

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 11.11.2016



Lukas Bach, lu-  
kas.bach@student.kit.edu

Aussagenlogik

## 1 Aussagenlogik

## Aussagenlogik

- Das wars erst mal zu formalen Sprachen.
- Heute ist Freitag.
- Die Menge aller Männer dieser Welt ist disjunkt zur Menge aller Frauen dieser Welt.

Das sind alles Aussagen. Aussagen sind entweder *wahr* oder *falsch*.

# Aussagenlogik

Wir kapseln Aussagen und verwendet Variablen dafür.

Zum Beispiel:

- $A :=$  "Die Straße ist nass."
- $B :=$  "Es regnet."

Aussagen lassen sich verknüpfen:

- **Logisches Und:**  $A \wedge B = A$  und  $B =$  Die Straße ist nass und es regnet.
- **Logisches Oder:**  $A \vee B = A$  oder  $B =$  Die Straße ist nass oder es regnet. Es kann auch beides wahr sein.
- **Negierung:**  $\neg A =$  nicht  $A =$  Die Straße ist nicht nass.
- **Implikation:**  $A \rightarrow B =$  Aus  $A$  folgt  $B =$  Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.
- **Äquivalenz:**  $A \leftrightarrow B = A$  und  $B$  sind äquivalent = Die Straße ist *genau dann* nass, *wenn* es regnet.
  - $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ , also die Straße ist nass wenn es regnet *und* es regnet wenn die Straße nass ist.

## Aussagenlogik

- $A :=$  "Die Straße ist nass."
- $B :=$  "Es regnet."
- $C :=$  " $\pi$  ist gleich 3."
- Was ist  $B \rightarrow C$ ? "Wenn es regnet, ist  $\pi$  gleich 3."

$x_1$	$x_2$	$\neg x_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$
f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
w	w	f	w	w	w

## Aussagenlogik

Menge der Aussagevariablen:

$$Var_{AL} \subseteq \{P_i : i \in \mathbb{N}_0\} \text{ oder } \{P, Q, R, S, \dots\}$$

Alphabet der Aussagenlogik:

$$A_{AL} = \{ (, ), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} \cup Var_{AL}$$

## Boolesche Funktionen

Eine boolesche Funktion ist eine Abbildung der Form  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  mit  $\mathbb{B} = \{w, f\}$ .

Typische Boolesche Funktionen:  $b_{\neg}(x) = \neg x$ ,  $b_{\vee}(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \dots$

## Interpretation

Eine Interpretation ist eine Abbildung  $I : V \rightarrow \mathbb{B}$ , die einer Variablenmenge eine “Interpretation”, also wahr oder falsch zuordnet.

Weiter legt man  $val_I(F)$  als Auswertung einer aussagenlogischer Formel  $F$  fest.

$$val_I(X) = I(X)$$

$$val_I(\neg G) = b_{\neg}(val_I(G))$$

$$val_I(G \wedge H) = b_{\wedge}(val_I(G), val_I(H))$$

$$val_I(G \vee H) = b_{\vee}(val_I(G), val_I(H))$$

$$val_I(G \rightarrow H) = b_{\rightarrow}(val_I(G), val_I(H))$$



## Aussagenlogik

- Wie viele Interpretationen gibt es bei  $k = 1, 2, 3$  Variablen?
- Wie viele Interpretationen gibt es bei  $k+1$  Variablen im Vergleich zu  $k$  Variablen?

## Übung zur Aussagenlogik

Sei  $A := w$ ,  $B := w$ ,  $C := f$ .

- Ist  $(A \wedge B) \vee \neg C$  wahr oder falsch?  
 $(A \wedge B) \vee \neg C = (w \wedge w) \vee \neg f = w \vee \neg f = w \vee w = w$ , die Aussage ist also wahr.
- Ist  $\neg(A \vee A)$  wahr oder falsch? Falsch! Wann ist  $\neg(A \vee A)$  im allgemeinen wahr? Genau dann, wenn  $\neg A$  wahr ist.

### Aussagen Äquivalenz

Erinnerung:  $A \leftrightarrow B$  heißt:  $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$ .

Wenn zwei Aussagen äquivalent sind, sind ihre Wahrheitswerte immer gleich, wenn die Wahrheitswerte, von denen sie abhängen, gleich sind. Mann sagt und schreibt dann:  $A$  ist *genau dann* wahr, *wenn*  $B$  wahr ist.

- $\neg(A \vee A)$  ist genau dann wahr, wenn  $\neg A$  wahr ist, also gilt:  
 $\neg(A \vee A) \leftrightarrow \neg A$ .

## Alternative Definition zu Äquivalenz

Zwei Formeln  $G$  und  $H$  heißen äquivalent, wenn für jede Interpretation gilt  $val_I(G) = val_I(H)$ .

Vorher Äquivalenz von Formeln unter gegebener Interpretation, diesmal Äquivalenz von Formeln unter beliebiger Interpretation.

### Bemerkung

- Man schreibt  $G \equiv H$
- $\mathbb{B}^V \rightarrow \mathbb{B} : I \mapsto val_I(G)$

### Beispiele

$(\neg(\neg P))$  ist äquivalent zu  $P$

$(\neg(P \wedge Q))$  ist äquivalent zu  $((\neg P) \vee (\neg Q))$

- Ein Wort  $w$  hat die Länge  $n \leftrightarrow |w| = n$ .
- Die Vereinigung zweier Mengen  $A$  und  $B$  hat die Kardinalität  $|A| + |B| \leftrightarrow A \cap B = \emptyset \leftrightarrow A$  und  $B$  sind disjunkt.
- $p$  ist eine rationale Zahl  $\leftrightarrow p$  lässt sich darstellen als  $p = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \leftrightarrow p \in \mathbb{Q}$ .

## Aussagenlogik

■  $((P \rightarrow Q) \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$

$P$	$Q$	$(P \wedge Q)$	$\vee Q$	$\rightarrow$	$(P \wedge \neg Q)$
w	w	w	w	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	f	f	w	f

## Aussagenlogik

### Übungen zu Aussagenlogik

- Schreibe Wahrheitstabellen zu den Formeln um den Wahrheitsgehalt festzustellen.
- $\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(Q \wedge P)$
- $(P \wedge Q \wedge R) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
- $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- Welche dieser Aussagen sind wahr?
- $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
- $P \wedge P = P \vee P$
- $(P \vee Q) \wedge R = (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

## Aussagenlogik

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

## Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in  $A$  und  $B$  unter Verwendung von  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$ , der die Aussage “Entweder  $A$  oder  $B$ ” repräsentiert

## Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in  $A$  und  $B$  unter Verwendung von  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$ , der die Aussage “Entweder  $A$  oder  $B$ ” repräsentiert

## Lösung

$A$	$B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
w	w	f	f	f
w	f	w	f	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f



## Aussagenlogik

### Tautologie

Die Formel  $G$  ist eine Tautologie (oder allgemeingültig), wenn  $G$  für alle Interpretationen wahr ist.

### Erfüllbarkeit

Eine Formel  $G$  ist erfüllbar, wenn sie für mindestens eine Interpretation wahr ist.

### Lemma

Wenn  $G \equiv H$  ist, dann ist  $G \leftrightarrow H$  eine Tautologie.

## Aussagenlogik

Sind das Tautologien?

- $(G \rightarrow (H \rightarrow K)) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow K))$  Ja
- $(\neg P \rightarrow Q) \wedge R \vee P$  Nein
- $G \rightarrow (H \rightarrow G)$  Ja
- $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$  Ja

## Aussagenlogik

Sind die folgenden Ausdrücke erfüllbar?

- $\neg(A \vee \neg A)$     nein
- $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$     Ja

## Aussagenlogik

### Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

### Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

### Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

### Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul