

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 8.12.2016



Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

1 Kontextfreie Grammatiken

2 Relationen vol. 2

## Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte  $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Wie kann man diese Sprache darstellen?

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
  - $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
  - $S \in N$  (Startsymbol)
  - $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$
- 
- Was ist  $N \times (N \cup T)^*$ ? Bei  $N := \{a, b, c\}$ ,  $T = \{S, A, B\}$ :  
 $N \times (N \cup T)^* = \{(a, abSAcB), (a, SSS), (b, BSabc), \dots\}$ .
  - Andere Schreibweise:  $P : N \rightarrow (N \cup T)^*$ .
  - Für  $(X, w) \in P$  schreibt man  $X \rightarrow w$
  - Statt  $\{X \rightarrow w_1, X \rightarrow w_2\}$  schreibt man auch  $\{X \rightarrow w_1 | w_2\}$

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$ . Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa! \Rightarrow$  heißt **eine** Ableitung!

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$  genau dann, wenn  $u = v$  gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$  genau dann, wenn ein  $w \in (N \cup T)^*$  existiert, für das  $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$  gilt. Für  $u \Rightarrow^i v$  sagt man "**v ist aus u in i Schritten ableitbar**".

### Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$

und  $aaaSaaa \Rightarrow^2 aaaabaaaa$

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert, mit  $u \Rightarrow^i v$ . Man sagt dann "**v ist aus u ableitbar**".

### Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und  $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

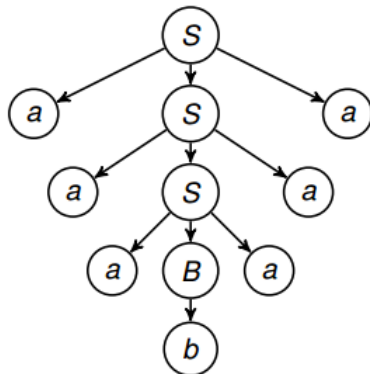
aber  $aSa \not\Rightarrow abba$ .

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für  $X \Rightarrow w$  sind die Zeichen von  $w$  die Kinder von  $X$
- Terminale sind die Blätter

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $S \Rightarrow^* aaabaaa$





## Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik  $(N, T, S, P)$  mit:

- Nichtterminalsymbolen  $N := \{A, B, S\}$ .
- Terminalsymbolen  $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol  $S$
- Produktionen  $P := \{S \rightarrow aaS|bbS|SAS|\varepsilon, A \rightarrow cB, B \rightarrow a, b, c, \varepsilon\}$ .

Aufgabe: Welche der folgenden Wörter sind ableitbar? Konstruiere den Ableitungsbaum und zeige, wie sie abgeleitet werden.

- $ccbbcbbbbcbbaaaa?$
- $aabbaabbaabb?$
- $c?$

## Erzeugte Sprache

Sei  $G = (N, T, S, P)$  eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir  $L(G) := \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$  die von  $G$  erzeugte Sprache.

## Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache  $L$  heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik  $G$  existiert, mit  $L(G) = L$ .

$$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$$

$$\text{Dann ist } L(G) = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$$

■  $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon | aX | bX\})$

■ Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

→  $\{aa, ab, ba, bb\}$

■ Was ist  $L(G)$ ?

→  $L(G) = \{a, b\}^*$

■ Gibt es auch eine Grammatik  $G$  mit  $L(G) = \{\}$ ?

→  $G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow X\})$  oder  $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$

■ Wahr oder falsch? Wenn  $w_1 \Rightarrow w_2$  gilt, dann gilt auch  $w_1 \rightarrow w_2$

■ Was ist der Unterschied von  $\Rightarrow$  und  $\Rightarrow^*$  ?

## Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei  $L_1 := \{wbaaw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*\}$ . Konstruiere eine Grammatik  $G_1$  mit  $L(G_1) = L_1$ .

→  $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY \mid bY \mid \varepsilon\})$ .

- Welche Sprache erzeugt  $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$  mit  $P_2 = \{S \rightarrow X \mid Y, X \rightarrow aaXb \mid aab, Y \rightarrow aYbb \mid abb\}$ ?

→  $L(G_2) = \{a^{2k}b^k \mid k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{a^k b^{2k} \mid k \in \mathbb{N}_+\}$

## Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

### Kontextfreie Grammatiken

#### Relationen vol. 2

$$G = (\{X\}, \{(, )\}, X, \{X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon\})$$

- Welche Wörter sind ableitbar?

→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

→  $N_{(}(w) = N_{)}(w)$  Ist diese Eigenschaft hinreichend?

→ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe  $v$  von  $w$  gilt  $N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

→  $G = (\{X\}, \{(, )\}, X, \{X \rightarrow (X)X | \varepsilon\})$

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Beispiel aus der Vorlesung:

$$L_{vv} = \{vcv \mid v \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$$

## Erinnerung Relationen

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine Teilmenge  $R \subseteq A \times B$  heißt Relation.

## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

### Bemerkung

$S \circ R$  ist eine Relation auf  $A$  und  $C$ , bildet also von  $A$  nach  $C$  ab.

## Assoziativität des Produktes

Es seien  $A, B, C$  und  $D$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  sowie

$T \subseteq C \times D$  Relationen. Dann gilt

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$



## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.

## Identität

Sei  $M$  eine Menge.  $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

## Potenz von Relationen

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Dann definieren wir  $R^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  :  $R^{i+1} := R^i \circ R$

Also  $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$ .

## Satz über das neutrale Element

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation. Dann gilt:  
 $R \circ I_B = R = I_A \circ R$ .

## Reflexivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Wenn für alle  $x \in M : (x, x) \in R$ , nennt man  $R$  reflexiv.

Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

## Lemma

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  $R$  ist genau dann reflexiv, wenn  $I_M \subseteq R$  gilt.

## Transitivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  
 $R$  heißt transitiv, wenn:

$$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

## Lemma

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  $R$  ist genau dann transitiv, wenn  $R \circ R \subseteq R$ .

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv? Nein!
- Wie müsste  $R$  aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist  $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$  reflexiv? Nein!
- Ist  $S$  transitiv? Ja!
- Wie müsste  $S$  aussehen, um reflexiv zu sein?

# Reflexiv-transitive Hülle

## Definition

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.

Dann nennt man  $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$  die reflexiv-transitive Hülle von  $R$ .

## Satz

- $R^*$  ist reflexiv
- $R^*$  ist transitiv
- $R^*$  ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und  $R \subseteq R^*$  erfüllt.

## Bemerkung

- Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene, reflexive und transitive Relation. Dann gilt  $R^* = R$ .

## Aufgaben

- Sei  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  Was ist  $R^*$ ?

→  $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Was ist  $(R^*)^*$  ?

→  $(R^*)^* = R^*$

- $M := \{1, 2, 3, 4\}$  und  $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$ . Ist  $R$  reflexiv? Ist  $R$  transitiv?    Nein und nein!

Die Relationen  $R$  und  $S$  über  $\mathbb{N}_0$  seien gegeben durch:

- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0$  :  $aRb \Leftrightarrow a|b$  ( $a$  ist Teiler von  $b$ )
- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0$  :  $aSb \Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

→  $R$  ist transitiv, aber nicht reflexiv.

→  $S$  ist reflexiv, aber nicht transitiv. [TODO]

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul