Höhere Mathematik

Stoffzusammenfassung

Lukas Bach
14. August 2016

zu den Modulen Höhere Mathematik I und II
am Karlsruher Institut für Technologie

14. August 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Notizen

Übersprungene Inhalte

- g-adische Entwicklung.
- Satz 7.5 auf Seite 72, Verkettung punktweise stetiger Funktionen sind in demselben Punkt stetig.
- Satz 9.9 auf Seite 97, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.
- Satz 9.43 auf Seite 115, Taylorpolynom ist an f angenähert.
- Definition 10.1 auf Seite 119, Definition des Riemannintegrals via Unter- und Obersummen, alle weiteren Formeln bis zur Einführung des Riemann Integrals.
- Satz 10.10, ..
- Satz 10.37, Vertauschen von Limes und Ableitung von Funktionsfolge unter Voraussetzung gleichmäßiger Konvergenz der Ableitungen
- Kapitel 11, 12, 13

2 Mengen und Zahlen

2.1 Mengendefinitionen

$\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}, A \subset M$

Menge M nach oben beschränkt $\exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \leq \gamma$
$\Leftarrow$ A ist nach oben beschränkt und $\sup A \leq \sup M$

Menge M nach unten beschränkt $\exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \geq \gamma$
$\Leftarrow$ A ist nach unten beschränkt und $\inf A \leq \inf M$

Menge M ist beschränkt M ist nach oben und nach unten beschränkt.
$\Leftrightarrow\ \exists c > 0\ \forall x \in M : |M| \leq c$
$\Rightarrow \inf M \leq \sup M$

γ ist Superior von M $\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in M : x > \gamma - \epsilon$

γ ist Inferior von M $\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in M : x < \gamma + \epsilon$

Menge M ist endlich $\exists$ surjektive Abbildung $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to M\ (n \in \mathbb{N})$

Menge M ist abzählbar $\exists$ surjektive Abbildung $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to M\ (n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$

Menge M ist überabzählbar M ist nicht abzählbar.

Menge M ist abgeschlossen $\forall$ konvergente Folge $(x_n) \in D$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in D$.

Menge M ist kompakt M ist beschränkt und abgeschlossen.
$\Leftrightarrow$ jede Folge $(x_n) \in D$ enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.
$\Rightarrow \min D$ und $\max D$ existieren.

ϵ-Umgebung von x_0 $U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon\} = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ für $x_0 \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$

2.2 Allgemeine Formeln für reelle Zahlen

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Bernoullische Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für $x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}$

Bernoullischer Lehrsatz $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$

Dreiecksungleichung für Reihen $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

Dreiecksungleichung für Integrale $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ für $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Eulersche Zahl $e := \lim\limits_{n\to\infty}(n+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$

$\forall a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Allgemeine Potenz $\forall a > 0, x \in \mathbb{R} : a^x = E(x \log a)$, für $a = e$: $e^x = E(x \log e) = E(x)$

Für Potenzen gilt :

- $x \mapsto a^x$ stetig auf $\mathbb{R}$.
- $a^x > 0$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $\log a^x = x \log a$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$

Exponentialfunktion $E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hat folgende Eigenschaften ($x, y \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}$):

$E(x+y) = E(x)\cdot E(y)$, $E(x) > 0$, $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$, $E(r) = e^r$ und ist streng monoton wachsend.

Sinusfunktion $\sin x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$ konvergiert absolut.

Cosinusfunktion $\cos x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$ konvergiert absolut.

Zu Sinus und Cosinus sind die Additionstheoreme definiert:

- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $1 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$

Weiter gilt :

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$
- $\sin \Rightarrow^{\text{ableiten}} \cos \Rightarrow^{\text{ableiten}} -\sin \Rightarrow^{\text{ableiten}} -\cos \Rightarrow^{\text{ableiten}} \sin$

Tangensfunktion $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Sinus Hyperbolicus $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-1})$

Cosinus Hyperbolicus $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-1})$

Ableitung und Additionstheoreme (abgesehen davon dass beim 2. das Plus nicht invertiert wird) sind genauso wie bei sin und cos.

Besondere Grenzwerte $\lim\limits_{n\to} \sqrt[n]{n^x} = 1$

$\lim\limits_{n\to 0+} \frac{\sin n}{n} = 1$

2.3 Allgemeine Formeln für komplexe Zahlen

Grundlegendes Für $z := x + yi, z, w \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathbb{R}$ gilt: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \bar{z} := x - iy, z \cdot \bar{z} = |z|^2, |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, e^{\bar{i\pi}} = e^{-i\varphi}, \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

Exponentialfunktion $E(z) = e^z := e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$ für $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Periodizität der komplexen e Funktion $e^{z+2\pi ik} = e^z \; \forall k \in \mathbb{Z}$

Winkel $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$.

Polarkoordinatendarstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|, \varphi = argz$.

Formel von de Moivre $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$.

ω_k **ist n-te Wurzel aus** $a = re^{i\varphi}$ $\Leftrightarrow \omega_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\left(\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}\right)}$ für $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

3 Folgen und Konvergenz

(a_n) sei eine reelle, meist auch komplexe Folge.

3.1 Allgemeine Konvergenz, Grenzwerte, Monotonie

(a_n) **ist nach oben/unten beschränkt** Die Menge $\{a_1, a_2, \dots\}$ ist nach oben/unten beschränkt.

(a_n) **konvergiert gegen** a $\forall\epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
$\Leftrightarrow a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$\Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$
$\Rightarrow |a_n| \to a$

(a_n) **ist konvergent** Ein solches a existiert, andernfalls ist (a_n) divergent.

(a_n) **ist konvergent** a ist eindeutig bestimmt und (a_n) ist beschränkt.

Allgemeine Rechengesetze $a_n \to a, b_n \to b, a'_n \to a, (a_n), (b_n), (c_n), a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt:
$a_n + b_n \to a + b$
$\alpha \cdot a_n \to \alpha \cdot a$
$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty} \to \frac{a}{b}$, falls $(b \neq 0) \Rightarrow (\; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m : b_n \neq 0)$
$a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
$a_n \leq b_n \leq a'_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (b_n) \to b = a$

(a_n) ist eine Cauchy-Folge $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon$
$\Leftrightarrow (a_n)$ ist konvergent (Cauchy-Kriterium)

Komplexe Konvergenz $z_n := x_n + iy_n$ mit $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}$ und $w = u + iv$. Dann: $z_n \to w \Leftrightarrow x_n \to u$ und $y_n \to v (n \to \infty)$.

(a_n) ist monoton wachsend/fallend $\forall n \in \mathbb{N}(a_n \leq a_{n+1})$ bzw. $(a_n \geq a_{n+1})$

(a_n) ist streng monoton wachsend/fallend Gleichheit gilt im obigen Fall nicht.

Monotoniekriterium (a_n) monoton und beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent.

3.2 Teilfolgen und Häufungswerte

Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von (a_n) mit $n_1 < n_2 < \dots$
Beispiele: $(a_2, a_4, a_6, \dots)$ und $(a_1, a_4, a_9, a_16, \dots)$ sind TF von (a_n) mit $n_k = 2k$ bzw. $n_k = 2^k$.

Häufungswert a heißt HW von (a_n)
$\Leftrightarrow \ \exists$ Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n_k} = a$
$\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 : a_n \in U_\epsilon(a)$

Satz von Bolzano-Weierstrass Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungswert.

- Teilfolgen (a_{n_k}) von konvergenten Folgen (a_n) sind wieder konvergent, beider Limes ist dann gleich ($\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \lim\limits_{k \to \infty} a_n$). Dann gilt $HW(a_n) = \left\{ \lim\limits_{n \to \infty} a_n \right\}$.
- Jede Folge hat eine monotone Teilfolge.
- (a_n) ist beschränkt $\Rightarrow HW(a_n)$ ist beschränkt und $\sup HW(a_n)$ und $\inf HW(a_n)$ existieren.

Limes superior/inferior $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = \max HW(a_n)$, $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n = \min HW(a_n)$

Limes sup/inf **Rechenregeln** (a_n) ist beschränkt
$\Rightarrow \ \forall \alpha \geq 0 : \limsup\limits_{n \to \infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \limsup\limits_{n \to \infty} (a_n)$
$\Rightarrow \ \forall \alpha \geq 0 : \liminf\limits_{n \to \infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \liminf\limits_{n \to \infty} (a_n)$
$\Rightarrow \limsup\limits_{n \to \infty} (-a_n) = - \liminf\limits_{n \to \infty} (a_n)$

4 Reihen

4.1 Grundlegendes zu Reihen

Definition unendlicher Reihen Sei $(a_n) \in \mathbb{R}$ Folge, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $(s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist eine unendliche Reihe, s_n ist die n-te Teilsumme. Konvergenz der Reihe wird wie für (s_n) als Folge definiert, Reihenwert $= \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

$\sum a_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

$\sum a_k$ ist absolut konvergent $\sum |a_k|$ ist konvergent [$\Rightarrow \sum a_k$ konvergent].

Rechenregeln für Reihenkonvergenz $\sum a_k, \sum b_k$ konvergieren, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \sum(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum a_k + \beta \sum b_k$ konvergieren.

Geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ wenn [$|x| < 1 \Leftrightarrow \sum$ konvergent]

Harmonische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Alternierend harmonische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ ist konvergent.

- Reihen von Umordnungen von (absolut) konvergenten Folgen sind wieder (absolut) konvergent, der Limes bleibt derselbe.

Cauchy Produkt zweier Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ Cauchyprodukt $\sum c_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$

4.2 Konvergenzkriterien

Monotoniekriterium $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \geq 0$, (s_n) nach oben beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Cauchykriterium $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum\limits_{m}^{k=n} a_k \right| < \epsilon$

Leibniz-Kriterium Sei (b_n) monoton fallende Folge ≥ 0, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $a_n := (-1)^{n+1} b_n$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. (vgl. alternierende harmonische Reihe)

Majorantenkriterium (a_n), (b_n) Folgen, $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

Minorantenkriterium (a_n), (b_n) Folgen, $0 \leq |b_n| \leq a_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Wurzelkriterium (a_n) Folge. Wenn $\sqrt[n]{|a_n|}$ beschränkt ist und $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent, wenn $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich, sonst ist $\sum a_n$ divergent.

Quotientenkriterium (a_n) Folge mit $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\sum a_n$ ist divergent, falls min. eine der folgenden Aussagen wahr ist:

- $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ ffa n
- $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

$\sum a_n$ ist konvergent, wenn $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ beschränkt und $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

4.3 Potenzreihen

Definition einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)a_2(x-x_0)^2 + \cdots$
$\underset{x_0=0}{=} a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots$ mit x_0 als Entwicklungspunkt.

Konvergenzreihe r einer Potenzreihe Sei $x_0 = 0$, also $x = x - x_0$.

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ unbeschränkt} \\ & \textit{Die Potenzreihe konvergiert dann nur für } x = 0 \\ \infty, & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \to 0 \\ & \textit{Die Potenzreihe konvergiert dann } \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ beschränkt und } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 0 \\ & \textit{Für } |x| < r \textit{ konvergiert dann die Potenzreihe absolut.} \\ & \textit{Für } |x| > r \textit{ divergiert dann die Potenzreihe.} \\ & \textit{Für } |x| = r \textit{ ist dann keine allgemeine Aussage möglich.} \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Es gilt: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, falls dieser lim existiert und ffa n gilt: $a_n \neq 0$.
Sowie: Der Konvergenzradius des Cauchyprodukts zweier Potenzreihen ist größergleich dem kleineren Konvergenzradius beider Potenzreihen und es gilt:
$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}\right)\right)(x-x_0)^n$

5 Funktionen

5.1 Grenzwerte

$x_0 \in \mathbb{R}$ **ist Häufungspunkt von** $D \subset \mathbb{R}$ falls $\exists$ Folge $(x_n) \in D$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Formale Definition von Funktionsgrenzwert $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

$\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \epsilon$ mit $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}$.

Cauchy-Kriterium für Funktionen $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert

$\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D_\delta(x_0) : |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Rechengesetze für Funktionsgrenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) := a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) := b$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$
$\exists \delta > 0\ \forall x \in D_\delta(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ und $a = b \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a = b$

5.2 Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ **heißt stetig** $\forall$ Folgen $(x_n) \in D$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$

$\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\, [|x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$ "$\epsilon - \delta$-Definition"

f ist stetig in x_0 und x_0 ist Häufungspunkt von D $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f : D \to \mathbb{R}$ **heißt stetig auf** D f ist in jedem $x_0 \in D$ stetig

$\Rightarrow f \in C(D) := \{g : D \to \mathbb{R} : g$ ist stetig auf $D\}$ = Menge der stetigen Funktionen auf D.

Rechenregeln für Stetigkeit $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt:

$\alpha f + \beta g, f \cdot g, |f|$ sind stetig in x_0.
Gilt auch $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g} : \{x \in D : g(x) \neq 0\} := \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \tilde{D}$.

$f : D \to \mathbb{R}$ **gleichmäßig stetig auf** D**:** $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, z \in D : [|x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \epsilon]$

$\Leftarrow D$ kompakt und f stetig auf D.
Also: δ hängt nur von ϵ ab, nicht von z. $\sqrt{x}$ ist glm. stetig, x^2 nicht.
Folgendefinition: $\forall$ Folgen $(x_n), (y_n) \in D, x_n - y_n \to 0 : f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

$f : D \to \mathbb{R}$ **Lipschitz stetig auf** D**:** $\exists L \geq 0\ \forall x, z \in D : |f(x) - f(z)| \leq L|x - z|$

Also: Sekantensteigung von f ist immer kleinergleich L.

Also: "Dehnungsbeschränkung": Lipschitz-beschränkte Funktionen können sich nur beschränkt schnell ändern.

Allgemein gilt Lipschitz'sche Stetigkeit $\Rightarrow$ Gleichmäßige Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Potenzreihenfunktion $\sum a_n(x - x_0)^n$ sei Potenzreihe mit Konvergenzradius r, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$, $f(x) := \sum a_n(x - x_0)^n\ \forall x \in D$, so gilt $f(x) \in C(D)$.
$\Rightarrow$ insbesondere $E(x), \sin x, \cos x \in C(\mathbb{R})$.

Zwischenwertsatz Seien $f \in C[a, b], y_0$ zwischen a und $b \Rightarrow\ \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$.

Also: Wenn eine Funktion auf einem Bereich stetig ist, so ist jeder Funktionswert auf diesem Funktionsbereich definiert.

Nullstellensatz von Bolzano Seien $f \in C[a, b], f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow\ \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$

Also: Ist zusätzlich das Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ verschieden, so existiert dazwischen min. eine Nullstelle.

5.3 Monotonie und Umkehrbarkeit

Abgeschlossenheit und Kompaktheit bei Mengen siehe Kapitel 2 (Seite 4).

$f : D \to \mathbb{R}$ **heißt beschränkt** $f(D)$ ist beschränkt $\Leftrightarrow\ \exists c > 0\ \forall x \in D : |f(x)| \leq c$

f **heißt streng monoton wachsend/fallend** $\forall x_1, x_2 \in D : [x_1 \lessgtr x_2 \Rightarrow f(x_1) \lessgtr f(x_2)]$
Oder nicht streng, falls auch Gleichheit gelten kann.

Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D, f^{-1}(y) = x$ **existiert** $\Leftarrow f : I \to \mathbb{R}, f(x) = y$ injektiv
Strenge Monotonie $\Leftrightarrow$ Injektivität der Funktion
$f^{-1} \circ f = id$
$f \in C(I)$ und streng monoton $\Rightarrow f^{-1} \in C(f(I))$

5.4 Funktionsfolgen und -reihen

Funktionsfolge (f_n) **bzw. -reihe** $\sum f_n$ **heißt punktweise konvergent auf** D :
$\forall x \in D : [(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $\sum f_n(x)]$ konvergent.
$\Leftrightarrow\ \forall x \in D\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
Also: Z.b. konvergiert $(f_n(4))_{n \in \mathbb{N}} = (f_1(4), f_2(4), \dots)$ gegen $f(4)$

(f_n) **bzw.** $\sum f_n$ **gleichmäßig konvergent gegen** f/s **auf** D :
$\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
Also: n_0 hängt nur noch von ϵ und nicht von x ab.

Allgemein gilt: Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Punktweise Konvergenz

Allgemein gilt: $\exists(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\exists m \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq m \ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \Rightarrow (f_n)$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen f.

Allgemein gilt: (f_n) konv. glm. auf D gegen f, alle f_n stetig in $x_0 \in D \Rightarrow f$ in x_0 stetig. (f_n) konvergiert glm. auf D gegen f, $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C(D) \Rightarrow f \in C(D)$.

Majorantenkrit. von Weierstrass $\exists(c_n) \in \mathbb{R}[\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m\ \forall x \in D : |f_n(x)| \leq c_n]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf D.

Allgemein gilt: (f_n) konvergiert glm. auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ in $x_0 \in D$ stetig $\Rightarrow f$ in x_0 stetig.
$\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C(D) \Rightarrow f \in C(D)$.

Identitätssatz für Potenzreihen $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$. Setze $r := \min\{r_1, r_2\}$ und $D := (-r, r)$, Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$. Wenn noch $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Nullfolge in $D\backslash\{0\}$ und $f(x_k) = g(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n = b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

6 Differentialrechnung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von I.

f heißt in x_0 differenzierbar $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert und ist reell.
Also: Dieser Punkt ist, falls existent, die Steigung der Tangenten an dem Graph von f in x_0.
Falls existent, heißt dieser Punkt erste Ableitung $f'(x_0)$ von f in x_0.

f heißt auf I differenzierbar f ist in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar.
$\Leftrightarrow f' : I \to \mathbb{R}, x_0 \mapsto f'(x_0)$ existiert.

Allgemein gilt: Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Rechenregeln für Differenzierbarkeit $f, g : I \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in I$. Dann gilt:

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ diff'bar in $x_0, (\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$
- $f \cdot g$ diff'bar in $x_0, (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ Intervall $J \subset I\ \forall x \in J : g(x) \neq 0, \frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ in x_0, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
- $g : I \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in I$, $g(I) \subset J, f : J \to \mathbb{R}$ diff'bar in $y_0 := g(x_0) \in J$ $\Rightarrow f \circ g : I \to \mathbb{R}$ diff'bar in x_0 und $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Höhrere Ableitung: klar. $C^n(I)$ ist die Menge der auf I n-mal stetig diff'baren Fkten.

$x_0 \in M \subset \mathbb{R}$ **heißt innerer Punkt von** M $\exists\delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset M$

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein relatives Maximum bzw. Minimum :
$\exists \delta > 0\ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0): f(x) \leq f(x_0)$ bzw.
$\exists \delta > 0\ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0): f(x) \geq f(x_0)$

x_0 ist ein relatives Extremum von f $\Leftrightarrow f$ hat in x_0 ein rel. Maximum oder -Minimum.

x_0 ist ein abs. (globales) Maximum/Minimum von f $\Leftrightarrow\ \forall x \in D: f(x) \substack{\leq \\ \geq} f(x_0)$

Ableitung von Extremstelle $f: I \to \mathbb{R}$ mit relativem Extremum $x_0 \in I$, f diff'bar in x_0, x_0 innerer Punkt von I, dann gilt: $f'(x_0) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, diff'bar auf (a,b). Dann: $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Also: Zieht man eine gerade Linie durch zwei Punkte von f, so entspricht die Steigung dieser Linie der Ableitung von mindestens einer Stelle zwischen diesen beiden Punkten.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, diff'bar auf (a,b), $\forall x \in (a,b): g'(x) \neq 0$, dann gilt: $g(a) \neq g(b)$, $\exists \xi \in (a,b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

$f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar heißt streng monoton fallend/wachsend $\Leftrightarrow f' \lessgtr 0$
Oder nicht streng, wenn auch Gleichheit gelten kann.

Regeln von l'Hospital $f, g: \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ni (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar auf (a,b), $\forall x \in (a,b): g'(x) \neq 0$. Gilt zusätzlich $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bzw. $g(x) = 0$ bzw. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, so gilt: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Analog ist die Bewegung gegen b möglich.
Also: Also wenn der Limes eines Bruches berechnet wird, kann, sofern der Nenner gegen (minus) unendlich oder Nenner und Zähler gegen 0 gehen, beide Teile des Bruches abgeleitet werden, und es kommt derselbe Limes heraus. Das kann mehrfach hintereinander durchgeführt werden.

Gliedweise differenzierung einer Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **mit KR** $r > 0$ **auf** $I = (-r, r)$
f ist diff'bar auf I mit $\forall x \in I: f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, diese gliedweise differenzierte Potenzreihe hat denselben KR r.

Abelscher Grenzwertsatz Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n := f(x)\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r]$ bzw. $x \in [x_0 - r, x_0 + r)$ mit KR $0 < r < \infty$ konvergent in $x_0 + r$ bzw. $x_0 - r$. Dann gilt: f ist stetig in $x_0 + r$ bzw. $x_0 - r$.

Taylor-Reihe Sei $\epsilon > 0, f \in C^\infty(U_\epsilon(x_0)), x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ Taylorreihe zu f und x_0.
Also: f wird durch die Taylor-Reihe angenähert um als Potenzreihe dargestellt zu werden, Gleichheit ist allerdings noch nicht gewährleistet.

Satz von Taylor Sei $f \in C^n(I)$ mit $n \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}$ Intervall $f^{(n+1)}$ existiert auf I, $x, x_0 \in I$. Dann: $\exists \xi = \xi(x_0, x) \in (x, x_0)$ bzw. (x_0, x) und:

$$f(x) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)}_{\text{Taylorreihe von } f} + \underbrace{\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right)}_{\text{Restglied}}$$

Also: f wird mit Taylor-Reihe und jetzt zusätzlich Restglied exakt angenähert.

n-tes Taylor-Polynom $T_n(x; x_0)$ von f Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I), x_0 \in I$. Dann: $T_n(x; x_0) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Extrema durch Nullstellen bestimmen Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit innerem Punkt x_0, $n \in \mathbb{N}, f \in C^n(I)$. Wenn gilt: $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^n(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

- n gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat lokales Maximum in x_0.
- n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat lokales Minimum in x_0.
- n ungerade $\Rightarrow f$ hat kein lokales Extremum in x_0.

Also: Wird f erst nach einer geraden Zahl von Ableitungen null, so existiert ein lokales Extremum, sonst nicht.

7 Integral

7.1 Riemann Integral

Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ $\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

Untersumme, Obersumme

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar *Tatsächliche Definition fehlt noch*
$\Leftarrow f$ ist monoton.

Riemann-Integral Falls f über $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist, ist das Riemann Integral: $\int_a^b f(x)dx$, es gilt: $f \in R[a, b]$

Riemann Integrierbarkeit f ist auf kompaktem Intervall $[a, b]$ integrierbar, wenn f auf $[a, b]$ beschränkt und fast überall stetig ist, oder wenn f monoton ist, oder wenn f stetig ist.

Rechenregeln für Riemann Integrale Sei $f, g \in R[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\alpha f + \beta g \in R[a, b], \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$

- $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$
  $\big($dh. $\int \in Hom(R[a,b],\mathbb{R})\big)$
- $h : f([a,b])$*$\rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt: $h \circ f \in R[a,b]$ (*beschränkt, da f beschränkt).
- $f \cdot g \in R[a,b]$
- $\forall x \in [a,b] : \frac{f}{g} \in R[a,b]$
- $|f| \in R[a,b]$
- $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| = \int\limits_a^b |f(x)|dx$

Riemannsches Integrabilitätskriterium $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists Z$ Zerlegung von $[a,b]$ sodass: $S_f(Z) - s_f(Z) < \epsilon$

Riemannsche Summe

Stammfunktion Seien $G, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. G heißt Stammfunktion von g auf I, falls G diff'bar auf I ist und $G' \equiv g$ auf I. Schreibweise: $G(x) = \int g(x)dx$

Aufteilen eines Integrals $b \in [a,c], f \in R[a,c] \Rightarrow \int\limits_a^c f dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_b^c f dx$

Konvergenz der Grenzfunktion einer Funktionsfolge Sei $(f_n) \in R[a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- f_n glm. konv. auf $[a,b]$ gegen $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
  $\Rightarrow f \in R[a,b],\ \lim\limits_{n\rightarrow\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b \lim\limits_{n\rightarrow\infty} f_n dx = \int_a^b f dx$
- $\sum f_n$ glm. konv. auf $[a,b]$ gegen $s : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
  $\Rightarrow s \in R[a,b], \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n dx = \int_a^b s dx$

1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Sei $f \in R[a,b], f$ hat auf $[a,b]$ eine Stammfunktion $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$

2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Sei $f \in R[a,b], F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int \lim\limits_{\rightarrow a}^{x} f(t)dt, x \in [a,b]$. Dann:

- $\forall x, y \in [a,b] : F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt$ Also: auf Teilintervallen integrierbar
- F ist *stetig*, sogar Lipschitz-stetig auf $[a,b]$.
- f stetig $\Rightarrow F$ Stammfunktion von f auf $[a,b]$, also: $\forall x \in [a,b] : F'(x) = f(x)$

Partielle Integration Seien $f, g \in C^1(I), I = [a,b]$.

Unbestimmtes Integral $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$

Riemann Integral $\int\limits_a^b f'gdx = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b fg'dx$

Integration durch Substitution Seien $I = [a,b], J = [\alpha,\beta], f \in C(I), g \in C^1(J), g(\alpha) = a, g(\beta) = b$, dann: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

Integralgleichheit bei fast gleichen Funktionen $f \in R[a,b], g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $f(x) = g(x) ffax \in [a,b]$, dann: $g \in R[a,b], \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung $f, g \in R[a,b], g \geq 0$ auf $[a,b]$. Dann: $\exists \mu \in f([a,b])$ mit $\int\limits_a^b fgdx = \mu \int\limits_a^b gdx$.

7.2 Uneigentliche Integrale

Sei im folgenden $f : I \to \mathbb{R}, f \in R(I), a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Uneigentliches Integral $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ist konvergent :

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{r_a \to \alpha \\ r_b \to \beta}} \int\limits_{r_a}^{r_b} f(x)dx \in \mathbb{R}$ existiert

$\Leftrightarrow\ \exists c \in (\alpha,\beta) : \int\limits_\alpha^c fdx$ und $\int\limits_c^\beta fdx$ konvergent, dann $\int\limits_\alpha^\beta fdx := \int\limits_\alpha^c fdx + \int\limits_c^\beta fdx$

$\int_a^b f(x)dx$ **heißt absolut konvergent** $\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ konvergiert $\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx$ konv.

Cauchy-Kriterium $\int\limits_a^\beta$ konv. $\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists c = c(\epsilon) \in (a,\beta)\ \forall u, v \in (c,\beta) : \left|\int\limits_u^v f(x)dx\right| \leq \epsilon$.

Majorantenkriterium Sei $g : [a,\beta) \to \mathbb{R}$, $\forall t \in (a,\beta) : g \in R[a,t]$, $\forall x \in [a,\beta) : |f(x)| \leq g(x), \int_a^\beta g(x)dx$ konvergent, dann: $\int_a^\beta f(x)dx$ ist absolut konvergent und $\int_a^\beta |f(x)|dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$.

Minorantenkriterium g wie bei Majorantenkriterium, mit $\forall x \in [a,\beta) : f(x) \geq g(x) \geq 0$, $\int_a^\beta g(x)dx$ sei divergent, dann: $\int_a^\beta f(x)dx$ ist divergent.

Integralkriterium Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $\forall x \in [1,\infty) : f(x) > 0, f$ monoton fallend (Also: $f \in R[1,t]\ \forall t > 1$). Dann: $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^\infty f(k)$ konvergent.

8 Fourier Reihen

Orthogonalitätsrelationen $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq k \\ \pi & \text{falls } n = k \end{cases}$

und $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)dx = 0$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Trigonometrische Reihe Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}$. $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ heißt trigonometrische Reihe.