Lineare Algebra II

Lernzusammenfassung

Lukas Bach

1. Oktober 2016

zum Modul Lineare Algebra II
am Karlsruher Institut für Technologie

1. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Begrifflichkeiten

Ähnlichkeitsinvarianzen Charakteristisches, Minimales Polynom, geometrische, algebraische Vielfachheit, Spur, Rang, Determinante.

Darstellungsmatrix TODO

- $D_{CB}(\Phi) = (D_C(\Phi(b_1)) \cdots) \in K^{\#C \times \#B}$ von B nach C
- $\Phi(x) = y \Leftrightarrow D_C(y) = D_{CB}(\Phi) \cdot D_C(x)$.

Annullierung Ein Polynom f annulliert einen Endomorphismus $\Phi \Leftrightarrow f(\Phi) = 0$.

Verschwindungsideal $I(\Phi) = \{f : f \text{ annulliert } \Phi\} \subseteq K[X]$.

Eigenraum $Eig(A, \lambda) = Kern(A - \lambda \cdot I)$.

Nilpotenz Ein Endomorphismus Φ heißt nilpotent $\Leftrightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : \Phi^n$ ist die Nullabbildung (genauso für Matrizen). Nilpotente Matrizen haben nur den EW 0. Nilpotenz ist äquivalent mit folgenden Aussagen:

- $CP_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I) \stackrel{!}{=} \lambda^n$, gleiches gilt für MP für ein spezifisches n.

1.1 Charakteristisches Polynom

Matrix $CP_A(x) = \det(A - I \cdot x)$

Endomorphismus $CP_\Phi(x) = \det(\Phi - id \cdot x) = \det(D_{BB}(\Phi) - I \cdot x)$

Auf beide trifft der Satz von Cayley-Hamilton zu: $CP_A(A) = 0$, daher $CP_A(x)$ ist ein annullierendes Polynom für A.

1.2 Merkregel zu Untervektorräumen

Seien $f(x), g(x)$ Faktoren vom $CP(x)$. Dann: $U := Kern(f(A)), W := Kern(g(A))$ sind A-invariante Untervektorräume von V, und:

- $ggT(f, g) = 1 \Rightarrow U \cap W = \emptyset$.
- $kgV(f, g) = \frac{f \cdot g}{ggT(f,g)} \stackrel{!}{=} CP(x) \Rightarrow U + W = V$.

2 Minimalpolynom

Das Minimalpolynom $MP_\Phi(x)$ von Φ über K ist das Polynom, das alle folgenden Voraussetzungen erfüllt.

- Minimaler Grad (also das kleinste Polynom).

- Normiert (Leitkoeffizient = 1).
- $MP(\Phi) = 0$ (also f annulliert $\Phi \Rightarrow f(\Phi) = 0.$).

Anmerkung: Das Polynom $x^2 + 3x + 2$ ist nomiert, $3x^2 + 3x + 2$ aufgrund der führenden 3 nicht.

Es gilt:

- Das Minimalpolynom teilt das Charakteristische Polynom und hat dieselben Nullstellen.
- Das Minimalpolynom ist eindeutig bestimmt und eine Ähnlichkeitsinvariante.
- Φ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $MP_\Phi(x)$ lässt sich als Produkt $MP_\Phi(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)$ schreiben.
- Die Länge des größten Jordan-Kästchens im λ-Block gibt die Potenz von $(x-\alpha)$ im $MP_\Phi(x)$ an.

3 Haupträume

3.1 Definition

Es sei Φ ein V-Endomorphismus, $\lambda \in Spec(\Phi)$, V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

Dann heißt $H(\Phi, \lambda)$ der Hauptraum von Φ zu λ mit:

- $H(\Phi, \lambda) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} Kern\left((\Phi - \lambda \cdot Id_V)^k\right)$. Dabei ist k die Stufe (ab diesem gewissen Index k ändert sich die potenzierte Matrix nicht mehr).
- $H(\Phi, \lambda) = Kern\left((\Phi - \lambda \cdot Id_V)^a\right)$, $a = \mu_a(A, \lambda) = dim(H(A, \lambda))$.

3.2 Folgerungen

Es gilt:

- $x \in E(A, \lambda) \Leftrightarrow Ax = \lambda x$ ($\Phi(x) = \lambda x$).
- $x \in H(A, \lambda) \Leftrightarrow \exists k : (A - \lambda \cdot I)^k \cdot x = 0.$
- $\mu_a = dim(H(A, \lambda))$.
- $\mu_g = dim(E(A, \lambda))$.

3.3 Berechnung des Hauptraums

Der Hauptraum lässt sich entweder wie in der Definition mithilfe der algebraischen Vielfachheit ausrechnen, oder rekursiv über $Kern\left((A-\lambda\cdot I)^j\right)$ mit Laufvariable $j = 0, 1, 2\ldots$, bis eine der folgenden Stoppbedinungen wahr ist:

- Es kommen keine neuen Vektoren dazu.
- $dim(\cdots) = \mu_a$.
- $j = \mu_a$.

Die resultierenden Vektoren sind die Hauptvektoren, die zusammen den Hauptraum ergeben. Ein Hauptvektor hat die Stufe j, wenn er in dem j-ten Iterationsschritt berechnen wurde (Die Stufe lässt sich mithilfe der Definition nicht bestimmen, nur mit diesem Verfahren). Es gilt, dass alle Eigenvektoren gleichzeitig Hauptvektoren der Stufe 1 sind.

4 Jordan Normalform

4.1 Definition

Für eine quadratische $n\times n$ Matrix A ist die JNF eine $n\times n$ Matrix J, sodass:

- $\exists S \in K^{n\times n} : A = SJS^{-1}$.
- $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$ mit Jblöcken $J_l = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{nilpotent}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

4.2 Folgerungen

Es gilt:

- A nilpotent $\Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$.
- Die Anzahl der Jordankästchen JK im λ-Block ist gleich $dim(E(A,\lambda)) = \mu_g(A,\lambda)$.
- Die Länge des längsten JK entspricht dem Grad des MPs.

4.3 Sprungformel Verfahren

Sei $r_j := Rang\left((\Phi - \lambda\cdot I)^j\right) \overset{\text{nilpotent}}{=} Rang(\Phi^j)$

Anmerkung: r = Anzahl der Stufen in Gaußnormalform = linear unabh. Zeilen.

Finde durch Iteration das j, bei dem gilt: $r_j = 0, r_{j-1} \neq 0$.

Dann folgt die Sprungzahl $\beta_j = r_{j-1} + r_{j+1} - 2r_j$.

Daraus lässt sich der JNF-Block zum Eigenwert λ konstruieren: Dieser enthält β_j viele Kästchen der Länge j, setze diese Größen sortiert absteigend in den Block, mit Einsen unter der Diagonalen.

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

4.4 Basiswechsel zur JNF

Ziel: S mit $S^{-1}AS = J$.

Vorraussetzung:

- $CP(x)$ zerfällt in Linearfaktoren $(x - \lambda)^a$
- Haupträume aller Eigenwerte
- Jordan-Normalform (z.B. Sprungformel)

Verfahren:

Definiere L als leere Liste und iteriere für alle Eigenwerte λ (Nilpotenz $\Rightarrow$ nur $\lambda = 0$):

1. Falls Hauptvektor b maximaler Stufe gibt, der linear unabhängig zur Liste ist:
2. Füge $(A - \lambda \cdot I)^j \cdot b$ für $j = 0, 1, \ldots, ([\text{Stufe von b}] - 1)$ zu L hinzu.

Setze dann L zu Matrix S zusammen.

Anmerkung: Hauptvektoren sind die Vektoren aus der Basis des Hauptraums.

5 Bilinearformen

5.1 Definition

Sei $P : V \times W \to K$ eine Abbildung. P heißt eine Paarung, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

- $P(\alpha v_1 + v_2, w) = \alpha P(v_1, w) + P(v_2, w)$
- $P(w, \alpha v_1 + v_2) = \alpha P(w, v_1) + P(w, v_2)$

Anmerkung: Jeweils einer der Parameter ist folglich fest gewählt, während für den anderen Parameter P linear ist.

Wenn zusätzlich noch gilt $V = W$, so heißt P eine Bilinearform.

P heißt nicht ausgeartet, falls eine der folgenden ($\Rightarrow$ alle) Aussagen wahr ist:

- $\forall x \neq 0 \; \exists y : P(x, y) \neq 0$.
- $det(D_{BB}(P)) \neq 0$.
- $Rang(D_{BB}(P)) = dim(U)$ ist voll.

Folglich ist P ausgeartet, wenn $\exists x \neq 0 \; \forall y \in K : P(x, y) = 0$.

Anmerkung: P ist eine Multilinearform, wenn es als $P : V \times V \times \cdots \times V \to K$ definiert wurde und zu all diesen V linear ist.

5.2 Darstellungsmatrix von Bilinearformen

Darstellungsmatrix $D_{BC}(P)$ von $P : U \times V \to K$ nennt man Fundamentalmatrix und lautet:

$$D_{BC}(P) = \begin{pmatrix} P(b_1, c_1) & P(b_1, c_2) & P(b_1, c_3) \cdots \\ P(b_2, c_1) & P(b_2, c_2) & \ddots \\ P(b_3, c_1) & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Weiter gilt: $P(x, y) = D_B(x)^\top \cdot D_{BC}(P) \cdot D_C(y)$

5.3 Eigenschaften von $P : V \times V \to \mathbb{R}$

	Abstrakt	Rechnerisch
Symmetrisch	$\forall x, y \in V : P(x, y) = P(y, x)$	$D_{BB}(P) = D_{BB}(P)^\top$
Nicht ausgeartet	$\forall x \neq 0\ \exists y \neq 0 : p(x, y) \neq 0$ bzw. $\forall y \neq 0\ \exists x \neq 0 : p(x, y) \neq 0$	Voller Rang $\Leftrightarrow det(D_{BB}(P) \neq 0$
Positiv Definit	$\forall x \neq 0 : p(x, x) > 0$ und in $\mathbb{R}$	• $D_{BB}(p)$ hat positive (reelle) Eigenwerte. • (falls symmetrisch) Alle Hauptminoren sind positiv. (Hurwitz Kriterium)

Der k-te Hauptminor ist die Determinante vom $k \times k$ Teilblock oben links in $D_{BB}(P)$.
Eine $k \times k$ Matrix hat k Hauptminoren, einen 1×1 HM, einen 2×2 HM...

[Positive Definitheit] impliziert [nicht ausgeartet].

6 Skalarprodukt

6.1 Definition

Ein Skalarprodukt ist eine symmetrische, positiv definite ($\Rightarrow$ nicht ausgeartete) Bilinearform $p : V \times V \to \mathbb{R}$.

Rechnen mit dem Skalarprodukt mithilfe der Fundamentalmatrix $A = D_{BB}(p)$:

$$p(x, y) = x^\top \cdot A \cdot y = D_B(x)^\top \cdot D_{BB}(p) \cdot D_B(y)$$

Ein Vektorraum mit fest definiertem Skalarprodukt nennt man euklidischer Vektorraum.

6.2 Standard-Skalarprodukt

Das Standard-Skalarprodukt $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als:

$$p(x,y) = <x,y> = x^\top \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad D_{BB}(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dazu sind definiert:

Betrag von x $||x|| = \sqrt{<x,x>}$

Winkel zwischen x und y $\angle(x,y) = \arccos\left(\frac{<x,y>}{||x|| \cdot ||y||}\right)$

Abstand von x zu y $d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{<x-y, y-x>}$

Weiter gilt: x ist orthogonal zu y (also $x \perp y$) $\Leftrightarrow \angle(x,y) = 90° \Leftrightarrow <x,y> = 0$.

Sowie:

- $||v|| \geq 0$.
- $||\lambda v|| \leq |\lambda| \cdot ||v||$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (absolute Homogenität).
- $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Dreiecksungleichung).
- $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Definitheit).

7 Orthogonalbasis, Orthonomalbasis

7.1 Definition

Eine Basis $B \leq V$ von V ist eine Orthogonalbasis, wenn sie paarweise orthogonal ist, also wenn gilt $\forall i \neq j : b_i \perp b_j$. $\perp$ ist dabei vom Skalarprodukt abhängig.

B ist außerdem eine Orthonomalbasis, wenn sie eine Orthogonalbasis ist sowie normiert ist, also wenn gilt $||b_i|| = 1$. ONBs sind nicht eindeutig. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- B ist eine ONB.
- $<b_i, b_j> = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & falls i = j \end{cases}$
- $D_{BB}(p) = I$.

7.2 Orthogonalisierungsverfahren von Gram/Schmitt

Ziel: Berechne i-te OGB von $U =< a_1, a_2, \ldots, a_k >\leq V$.

Verfahren:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_k &= a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{< a_k, b_j >}{< b_j, b_j >} b_j \text{ für } k = 2, \ldots, m \\ &= a_k - \pi_{Rest}(a_k) \end{aligned}$$

Daher man übernimmt den ersten Vektor und zieht für jeden weiteren Vektor alles zu vorig berechneten Vektoren Ähnliche heraus.

Normierung danach liefert eine ONB.

7.3 Orthogonale Matrix

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Eine Matrix A ist orthogonal.
- Spalten bilden eine ONB.
- Zeilen bilden eine ONB.
- $A^\top = A^{-1}, A^\top A = I$.
- A ist eine Isometrie (Abbildung, die $||\cdot||$ und $\angle$ nicht ändert).

7.4 Iwasawa-Zerlegung

Es gilt: $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$ $\exists!$ orthogonale Matrix U und positiv definite obere Dreiecksmatrix D, sodass: $A = U \cdot D$. Mithilfe der Iwasawa-Zerlegung findet man solche D und U zu gegebenem A:

- Berechne U als Matrix aus Spaltenvektoren, die sich mithilfe des Gram-Schmitt Verfahrens zu A berechnen lassen.
- $D = U^{-1}A = U^\top A$. (Man kann noch prüfen, ob D positiv definit ist.)

8 Isometrien

8.1 Definitionen

Komplement $W \leq V$ zu $U \leq V$ erfordert $U \bigoplus W = V$.

Orthogonales Komplement $U^{\perp}$ zu U erfordert

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{x \in V: \ \forall u \in U :< x, u >= 0\} \\ &= \{x \in V: \ \forall u \in U : x \perp u\} \\ &= \{x \in V: \ \forall j :< x, b_j >= 0\} \end{aligned}$$

und ist eindeutig bestimmt.
Dabei gilt:

- $U^{\perp\perp} \subseteq U$, sogar $U^{\perp\perp} = U$ falls $dim(V) < \infty$
- $dim(U^{\perp}) + dim(U) = dim(V)$, $U^{\perp} \bigoplus U = V$.

Fourierformel $\alpha_j = \frac{<x,b_j>}{||b_j||} \overset{\text{ONB}}{=} < x, b_j >$

Projektionsformel/Orthogonale Projektion $\pi_V(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{<x,b_j>}{<b_j,b_j>} b_j \overset{\text{ONB}}{=} \sum\limits_{j=1}^{k} < x, b_j > b_j$

Orthogonale Projektion von x auf V
Für orthogonale VR: $\pi_U(v) = v - \pi_{U^{\perp}(v)}$

Abstandsformel $d(x, V) = ||x - \pi_V(x)||$

Eine Abbildung Φ ist genau dann eine lineare Isometrie, wenn gilt $\forall x, y \in V : \langle x, y\rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle$. Die Aussage ist äquivalent mit folgenden Aussagen, wenn $dim(V) < \infty$:

$\Leftrightarrow$ Φ ist Verkettung von Spiegelungen und Drehungen auf Φ-invarianten Unterräumen.

$\Leftrightarrow$ erhält Betrags- und Winkelfunktion: $||\Phi(x)|| = ||x||$ und $\angle(x, y) = \angle(\Phi(x), \Phi(y))$.

$\Leftrightarrow$ $\Phi(B)$ ist eine ONB mit B als ONB.

$\underset{\text{B ONB}}{\Leftrightarrow}$ $D_{BB}(\Phi) \in O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^{\perp} \cdot A = I_n\}$

Eine Isometrie Φ in Normalform lässt sich formulieren als Abbildung $\Phi : V \to V$ als Matrix NF mit $CP(x)$, sodass:

Eigenschaft	Faktoren in $CP(x) \in R[X]$	Inv. UR.	Blöcke in NF
gleich bleiben	$(x-1)^d$	$U = Kern(\Phi - id) = E(\Phi, 1)$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
spiegeln	$(x+1)^d$	Spiegelachse: $E(\Phi, -1)$, Hyperebene: $E(\Phi, -1)^{\perp}$	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$
drehen	$x^2 - 2\cos(\alpha)x + 1$	Drehachse: $Kern(q(\Phi))^{\perp}$, Drehebene: $Kern(q(\Phi))$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ "Drehkästchen D_α".

Die reelle INF baut man dann, indem man die Blöcke in der Reihenfolge der Tabelle sortiert in einer Diagonalen zu einer Matrix zusammensetzt. Eine Isometrie Normalform ist immer ähnlich zu einer solchen Matrix, deren CP aus obigen Faktoren besteht.

8.2 Wege zur Berechnung der Isometrie-Normalform

Die Isometrie-NF folgt aus dem $CP(x)$ und lässt sich entweder unmittelbar daraus berechnen, oder mithilfe einer der folgenden Methoden:

8.2.1 Spurtrick

Der Spurtrick ist für maximal dreidimensionale VRe anwendbar und sagt aus, dass die Spur einer Isometrienormalform gleich der Spur ihrer Darstellungsmatrix ist.

$$Spur(\Phi) = Spur(D_{BB}(\Phi))$$

8.2.2 Transpositionstrick

(Eigentlich nur für “maßgeschneiderte Klausuren” anwendbar.)

Berechne zu einer gegebenen Matrix A die Matrix $A + A^{\perp}$, dann lassen sich aus den Eigenwerten von $A + A^{\perp}$ die Blöcke der Isometrie-NF $\tilde{A}$ berechnen.

Eigenwert von $A + A^{\perp}$	Block in Isometrie-NF
2	1 (gleich bleiben)
-2	-1 (spiegeln)
$2 \times 2 \cos\alpha$	$D_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

8.3 Spezielle Aufgabentypen

8.3.1 Isometrie zu Spiegelung finden

Gesucht ist die Spiegelung gegen eine Ebene oder entlang einer Achse. Gegeben ist eins der beiden, für die Rechnung braucht man den Richtungsvektor der Achse:

- Spiegelachse: $[n]$.
- Spiegelebene: $[a, b] \Rightarrow$ finde Spiegelachse n, sodass $n \perp a, n \perp b$.

Die Spiegelung von einem Punkt x ist dann gegeben durch:
$\Phi(x) = x - 2\frac{\langle x,n\rangle}{\langle n,n,\rangle} = x - 2\pi_{[n]}(x)$.

Abbildungsmatrix von Φ erhält man dann durch allgemeines einsetzen von $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ für x.

8.3.2 Drehung um spezifische Achse

Gesucht ist eine Isometrie-NF, die um eine Achse n um Winkel α dreht.
Dann ist die Isometrie-NF bezüglich der Basis $B := [n =: b_1, b_2, b_3, \dots]$ (ONB, zu n mittels Gram-Schmitt konstruiert) die folgende: $\widetilde{I} = \begin{pmatrix} I & \\ & D_{\alpha} \end{pmatrix}$.

Weiter gilt dann aufgrund des Basiswechselformalismus: $\widetilde{I} = S^{-1} I S$ mit I als Isometrie-NF bezüglich der Standardbasis $[e_1, e_2, \dots]$. Daraus folgt: $I = S\widetilde{I}S^{-1}$. Mit $S = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ kann mann dann I berechnen, außerdem gilt $S^{-1} = S^{\top}$ da B eine ONB ist.

8.3.3 Entfernung zwischen Ebene und Gerade

Gesucht ist $d(E, G)$, also die Entfernung zwischen einer Ebene $E = a + [x, y]$ und einer Geraden $G = b + [z]$.

Berechne nun $U^\perp = \{u \in V : u \perp x, u \perp y, u \perp z\}$ mittels Linearem Gleichungssystem.

Dann gilt: $d(E, G) = ||\pi_{U^\perp}(a - b)||$.

9 Adjungierte

9.1 Definition

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Adjungierte Matrix $\overline{A^\top}$ die Matrix, die durch Transposition von A und schließlich Konjugation sämtlicher Matrix-Werte entsteht (Konjugation: $\overline{a + bi} = a - bi$).

Für eine Abbildung $\Phi : U \to V$ ist die Adjungierte genau die Abbildung $\Phi^* : V \to U$, für die gilt: $\forall x, y :< \Phi(x), y >=< x, \Phi^*(y) >$.

Weiter gilt: $\underbrace{D_{CB}(\Phi)^*}_{\text{adj. Matrix}} = D_{BC}(\underbrace{\Phi^*}_{\text{adj. Abbildung}})$ für B, C ONBs.

9.2 Folgerungen

Für Adjungierte gelten folgende Rechenregeln:

- $(\Phi + \alpha)^* = \Phi^* + \alpha^*, (\alpha \cdot \Phi)^* = \overline{\alpha} \cdot \Phi^*$ falls Φ linear.
- $(AB)^* = B^*A^*$.
- $A^{**} = A$ für $dim < \infty$.
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Außerdem gilt:

Begriff	Regel	Bedeutung für SP	Bedeutung für Matrizen
Adjungiert	$\langle \Phi(x), y\rangle = \langle x, \Phi(y)\rangle$	siehe Regel	$D_{BC}(\Phi^*) = D_{CB}(\Phi)^*$
Selbstadj.	$\Phi = \Phi^*$	$\langle \Phi(x), y\rangle = \langle x, \Phi(y)\rangle$	$A = A^*$
Isometrie	$\Phi^{-1} = \Phi^*$	$\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$	$A^{-1} = A^*$
Normal	$\Phi\Phi^* = \Phi^*\Phi$	$\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle \Phi^*(x), \Phi^*(y)\rangle$	$AA^* = A^*A$

9.3 Spektralsatz im Reellen

Im allgemeinen sagt der Spektralsatz aus: $\Phi : V \to V$ ist normal $\Leftrightarrow\ \exists$ komplexe ONB aus Eigenvektoren von Φ. Im reellen lassen sich aus Spektralsatz und obigen Eigenschaften folgende Aussagen herleiten:

Φ Isometrie $\tilde{A}_{\mathbb{R}} = INF$

Φ selbst adjungiert $\tilde{A}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Φ normal $\tilde{A}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & r \cdot D_\alpha \end{pmatrix}$

10 Affiner Raum

10.1 Definition

Ein affiner Raum G ist definiert als $G = v + U$ mit Ortsvektor v und einer Basis U von Richtungsvektoren $U =< b_1, b_2, \cdots >$.

Bezüglich der Dimension gilt: $dim(G) = dim(v + U) = dim(U)$, diese definiert ob es sich um einen Punkt, Gerade, Ebene, Raum etc. handelt.

Der Abstand $d(G, H)$ zwischen zwei affinen Räumen G und H ist definiert als $d(G, H) = \min / \inf\{||g - h|| : g \in G, h \in H\} =$ Länge des Lots. Der Lot ist die kürzeste Verbindungsstrecke.