

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ  
KATEDRA TEORETICKÉ ELEKTROTECHNIKY

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelování vf zařízení

Plzeň 2013

Lukáš BRTNA

## Anotace

Účelem diplomové práce je nastínit problematiku vř obvodů a šíření vř vln, matematický popis vř šíření a následné zapracování získaných znalostí ve formě odvozených slabých forem do xml modulu pro Agros.

## Klíčová slova

TE vlna, TM vlna, TEM vlna, slabá forma, vř modelování

# **Abstract**

The objective of the diploma thesis is to summarize hf wave propagation and create mathematical description of hf wave propagation. The knowledge is subsequently processed in the weak forms of propagation and creation an xml modul for Agros2D.

# **Keywords**

TE Wave, TM Wave, TEM Wave, Weak Form, HF Modelling

## Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne 19. listopadu 2012

Jméno a příjmení

.....

## Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce, panu Ing. Davidu Pánkovi, za jeho cenné rady a profesionální vedení bez něž by vznik této práce nebyl vůbec možný.

# Obsah

<b>Seznam symbolů a zkratk</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Šíření vysokofrekvenčního elektromagnetického pole</b>	<b>4</b>
2.1 Šíření vln ve volném prostoru . . . . .	7
2.2 Šíření vln pomocí vlnovodů a vedení . . . . .	8
2.2.1 Vlnovody . . . . .	8
2.2.2 Typy vln šířících se prostřednictvím vlnovodů . . . . .	9
2.2.3 Maxwellovy rovnice pro šíření uvnitř válcových vlnovodů . . . . .	9
2.2.4 TEM vlny . . . . .	11
2.2.5 TE vlny . . . . .	13
2.2.6 TM vlny . . . . .	14
<b>3 Numerické řešení elektromagnetického pole</b>	<b>16</b>
3.1 Metoda konečných prvků . . . . .	16
3.2 Agros 2D . . . . .	16
<b>4 Návrh modulu pro VF pole</b>	<b>16</b>
<b>5 Zatím moje pokusy</b>	<b>17</b>
5.1 Vkládání obrázků . . . . .	17
5.2 Vkládání tabulek . . . . .	18
5.3 Sazba rovnic . . . . .	18
5.4 Odrážky a číslování . . . . .	20
5.4.1 Odrážkový seznam . . . . .	20
5.4.2 Číslovaný seznam . . . . .	20
5.4.3 Popisné výčty (prostředí „Description”) . . . . .	21
5.4.4 Odsazování - tabulátor . . . . .	21
5.5 Citace . . . . .	21
5.6 Verbatim . . . . .	21
<b>6 Závěr</b>	<b>22</b>
<b>Použitá literatura</b>	<b>23</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>24</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>25</b>
<b>Přílohy</b>	<b>1</b>

## Seznam symbolů a zkratk

<b>TE</b> .....	Transverzálně elektrický
<b>TEM</b> .....	Transverzálně elektromagnetický
<b>TM</b> .....	Transverzálně magnetický

# 1 Úvod

Předkládaná diplomová práce má za cíl rozšířit program Agros2D, resp. jeho knihovnu Hermes, vyvíjený na katedře KTE o modul umožňující modelování vysokofrekvenčního pole. Práce také shrnuje obecné poznatky v oblasti vysokofrekvenčního elektromagnetického pole a pokládá teoretický základ pro následnou tvorbu modulu.

Posuzování toho, co je vysoká frekvence je subjektivně závislé na oboru, v kterém se pohybujeme. Pro člověka pracujícího se síťovou frekvencí (50 Hz) bude 1 kHz již frekvence vysoká. Kdežto pro někoho navrhujícího satelitní spoje bude i 1 GHz frekvence nízká. Tato práce bude považovat za vysokofrekvenční zařízení systémy pracující s frekvencí odpovídající rádiovému a mikrovlnnému spektru - tj. 100 MHz až 1000 GHz. [2]



## 2 Šíření vysokofrekvenčního elektromagnetického pole

Každé nestacionární elektromagnetické pole má charakter elektromagnetické vlny, která se šíří prostředím. Toto pole lze popsat veličinami vztahujícími se k jednotlivému elektrickému a magnetickému poli:

$\mathbf{E}$	$V \cdot m^{-1}$	intenzita elektrického pole,
$\mathbf{D}$	$C \cdot m^{-2}$	elektrická indukce,
$\mathbf{H}$	$A \cdot m^{-1}$	intenzita magnetického pole,
$\mathbf{B}$	$T$	magnetická indukce.

Vztahy mezi jednotlivými veličinami lze vyjádřit pomocí základních zákonů pro teorii elektromagnetického pole - soustavy Maxwellových rovnic, níže uvedených v diferenciálním tvaru:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1c)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.1d)$$

kde  $\mathbf{J}$  [ $A \cdot m^{-2}$ ] je vektor proudové hustoty a  $\rho$  [ $C \cdot m^{-3}$ ] objemová hustota náboje.

Vztahy mezi vektorem indukce ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ) a vektorem intenzity pole ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) lze potom vyjádřit:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.2b)$$

kde  $\varepsilon_0$  [ $F \cdot m^{-1}$ ] je permitivita vakua,  $\varepsilon_r$  relativní permitivita prostředí nebo materiálu,  $\mu_0$  [ $H \cdot m^{-1}$ ] permeabilita vakua a  $\mu_r$  relativní permeabilita prostředí nebo materiálu.

Pro harmonicky proměnné pole lze Maxwellovy rovnice přepsat do frekvenční oblasti pomocí symbolicko-komplexní metody, nahrazením difference  $\partial/\partial t$  za  $j\omega$  a dosazením 2.2a a 2.2b:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}, \quad (2.3a)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}}, \quad (2.3b)$$

$$\text{div}(\varepsilon \underline{\mathbf{E}}) = \rho, \quad (2.3c)$$

$$\text{div}(\mu \underline{\mathbf{H}}) = 0. \quad (2.3d)$$

Výše uvedené rovnice platí v nepozměněné podobě pro lineární, homogenní, izotropní prostředí. Lineární znamená, že  $\varepsilon$ ,  $\mu$  a  $\gamma$  nejsou závislé na veličinách pole, homogenní že  $\varepsilon$ ,  $\mu$  a  $\gamma$  nejsou závislé na prostorových souřadnicích a izotropní že  $\varepsilon$ ,  $\mu$  a  $\gamma$  nejsou závislé na směru vektorů veličin pole.  $\gamma$  je měrná vodivost s jednotkou  $S^{-1}$ .

## Helmholtzova rovnice

Pro harmonicky proměnné ( $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ ) pole bez vnějších zdrojů ( $\rho = 0$ ,  $\underline{J}_{ext} = 0$ ) mohou být první dvě Maxwellovy rovnice vyjádřeny ve formě fázoru:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H}, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{E}. \quad (2.4b)$$

Pomocí následujících kroků mohou být tyto rovnice upraveny do tvaru tzv. Helmholtzovy vlnové rovnice (pro fázor vektoru  $\underline{E}$ ):

$$\underline{H} = \frac{\nabla \times \underline{E}}{-j\omega\mu} \quad (2.5a)$$

$$\nabla \times \frac{\nabla \times \underline{E}}{-j\omega\mu} = j\omega\varepsilon\underline{E} \quad (2.5b)$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = \omega^2\mu\varepsilon\underline{E} \quad (2.5c)$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (2.5d)$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = k^2\underline{E} \quad (2.5e)$$

$$-\nabla^2 \underline{E} = k^2\underline{E} \quad (2.5f)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = k^2 \quad (2.5g)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0. \quad (2.5h)$$

Konstanta  $k$  [ $m^{-1}$ ] je definována jako konstanta šíření, nebo také vlnové číslo. Odráží existenci materiálových parametrů prostředí, ve kterém se vlna šíří. Konstanta je závislá na permitivitě, permeabilitě a také na frekvenci:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Tvar uvedený v 2.5f bývá nazýván jako **homogenní Helmholtzova rovnice** pro fázor vektoru  $\underline{E}$ :

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0, \quad (2.7)$$

a platí pro oblast bez vnějších zdrojů ( $\rho = 0$ ,  $\underline{J}_{ext} = 0$ ).

Pokud neplatí, že  $\rho = 0$ ,  $\underline{J}_{ext} = 0$ , pravá strana rovnice není nulová (nejsou nulové členy obsahující  $\rho$  a  $\underline{J}_{ext}$ ) a tvar se označuje jako **nehomogenní Helmholtzova rovnice**:

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu\underline{J}_{ext}. \quad (2.8)$$

Podobně se postupuje i při výpočtu Helmholtzovy rovnice pro fázor vektoru  $\underline{B}$ . Homogenní Helmholtzova rovnice má tvar:

$$\nabla^2 \underline{B} + k^2 \underline{B} = 0. \quad (2.9)$$

Rozšířením o pravou stranu v prostředí se vnějším zdroji ( $\underline{J}_{ext} \neq 0$ ) dojdeme k nehomogenní Helmholtzově rovnici pro fázor vektoru  $\underline{B}$ :

$$\nabla^2 \underline{B} + k^2 \underline{B} = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext}. \quad (2.10)$$

Zejména pro popis přenosových vedení se používá také konstanta  $\gamma$  (nemá nic společného s gamou používanou pro veličinu konduktivity) vyjadřující měrnou vlnovou míru přenosu:

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (2.11)$$

$\alpha$  [ $Np \cdot km^{-1}$ ] představuje měrný útlum a  $\beta$  [ $rad \cdot km^{-1}$ ] měrný fázový posun.

Dalším parametrem, kterým je možné popsat určité prostředí, je vlnová impedance  $\underline{Z}$  [ $\Omega$ ]:

$$\underline{Z} = \frac{\omega \mu}{\underline{k}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{j\omega \varepsilon + \omega}}. \quad (2.12)$$

Vlnová impedance je obecně komplexní veličinou popisující poměr mezi intenzitou elektrického pole  $\underline{E}$  a intenzitou magnetického pole  $\underline{H}$ :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}. \quad (2.13)$$

Ve volném prostoru je vlnová impedance rovna tzv. vlastní (intrinsic) impedanci:

$$\underline{Z}_0 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega. \quad (2.14)$$

## Vlnová rovnice

Popsat elektromagnetické vlnění lze velmi dobře pomocí vlnové rovnice odvoditelné z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru. Použijeme 2.1a a 2.1b. Na levou stranu 2.1a dosadíme 2.2b. Na pravou dosadíme  $\text{rot } \underline{J} = \gamma \cdot \underline{E}$ ,  $\gamma$  [ $S \cdot m^{-1}$ ] a 2.2a. V 2.16e potom na pravou stranu dosadíme 2.1c

$$\frac{1}{\mu} \text{rot } \underline{B} = \mu \underline{E} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (2.15a)$$

$$\text{rot } \underline{B} = \mu \gamma \underline{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (2.15b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.16a)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (2.16b)$$

$$-\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (2.16c)$$

$$-\frac{\partial \left( \mu\gamma \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)}{\partial t} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (2.16d)$$

$$-\mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (2.16e)$$

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.16f)$$

Podobně postupujeme i při výpočtu vektoru  $\mathbf{H}$ , pouze místo 2.1c použijeme 2.1d. Výsledkem jsou tzv. **zobecněné vlnové rovnice**:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.17a)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.17b)$$

Pokud na prostředí působí navíc proud vynucený vnější zdrojem ( $\mathbf{J}_{\text{ext}}$ ), přecházejí tyto rovnice do nehomogenní vlnové rovnice (pravá strana rovnic není rovna nule):

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{\text{ext}}}{\partial t}, \quad (2.18a)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\mu \operatorname{rot} \mathbf{J}_{\text{ext}}. \quad (2.18b)$$

Téměř identické rovnice platí také pro vektory elektrické indukce  $\mathbf{D}$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}$ :

$$\Delta \mathbf{D} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \frac{\rho}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{\text{ext}}}{\partial t}, \quad (2.19a)$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \operatorname{rot} \mathbf{J}_{\text{ext}}. \quad (2.19b)$$

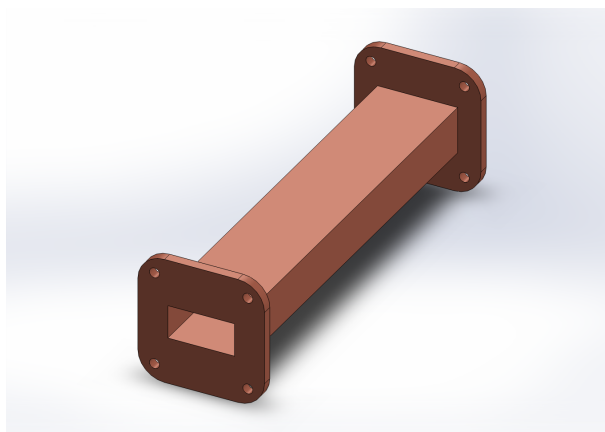
Výše uvedené nehomogenní rovnice 2.19 přejdou při  $\mathbf{J}_{\text{ext}} = 0$  do rovnic homogenních stejně jako 2.17 (pravá strana rovnic bude rovna 0).

## 2.1 Šíření vln ve volném prostoru

## 2.2 Šíření vln pomocí vlnovodů a vedení

### 2.2.1 Vlnovody

Píše se rok 1893 a britský matematik a fyzik Oliver Heaviside pracuje na jednom ze svých projektů. Zabývá se možností šíření elektromagnetických vln uvnitř duté trubice. A tuto myšlenku odmítá. Věří, že elektromagnetickou energii nelze přenášet bez pomoci dvou vodičů. O čtyři roky později, roku 1897, tuto otázku přezkoumává jiný britský fyzik, Lord Reyleigh. A matematicky dokazuje, že šíření elektromagnetických vln dutou trubicí je možné, a to jak pro vlnovody s kruhovým, tak pravoúhlým průřezem.



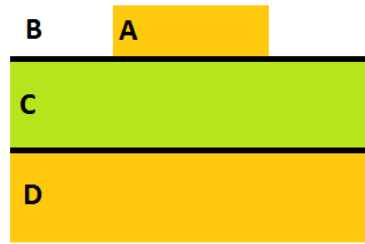
**Obr. 2.1:** Vlnovod masivnější konstrukce pro šíření vln o nižší frekvenci (okolo 1 GHz)

Výhodou vlnovodů je jejich nízký útlum a schopnost přenášet vysoké výkony, stinnou stránkou ale je jejich rozměrnost (čím nižší frekvence, tím masivnější konstrukce) a cena. Pro frekvenci kolem 1 GHz jsou rozměry již 20 cm x 10 cm a s klesající frekvencí dále rostou (viz. obr. 2.1. Pro vysoké frekvence (nad 100 GHz) naopak rozměry klesají na desetiny milimetru a takovéto vlnovody jsou proto náročné na výrobu. Nezřídka se proto používají tzv. nadrozměrné vlnovody, kdy velikost vlnovodu překročí hranici pro šíření jednoho vidu a vlnovodem se šíří vidů více.

Druhým způsobem pro přenos vysokých frekvencí jsou koaxiální vedení. Koaxiální vedení vynikají šířkou pásma, kterou mohou přenášet a jsou i cenově dostupnější, nicméně již méně jsou vhodná pro stavbu komplexních mikrovlnných komponent.

Alternativu představují planární vlnovody vyráběné ve formě stripline, microstrip, koplanárního vlnovodu a mnoha dalších. Kromě malých rozměrů a nízké ceny umožňují díky planární technologii výroby i snadnou integrovatelnost s dalšími elektronickými prvky a stavbu mikrovlnných obvodů.

Microstrip je dnes nejpoužívanějším médiem pro integrované mikrovlnné obvody. Sestává se z vodivého proužku, který je od země oddělen dielektrickým substrátem, jak je znázorněno na obr. 2.2. Microstrip byl vyvinut v laboratořích ITT jako konkurent jiné technologii, zveřejněné v roce 1952, stripline. Nevýhodou technologie microstrip v porovnání s klasickými vlnovody jsou její vyšší ztráty a nižší výkon, který je schopna přenášet. Z důvodu neuzavřenosti je také microstrip náchylnější na přeslechy a rušení.



Obr. 2.2: Microstrip a jeho části

Elektromagnetická vlna šířící se microstripem existuje z části v dielektrickém substrátu a z části ve vzduchu nad ním. A jelikož dielektrická konstanta substrátu je jiná (větší) než vzduchu, vzniká nehomogenní médium, skrz které se vlna šíří. Nehomogenita a frekvenční rozptyl se ještě dále zhoršují spolu s větší šířkou substrátu. Proto až zvládnutí technologie výroby dostatečně tenkých substrátů umožňující menší frekvenční závislost vedení a potlačení podélných složek elektromagnetického pole umožnilo široké rozšíření a skutečný nástup technologie microstrip.

### 2.2.2 Typy vln šířících se prostřednictvím vlnovodů

Za běžných okolností nabývají vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  hodnot v osách roviny kolmé na šíření pole i roviny rovnoběžné s šířením pole (podélné). V určitých případech však může dojít k potlačení podélné složky šíření. Přenosová vedení skládající se ze dvou a více vodičů umožňují šíření tzv. TEM vln (Transverse ElectroMagnetic - transverzálně elektromagnetických). Tyto vlny postrádají podélnou složku elektrického i magnetického pole. Vlnovody sestávající se z jednoho vodiče umožňují šíření TE vln (Transverse Electric - transverzálně elektrických) postrádajících podélnou složku elektrického pole nebo TM vln (Transverse magnetic - transverzálně magnetických) postrádajících podélnou složku magnetického pole. Nikoli však obou současně. Výhodou TEM vln je, že mají jedinečně definované napětí, proud a charakteristickou impedanci. U TE a TM vln toto jednoznačné určení charakteristické impedance není možné, ale existuje matematický postup, který dokáže úspěšně pracovat s modelem charakteristické impedance i u těchto vln.

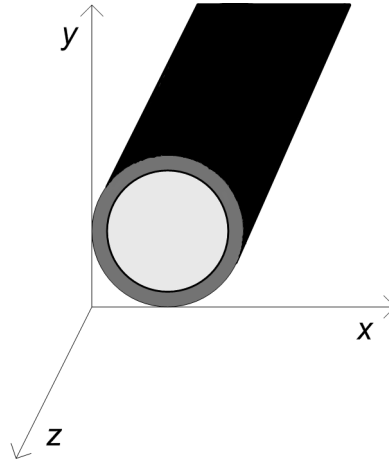
### 2.2.3 Maxwellovy rovnice pro šíření uvnitř válcových vlnovodů

Předpokladem je šíření harmonického pole se závislostí  $e^{j\omega t}$  podél osy  $z$  válcového přenosového vedení nebo vlnovodu, které je ve směru osy  $z$  uniformní, nekonečně dlouhé a dokonale vodivé. Geometrie takového vlnovodu je znázorněna na obr. 2.3 Elektrické a magnetické pole potom může být vyjádřeno takto:

$$\underline{E}(x, y, z) = [\underline{e}(x, y) + \hat{z}e_z(x, y)]e^{j\beta z}, \quad (2.20a)$$

$$\underline{H}(x, y, z) = [\underline{h}(x, y) + \hat{z}h_z(x, y)]e^{j\beta z}. \quad (2.20b)$$

$\underline{e}(x, y)$  a  $\underline{h}(x, y)$  vyjadřují příčnou (transverzální) složku elektrického a magnetického pole,  $e_z$  a  $h_z$  představují složku podélnou. Pokud by se vlna šířila v opačném směru



**Obr. 2.3:** Geometrie válcového vlnovodu v kartézském souřadném systému

(ne ve směru  $+z$ , ale  $-z$ ), nahradí se  $\beta$  za  $-\beta$ . V případě, kdy by byl přítomen útlum, nahradí se se konstanta šíření  $j\beta$  za komplexní konstantu  $\gamma$ ,  $\gamma = \alpha + j\beta$ .

Pokud vlnovod nebo přenosové vedení jsou nezřídlové mohou být Maxwellovy rovnice vyjádřeny:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H}, \quad (2.21a)$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{E}. \quad (2.21b)$$

Tyto vektorové rovnice mohou být převedeny do tvaru jednotlivých parciálních diferenciálních rovnic:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x, \quad (2.22a)$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y, \quad (2.22b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z, \quad (2.22c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x, \quad (2.23a)$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y, \quad (2.23b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z. \quad (2.23c)$$

Z těchto rovnic mohou být následně vyjádřeny příčné (transverzální) složky jed-

notlivých  $E$  a  $H$  polí:

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \quad (2.24a)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (2.24b)$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (2.24c)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right). \quad (2.24d)$$

Příklad výpočtu pro získání složky  $H_x$  dosazením  $E_y$  z 2.23b do 2.22a:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\beta H_x}{\omega \varepsilon} - \frac{1}{j\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta \left( -\frac{\beta H_x}{\omega \varepsilon} - \frac{1}{j\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) &= -j\omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\frac{\beta^2 H_x}{\omega \varepsilon} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -j\omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -j\omega \mu H_x + j\frac{\beta^2 H_x}{\omega \varepsilon} \\ H_x &= \frac{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}}{-j\omega \mu + j\frac{\beta^2}{\omega \varepsilon}} \\ H_x &= j \frac{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \\ H_x &= j \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \frac{\omega \varepsilon}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \\ k_c^2 &= k^2 - \beta^2 = (\omega \sqrt{\mu \varepsilon})^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2 \\ H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left( \mu \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$k$  je vlnové číslo materiálu uvnitř přenosového vedení nebo vlnovodu,  $k_c$  potom tzv. mezní (cutoff) vlnové číslo. V případě přítomnosti ztrát je  $\varepsilon$  nahrazeno komplexním  $\varepsilon(1 - j \tan \gamma)$ , kde  $\tan \gamma$  představuje ztrátový tangens materiálu.

## 2.2.4 TEM vlny

Pro TEM (transverzálně elektromagnetické) vlny platí, že  $E_z = 0$  a  $H_z = 0$  (není zde přítomna podélná složka elektrického ani magnetického pole). Dosazením těchto hodnot do 2.24 zjistíme, že  $H, E = j(0 - 0)/k_c^2$  a tedy  $H, E = 0/(k_c^2)$ . Příčné složky



polí jsou tedy také nulové. Pokud se ovšem  $k_c^2 = 0$ , potom získáváme neurčitý výsledek. To mimo jiné znamená, že mezní (cutoff) vlnové číslo pro TEM vlny  $k_c = 0$ .

Pokud dosadíme  $E_z = 0$  do 2.22a,  $H_x$  poté do 2.23b a  $H_z = 0$ , získáme:

$$\begin{aligned} j\beta E_y &= -j\omega\mu H_x \\ H_x &= -\frac{\beta E_y}{\omega\mu} \\ -j\beta \left( -\frac{\beta E_y}{\omega\mu} \right) &= j\omega\varepsilon E_y \\ \frac{\beta^2}{\omega\mu} &= \omega\varepsilon \\ \beta^2 &= \omega^2\mu\varepsilon \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \end{aligned}$$

V 2.5 bylo uvedeno odvození Helmholtzovy rovnice. Její tvar pro  $k = 0$  a příčné pole bez přítomnosti podélné složky  $z$  lze vyjádřit:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0, \quad (2.25a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_y = 0. \quad (2.25b)$$

Tyto rovnice potom mohou být přepsány do formy rovnic uvedených v 2.20

$$\nabla_t^2 \underline{e}(x, y) = 0, \quad (2.26)$$

využívající Laplacova operátoru ve dvourozměrném příčném pole.

Stejný postup lze aplikovat i u příčného magnetického pole a dojít ke stejnému výsledku:

$$\nabla_t^2 \underline{h}(x, y) = 0. \quad (2.27)$$

Z toho plyne, že příčné pole TEM vlny je stejné jako statické pole mezi dvěma vodiči. A v případě elektrostatiky lze elektrické pole vyjádřit jako gradient skalárního potenciálu:

$$\underline{e}(x, y) = -\nabla_t \Phi(x, y). \quad (2.28)$$

Aby tato rovnice ale mohla platit, musí být ještě splněna podmínka, že pole musí být nevírové:

$$\nabla_t \times \underline{e} = 0, \quad (2.29)$$

což v tomto případě opravdu platí:

$$\nabla_t \times \underline{e} = -j\omega\mu h_z \hat{z} = 0. \quad (2.30)$$

I toto pole lze potom tedy vyjádřit jako Laplacovu rovnici:

$$\nabla_t^2 \Phi(x, y) = 0. \quad (2.31)$$

V elektrostatice lze napětí vyjádřit jako rozdíl dvou potenciálů:

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \underline{E} d\underline{l}. \quad (2.32)$$

Proud se poté získá z Ampérova zákona:

$$I = \oint_C \underline{H} d\underline{l}. \quad (2.33)$$

Vlnová impedance TEM vlny se získá jako podíl příčného elektrického a magnetického pole. První rovnice vychází z 2.23a při  $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ :

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.34a)$$

$$j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (2.34b)$$

$$\frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.34c)$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta. \quad (2.34d)$$

Druhá vychází z 2.22a:

$$Z_{TEM} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2.35a)$$

$$j\beta E_x = -j\omega\mu H_y \quad (2.35b)$$

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{\omega\mu}{\beta} \quad (2.35c)$$

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta. \quad (2.35d)$$

Výsledky z 2.34 a 2.35 je možno spojit do jedné rovnice:

$$\underline{h}(x, y) = \frac{1}{Z_{TEM}} \hat{z} \times \underline{e}(x, y). \quad (2.36)$$

Charakteristická impedance  $Z_0$  se vypočte jako  $U/I$  a lze ji získat z 2.32 a 2.33

### 2.2.5 TE vlny

Na rozdíl od TEM vln, kde jsou podélné složky  $H$  i  $E$  pole se u TE vln  $H_z \neq 0$ . Pro přítomnost podélné složky magnetického pole se jim také říká  $H$ -vlny. U TE vln

mohou být rovnice 2.24 zjednodušeny na:

$$H_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2.37a)$$

$$H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (2.37b)$$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (2.37c)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (2.37d)$$

U TE vln neplatí, že  $k_c = 0$ , a konstanta šíření  $\beta$  je funkcí frekvence a geometrie vedení. Nejprve se proto musí spočítat  $H_z$  z Helmholtzovi vlnové rovnice (odvození této rovnice je nastíněno v 2.5):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z = 0. \quad (2.38)$$

Tato rovnice může být pro  $H_z(x, y, z) = h_z(x, y)e^{-j\beta z}$  upravena na:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) h_z = 0. \quad (2.39)$$

K vyřešení této rovnice musí být tedy známy hraniční podmínky a geometrie konkrétního vlnovodu.

Impedance TE vlny je:

$$Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2.40a)$$

$$j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \quad (2.40b)$$

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta}, \quad (2.40c)$$

z čehož plyne, že  $Z_{TE}$  je frekvenčně závislé.

### 2.2.6 TM vlny

TM vlny jsou podobné TE vlnám tím, že je v nich též jedna podélná složka pole přítomna. V tomto případě je to složka  $z$  pole  $H$ . Platí tedy  $E_z = 0$ ,  $H_z \neq 0$ . Tyto vlny jsou proto také někdy nazývány jako  $H$  vlny. Rovnice 2.24 mohou být pro TM vlny vyjádřeny jako:

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.41a)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.41b)$$

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.41c)$$

$$E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (2.41d)$$

Stejně jako u TE vln, neplatí, že  $k_c = 0$ , a konstanta šíření  $\beta$  je funkcí frekvence a geometrie vedení. Nejprve se proto musí spočítat  $E_z$  z Helmholtzovi vlnové rovnice (odvození této rovnice je nastíněno v 2.5):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0. \quad (2.42)$$

Tato rovnice může být pro  $E_z(x, y, z) = e_z(x, y)e^{-j\beta z}$  upravena na:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) e_z = 0. \quad (2.43)$$

K vyřešení této rovnice musí být tedy známy hraniční podmínky a geometrie konkrétního vlnovodu.

Impedance TM vlny je:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.44a)$$

$$j\beta H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (2.44b)$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta}{\omega\epsilon}, \quad (2.44c)$$

z čehož plyne, že  $Z_{TM}$  je frekvenčně závislé.

### **3 Numerické řešení elektromagnetického pole**

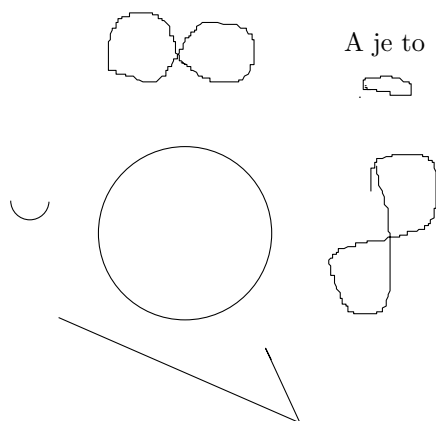
#### **3.1 Metoda konečných prvků**

#### **3.2 Agros 2D**

### **4 Návrh modulu pro VF pole**

## 5 Zatím moje pokusy

### 5.1 Vkládání obrázků



**Obr. 5.1:** Obrázek v pdf kreslený v ipe



**Obr. 5.2:** Fotka v jpg

## 5.2 Vkládání tabulek

Zkušební tvorba tabulek. Nejhorší je tvorba sirotek. Otázkou je, jak jím předejít. Klasické parametry nepomáhají. Problém se ani na fórech neřeší...

**Tab. 5.1:** Tabulka s přizpůsobením šířky sloupců

Frekvenční pásmo	Technologie	Region
700Mhz	LTE	USA
800Mhz	LTE	Evropa
850Mhz	GSM	USA
900Mhz	GSM	Evropa
1700Mhz	3G	USA
1800Mhz	GSM	Evropa
1900Mhz	GSM	USA
2100Mhz	3G	Evropa
2600Mhz	LTE	Evropa

Fixní šířka sloupce může být nastavena příkazem "`p{5cm}`", ale tento příkaz vyvolá zarovnání doleva. Při požadavku na zarovnání na střed nebo doprava ho nelze použít a buňka se musí manuálně roztáhnout doplněním násilných mezer " "v první řádce tak, aby všechny sloupce byly stejně široké.

**Tab. 5.2:** Tabulka s fixní šířkou sloupců

Frekvenční pásmo	Technologie	Region
700Mhz	LTE	USA
800Mhz	LTE	Evropa
850Mhz	GSM	USA
900Mhz	GSM	Evropa
1700Mhz	3G	USA
1800Mhz	GSM	Evropa
1900Mhz	GSM	USA
2100Mhz	3G	Evropa
2600Mhz	LTE	Evropa

## 5.3 Sazba rovnic

Slavná rovnice Alberta Einsteina praví:  $E = m \cdot c^2$ . Platí pro všechny částice s nenulovou klidovou hmotností. Energie fotonu je naproti tomu determinována pouze jeho frekvencí (a Planckovou konstantou)  $E = h \cdot f$ .

Nyní se podíváme na zoubek číslovaným rovnicím. Co třeba takhle první Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru?

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.1)$$

Pro sazbu matematiky platí obecně jiná pravidla. Jinak se například zadávají mezery nebo tučné písmo.

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad x^{2+p} \geq 0 \quad (5.2)$$

Zkusíme i odkazování. Vzpomínáte si na první Maxwellovu rovnici? Jestli ne, je to tato: 5.1. Btw., znáte ten hezký symbol pro množinu reálných čísel? Je to tento:  $\mathbb{R}$

A teď třeba funkce a odmocniny. Jako příklad do písemky z matematiky. Najděte definiční obor funkce:

$$f(x) : \quad \left( \frac{\sqrt{3^{-x}}}{\sqrt[3]{x-7}} \right)^2 \quad (5.3)$$

Studenti, pamatujete si ještě, derivace? Tohle musíte umět z hlavy i kdybych vás probudil uprostřed noci:  $y = \cos(x^3) \quad y' = \quad y'' =$

Kdo z vás si vzpomene ještě na limity a ví, co tato znamená?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Vrátíme se zpět k Maxwellovým rovnicím. Budeme pokračovat popořadě a podíváme se na druhou Maxwellovu rovnici, tentokrát v integrálním tvaru:

$$\oint_c \mathbf{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.4)$$

A nyní něco trochu komplikovanějšího. Jak se spočte taková zřídlovost?

$$\nabla \times \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

Občas bude zapotřebí vysázet víc rovnic současně. Například všechny Maxwellovy rovnice. Následující ukázka předvádí použití příkazu "align" nahrazující "equation" pro sazbu více rovnic. Rovnítko se musí doplnit znaky "&": "&=", aby byly rovnice správně vycentrovány na střed.

$$f(x) = \cos x \quad (5.6a)$$

$$f'(x) = -\sin x \quad (5.6b)$$

$$\operatorname{div} x = 0 \quad (5.6c)$$

Nebo napsat vysvětlivku k rovnici, která nebude odsazená.



## 5.4 Odrážky a číslování

### 5.4.1 Odrážkovaný seznam

Státy USA, které jsem navštívil:

- Kalifornie
- Florida
- New Jersey
- New York
- Illinois
- Wisconsin
- Minnesota
- Pensylvánie
- Maryland
- Virginia
- District of Columbia

### 5.4.2 Číslovaný seznam

Pořadí, v jakém jsem je navštívil:

1. Illinois
2. Wisconsin
3. Minnesota
4. Kalifornie
5. New York
6. New Jersey
7. Pensylvánie
8. Maryland
9. District of Columbia
10. Virginia
11. Florida

### 5.4.3 Popisné výčty (prostředí „Description”)

Hlavní města některých států USA, které jsem navštívil:

**Kalifornie** Sacramento

**Wisconsin** Madison

**Maryland** Annapolis

### 5.4.4 Odsazování - tabulátor

Největší města některých států USA, která jsem navštívil:

Illinois	Chicago
Maryland	Baltimore
Kalifornie	Los Angeles

## 5.5 Citace

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X nabízí i speciální prostředí pro citace a zvýraznění textu:

*„Veni, vidi, vici.”*

## 5.6 Verbatim

Prostředí „Verbatim” se hodí na sazbu textů, kde není žádoucí brát zřetel na formátovací značky. Příkladem je sazba zdrojových kódů.

```
System.out.println("Ja su lama, nevzpomenu si ani na zapis hlavicky v Jave")
```

## 6 Závěr

Věřím, že se povede dojít až k úspěšnému odvození finálních rovnic a vytvoření modulu pro modelování vysokofrekvenčního pole.

V současné době zdokonaluji kapitulu o vlnovodech a chtěl bych odvodit okrajové podmínky pro Helmholtzovu rovnici (ale nevím, co to je ani jak na to) - samotnou Helmholtzovu rovnici jsem již odvodil. Také bych Helmholtzovu rovnici chtěl vyjádřit ve válcových souřadnicích.

V další fázi bych dotáhl do konce kapitulu o šíření vln ve volném prostoru a vytvořil kapitulu (nebo přílohu) se stručnými informacemi o programu Agros2D a jeho ovládání.

Poté přijde na řadu to nejtěžší. Zjistit bližší informace o tom, co jsou to tzv. slabé formy, odvodit rovnice, vytvořit modul a analyzovat jeho chování uvnitř programu Agros2D.

Na závěr potom porovnat jeho chování a modelování vysokofrekvenčních zařízení v programu Comsol.

Modleme se za to, že se práce úspěšně povede dotáhnout do konce a v dubnu tady bude moci čnít: „Práce dokončena”

In nomine Patris et Filii et Spiritus Sancti. Amen.

## Použitá literatura

- [1] POZAR, David M. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 1998. Second Edition. ISBN 0-471-17096-8.
- [2] POZAR, David M. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2012. Fourth Edition. ISBN 978-0-470-63155-3.
- [3] KASTNER, Raphael. SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING, Tel Aviv University. Antennas and Radiation. Tel Aviv, 2009. Dostupné z: <http://www.scribd.com/doc/56316827/3/Maxwell-Equations-in-the-Frequency-Domain>
- [4] Rectangular waveguide dimensions. Microwaves101.com [online]. Tucson, AZ, November 3, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.microwaves101.com/encyclopedia/waveguidedimensions.cfm>
- [5] Microstrip. Microwaves101.com [online]. Tucson, AZ, February 18, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.microwaves101.com/encyclopedia/microstrip.cfm>
- [6] Intrinsic Impedance. Antenna-Theory.com [online]. (c) 2009-2011 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.antenna-theory.com/definitions/intrinsicimpedance.php>
- [7] KARBAN, Pavel. FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING, University of West Bohemia in Pilsen. Agros2D [online]. Plzeň, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.agros2d.org/>

## Seznam obrázků

2.1	Vlnovod masivnější konstrukce pro šíření vln o nižší frekvenci (okolo 1 GHz) . . . . .	8
2.2	Microstrip a jeho části . . . . .	9
2.3	Geometrie válcového vlnovodu v kartézském souřadném systému . . . .	10
5.1	Obrázek v pdf kreslený v ipe . . . . .	17
5.2	Fotka v jpg . . . . .	17

## Seznam tabulek

5.1	Tabulka s přizpůsobením šířky sloupců . . . . .	18
5.2	Tabulka s fixní šířkou sloupců . . . . .	18

## **Příloha I.**

# Harmonogram činností

Měsíc a rok	Rozpis činností
Listopad 2012	Helmholtzova rovnice, vlnovody
Prosinec 2012	Šíření vln ve volném prostoru, Agros2D
Leden 2013	Metoda konečných prvků
Únor 2013	Návrh modulu pro VF pole
Březen 2013	Ověření funkčnosti proti Comsolu, ladění
Duben 2013	Opravy, dodělávky

Vedoucí práce: Ing. David Pánek, Ph.D.

Podpis vedoucího práce: .....

Datum: .....