

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 33

Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 11.11.2016



Lukas Bach, lu-
kas.bach@student.kit.edu

Aussagenlogik

1 Aussagenlogik

Aussagenlogik

- Das wars erst mal zu formalen Sprachen.
- Heute ist Freitag.
- Die Menge aller Männer dieser Welt ist disjunkt zur Menge aller Frauen dieser Welt.

Das sind alles Aussagen. Aussagen sind entweder *wahr* oder *falsch*.

Aussagenlogik

Wir kapseln Aussagen und verwendet Variablen dafür.

Zum Beispiel:

- $A :=$ "Die Straße ist nass."
- $B :=$ "Es regnet."

Aussagen lassen sich verknüpfen:

- **Logisches Und:** $A \wedge B = A$ und $B =$ Die Straße ist nass und es regnet.
- **Logisches Oder:** $A \vee B = A$ oder $B =$ Die Straße ist nass oder es regnet. Es kann auch beides wahr sein.
- **Negierung:** $\neg A =$ nicht $A =$ Die Straße ist nicht nass.
- **Implikation:** $A \rightarrow B =$ Aus A folgt $B =$ Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.
- **Äquivalenz:** $A \leftrightarrow B = A$ und B sind äquivalent = Die Straße ist *genau dann* nass, *wenn* es regnet.
 - $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, also die Straße ist nass wenn es regnet *und* es regnet wenn die Straße nass ist.

Aussagenlogik

- $A :=$ "Die Straße ist nass."
- $B :=$ "Es regnet."
- $C :=$ " π ist gleich 3."
- Was ist $B \rightarrow C$? "Wenn es regnet, ist π gleich 3."

x_1	x_2	$\neg x_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$
f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
w	w	f	w	w	w

Aussagenlogik

Menge der Aussagevariablen:

$$Var_{AL} \subseteq \{P_i : i \in \mathbb{N}_0\} \text{ oder } \{P, Q, R, S, \dots\}$$

Alphabet der Aussagenlogik:

$$A_{AL} = \{ (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} \cup Var_{AL}$$

Boolesche Funktionen

Eine boolesche Funktion ist eine Abbildung der Form $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ mit $\mathbb{B} = \{w, f\}$.

Typische Boolesche Funktionen: $b_{\neg}(x) = \neg x$, $b_{\vee}(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \dots$

Interpretation

Eine Interpretation ist eine Abbildung $I : V \rightarrow \mathbb{B}$, die einer Variablenmenge eine “Interpretation”, also wahr oder falsch zuordnet.

Weiter legt man $val_I(F)$ als Auswertung einer aussagenlogischer Formel F fest.

$$val_I(X) = I(X)$$

$$val_I(\neg G) = b_{\neg}(val_I(G))$$

$$val_I(G \wedge H) = b_{\wedge}(val_I(G), val_I(H))$$

$$val_I(G \vee H) = b_{\vee}(val_I(G), val_I(H))$$

$$val_I(G \rightarrow H) = b_{\rightarrow}(val_I(G), val_I(H))$$

Aussagenlogik

- Wie viele Interpretationen gibt es bei $k = 1, 2, 3$ Variablen?
- Wie viele Interpretationen gibt es bei $k+1$ Variablen im Vergleich zu k Variablen?

Übung zur Aussagenlogik

Sei $A := w$, $B := w$, $C := f$.

- Ist $(A \wedge B) \vee \neg C$ wahr oder falsch?
 $(A \wedge B) \vee \neg C = (w \wedge w) \vee \neg f = w \vee \neg f = w \vee w = w$, die Aussage ist also wahr.
- Ist $\neg(A \vee A)$ wahr oder falsch? Falsch! Wann ist $\neg(A \vee A)$ im allgemeinen wahr? Genau dann, wenn $\neg A$ wahr ist.

Aussagen Äquivalenz

Erinnerung: $A \leftrightarrow B$ heißt: $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$.

Wenn zwei Aussagen äquivalent sind, sind ihre Wahrheitswerte immer gleich, wenn die Wahrheitswerte, von denen sie abhängen, gleich sind. Mann sagt und schreibt dann: A ist *genau dann* wahr, *wenn* B wahr ist.

- $\neg(A \vee A)$ ist genau dann wahr, wenn $\neg A$ wahr ist, also gilt:
 $\neg(A \vee A) \leftrightarrow \neg A$.

Alternative Definition zu Äquivalenz

Zwei Formeln G und H heißen äquivalent, wenn für jede Interpretation gilt $val_I(G) = val_I(H)$.

Vorher Äquivalenz von Formeln unter gegebener Interpretation, diesmal Äquivalenz von Formeln unter beliebiger Interpretation.

Bemerkung

- Man schreibt $G \equiv H$
- $\mathbb{B}^V \rightarrow \mathbb{B} : I \mapsto val_I(G)$

Beispiele

$(\neg(\neg P))$ ist äquivalent zu P

$(\neg(P \wedge Q))$ ist äquivalent zu $((\neg P) \vee (\neg Q))$

- Ein Wort w hat die Länge $n \leftrightarrow |w| = n$.
- Die Vereinigung zweier Mengen A und B hat die Kardinalität $|A| + |B| \leftrightarrow A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A$ und B sind disjunkt.
- p ist eine rationale Zahl $\leftrightarrow p$ lässt sich darstellen als $p = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \leftrightarrow p \in \mathbb{Q}$.

Aussagenlogik

■ $((P \rightarrow Q) \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\vee Q$	\rightarrow	$(P \wedge \neg Q)$
w	w	w	w	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	f	f	w	f

Aussagenlogik

Übungen zu Aussagenlogik

- Schreibe Wahrheitstabellen zu den Formeln um den Wahrheitsgehalt festzustellen.
- $\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(Q \wedge P)$
- $(P \wedge Q \wedge R) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
- $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- Welche dieser Aussagen sind wahr?
- $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
- $P \wedge P = P \vee P$
- $(P \vee Q) \wedge R = (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Aussagenlogik

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in A und B unter Verwendung von \wedge , \vee und \neg , der die Aussage "Entweder A oder B " repräsentiert

Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in A und B unter Verwendung von \wedge , \vee und \neg , der die Aussage “Entweder A oder B ” repräsentiert

Lösung

A	B	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
w	w	f	f	f
w	f	w	f	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Aussagenlogik

Tautologie

Die Formel G ist eine Tautologie (oder allgemeingültig), wenn G für alle Interpretationen wahr ist.

Erfüllbarkeit

Eine Formel G ist erfüllbar, wenn sie für mindestens eine Interpretation wahr ist.

Lemma

Wenn $G \equiv H$ ist, dann ist $G \leftrightarrow H$ eine Tautologie.

Sind das Tautologien?

- $(G \rightarrow (H \rightarrow K)) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow K))$ Ja
- $(\neg P \rightarrow Q) \wedge R \vee P$ Nein
- $G \rightarrow (H \rightarrow G)$ Ja
- $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$ Ja

Aussagenlogik

Sind die folgenden Ausdrücke erfüllbar?

- $\neg(A \vee \neg A)$ nein
- $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$ Ja

Aussagenlogik

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
 - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
 - Donnerstags, 14:00 - 15:30
 - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
 - <http://gbi.ira.uka.de>
 - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
 - 06.03.2017, 11:00
 - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
 - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul