Lineare Algebra I

LERNZUSAMMENFASSUNG

Lukas Bach

zum Modul Lineare Algebra I
am KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

16. März 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen, Ringe, Körper

1.1 Assoziativität

$$\forall m_1, m_2, m_3 \in M : m_1 \star (m_2 \star m_3) = (m_1 \star m_2) \star m_3$$

1.2 Kommutativität

$$\forall m_1, m_2 \in M : m_1 \star m_2 = m_2 \star m_1$$

1.3 Distributivität

$$\begin{aligned} \forall m_1, m_2, m_3 \in M : m_1 \star (m_2 + m_3) &= m_1 \star m_2 + m_1 \star m_3 \\ (m_2 + m_3) \star m_1 &= m_2 \star m_1 + m_3 \star m_1 \end{aligned}$$

1.4 Gruppe

G ist eine Gruppe genau dann, wenn folgende Aussagen wahr sind:

1. Assoziativität
2. Neutralelement
   $\exists e_G \in G \;\; \forall g \in G : g \star e_G = g = e_G \star g$
3. Unter Inversenbildung abgeschlossen
   $\forall g \in G \;\; \exists g^{-1} : g \star g^{-1} = e_G = g^{-1} \star g$

1.5 Untergruppenkriterium

H ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn die folgenen Aussagen wahr sind:

1. $H \subseteq G$
2. $H \neq \emptyset$ (Insbesondere $e_G \in H$)
3. $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \star h_2^{-1} \in H$

1.6 Ring

R R ist mit den Verknüpfungen $+, \cdot$ ist genau dann ein Ring, wenn die folgenden Aussagen wahr sind:

1. $(R, +)$ ist eine <u>kommutative</u> Gruppe
2. $\cdot$ ist assoziativ
3. Neutralelement für $\cdot$
   $\exists 1_R \in R \;\; \forall r \in R : 1_R \cdot r = r = r \cdot 1_R$
4. Ring ist distributiv

1.7 Teilring

T ist genau dann ein Teilring vom Ring R, wenn folgende Aussagen wahr sind:

1. $T \subseteq R$
2. $1_R \in T$
3. T ist multiplikativ und additiv abgeschlossen
   $\forall t_1, t_2 \in T : t_1 + t_2 \in T, t_1 \cdot t_2 \in T$
4. $\forall t \in T : -t \in T$, was letztendlich zeigt dass T selbst ein Ring ist

1.8 Körper

Ein kommutativer Ring K ist genau dann ein Körper, wenn $1_K \neq 0_K$ gilt und jedes Element außer null invertierbar ist.

2 Vektorraum, Untervektorraum

Im folgenden sei K ein Körper.

2.1 Vektorraum

V ist genau dann ein K-Vektorraum, wenn die folgenden Aussagen wahr sind:

1. V ist kommutative Gruppe $(V, +)$
2. Skalarmultiplikation ist definiert:
   - Neutralelement existiert
     $\forall v \in V : 1_K \cdot v = v$
   - Assoziativität
     $\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
   - Distributivität

$$\begin{aligned} \forall a, b \in K \forall v \in V : a \cdot (u + v) &= a \cdot u + a \cdot v \\ (a + b) \cdot v &= a \cdot v + b \cdot v \end{aligned}$$

2.2 Untervektorraum

U ist genau dann ein Untervektorraum auf dem Körper K von dem K-Vektorraum V, wenn die folgenden Aussagen wahr sind:

1. $U \subseteq V$
2. U ist Untergruppe von V für $+$
3. Skalarmultiplikation ist definiert: $\forall a \in K, u \in U : a \cdot U$

2.3 Untervektorraumkriterium

U ist genau dann ein Untervektorraum auf dem Körper K von dem K-Vektorraum V, wenn die folgenden Aussagen wahr sind:

1. $U \subseteq V$
2. $U \neq \emptyset$
3. Additiv abgeschlossen: $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
4. Skalarmultipl. abgeschlossen: $\forall u \in U, a \in K : a \cdot u \in U$

3 Homomorphismen

3.1 Gruppenhomomorphismus

$$\begin{gathered}\Phi : (G, \star) \to (H, \diamond) \text{ ist ein Gruppenhomomorphismus } :\Leftrightarrow \\ \forall g_1, g_2 \in G : \Phi(g_1 \star g_2) = \Phi(g_1) \diamond \Phi(g_2)\end{gathered}$$

Φ ist genau dann injektiv, wenn gilt: $f^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}$.

3.2 Ringhomomorphismus

Analoge Definition zum Gruppenhomomorphismus, ist allerdings für beide Verknüpfungen strukturerhaltend.

$$\begin{gathered}\Phi : (G, \oplus, \otimes) \to (H, \bullet, \circ) \text{ ist ein Ringhomomorphismus } :\Leftrightarrow \\ \forall g_1, g_2 \in G : \Phi(g_1 \oplus g_2) = \Phi(g_1) \bullet \Phi(g_2) \\ \forall g_1, g_2 \in G : \Phi(g_1 \otimes g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)\end{gathered}$$

3.3 Lineare Abbildung

Die folgenden Aussagen sind äquivalent zueinander:

- $\Phi : V \to W$ über K ist eine lineare Abbildung.
- Φ ist additiv und homogen.
- $\forall x, y \in V, a \in K : \Phi(a \cdot x + y) = a \cdot \Phi(x) + \Phi(y)$

4 Basen berechnen

4.1 Basis von Vektorraum berechnen

1. Alle Vektoren aus dem Erzeugendensystem des Vektorraums nebeneinander in Matrix schreiben
2. Matrix transponieren
3. Gaußen, Nullzeilen wegstreichen
4. Matrix transponieren
5. Spalten der Matrix sind jetzt die Vektoren der Basis des Vektorraums

4.2 Basis von Summe von Vektorräumen berechnen

1. Vektoren der Basen der Vektorräume in ein gemeinsames Erzeugendensystem zusammenfassen
2. Erzeugendensystem wie oben beschrieben zu Basis umformen

4.3 Basis von Schnittmenge von Vektorräumen berechnen

Angenommen man berechnet $U \cap V$, sei $B = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ eine Basis von U.

1. Vektoren der Basen der Vektorräume nebeneinander in Matrix schreiben (<u>nicht transponieren!</u>)
2. Gaußen, in Gauß-Normalform bringen
3. mit (-1)-Trick Lösungen ablesen. Nun geht man für jeden Lösungsvektor $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_k)^T$ aus Skalaren wie folgt vor:
   - $b_i = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n$
4. Die Basis von $U \cap V$ besteht nun aus allen b_i mit $i \in \{1, \cdots, n\}$

4.4 Dimension

Die Dimension eines Vektorraums ist die Kardinalität seiner Basis.

4.5 Ist eine Summe direkt?

$$U + V = U \oplus V \Leftrightarrow dim(U + V) = dim(U) + dim(V)$$

5 Abbildungsmatrix

$D_{BA}(\Phi)$ ist eine Abbildungsmatrix, die von der Basis A zur Basis B mit Φ abbildet. Seien $\Phi : X \to Y$, A Basis von X, B Basis von Y. Man bestimmt $D_{BA}(\Phi)$ wie folgt:

1. Alle Basiselemente von A mit Φ abbilden
2. Jedes Bild eines Basiselements nun mit der Summe von Vielfachen von Basiselementen aus B darstellen
3. Die durch die Vervielfachung der einzelnen Basiselemente gewonnenen Koeffizienten geordnet und spaltenweise in Matrix schreiben

5.1 Beispiel

Beispielrechnung entstammt der Altklausur Herbst 2012, I.2 b)

$$\Phi : \mathbb{C}^{2x2} \to \mathbb{C}^{2x2}, X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X$$
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\Phi(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Phi(A)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Analog } \Phi(A)_2, \Phi(A)_3, \Phi(A)_4$$

$$\Rightarrow D_{AA}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6 Matrizen allgemein

6.1 Bild berechnen

1. Matrix transponieren
2. Zeilenstufenform mittels Gauß erzeugen

3. Matrix transponieren
4. alle Spalten, die nicht die Form $(0, 0, \cdots, 0)^T$ haben, sind Teil des Bildes

Beispiel:

$$Bild(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

6.2 Kern berechnen

- Falls Determinante der (quadr.) Matrix $\neq 0 \rightarrow$ Kern enthält nur Nullvektor
- Sonst: Matrix mit Gauß-Algorithmus lösen und Lösung mit (-1)-Trick ablesen.

6.3 Rang berechnen

Rang(A) = Anzahl der Stufen (Zeilen) der Matrix A in Stufenform.

6.4 Dimensionsformel

$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$

6.5 Rangsatz

$dim(Bild(f)) + dim(Kern(f)) = dim(V)$ mit f: V $\rightarrow$ W lineare Abbildung

7 Determinanten und Ähnliches

7.1 Nützliche Determinantenregeln

$$det(\begin{pmatrix} x_1 & * & * & * \\ 0 & x_2 & * & * \\ 0 & 0 & x_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

$$det(\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}) = det(A) \cdot det(B)$$

7.2 Charakteristisches Polynom

$$CP_x(A) = det(A - x \cdot I)$$

7.3 Eigenwerte

Eigenwerte einer Matrix sind die Nullstellen ihres Charakteristischen Polynoms, lassen sich einfach ablesen da das CP meist als Linearfaktorzerlegung gegeben ist.

Eigenwerte einer linearen Abbildung Φ sind genau die Werte λ_i, für die gilt: $\Phi(v) = \lambda_i v$.

7.4 Eigenraum, Eigenvektoren

Eigenraum zur Matrix A und dem Eigenwert $\lambda = Eig(A, \lambda) = Kern(A - \lambda \cdot I)$

Eigenvektoren sind die Vektoren, die im Eigenraum des zugehörigen Eigenwerts liegen.

Eigenraum einer linearen Abbildung $\Phi : V \to V$ hat die Form $Eig(\Phi, \lambda_i) = \{v \in V : \Phi(v) = \lambda_i \cdot v\}$ mit $v_i \in Eig(\Phi, \lambda_i)$ als Eigenvektoren.

7.5 Vielfachheiten

Algebraische Vielfachheit ($\mu_a(A, \lambda)$) ist die Vielfachheit vom Eigenwert λ als Nullstelle im charakteristischen Polynom.

Beispiel:

$$CP_x(A) = (x-2)^3(x+4)(x-3)^2 \Rightarrow \mu_a(A,2) = 3, \mu_a(A,-4) = 1, \mu_a(A,3) = 2$$

Geometrische Vielfachheit ($\mu_g(A, \lambda) = dim(Eig(A, \lambda))$) bezeichnet die Anzahl von Eigenvektoren im Eigenraum zum jeweiligen Eigenwert λ.

7.6 Ähnlichkeit und Ähnlichkeitsinvarianzen

Eine Matrix $A \in K^{nxn}$ ist genau dann ähnlich zu einer Matrix $\tilde{A}$, wenn es eine invertierbare Matrix B gibt, sodass gilt:

$$A = B^{-1}\tilde{A}B$$

Die folgenden Eigenschaften sind *Ähnlichkeitsinvarianten*, also Eigenschaften die zwischen Matrizen und zu ihnen ähnlichen Matrizen gleich sind.

- Spur (Summe der Diagonaleinträge)
- Rang
- Minimalpolynom (und Verschwindungsideal)
- Determinante

7.7 Matrix diagonalisierbar

$$A \in K^{n \times n} \text{ ist diagonalisierbar } \Leftarrow \text{ A hat genau n \underline{verschiedene} Eigenwerte}$$
$$A \in K^{n \times m} \text{ ist diagonalisierbar } \Leftrightarrow \forall \lambda : \mu_a(A, \lambda) = \mu_g(A, \lambda)$$
$$A \in K^{n \times n} \text{ ist diagonalisierbar } \Leftrightarrow D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots) = B^{-1}AB \text{ mit } B = [v_1, v_2, \cdots]$$

Wobei im letzten Fall v_i die Eigenvektoren von A und λ_i die Eigenwerte von A sind. Die letzte Gleichung sagt also aus, dass es, genau dann wenn A diagonalisierbar ist, eine Diagonalmatrix (aus Eigenwerten von A) gibt, die ähnlich zu A ist.

Eine lineare Abbildung $\Phi : V \to V$ heißt diagonalisierbar, wenn eine Basis B existiert, sodass die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\Phi)$ eine Diagonalmatrix ist.

7.8 Matrix invertierbar

$$A \in K^{nxn} \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$
$$\left(A \in K^{2x2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$