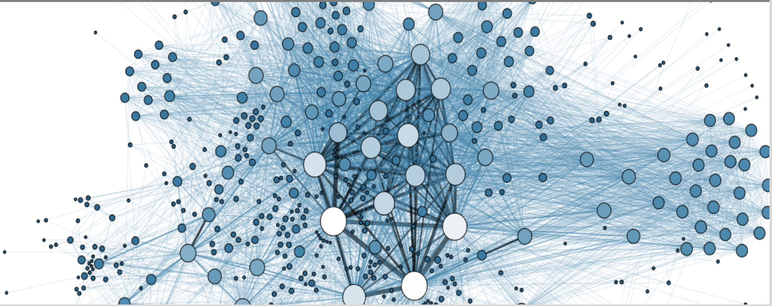
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 11.11.2016



Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Gliederung

Karlsruher Institut für Technologie

1 Aussagenlogik

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aussagenlogik

- Das wars erst mal zu formalen Sprachen.
- Heute ist Freitag.
- Die Menge aller Männer dieser Welt ist disjunkt zur Menge aller Frauen dieser Welt.

Das sind alles Aussagen. Aussagen sind entweder *wahr* oder *falsch*.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Aussagenlogik

Wir kapseln Aussagen und verwendet Variablen dafür.
Zum Beispiel:

- $A :=$ "Die Straße ist nass."
- $B :=$ "Es regnet."

Aussagen lassen sich verknüpfen:

- Logisches Und: $A \wedge B = A$ und $B =$ Die Straße ist nass und es regnet.
- Logisches Oder: $A \vee B = A$ oder $B =$ Die Straße ist nass oder es regnet. Es kann auch beides wahr sein.
- Negierung: $\neg A =$ nicht $A =$ Die Straße ist nicht nass.
- Implikation: $A \rightarrow B =$ Aus A folgt $B =$ Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.
- Äquivalenz: $A \leftrightarrow B = A$ und B sind äquivalent $=$ Die Straße ist *genau dann* nass, *wenn* es regnet.
  - $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, also die Straße ist nass wenn es regnet *und* es regnet wenn die Straße nass ist.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übung zu Aussagenlogik

- $A :=$ "Die Straße ist nass."
- $B :=$ "Es regnet."
- $C :=$ "π ist gleich 3."

- Was ist $B \to C$? "Wenn es regnet, ist π gleich 3."

x_1	x_2	$\neg x_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \longrightarrow x_2$
f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
w	w	f	w	w	w

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Syntax der Aussagenlogik

Menge der Aussagevariablen:

$Var_{AL} \subseteq \{P_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ oder $\{P, Q, R, S, \ldots\}$

Alphabet der Aussagenlogik:

$A_{AL} = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup Var_{AL}$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Boolesche Funktionen

Boolesche Funktionen

Eine boolsche Funktion ist eine Abbildung der Form $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ mit $\mathbb{B} = \{w, f\}$.

Typische Boolsche Funktionen: $b_\neg(x) = \neg x$, $b_\vee(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \ldots$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Interpretationen

Interpretation

Eine Interpretation ist eine Abbildung $I : V \rightarrow \mathbb{B}$, die einer Variablenmenge eine "Interpretation", also wahr oder falsch zuordnet.

Weiter legt man $val_I(F)$ als Auswertung einer aussagenlogischer Formel F fest.

$$
\begin{aligned}
val_I(X) &= I(X) \\
val_I(\neg G) &= b_\neg(val_I(G)) \\
val_I(G \wedge H) &= b_\wedge(val_I(G), val_I(H)) \\
val_I(G \vee H) &= b_\vee(val_I(G) val_I(H)) \\
val_I(G \rightarrow H) &= b_\rightarrow(val_I(G), val_I(H))
\end{aligned}
$$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übung zu Interpretationen

- Wie viele Interpretationen gibt es bei $k = 1, 2, 3$ Variablen?
- Wie viele Interpretationen gibt es bei $k+1$ Variablen im Vergleich zu k Variablen?

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übung zur Aussagenlogik

Karlsruher Institut für Technologie

Sei $A := w, B := w, C := f$.

- Ist $(A \wedge B) \vee \neg C$ wahr oder falsch?
  $(A \wedge B) \vee \neg C = (w \wedge w) \vee \neg f = w \vee \neg f = w \vee w = w$, die Aussage ist also wahr.
- Ist $\neg(A \vee A)$ wahr oder falsch? Falsch! Wann ist $\neg(A \vee A)$ im allgemeinen wahr? Genau dann, wenn $\neg A$ wahr ist.

Aussagen Äquivalenz

Erinnerung: $A \leftrightarrow B$ heißt: $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$.
Wenn zwei Aussagen äquivalent sind, sind ihre Wahrheitswerte immer gleich, wenn die Wahrheitswerte, von denen sie abhängen, gleich sind.
Mann sagt und schreibt dann: A ist *genau dann* wahr, *wenn* B wahr ist.

- $\neg(A \vee A)$ ist genau dann wahr, wenn $\neg A$ wahr ist, also gilt:
  $\neg(A \vee A) \leftrightarrow \neg A$.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Mehr zu Äquivalenz

Alternative Definition zu Äquivalenz

Zwei Formeln G und H heißen äquivalent, wenn für jede Interpretation gilt $val_I(G) = val_I(H)$.

Vorher Äquivalenz von Formeln unter gegebener Interpretation, diesmal Äquivalenz von Formeln unter beliebiger Interpretation.

Bemerkung

- Man schreibt $G \equiv H$
- $\mathbb{B}^V \to \mathbb{B} : I \mapsto val_I(G)$

Beispiele

$(\neg(\neg P))$ ist äquivalent zu P

$(\neg(P \wedge Q))$ ist äquivalent zu $((\neg P) \vee (\neg Q))$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Beispiele zu Äquivalenz

- Ein Wort w hat die Länge $n \leftrightarrow |w| = n$.
- Die Vereinigung zweier Mengen A und B hat die Kardinalität $|A| + |B|$ $\leftrightarrow A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A$ und B sind disjunkt.
- p ist eine rationale Zahl $\leftrightarrow p$ lässt sich darstellen als $p = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \leftrightarrow p \in \mathbb{Q}$.

Wahrheitstabellen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

- $(((P \rightarrow Q) \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q))$

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\vee Q$	$\rightarrow$	$(P \wedge \neg Q)$
w	w	w	w	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	f	f	w	f

Übungen zu Aussagenlogik

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übungen zu Aussagenlogik

- Schreibe Wahrheitstabellen zu den Formeln um den Wahrheitsgehalt festzustellen.
- $\neg(P \land Q) \land \neg(Q \land P)$
- $(P \land Q \land R) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$
- $(A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$
- Welche dieser Aussagen sind wahr?
- $\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$
- $P \land P = P \lor P$
- $(P \lor Q) \land R = (P \land R) \lor (Q \land R)$

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Wahrheitstabellen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in A und B unter Verwendung von $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, der die Aussage “Entweder A oder B” repräsentiert

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Wahrheitstabellen

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in A und B unter Verwendung von $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, der die Aussage "Entweder A oder B" repräsentiert

Lösung

A	B	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
w	w	f	f	f
w	f	w	f	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Weitere Begriffe

Tautologie

Die Formel G ist eine Tautologie (oder allgemeingültig), wenn G für alle Interpretationen wahr ist.

Erfüllbarkeit

Eine Formel G ist erfüllbar, wenn sie für mindestens eine Interpretation wahr ist.

Lemma

Wenn $G \equiv H$ ist, dann ist $G \leftrightarrow H$ eine Tautologie.

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übung zu Tautologien

Sind das Tautologien?

- $(G \rightarrow (H \rightarrow K)) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow K))$ Ja
- $(\neg P \rightarrow Q) \wedge R \vee P$ Nein
- $G \rightarrow (H \rightarrow G)$ Ja
- $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$ Ja

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Übung zu Erfüllbarkeit

Sind die folgenden Ausdrücke erfüllbar?

- $\neg(A \vee \neg A)$ nein
- $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$ Ja

Informationen

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - `http://gbi.lukasbach.com`
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - `http://gbi.ira.uka.de`
  - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul