

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA TEORETICKÉ ELEKTROTECHNIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelování vf zařízení

Plzeň 2013

Lukáš BRTNA

Anotace

Účelem diplomové práce je nastínit problematiku vř obvodů a šíření vř vln, matematický popis vř šíření a následné zapracování získaných znalostí ve formě odvozených slabých forem do xml modulu pro Agros.

Klíčová slova

TE vlna, TM vlna, TEM vlna, slabá forma, vř modelování

Abstract

The objective of the diploma thesis is to summarize hf wave propagation and create mathematical description of hf wave propagation. The knowledge is subsequently processed in the weak forms of propagation and creation an xml modul for Agros2D.

Keywords

TE Wave, TM Wave, TEM Wave, Weak Form, HF Modelling

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne 24. dubna 2013

Jméno a příjmení

.....

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce, panu Ing. Davidu Pánkovi, za jeho cenné rady a profesionální vedení bez něžž by vznik této práce nebyl vůbec možný.

Obsah

Seznam symbolů a zkratek	3
1 Úvod	4
2 Šíření vysokofrekvenčního elektromagnetického pole	5
2.1 Vlnová rovnice	6
2.2 Helmholtzova rovnice	8
2.3 Šíření vln ve volném prostoru	10
2.3.1 Rovinná homogenní vlna	10
2.4 Šíření vln pomocí vlnovodů a vedení	12
2.4.1 Vlnovody	12
2.4.2 Typy vln šířících se prostřednictvím vlnovodů	13
2.4.3 Maxwellovy rovnice pro šíření uvnitř válcových vlnovodů	13
2.4.4 TEM vlny	15
2.4.5 TE vlny	17
2.4.6 TM vlny	18
3 Numerické řešení elektromagnetického pole	20
3.1 Metoda konečných prvků	20
3.2 Agros 2D	22
4 Návrh modulu pro VF pole	23
4.1 Slabé formulace vlnových rovnice	23
4.1.1 Slabá formulace fáze E v kartézské souřadnicové soustavě . . .	24
4.1.2 Slabá formulace fáze H v kartézské souřadnicové soustavě . .	26
4.1.3 Slabá formulace fáze E ve válcové souřadnicové soustavě . . .	30
4.1.4 Slabá formulace fáze H ve válcové souřadnicové soustavě . . .	33
4.2 Okrajové podmínky	36
4.2.1 Dirichletova okrajová podmínka	36
4.2.2 Neumannova okrajová podmínka	37
4.2.3 Newtonova okrajová podmínka	44
4.2.4 Neumannova okrajová podmínka zadaná povrchovým proudem .	49
4.3 Postprocessor - dopočet různých veličin pole	53
4.3.1 Intenzita magnetického pole	54
4.3.2 Intenzita elektrického pole	54
4.3.3 Poyntingův vektor	56
5 Zatím moje pokusy	58
5.1 Vkládání obrázků	58
5.2 Vkládání tabulek	59
5.3 Sazba rovnic	59
5.4 Odrážky a číslování	61
5.4.1 Odrážkový seznam	61
5.4.2 Číslovaný seznam	61
5.4.3 Popisné výčty (prostředí „Description”)	62

5.4.4	Odsazování - tabulátor	62
5.5	Citace	62
5.6	Verbatim	62
6	Závěr	63
	Použitá literatura	64
	Seznam obrázků	66
	Seznam tabulek	67
	Přílohy	1

Seznam symbolů a zkratk

TE	Transverzálně elektrický
TEM	Transverzálně elektromagnetický
TM	Transverzálně magnetický

1 Úvod

Předkládaná diplomová práce má za cíl rozšířit program Agros2D, resp. jeho knihovnu Hermes, vyvíjený na katedře KTE o modul umožňující modelování vysokofrekvenčního pole. Práce také shrnuje obecné poznatky v oblasti vysokofrekvenčního elektromagnetického pole a pokládá teoretický základ pro následnou tvorbu modulu.

Posuzování toho, co je vysoká frekvence je subjektivně závislé na oboru, v kterém se pohybujeme. Pro člověka pracujícího se síťovou frekvencí (50 Hz) bude 1 kHz již frekvence vysoká. Kdežto pro někoho navrhujícího satelitní spoje bude i 1 GHz frekvence nízká. Tato práce bude považovat za vysokofrekvenční zařízení systémy pracující s frekvencí odpovídající rádiovému a mikrovlnnému spektru - tj. 100 MHz až 1000 GHz. [2]

2 Šíření vysokofrekvenčního elektromagnetického pole

Každé nestacionární elektromagnetické pole má charakter elektromagnetické vlny, která se šíří prostředím. Toto pole lze popsat veličinami vztahujícími se k jednotlivému elektrickému a magnetickému poli:

\mathbf{E}	$[\text{V} \cdot \text{m}^{-1}]$	intenzita elektrického pole,
\mathbf{D}	$[\text{C} \cdot \text{m}^{-2}]$	elektrická indukce,
\mathbf{H}	$[\text{A} \cdot \text{m}^{-1}]$	intenzita magnetického pole,
\mathbf{B}	$[\text{T}]$	magnetická indukce.

Vztahy mezi jednotlivými veličinami lze vyjádřit pomocí základních zákonů pro teorii elektromagnetického pole - soustavy Maxwellových rovnic, níže uvedených v diferenciálním tvaru:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1c)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.1d)$$

kde \mathbf{J} $[\text{A} \cdot \text{m}^{-2}]$ je vektor proudové hustoty a ρ $[\text{C} \cdot \text{m}^{-3}]$ objemová hustota náboje.

Vztahy mezi vektorem indukce (\mathbf{D} , \mathbf{B}) a vektorem intenzity pole (\mathbf{E} , \mathbf{H}) lze potom vyjádřit:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.2b)$$

kde ε_0 $[\text{F} \cdot \text{m}^{-1}]$ je permitivita vakua, ε_r relativní permitivita prostředí nebo materiálu, μ_0 $[\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$ permeabilita vakua a μ_r relativní permeabilita prostředí nebo materiálu.

Pro harmonicky proměnné pole lze Maxwellovy rovnice přepsat do frekvenční oblasti pomocí symbolicko-komplexní metody, nahrazením diference $\partial/\partial t$ za $j\omega$ a dosazením 2.2a a 2.2b:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}, \quad (2.3a)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}}, \quad (2.3b)$$

$$\text{div}(\varepsilon \underline{\mathbf{E}}) = \rho, \quad (2.3c)$$

$$\text{div}(\mu \underline{\mathbf{H}}) = 0. \quad (2.3d)$$

Výše uvedené rovnice platí v nepozměněné podobě pro lineární, homogenní, izotropní prostředí. Lineární znamená, že ε , μ a γ nejsou závislé na veličinách pole, homogenní že ε , μ a γ nejsou závislé na prostorových souřadnicích a izotropní že ε , μ a γ nejsou závislé na směru vektorů veličin pole. Veličina γ je měrná vodivost s jednotkou S^{-1} . [14]

2.1 Vlnová rovnice

Vlnová rovnice pro vektor \mathbf{E}

Popsat elektromagnetické vlnění lze velmi dobře pomocí vlnové rovnice odvoditelné z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru. Použijeme 2.1a (první Maxwellovu rovnici), ale budeme uvažovat, že kromě indukovaného proudu \mathbf{J} se v oblasti nachází také proud vnucený vnějším zdrojem \mathbf{J}_{ext} . Výsledkem bude modifikace rovnice 2.1a na:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.4)$$

Na levou stranu rovnice 2.4 dosadíme za \mathbf{H} výraz z 2.2b. Na pravou stranu dosadíme za $\mathbf{J} = \gamma \cdot \mathbf{E}$, γ [$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$] a za \mathbf{D} výraz z 2.2a:

$$\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_{ext} \quad (2.5a)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \gamma \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.5b)$$

Na 2.1b (druhou Maxwellovu rovnici) použijeme operaci rotace:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} \quad (2.6)$$

Za výraz $\text{rot } \mathbf{B}$ na pravou stranu rovnice dosadíme 2.5b:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \gamma \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_{ext} \right). \quad (2.7)$$

Na levou stranu rovnice použijeme vztah vektorové identity $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$, pravou stranu rovnice roznásobíme:

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{ext}}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Z 2.1c (třetí Maxwellovy rovnice) dosadíme za $\text{div } \mathbf{E}$ výraz ρ/ε . Na pravou stranu rovnice přesuneme zdrojové funkce elektromagnetického pole. Výsledkem je **zobecněná nehomogenní vlnová rovnice pro vektor \mathbf{E}** :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{ext}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Pokud na dané prostředí nepůsobí vnější zdroje ($\rho = 0$ a $\mathbf{J}_{ext} = 0$), je pravá strana nulová a rovnice přechází do tvaru **zobecněné homogenní vlnové rovnice pro vektor \mathbf{E}** :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.10)$$

Vlnová rovnice pro vektor \mathbf{B}

Postup při odvozování vektoru magnetické indukce \mathbf{B} se příliš neliší od odvození vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E} . Z 2.4 (modifikované první Maxwellovy rovnice) opět vyjádříme 2.5b ($\text{rot } \mathbf{B}$). Na rovnici poté použijeme operaci rotace:

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mu\gamma \text{rot } \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \text{rot } \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.11)$$

Na levou stranu rovnice použijeme vztah vektorové identity $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$, za výraz $\text{rot } \mathbf{E}$ na pravé straně dosadíme 2.1b (druhá Maxwellova rovnice):

$$\text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.12)$$

Nakonec dosadíme z 2.1d (čtvrté Maxwellovy rovnice) $\text{div } \mathbf{B} = 0$ a zdrojové funkce elektromagnetického pole opět přesuneme na pravou stranu. Získáme **nehomogenní vlnovou rovnici pro vektor \mathbf{B}** :

$$\Delta \mathbf{B} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.13)$$

Pokud na dané prostředí nepůsobí vnější zdroje ($\rho = 0$ a $\mathbf{J}_{ext} = 0$), je pravá strana nulová a rovnice přechází do tvaru **homogenní vlnové rovnice pro vektor \mathbf{B}** :

$$\Delta \mathbf{B} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.14)$$

Vlnové rovnice pro vektory \mathbf{D} a \mathbf{H}

Podobné rovnice platí také pro vektory elektrické indukce \mathbf{D} a intenzity magnetického pole \mathbf{H} . Členy \mathbf{E} a \mathbf{B} rozepíšeme podle vztahu 2.2a, resp. 2.2b a rovnice 2.9 a 2.13 tak vyjádříme pro vektory \mathbf{D} a \mathbf{H} :

$$\Delta \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{ext}}{\partial t}, \quad (2.15a)$$

$$\Delta(\mu \mathbf{H}) - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathbf{H}) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu \mathbf{H}) = -\mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.15b)$$

Rovnici 2.15a následně vynásobíme konstantou ε a rovnici 2.15b vydělíme konstantou μ , čímž zjednodušíme jejich vyjádření:

$$\Delta \mathbf{D} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{ext}}{\partial t}, \quad (2.16a)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.16b)$$

Výše uvedené nehomogenní rovnice 2.16 přejdou při $\mathbf{J}_{ext} = 0$ a $\rho = 0$ do rovnic homogenních stejně jako 2.10 a 2.14 (pravá strana rovnic bude rovna 0).

2.2 Helmholtzova rovnice

Úpravou vlnové rovnice pro harmonicky proměnné ($j\omega$) pole ve frekvenční oblasti vznikne tzv. Helmholtzova rovnice, pojmenovaná podle německého fyzika Hermanna Ludwiga Helmholtze.

Helmholtzova rovnice pro fázor vektoru \underline{E}

Aplikací Fourierovy transformace na 2.9 (nehomogenní vlnovou rovnici pro vektor \underline{E}) a použitím symbolicko-komplexní metody, lze rovnici zapsat ve formě:

$$\Delta \underline{E} - j\omega\mu\gamma \underline{E} - j^2\omega^2\mu\varepsilon \underline{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu \underline{J}_{ext} \quad (2.17)$$

a následně jí malou úpravou (vytknutím) přepsat jako:

$$\Delta \underline{E} - j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \underline{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu \underline{J}_{ext}. \quad (2.18)$$

Pro další krok je potřeba zavést konstantu šíření $\underline{k} = \pm\sqrt{-j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)}$. Substituce potom rovnici zjednoduší na:

$$\Delta \underline{E} + \underline{k}^2 \underline{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu \underline{J}_{ext}. \quad (2.19)$$

Tato rovnice se označuje jako **nehomogenní Helmholtzova rovnice (pro \underline{E})**.

Pro oblast bez vnějších zdrojů ($\rho = 0$, $\underline{J}_{ext} = 0$) lze tuto rovnici zjednodušit do tvaru **homogenní Helmholtzovy rovnice (pro \underline{E})**:

$$\Delta \underline{E} + \underline{k}^2 \underline{E} = 0. \quad (2.20)$$

Helmholtzova rovnice pro fázor vektoru \underline{B}

Podobně se postupuje i pro vyjádření \underline{B} . Aplikací Fourierovy transformace na 2.13 (nehomogenní vlnovou rovnici pro vektor \underline{B}) a použitím symbolicko-komplexní metody, lze rovnici zapsat ve formě:

$$\Delta \underline{B} - j\omega\mu\gamma \underline{B} - j^2\omega^2\mu\varepsilon \underline{B} = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext} \quad (2.21)$$

a následně jí malou úpravou (vytknutím) přepsat jako:

$$\Delta \underline{B} - j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \underline{B} = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext}. \quad (2.22)$$

Zavedení konstanty šíření $\underline{k} = \pm\sqrt{-j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)}$ potom rovnici zjednoduší na:

$$\Delta \underline{B} + \underline{k}^2 \underline{B} = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext}. \quad (2.23)$$

Tato rovnice se označuje jako **nehomogenní Helmholtzova rovnice (pro \underline{B})**.

Pokud v regionu nejsou přítomny vnější zdroje ($\rho = 0$, $\underline{J}_{ext} = 0$) lze tuto rovnici zjednodušit do tvaru **homogenní Helmholtzovy rovnice (pro \underline{B})**:

$$\Delta \underline{B} + \underline{k}^2 \underline{B} = 0. \quad (2.24)$$

Helmholtzovy rovnice pro fázory vektorů \underline{D} a \underline{H}

Stejně jak tomu bylo u vlnových rovnic, podobné rovnice platí také pro fázory vektorů elektrické indukce \underline{D} a intenzity magnetického pole \underline{H} . Členy \underline{E} a \underline{B} roze-
píšeme podle vztahu 2.2a, resp. 2.2b a rovnice 2.19 a 2.23 tak vyjádříme pro fázory
vektorů \underline{D} a \underline{H} :

$$\Delta \frac{\underline{D}}{\varepsilon} + \underline{k}^2 \frac{\underline{D}}{\varepsilon} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu \underline{J}_{ext}, \quad (2.25a)$$

$$\Delta(\mu \underline{H}) + \underline{k}^2(\mu \underline{H}) = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext}. \quad (2.25b)$$

Rovnici 2.25a následně vynásobíme konstantou ε a rovnici 2.25b vydělíme konstantou μ , čímž zjednodušíme jejich vyjádření:

$$\Delta \underline{D} + \underline{k}^2 \underline{D} = \text{grad } \rho + j\omega\mu\varepsilon \underline{J}_{ext}, \quad (2.26a)$$

$$\Delta \underline{H} + \underline{k}^2 \underline{H} = -\text{rot } \underline{J}_{ext}. \quad (2.26b)$$

Výše uvedené nehomogenní rovnice 2.26 přejdou při $\underline{J}_{ext} = 0$ a $\rho = 0$ do rovnic
homogenních stejně jako 2.20 a 2.24 (pravá strana rovnic bude rovna 0).

Konstanta k [m^{-1}], zavedená výše, je definována jako konstanta šíření, nebo také
vlnové číslo. Odráží existenci materiálových parametrů prostředí, ve kterém se vlna šíří.
Konstanta je závislá na permitivitě, permeabilitě, konduktivitě a také na frekvenci. Pro
prostředí s nulovou vodivostí γ rovnice vypadá takto:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (2.27)$$

Vlnová impedance

Dalším parametrem, kterým je možné popsat určité prostředí, je vlnová impedance
 Z [Ω]:

$$\underline{Z} = \frac{\omega\mu}{\underline{k}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \omega}}. \quad (2.28)$$

Vlnová impedance je obecně komplexní veličinou popisující poměr mezi intenzitou elek-
trického pole \underline{E} a intenzitou magnetického pole \underline{H} :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}. \quad (2.29)$$

Ve volném prostoru je vlnová impedance rovna tzv. vlastní (intrinsic) impedanci:

$$\underline{Z}_0 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega. \quad (2.30)$$

2.3 Šíření vln ve volném prostoru

V následujícím textu bude uvažováno šíření vln ve volném neohraničeném prostředí. Jedná se o prostor bez přítomnosti překážek (různých objektů), které mají jiné materiálové konstanty ε , μ a γ než okolní prostředí, ve kterém se vlna šíří.

2.3.1 Rovinná homogenní vlna

Každá vlna je každým jednotlivým řešením vlnové rovnice. Subjektivně lze vlnu vnímat jako rozruch šířící se v prostoru a čase. Fyzikálně jde o změnu fáze vycházející z rovnosti druhých parciálních derivací podle času a souřadnic. Množina bodů, v nichž má fáze v daném čase stejnou hodnotu se nazývá vlnoplocha. Nejvýznamnějším druhem vln jsou rovinné (vlnoplochy jsou roviny) a vlny sférické (vlnoplochy jsou kulové plochy).

Vzhledem k omezením (konečnosti) rozměrů zdroje elektromagnetického záření nemůže žádný zdroj emitovat vlnu, jejíž vlnoplocha by byla dokonale rovinná. Rovinná vlna je zjednodušením aplikovaným na sférickou vlnoplochu v dostatečné vzdálenosti od zdroje vlnění, kde se již uvažovaný výřez její vlnoplochy s akceptovatelnou chybou jeví jako rovina. Výhodou použití rovinných homogenních vln je mimo jiné možnost sestavování složitějších vln jejich prostou superpozicí. Homogenní vlnou se nazývá vlna, u které je na vlnoploše konstantní hodnota amplitudy. [[9]]

Pro harmonické pole bez vnějších zdrojů vycházejme z homogenní Helmholtzovy rovnice 2.20. Rovnici rozepíšme pro jednotlivé souřadnice kartézské souřadné soustavy, zvolené vzhledem k vhodnosti pro šíření rovinných vln:

$$\Delta \underline{E}_x + \underline{k}^2 \underline{E}_x = 0, \quad (2.31a)$$

$$\Delta \underline{E}_y + \underline{k}^2 \underline{E}_y = 0, \quad (2.31b)$$

$$\Delta \underline{E}_z + \underline{k}^2 \underline{E}_z = 0. \quad (2.31c)$$

Rozepíšeme operátor delta pomocí parciálních derivací. Z předchozího vyjádření se tedy stala soustava parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_x = 0, \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_y = 0, \quad (2.32b)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_z = 0. \quad (2.32c)$$

Zvolíme-li, že se vlna bude šířit ve směru osy z , bude vlnoplocha kolmá na tuto osu a rovnoběžná s rovinou tvořenou osami x a y . To znamená výrazné zjednodušení řešeného problému. Dalším zjednodušením je uvažování vektoru intenzity elektrického pole \underline{E} pouze ve směru osy x .

V důsledku to znamená, že vektor \underline{E} bude ve směru osy y a z nulový, tedy že $\underline{E}_y = 0$ a $\underline{E}_z = 0$. Dalším důsledkem je, že velikost a fáze vektoru \underline{E} ve směru osy x

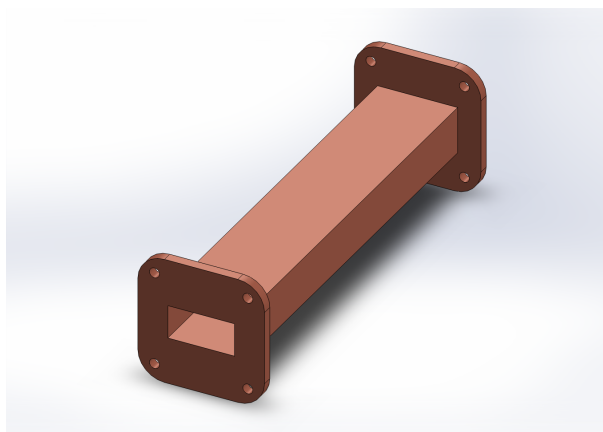
bude konstantní. Proto $\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = 0$. Po aplikaci na soustavu 2.32 dojde k tomu, že rovnice 2.32b a 2.32c se celé vynulují a vypadnou. U rovnice 2.32a vypadnou první dva členy na levé straně, výsledná rovnice bude tedy vypadat takto:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_x = 0. \quad (2.33)$$

2.4 Šíření vln pomocí vlnovodů a vedení

2.4.1 Vlnovody

Píše se rok 1893 a britský matematik a fyzik Oliver Heaviside pracuje na jednom ze svých projektů. Zabývá se možností šíření elektromagnetických vln uvnitř duté trubice. A tuto myšlenku odmítá. Věří, že elektromagnetickou energii nelze přenášet bez pomoci dvou vodičů. O čtyři roky později, roku 1897, tuto otázku přezkoumává jiný britský fyzik, Lord Reyleigh. A matematicky dokazuje, že šíření elektromagnetických vln dutou trubicí je možné, a to jak pro vlnovody s kruhovým, tak pravoúhlým průřezem.



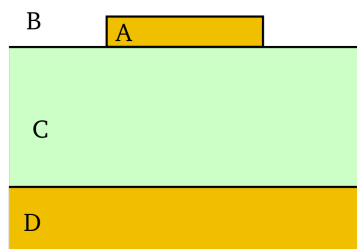
Obr. 2.1: Vlnovod masivnější konstrukce pro šíření vln o nižší frekvenci (okolo 1 GHz)

Výhodou vlnovodů je jejich nízký útlum a schopnost přenášet vysoké výkony, stinnou stránkou ale je jejich rozměrnost (čím nižší frekvence, tím masivnější konstrukce) a cena. Pro frekvenci kolem 1 GHz jsou rozměry již 20 cm x 10 cm a s klesající frekvencí dále rostou (viz. obr. 2.1. Pro vysoké frekvence (nad 100 GHz) naopak rozměry klesají na desetiny milimetru a takovéto vlnovody jsou proto náročné na výrobu. Nezřídka se proto používají tzv. nadrozměrné vlnovody, kdy velikost vlnovodu překročí hranici pro šíření jednoho vidu a vlnovodem se šíří vidů více.

Druhým způsobem pro přenos vysokých frekvencí jsou koaxiální vedení. Koaxiální vedení vynikají šířkou pásma, kterou mohou přenášet a jsou i cenově dostupnější, nicméně již méně jsou vhodná pro stavbu komplexních mikrovlnných komponent.

Alternativu představují planární vlnovody vyráběné ve formě stripline, microstrip, koplanárního vlnovodu a mnoha dalších. Kromě malých rozměrů a nízké ceny umožňují díky planární technologii výroby i snadnou integrovatelnost s dalšími elektronickými prvky a stavbu mikrovlnných obvodů.

Microstrip je dnes nejpoužívanějším médiem pro integrované mikrovlnné obvody. Sestává se z vodivého proužku, který je od země oddělen dielektrickým substrátem, jak je znázorněno na obr. 2.2. Microstrip byl vyvinut v laboratořích ITT jako konkurent jiné technologii, zveřejněné v roce 1952, stripline. Nevýhodou technologie microstrip v porovnání s klasickými vlnovody jsou její vyšší ztráty a nižší výkon, který je schopna přenášet. Z důvodu neuzavřenosti je také microstrip náchylnější na přeslechy a rušení.



Obr. 2.2: Microstrip a jeho části

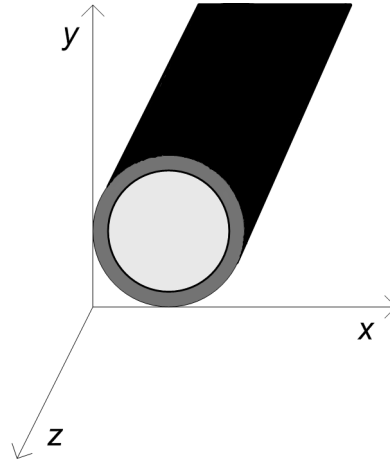
Elektromagnetická vlna šířící se microstripem existuje z části v dielektrickém substrátu a z části ve vzduchu nad ním. A jelikož dielektrická konstanta substrátu je jiná (větší) než vzduchu, vzniká nehomogenní médium, skrz které se vlna šíří. Nehomogenita a frekvenční rozptyl se ještě dále zhoršují spolu s větší šířkou substrátu. Proto až zvládnutí technologie výroby dostatečně tenkých substrátů umožňující menší frekvenční závislost vedení a potlačení podélných složek elektromagnetického pole umožnilo široké rozšíření a skutečný nástup technologie microstrip.

2.4.2 Typy vln šířících se prostřednictvím vlnovodů

Za běžných okolností nabývají vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} hodnot v osách roviny kolmé na šíření pole i roviny rovnoběžné s šířením pole (podélné). V určitých případech však může dojít k potlačení podélné složky šíření. Přenosová vedení skládající se ze dvou a více vodičů umožňují šíření tzv. TEM vln (Transverse ElectroMagnetic - transverzálně elektromagnetických). Tyto vlny postrádají podélnou složku elektrického i magnetického pole. Vlnovody sestávající se z jednoho vodiče umožňují šíření TE vln (Transverse Electric - transverzálně elektrických) postrádajících podélnou složku elektrického pole nebo TM vln (Transverse magnetic - transverzálně magnetických) postrádajících podélnou složku magnetického pole. Nikoli však obou současně. Výhodou TEM vln je, že mají jedinečně definované napětí, proud a charakteristickou impedanci. U TE a TM vln toto jednoznačné určení charakteristické impedance není možné, ale existuje matematický postup, který dokáže úspěšně pracovat s modelem charakteristické impedance i u těchto vln.

2.4.3 Maxwellovy rovnice pro šíření uvnitř válcových vlnovodů

Předpokladem je šíření harmonického pole se závislostí $e^{j\omega t}$ podél osy z válcového přenosového vedení nebo vlnovodu, které je ve směru osy z uniformní, nekonečně dlouhé a dokonale vodivé. Geometrie takového vlnovodu je znázorněna na obr. 2.3 Elektrické



Obr. 2.3: Geometrie válcového vlnovodu v kartézském souřadném systému

a magnetické pole potom může být vyjádřeno takto:

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = [\underline{\mathbf{e}}(x, y) + \hat{z}e_z(x, y)]e^{j\beta z}, \quad (2.34a)$$

$$\underline{\mathbf{H}}(x, y, z) = [\underline{\mathbf{h}}(x, y) + \hat{z}h_z(x, y)]e^{j\beta z}. \quad (2.34b)$$

$\underline{\mathbf{e}}(x, y)$ a $\underline{\mathbf{h}}(x, y)$ vyjadřují příčnou (transverzální) složku elektrického a magnetického pole, e_z a h_z představují složku podélnou. Pokud by se vlna šířila v opačném směru (ne ve směru $+z$, ale $-z$), nahradí se β za $-\beta$. V případě, kdy by byl přítomen útlum, nahradí se se konstanta šíření $j\beta$ za komplexní konstantu γ , $\gamma = \alpha + j\beta$.

Pokud ve vlnovodu nebo přenosovém vedení nejsou zdroje J , mohou být Maxwellovy rovnice vyjádřeny:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}, \quad (2.35a)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}. \quad (2.35b)$$

. Tyto vektorové rovnice mohou být převedeny do tvaru jednotlivých parciálních diferenciálních rovnic:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x, \quad (2.36a)$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y, \quad (2.36b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z, \quad (2.36c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x, \quad (2.37a)$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y, \quad (2.37b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z. \quad (2.37c)$$

Z těchto rovnic mohou být následně vyjádřeny příčné (transverzální) složky jednotlivých E a H polí:

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \quad (2.38a)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (2.38b)$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (2.38c)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left(-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right). \quad (2.38d)$$

Příklad výpočtu pro získání složky H_x dosazením E_y z 2.37b do 2.36a:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\beta H_x}{\omega \varepsilon} - \frac{1}{j \omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} + j \beta \left(-\frac{\beta H_x}{\omega \varepsilon} - \frac{1}{j \omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) &= -j \omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - j \frac{\beta^2 H_x}{\omega \varepsilon} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -j \omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -j \omega \mu H_x + j \frac{\beta^2 H_x}{\omega \varepsilon} \\ H_x &= \frac{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta^2}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}}{-j \omega \mu + j \frac{\beta^2}{\omega \varepsilon}} \\ H_x &= j \frac{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta^2}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \\ H_x &= j \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \frac{\omega \varepsilon}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \\ k_c^2 &= k^2 - \beta^2 = (\omega \sqrt{\mu \varepsilon})^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2 \\ H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left(\mu \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

k je vlnové číslo materiálu uvnitř přenosového vedení nebo vlnovodu, k_c potom tzv. mezní (cutoff) vlnové číslo. V případě přítomnosti ztrát je ε nahrazeno komplexním $\varepsilon(1 - j \tan \gamma)$, kde γ představuje ztrátový úhel materiálu.

2.4.4 TEM vlny

Pro TEM (transverzálně elektromagnetické) vlny platí, že $E_z = 0$ a $H_z = 0$ (není zde přítomna podélná složka elektrického ani magnetického pole). Dosazením těchto

hodnot do 2.38 zjistíme, že $H, E = j(0 - 0)/k_c^2$ a tedy $H, E = 0/(k_c^2)$. Příčné složky polí jsou tedy také nulové. Pokud se ovšem $k_c^2 = 0$, potom získáváme neurčitý výsledek. To mimo jiné znamená, že mezní (cutoff) vlnové číslo pro TEM vlny $k_c = 0$.

Pokud dosadíme $E_z = 0$ do 2.36a, H_x poté do 2.37b a $H_z = 0$, získáme:

$$\begin{aligned} j\beta E_y &= -j\omega\mu H_x \\ H_x &= -\frac{\beta E_y}{\omega\mu} \\ -j\beta \left(-\frac{\beta E_y}{\omega\mu} \right) &= j\omega\varepsilon E_y \\ \frac{\beta^2}{\omega\mu} &= \omega\varepsilon \\ \beta^2 &= \omega^2\mu\varepsilon \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \end{aligned}$$

Uvažujeme-li kartézský souřadný systém a šíření vlny ve směru osy z , lze homogenní Helmholtzovu rovnici 2.20 přepsat do tvaru:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = k^2 \underline{\underline{E}} \quad (2.39)$$

a poté vyjádřit jednotlivé složky x , y a z :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0, \quad (2.40a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_y = 0, \quad (2.40b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0. \quad (2.40c)$$

Její tvar pro $k = 0$ a příčné pole bez přítomnosti složky rovnoběžné se směrem šíření se poté zjednoduší na:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0, \quad (2.41a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_y = 0. \quad (2.41b)$$

Tyto rovnice potom mohou být přepsány do formy využívající Laplacova operátoru ve dvourozměrném příčném poli (poli kolmém ke směru šíření):

$$\Delta_t \underline{e}(x, y) = 0. \quad (2.42)$$

Stejný postup lze aplikovat i u příčného magnetického pole a dojít ke stejnému výsledku:

$$\Delta_t \underline{h}(x, y) = 0. \quad (2.43)$$

Vlnová impedance TEM vlny se získá jako podíl příčného elektrického a magnetického pole. První rovnice vychází z 2.37a při $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$:

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.44a)$$

$$j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (2.44b)$$

$$\frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.44c)$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta. \quad (2.44d)$$

Druhá vychází z 2.36a:

$$Z_{TEM} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2.45a)$$

$$j\beta E_x = -j\omega\mu H_y \quad (2.45b)$$

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{\omega\mu}{\beta} \quad (2.45c)$$

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta. \quad (2.45d)$$

Výsledky z 2.44 a 2.45 je možno spojit do jedné rovnice:

$$\underline{h}(x, y) = \frac{1}{Z_{TEM}} \hat{z} \times \underline{e}(x, y). \quad (2.46)$$

2.4.5 TE vlny

Na rozdíl od TEM vln, kde jsou podélné složky H i E pole nulové, se u TE vln $H_z \neq 0$. Pro přítomnost podélné složky magnetického pole se jim také říká H -vlny. U TE vln mohou být rovnice 2.38 zjednodušeny na:

$$H_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2.47a)$$

$$H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (2.47b)$$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (2.47c)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (2.47d)$$

U TE vln neplatí, že $k_c = 0$, a konstanta šíření β je funkcí frekvence a geometrie vedení. Nejprve se proto musí spočítat H_z z Helmholtzovi vlnové rovnice (odvození této rovnice je nastíněno v 2.24):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z = 0. \quad (2.48)$$

Tato rovnice může být pro $H_z(x, y, z) = h_z(x, y)e^{-j\beta z}$ upravena na:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) h_z = 0. \quad (2.49)$$

K vyřešení této rovnice musí být tedy známy hraniční podmínky a geometrie konkrétního vlnovodu.

Impedance TE vlny je:

$$Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2.50a)$$

$$j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \quad (2.50b)$$

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta}, \quad (2.50c)$$

z čehož plyne, že Z_{TE} je frekvenčně závislé.

2.4.6 TM vlny

TM vlny jsou podobné TE vlnám tím, že je v nich též jedna podélná složka pole přítomna. V tomto případě je to složka z pole E . Platí tedy $H_z = 0$, $E_z \neq 0$. Tyto vlny jsou proto také někdy nazývány jako E vlny. Rovnice 2.38 mohou být pro TM vlny vyjádřeny jako:

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.51a)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.51b)$$

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.51c)$$

$$E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (2.51d)$$

Stejně jako u TE vln, neplatí, že $k_c = 0$, a konstanta šíření β je funkcí frekvence a geometrie vedení. Nejprve se proto musí spočítat E_z z Helmholtzovi vlnové rovnice (odvození této rovnice je nastíněno v 2.20):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0. \quad (2.52)$$

Tato rovnice může být pro $E_z(x, y, z) = e_z(x, y)e^{-j\beta z}$ upravena na:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) e_z = 0. \quad (2.53)$$

K vyřešení této rovnice musí být tedy známy hraniční podmínky a geometrie konkrétního vlnovodu.

Impedance TM vlny je:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.54a)$$

$$j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (2.54b)$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}, \quad (2.54c)$$

z čehož plyne, že Z_{TM} je frekvenčně závislé.

3 Numerické řešení elektromagnetického pole

3.1 Metoda konečných prvků

Reálné fyzikální problémy bývají většinou natolik komplikované, že pouze málo z nich lze vyřešit pomocí analytických metod. Důvodem pro to nejčastěji je, že parciální diferenciální rovnice není lineární, řešená oblast je příliš složitá nebo je prostředí nehomogenní popř. anizotropní. Potom je nutné použít některou z numerických metod řešení.

První z nich je metoda konečných diferencí (FDM - Finite Difference Method). Jedná se o velmi jednoduchou a účinnou metodu pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, představenou poprvé již v roce 1920 A. Thomem a to pod názvem metoda čtverců. Metoda konečných diferencí nebyla původně koncipována na aplikaci na elektromagnetické pole - prvně byla využita k řešení nehomogenní hydrodynamické rovnice, ale její všestrannost umožnila její rozšíření pro řešení dalších fyzikálních polí. Základní myšlenkou této metody je nahrazení derivací konečnými diferencemi a převedení na soustavu algebraických rovnic. [11]

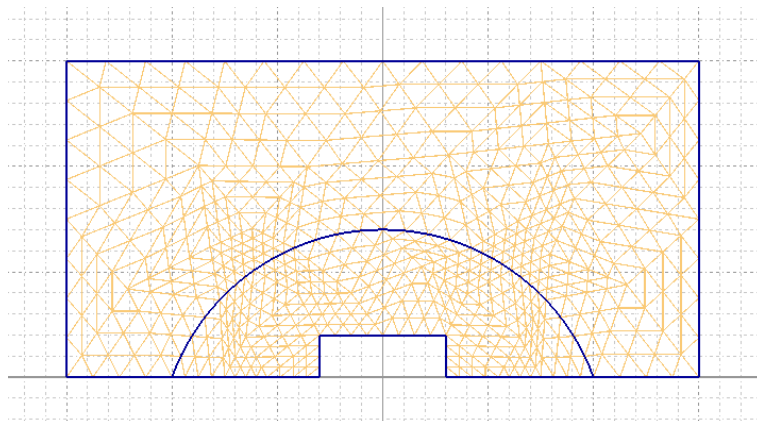
Druhou numerickou metodou je metoda konečných prvků (FEM - Finite Element Method). Nevýhodou této metody oproti metodě konečných diferencí je, že je náročnější na programovou implementaci. Její pozitiva jako jsou její výkonnost a univerzálnost však toto negativum převažují a jedná se proto o nejpoužívanější numerickou metodu (a to zejména v její variantě hp-FEM využívané i v knihovně Hermes2D).

Též historie metody konečných prvků se začíná psát v 1. polovině 20. století, kdy jsou její základy položeny v práci Alexandera Hrennikoffa a Richarda Couranta. V roce 1953 jsou potom rovnice popsány v maticovém tvaru, což umožňuje jejich řešení na počítačích. K širšímu využití metody, umožněnému příchodem výkonnější výpočetní techniky, dochází v průběhu 60. a 70. let. S průběhem času přibývaly problémy, které lze metodou konečných prvků řešit až v současnosti lze metodu použít pro téměř všechny fyzikální pole.

Jedná se o numerickou techniku, jejímž cílem je nalezení řešení okrajového problému. Používá variační metody pro minimalizaci chybové funkce a výpočet nejlepšího řešení. Metoda konečných prvků je postavena na spojování mnoha jednoduchých elementárních rovnic v mnoha malých subdoménách, zvaných konečné prvky, za účelem aproximace složitější rovnice na větší oblasti (doméně). Rozdělení oblasti na menší část přináší několik výhod: přesnější vyjádření složité geometrie, zařazení rozdílných materiálových vlastností, jednoduché znázornění celkového řešení a zachycení lokálních účinků.

Jednotlivé kroky řešení problému pomocí metody konečných prvků by se daly shrnout takto:

- Rozdělení oblasti diskretizační mřížkou na jednotlivé subdomény (konečné prvky)
- Vyjádření rovnic pro jednotlivé subdomény (prvky)
- Doplnění okrajovými podmínkami (Dirichletovou a Neumannovou)



Obr. 3.1: Síť vygenerovaná v programu Agros2D

- Systematická rekombinace všech sad rovnic všech prvků do jednoho systému
- Výpočet soustavy algebraických rovnic

Výhodou metody konečných prvků je, že je numericky stabilní. To znamená, že chyba obsažená na vstupu se během výpočtu nekumuluje a nezpůsobuje znehodnocení výstupu. Během druhého kroku, zmíněného výše, jsou rovnice elementů jednoduchými rovnicemi lokálně aproximujícími původní komplexní rovnici, která často bývá parciální diferenciální rovnicí. Pro vysvětlení procesu aproximace bývá metoda konečných prvků často považována za speciální případ Galerkinovy metody. Tento proces, matematicky řečeno, spočívá ve zkonstruování integrálu unitárního prostoru zbytkové a váhové funkce a nastavení integrálu na nulu. Zjednodušeně jde o postup, který minimalizuje chybu aproximace nasazením testovacích funkcí do parciálních diferenciálních rovnic. Residual (zbytek) je chyba způsobená testovací funkcí a váhové funkce jsou polynomiální aproximací promítající tento residual (zbytek). Tento proces eliminuje všechny prostorové derivace z parciální diferenciální rovnice a tak parciální diferenciální rovnici lokálně aproximuje se sadou algebraických rovnic pro problémy v ustáleném stavu a se sadou obyčejných diferenciálních rovnic pro přechodné problémy.

Tyto sady rovnic jsou rovnicemi jednotlivých prvků. Jsou lineární pokud je i základní parciální diferenciální rovnice lineární (a naopak). Sada algebraických rovnic vznikající u problémů v ustáleném stavu je řešena pomocí metod numerické lineární algebry, zatímco sada obyčejných diferenciálních rovnic vznikající u přechodných problémů je řešena numerickou integrací pomocí standardních technik jako Eulerova metoda nebo Runge-Kuttova metoda. Tento proces je většinou vykonáván softwarem používajícím souřadná data generovaná z jednotlivých subdomén.

Ve čtvrtém kroku, zmíněném ve výše uvedeném přehledu, je generována globální soustava rovnic z rovnic jednotlivých prvků a to prostřednictvím transformace souřadnic z uzlů lokálních subdomén na uzly globální oblasti (domény). Tato prostorová transformace zahrnuje úpravy do vhodné orientace ve vztahu k referenčnímu souřadnému systému. [13]

3.2 Agros 2D

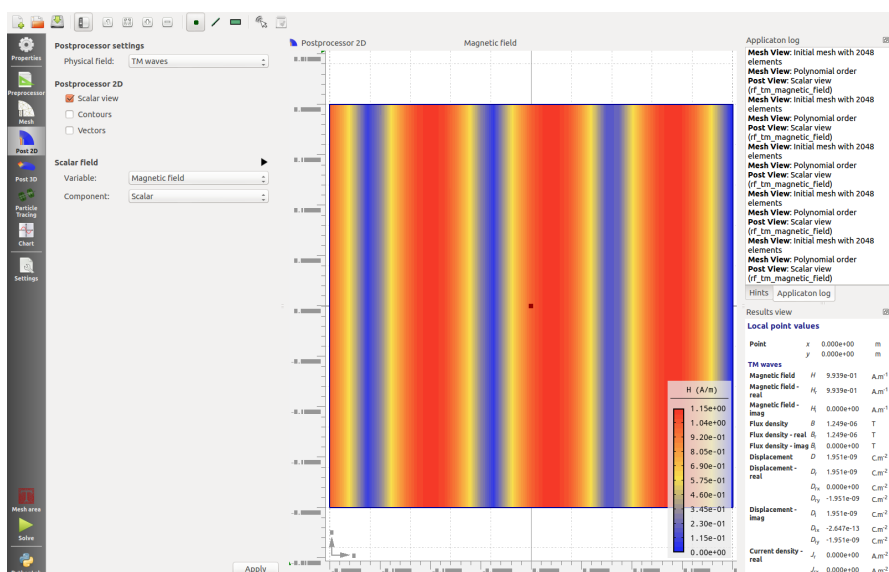
Agros2D je multiplatformní aplikací zaměřenou na řešení problémů různých fyzikálních polí (od elektrostatického přes akustické po teplotní). Je založen na knihovně Hermes, psané v jazyce C++, využívající pro výpočty metody hp-FEM. Jedná se o verzi metody konečných prvků (FEM - Finite Element Method) pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, která je založena na postupné numerické aproximaci udávané elementem o proměnné velikosti (h) a stupněm polynomu (p). Úvod do metody FEM poskytuje předchozí kapitola 3.1. [10]

Modelování v programu Agros2D vypadá ve stručnosti takto: Nejprve se v **preprocesoru** vytvoří geometrie objektu, nadefinují se materiálové parametry a přiřadí se okrajové podmínky. Poté **procesor**, výpočetní část založená na metodě konečných prvků (hp-FEM) provede vlastní výpočet. Výsledné řešení je vyhodnoceno a zobrazeno v **postprocesoru**, kde si uživatel může volit různé parametry vizualizace vypočtených dat jako barevné mapy, kontury, vektorová pole, grafy veličin a lokální a integrální veličiny.

Procesor Agrosu umožňuje použít pokročilé funkce metody konečných prvků jako konečné prvky vyššího řádu přesnosti, kdy je hledaná funkce aproximována na prvku polynomem vyššího řádu přesnosti, automatickou adaptivitu, kdy je diskretizační síť a stupeň aproximace volena automaticky na základě odhadu chyby řešení a práci s křivočarými prvky, kdy je řešení oblast diskretizována zpravidla trojúhelníkovými prvky.

Agros2D je volně šiřitelnou open-source aplikací vyvíjenou pod licencí GNU GPL. Zájemce o tento program může zjistit více informací i si stáhnout poslední verzi na stránkách www.agros2d.org (viz [7]). Postup vytvoření geometrie a spuštění modelování je také shrnut v příloze B akademické práce [8].

Pro ukázkou je níže znázorněn výstup programu při modelování čtvercového objektu v TM poli:



Obr. 3.2: Postprocessing modelu v programu Agros2D

4 Návrh modulu pro VF pole

Navrhovaný modul pro VF pole je .xml soubor obsahující upravené předpisy a rovnice, potřebné pro výpočet veličin vln ve volném prostoru a vlnovodech. Na základě těchto rovnic potom vlastní engine programu Agros2D, knihovna Hermes2D a algoritmus hp fem, vypočítají potřebné veličiny šířící se vlny v jednotlivých bodech zdiskretizovaného prostředí a vytvoří modelové rozložení elektromagnetického pole.

4.1 Slabé formulace vlnových rovnic

Prostředí programu Agros2D předpokládá pouze určité typy a způsoby šíření vln vedoucí k zjednodušení modelové situace. Agros2D simuluje pole v 2D prostoru, v třetím rozměru se předpokládá, že je pole rozloženo rovnoměrně nebo symetricky k zakreslené geometrii. Předpokladem je také šíření harmonického pole. Proto je ideální použití Helmholtzovy rovnice (2.19 - Helmholtzova rovnice pro fázor vektoru \underline{E}).

U Helmholtzovi rovnici dále předpokládáme rovnoměrné rozložení náboje ρ . Z toho plyne, že člen $\text{grad}(\rho/\varepsilon)$ rovnice 2.19 bude roven nule. Pro planární problém budeme předpokládat šíření vln v kartézské souřadnicové soustavě ve směru osy z . Pro osově symetrický systém bude předpokladem šíření vln v polární souřadnicové soustavě mající pouze tangenciální složku.

Zavedením těchto zjednodušujících předpokladů se Helmholtzova rovnice 2.19 transformuje do tvaru:

$$\Delta \underline{E}_{(z)} + k^2 \underline{E}_{(z)} = j\omega\mu \underline{J}_{ext}. \quad (4.1)$$

Helmholtzovu rovnici pak lze vyjádřit pomocí takzvané slabé formulace. Označme symbolem u člen $\underline{E}_{(z)}$ a symbolem f pravou stranu $j\omega\mu \underline{J}_{ext}$. Rovnici roznásobíme testovací funkcí v a následně jí zintegrujeme po ploše Ω (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu):

$$-\Delta u - k u = f \quad (4.2a)$$

$$-\Delta u v - k u v = f v \quad (4.2b)$$

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (4.2c)$$

Na výraz následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor Δ na skalární součin dvou gradientů ($\text{grad } u = \nabla u$):

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (4.3)$$

Člen $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$ vychází z Greenovi věty a představuje Neumannovu okrajovou podmínku. Ve většině případů je tato podmínka (a proto i tento člen) nulová.

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic, které již umí řešit Hermes2D a jsou

tak vhodné pro simulaci (níže výpočet levé strany 4.3, na pravé se již nic nemění):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1.1 Slabá formulace fázu E v kartézské souřadnicové soustavě

Vycházejme z rovnice 4.1 - nehomogenní Helmholtzovy rovnice pro \underline{E} po aplikování zjednodušujících předpokladů. Prvním krokem pro vyjádření slabé formy je rozložení rovnice na reálnou a imaginární složku:

$$\Delta(E_{zRe} + jE_{zIm}) + (\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \gamma)(E_{zRe} + jE_{zIm}) = j\omega \mu (J_{extRe} + jJ_{extIm}) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{zRe} + j\Delta E_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu E_{zRe} + j\omega^2 \varepsilon \mu E_{zIm} - j\omega \mu \gamma E_{zRe} + \omega \mu \gamma E_{zIm} &= \\ = j\omega \mu J_{extRe} - \omega \mu J_{extIm}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Reálnou částí rovnice je:

$$\begin{aligned} R_e : \\ \Delta E_{zRe} + \omega^2 \varepsilon \mu E_{zRe} + \omega \mu \gamma E_{zIm} &= -\omega \mu J_{extIm}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Imaginární potom:

$$\begin{aligned} I_m : \\ \Delta E_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu E_{zIm} - \omega \mu \gamma E_{zRe} &= \omega \mu J_{extRe}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí v a následně je zintegrujeme po ploše Ω (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2):

$$\begin{aligned} R_e : \\ \int_{\Omega} \Delta E_{zRe} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega &= -\omega \mu \int_{\Omega} J_{extIm} v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ \int_{\Omega} \Delta E_{zIm} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega &= \omega \mu \int_{\Omega} J_{extRe} v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor Δ na skalární součin dvou divergencí ($\text{grad } E_{zRe} = \nabla E_{zRe}$) (viz 4.3):

$$\begin{aligned} R_e : \\ - \int_{\Omega} \nabla E_{zRe} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zRe}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega &= \\ = -\omega \mu \int_{\Omega} J_{extIm} v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
I_m : \\
- \int_{\Omega} \nabla E_{zIm} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega = \\
= \omega \mu \int_{\Omega} J_{extRe} v \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Členy $\int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zRe}}{\partial n} v \, d\Gamma$ a $\int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma$ představují Neumannovu okrajovou podmínku.

Složky intenzity elektrického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci $u = E_z$:

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\
= -\omega \mu \int_{\Omega} J_{ext} v \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\
= -\omega \mu \int_{\Omega} J_{ext} v \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici také vydělíme μ (pro vyjádření Neumannovy okrajové podmínky v potřebném tvaru) a ω rozepíšeme pomocí f :

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial n} v + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v + 2 \pi f \gamma u v = -2 \pi f J_{ext} v. \tag{4.15}$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana \rightarrow maticový zápis, pravá strana \rightarrow vektorový zápis) a imaginárních složek. Člen $1/\mu \, \partial u / \partial n \, v$ představující Neumanovu okrajovou podmínku je vyjádřen v jiné části modulu věnující se povrchovým integrálům.

Člen levé strany reálné části

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_{zRe}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial E_{zRe}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon E_{zRe} v \tag{4.16a}$$

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \tag{4.16b}$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Indexy udávají polohu v matici. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 1$ odráží to, že jde o plně reálný člen (nejsou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$2 \pi f \gamma E_{zIm} v \quad (4.17a)$$

$$2 \pi f \gamma u v \quad (4.17b)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 2$. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 2$ odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině (E_{zIm}).

Člen levé strany imaginární části

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_{zIm}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial E_{zIm}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon E_{zIm} v \quad (4.18a)$$

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.18b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 2$ odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejsou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-2 \pi f \gamma E_{zRe} v \quad (4.19a)$$

$$-2 \pi f \gamma u v \quad (4.19b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 1$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 1$ odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině (E_{zRe}).

Člen pravé strany reálné části

$$-2 \pi f J_{extIm} v \quad (4.20)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Značení z důvodu přehlednosti zachovává oba indexy i a j , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto $i = j$. Zde jsou indexy rovny 2, protože přestože jde o reálnou část, je zde obsažena imaginární veličina (J_{extIm}).

Člen pravé strany imaginární části

$$2 \pi f J_{extRe} v \quad (4.21)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Zde jsou indexy rovny 1, protože přestože jde o imaginární část, je zde obsažena reálná veličina (J_{extRe}).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis slabých formulací fázoru \underline{E} .

4.1.2 Slabá formulace fázoru \underline{H} v kartézské souřadnicové soustavě

Formulace vychází z nehomogenní Helmholtzovy rovnice pro \underline{H} (2.26b), na kterou se aplikují stejné zjednodušující předpoklady jako na rovnici pro \underline{E} . Levá strana tedy bude, stejně jako v rovnici 4.1, obsahovat veličinu \underline{H} s pouze z složkou pole. Na pravé

straně to mimo jiné znamená, že, vzhledem k přítomnosti pouze z složky původního vektoru, se $\text{rot } \underline{J}_{ext} = \left(-\frac{\partial J_{ext(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{ext(y)}}{\partial x} \right) \mathbf{k}$:

$$\Delta \underline{H}_{(z)} + k^2 \underline{H}_{(z)} = - \left(-\frac{\partial J_{ext(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{ext(y)}}{\partial x} \right). \quad (4.22)$$

Prvním krokem pro vyjádření slabé formy je rozložení rovnice na reálnou a imaginární složku:

$$\begin{aligned} \Delta(H_{zRe} + jH_{zIm}) + (\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \gamma)(H_{zRe} + jH_{zIm}) = \\ = \left(\frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x} \right) + j \left(\frac{\partial J_{extIm(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extIm(y)}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{zRe} + j\Delta H_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{zRe} + j\omega^2 \varepsilon \mu H_{zIm} - j\omega \mu \gamma H_{zRe} + \omega \mu \gamma H_{zIm} = \\ = \left(\frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x} \right) + j \left(\frac{\partial J_{extIm(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extIm(y)}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Reálnou částí rovnice je:

$$\begin{aligned} R_e : \\ \Delta H_{zRe} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{zRe} + \omega \mu \gamma H_{zIm} = \frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Imaginární potom:

$$\begin{aligned} I_m : \\ \Delta H_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{zIm} - \omega \mu \gamma H_{zRe} = \frac{\partial J_{extIm(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extIm(y)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí v a následně je zintegrujeme po ploše Ω (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2):

$$\begin{aligned} R_e : \\ \int_{\Omega} \Delta H_{zRe} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x} \right) v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ \int_{\Omega} \Delta H_{zIm} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{extIm(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extIm(y)}}{\partial x} \right) v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.28)$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor Δ na skalární součin dvou gradientů ($\text{grad } H_{zRe} = \nabla H_{zRe}$) (viz 4.3):

$$\begin{aligned} R_e : \\ - \int_{\Omega} \nabla H_{zRe} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zRe}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x} \right) v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
I_m : \\
& - \int_{\Omega} \nabla H_{zIm} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{extIm}(x)}{\partial y} - \frac{\partial J_{extIm}(y)}{\partial x} \right) v \, d\Omega
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Členy $\int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zRe}}{\partial n} v \, d\Gamma$ a $\int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma$ představují Neumannovu okrajovou podmínku.

Složky intenzity magnetického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci $u = H_z$:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{ext}(x)}{\partial y} - \frac{\partial J_{ext}(y)}{\partial x} \right) v \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{ext}(x)}{\partial y} - \frac{\partial J_{ext}(y)}{\partial x} \right) v \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici také vydělíme ε (pro vyjádření Neumannovy okrajové podmínky v potřebném tvaru) a ω rozepíšeme pomocí f :

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v + (2 \pi f)^2 \mu u v + 2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma u v = \\
& = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial J_{ext}(x)}{\partial y} - \frac{\partial J_{ext}(y)}{\partial x} \right) v.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana \rightarrow maticový zápis, pravá strana \rightarrow vektorový zápis) a imaginárních složek. Člen $1/\varepsilon \, \partial u / \partial n \, v$ představující Neumanovu okrajovou podmínku je vyjádřen v jiné části modulu věnující se povrchovým integrálům.

Člen levé strany reálné části

$$- \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_{zRe}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H_{zRe}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \mu H_{zRe} v \tag{4.34a}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \mu u v \tag{4.34b}$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Indexy udávají polohu v matici. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 1$ odráží to, že jde o plně reálný člen (nejsou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma H_{zIm} v \quad (4.35a)$$

$$2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma u v \quad (4.35b)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 2$. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 2$ odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině (H_{zIm}).

Člen levé strany imaginární části

$$-\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_{zIm}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H_{zIm}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \mu H_{zIm} v \quad (4.36a)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \mu u v \quad (4.36b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 2$ odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejsou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma H_{zRe} v \quad (4.37a)$$

$$-2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma u v \quad (4.37b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 1$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 1$ odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině (H_{zRe}).

Člen pravé strany reálné části

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x} \right) v \quad (4.38)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Jde o reálnou část s reálnou veličinou (J_{extRe}). Značení z důvodu přehlednosti zachovává oba indexy i a j , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto $i = j$.

Člen pravé strany imaginární části

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial J_{extIm(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extIm(y)}}{\partial x} \right) v \quad (4.39)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Zde jsou indexy rovny 2, protože jde o imaginární část s imaginární veličinou (J_{extIm}).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis slabých formulací fázoru H. Pravé strany nebyly v modulu implementovány (byly položeny rovny nule), protože je uvažováno pouze šíření v prostoru bez proudové hustoty.

4.1.3 Slabá formulace fázoru \underline{E} ve válcové souřadnicové soustavě

V trojrozměrné válcové souřadné soustavě je poloha bodu určena vzdáleností od středu r , úhlem φ a vzdáleností od roviny podstavy z . Podobně jako v kartézské souřadné soustavě vycházíme z 4.1 - nehomogenní Helmholtzovy rovnice pro \underline{E} po aplikování zjednodušujících předpokladů. Což v tomto případě znamená, že je přítomna pouze složka \underline{E}_φ . Rovnice 4.1 modifikovaná do válcových souřadnic potom vypadá takto:

$$\Delta \underline{E}_{(\varphi)} + k^2 \underline{E}_{(\varphi)} = j\omega\mu \underline{J}_{ext} \quad (4.40)$$

Podobně jako při řešení v kartézské souřadné soustavě musíme rovnice rozložit na řešení pro reálnou a imaginární složku:

$$\Delta(E_{\varphi Re} + jE_{\varphi Im}) + (\omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\gamma)(E_{\varphi Re} + jE_{\varphi Im}) = j\omega\mu(J_{ext Re} + jJ_{ext Im}) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{\varphi Re} + j\Delta E_{\varphi Im} + \omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Re} + j\omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Im} - j\omega\mu\gamma E_{\varphi Re} + \omega\mu\gamma E_{\varphi Im} = \\ = j\omega\mu J_{ext Re} - \omega\mu J_{ext Im}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Reálnou částí rovnice je:

$$\begin{aligned} R_e : \\ \Delta E_{\varphi Re} + \omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Re} + \omega\mu\gamma E_{\varphi Im} = -\omega\mu J_{ext Im}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Imaginární potom:

$$\begin{aligned} I_m : \\ \Delta E_{\varphi Im} + \omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Im} - \omega\mu\gamma E_{\varphi Re} = \omega\mu J_{ext Re}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí v a následně je zintegrujeme po ploše Ω (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2). Předtím je ale potřeba ještě si uvědomit jednu věc ohledně numerického výpočtu získaného integrálu. Získaný integrál, přestože se zapisuje zjednodušeně jako $\int_\Omega u d\Omega$ bude vnitřně numericky vypočítán jako trojitý integrál

$$\iiint_{\varphi \ r \ z} u \ r \ d\varphi \ dr \ dz. \quad (4.45)$$

Do integrálu $\int_\Omega u \ d\Omega$ je proto nutno zapsat r vznikající v trojitém integrálu jako vyjádření úhlové délky pomocí inkrementu infinitezimální hodnoty $r \ d\varphi$:

$$\begin{aligned} R_e : \\ \int_\Omega r \Delta E_{\varphi Re} v \ d\Omega + \omega^2\varepsilon\mu \int_\Omega r E_{\varphi Re} v \ d\Omega + \omega\mu\gamma \int_\Omega r E_{\varphi Im} v \ d\Omega = \\ = -\omega\mu \int_\Omega r J_{ext Im} v \ d\Omega \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ \int_\Omega r \Delta E_{\varphi Im} v \ d\Omega + \omega^2\varepsilon\mu \int_\Omega r E_{\varphi Im} v \ d\Omega - \omega\mu\gamma \int_\Omega r E_{\varphi Re} v \ d\Omega = \\ = \omega\mu \int_\Omega r J_{ext Re} v \ d\Omega. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor Δ na skalární součin dvou gradientů ($\text{grad } E_{\varphi Re} = \nabla E_{\varphi Re}$) (viz 4.3):

$$\begin{aligned} R_e : \\ - \int_{\Omega} r \nabla E_{\varphi Re} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} r \frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r E_{\varphi Re} v \, d\Omega + \\ + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r E_{\varphi Im} v \, d\Omega = -\omega \mu \int_{\Omega} r J_{ext Im} v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ - \int_{\Omega} r \nabla E_{\varphi Im} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} r \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r E_{\varphi Im} v \, d\Omega + \\ - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r E_{\varphi Re} v \, d\Omega = \omega \mu \int_{\Omega} r J_{ext Re} v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Členy $\int_{\Gamma} r \frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial n} v \, d\Gamma$ a $\int_{\Gamma} r \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial n} v \, d\Gamma$ představují Neumannovu okrajovou podmínku.

Složky intenzity elektrického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci $u = E_{\varphi}$:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} r \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} r \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r u v \, d\Omega = \\ = -\omega \mu \int_{\Omega} r J_{ext} v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} r \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r u v \, d\Omega + \\ + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r u v \, d\Omega = -\omega \mu \int_{\Omega} r J_{ext} v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici také vydělíme μ (pro vyjádření Neumannovy okrajové podmínky v potřebném tvaru) a ω rozepíšeme pomocí f :

$$-r \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial n} v + r (2 \pi f)^2 \varepsilon u v + r 2 \pi f \gamma u v = -r 2 \pi f J_{ext} v. \quad (4.52)$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana \rightarrow maticový zápis, pravá strana \rightarrow vektorový zápis) a imaginárních složek. Člen $r 1/\mu \partial u / \partial n v$ představující Neumanovu okrajovou podmínku je vyjádřen v jiné části modulu věnující se povrchovým integrálům.

Člen levé strany reálné části

$$-r \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon E_{\varphi Re} v \quad (4.53a)$$

$$-r \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.53b)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Indexy udávají polohu v matici. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 1$ odráží to, že jde o plně reálný člen (nejdou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$r 2 \pi f \gamma E_{\varphi Im} v \quad (4.54a)$$

$$r 2 \pi f \gamma u v \quad (4.54b)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 2$. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 2$ odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině ($E_{\varphi Im}$).

Člen levé strany imaginární části

$$-r \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon E_{\varphi Im} v \quad (4.55a)$$

$$-r \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.55b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 2$ odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejdou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-r 2 \pi f \gamma E_{\varphi Re} v \quad (4.56a)$$

$$-r 2 \pi f \gamma u v \quad (4.56b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 1$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 1$ odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině ($E_{\varphi Re}$).

Člen pravé strany reálné části

$$-r 2 \pi f J_{ext Im} v \quad (4.57)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Značení z důvodu přehlednosti zachovává oba indexy i a j , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto $i = j$. Zde jsou indexy rovny 2, protože přestože jde o reálnou část, je zde obsažena imaginární veličina ($J_{ext Im}$).

Člen pravé strany imaginární části

$$r 2 \pi f J_{ext Re} v \quad (4.58)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Zde jsou indexy rovny 1, protože přestože jde o imaginární část, je zde obsažena reálná veličina ($J_{ext Re}$).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis slabých formulací fáze E.

4.1.4 Slabá formulace fázoru \underline{H} ve válcové souřadnicové soustavě

V trojrozměrné válcové souřadné soustavě je poloha bodu určena vzdáleností od středu r , úhlem φ a vzdáleností od roviny podstavy z . Formulace vychází z nehomogenní Helmholtzovy rovnice pro \underline{H} (2.26b), na kterou se aplikují stejné zjednodušující předpoklady jako na rovnici pro \underline{E} (4.1). Což v tomto případě znamená, že je na levé straně rovnice přítomna pouze složka \underline{H}_φ . Na pravé straně to mimo jiné znamená, že, vzhledem k přítomnosti pouze φ složky původního vektoru a aplikaci symetrie, se $\text{rot } \underline{J}_{ext} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial z} - \frac{\partial J_{ext}(z)}{\partial r} \right) \phi$. Rovnice 2.26b modifikovaná do válcových souřadnic potom vypadá takto:

$$\Delta \underline{H}_{(\varphi)} + k^2 \underline{H}_{(\varphi)} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial z} - \frac{\partial J_{ext}(z)}{\partial r} \right) \quad (4.59)$$

Podobně jako při řešení v kartézské souřadné soustavě musíme rovnice rozložit na řešení pro reálnou a imaginární složku:

$$\begin{aligned} & \Delta (H_{\varphi Re} + j H_{\varphi Im}) + (\omega^2 \varepsilon \mu - j \omega \mu \gamma) (H_{\varphi Re} + j H_{\varphi Im}) = \\ & = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Re}(z)}{\partial r} \right) + j \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Im}(z)}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} & \Delta H_{\varphi Re} + j \Delta H_{\varphi Im} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Re} + j \omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Im} - j \omega \mu \gamma H_{\varphi Re} + \omega \mu \gamma H_{\varphi Im} = \\ & = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Re}(z)}{\partial r} \right) + j \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Im}(z)}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Reálnou částí rovnice je:

$$\begin{aligned} & R_e : \\ & \Delta H_{\varphi Re} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Re} + \omega \mu \gamma H_{\varphi Im} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Re}(z)}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Imaginární potom:

$$\begin{aligned} & I_m : \\ & \Delta H_{\varphi Im} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Im} - \omega \mu \gamma H_{\varphi Re} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Im}(z)}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí v a následně je zintegrujeme po ploše Ω (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2). Předtím je ale potřeba ještě si uvědomit jednu věc ohledně numerického výpočtu získaného integrálu. Získaný integrál, přestože se zapisuje zjednodušeně jako $\int_{\Omega} u d\Omega$ bude vnitřně numericky vypočítán jako trojitý integrál

$$\iiint_{\varphi \ r \ z} u \ r \ d\varphi \ dr \ dz. \quad (4.64)$$

Do integrálu $\int_{\Omega} u \, d\Omega$ je proto nutno zapsat r vznikající v trojitém integrálu jako vyjádření úhlové délky pomocí inkrementu infinitezimální hodnoty $r \, d\varphi$:

$$\begin{aligned}
 R_e : \\
 \int_{\Omega} r \, \Delta H_{\varphi Re} \, v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Re} \, v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Im} \, v \, d\Omega = \\
 = \int_{\Omega} r \, \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Re}(z)}{\partial r} \right) v \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
 I_m : \\
 \int_{\Omega} r \, \Delta H_{\varphi Im} \, v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Im} \, v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Re} \, v \, d\Omega = \\
 = \int_{\Omega} r \, \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Im}(z)}{\partial r} \right) v \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor Δ na skalární součin dvou gradientů ($\text{grad } H_{\varphi Re} = \nabla H_{\varphi Re}$) (viz 4.3):

$$\begin{aligned}
 R_e : \\
 - \int_{\Omega} r \, \nabla H_{\varphi Re} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} r \, \frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial n} \, v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Re} \, v \, d\Omega + \\
 + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Im} \, v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Re}(z)}{\partial r} \right) v \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
 I_m : \\
 - \int_{\Omega} r \, \nabla H_{\varphi Im} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} r \, \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial n} \, v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Im} \, v \, d\Omega + \\
 - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r \, H_{\varphi Re} \, v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext Im}(z)}{\partial r} \right) v \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Členy $\int_{\Gamma} r \, \frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial n} \, v \, d\Gamma$ a $\int_{\Gamma} r \, \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial n} \, v \, d\Gamma$ představují Neumannovu okrajovou podmínku.

Složky intenzity magnetického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci $u = H_{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} r \, \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} r \, \frac{\partial u}{\partial n} \, v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r \, u \, v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r \, u \, v \, d\Omega = \\
 = \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext}(z)}{\partial r} \right) v \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} r \, \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} r \, \frac{\partial u}{\partial n} \, v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} r \, u \, v \, d\Omega + \\
 + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} r \, u \, v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext}(z)}{\partial r} \right) v \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici také vydělíme ε (pro vyjádření Neumannovy okrajové podmínky v potřebném tvaru) a ω rozepíšeme pomocí f :

$$\begin{aligned} & -r \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v + r (2 \pi f)^2 \mu u v + r 2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma u v = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{ext}(z)}{\partial r} \right) v. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana \rightarrow maticový zápis, pravá strana \rightarrow vektorový zápis) a imaginárních složek. Člen $r \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v$ představující Neumanovu okrajovou podmínku je vyjádřen v jiné části modulu věnující se povrchovým integrálům.

Člen levé strany reálné části

$$-r \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \mu H_{\varphi Re} v \quad (4.72a)$$

$$-r \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \mu u v \quad (4.72b)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Indexy udávají polohu v matici. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 1$ odráží to, že jde o plně reálný člen (nejsou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$r 2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma H_{\varphi Im} v \quad (4.73a)$$

$$r 2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma u v \quad (4.73b)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 2$. Značení $i = 1$ reflektuje to, že se jedná o reálnou složku, $j = 2$ odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině ($H_{\varphi Im}$).

Člen levé strany imaginární části

$$-r \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \mu H_{\varphi Im} v \quad (4.74a)$$

$$-r \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) + r (2 \pi f)^2 \mu u v \quad (4.74b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 2$ odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejsou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-r 2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma H_{\varphi Re} v \quad (4.75a)$$

$$-r 2 \pi f \frac{1}{\varepsilon} \mu \gamma u v \quad (4.75b)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 1$. Značení $i = 2$ reflektuje to, že se jedná o imaginární složku, $j = 1$ odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině ($H_{\varphi Re}$).

Člen pravé strany reálné části

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial J_{extRe}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{extRe}(z)}{\partial r} \right) v \quad (4.76)$$

bude označen indexy $i = 1, j = 1$. Jde o reálnou část s reálnou veličinou (J_{extRe}). Značení z důvodu přehlednosti zachovává oba indexy i a j , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto $i = j$.

Člen pravé strany imaginární části

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial J_{extIm}(r)}{\partial z} + \frac{\partial J_{extIm}(z)}{\partial r} \right) v \quad (4.77)$$

bude označen indexy $i = 2, j = 2$. Zde jsou indexy rovny 2, protože jde o imaginární část s imaginární veličinou (J_{extIm}).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis slabých formulací fázoru H. Pravé strany nebyly v modulu implementovány (byly položeny rovny nule), protože je uvažováno pouze šíření v prostoru bez proudové hustoty.

4.2 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky předepisují chování funkce, nebo derivace funkce, v určitých bodech. Těmito body jsou okraje oblasti, na které danou rovnicí řešíme. Při řešení parciálních diferenciálních rovnic vystupují obvykle tři typy okrajových podmínek - Dirichletova okrajová podmínka, Neumannova okrajová podmínka a Newtonova okrajová podmínka.

4.2.1 Dirichletova okrajová podmínka

Dirichletova okrajová podmínka vyjadřuje hodnotu funkce u na okraji řešené oblasti. Může být obecně závislá na jednotlivých souřadnicích a na čase:

$$u = f_{Dir}(x, y, z, t) \quad (4.78)$$

Tvar pro \underline{E} v kartézských souřadnicích

Na pravou stranu rovnice náleží veličina pole tj. \underline{E} . Jedná se o TE vlnu, to znamená, že je přítomna pouze složka z pole \underline{E} . Pro zápis do xml modulu je třeba rozložit tuto veličinu na její reálnou složku $E_{(z \text{ real})}$ a imaginární složku $E_{(z \text{ imag})}$. Reálná složka $E_{(z \text{ real})}$ bude označena indexem $i = 1$, imaginární složka $E_{(z \text{ imag})}$ indexem $i = 2$. Jedná se o vektorový zápis, zde vystupující jako „essential form”.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{H} v kartézských souřadnicích

Na pravou stranu rovnice náleží veličina pole tj. \underline{H} . Jedná se o TM vlnu, to znamená, že je přítomna pouze složka z pole \underline{E} . Pro zápis do xml modulu je třeba rozložit tuto veličinu na její reálnou složku $H_{(z \text{ real})}$ a imaginární složku $H_{(z \text{ imag})}$. Reálná složka $H_{(z \text{ real})}$ bude označena indexem $i = 1$, imaginární složka $H_{(z \text{ imag})}$ indexem $i = 2$. Jedná se o vektorový zápis, zde vystupující jako „essential form”.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru H.

Tvar pro \underline{E} ve válcových souřadnicích

Na pravou stranu rovnice náleží veličina pole tj. \underline{E} . Jedná se o TE vlnu, to znamená, že je přítomna pouze složka φ pole \underline{E} . Pro zápis do xml modulu je třeba rozložit tuto veličinu na její reálnou složku $E_{(\varphi \text{ real})}$ a imaginární složku $E_{(\varphi \text{ imag})}$. Reálná složka $E_{(\varphi \text{ real})}$ bude označena indexem $i = 1$, imaginární složka $E_{(\varphi \text{ imag})}$ indexem $i = 2$. Jedná se o vektorový zápis, zde vystupující jako „essential form”.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{H} ve válcových souřadnicích

Na pravou stranu rovnice náleží veličina pole tj. \underline{H} . Jedná se o TM vlnu, to znamená, že je přítomna pouze složka φ pole \underline{E} . Pro zápis do xml modulu je třeba rozložit tuto veličinu na její reálnou složku $H_{(\varphi \text{ real})}$ a imaginární složku $H_{(\varphi \text{ imag})}$. Reálná složka $H_{(\varphi \text{ real})}$ bude označena indexem $i = 1$, imaginární složka $H_{(\varphi \text{ imag})}$ indexem $i = 2$. Jedná se o vektorový zápis, zde vystupující jako „essential form”.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru H.

4.2.2 Neumannova okrajová podmínka

Neumannova okrajová podmínka říká, jak se mění veličina ve směru kolmo na rozhraní. Je vyjádřena jako hodnota normálové derivace funkce. V kartézském souřadném systému ji lze obecně zapsat takto:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = f_{\text{Neu}}(x, y, z, t). \quad (4.79)$$

Tvar pro \underline{E} v kartézských souřadnicích

Neumannova okrajová podmínka se objeví při výpočtu slabých forem jako člen integro-diferenciální rovnice (4.15) ve formě plošného integrálu:

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zRe}}{\partial \mathbf{n}} v \, d\Gamma, \quad (4.80a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zIm}}{\partial \mathbf{n}} v \, d\Gamma. \quad (4.80b)$$

Pro získání její hodnoty budeme vycházet z 2.3b (2. Maxwellovy rovnice ve frekvenční oblasti pro harmonicky proměnné pole). Na levé straně provedeme operaci rotace. Vzhledem k přítomnosti pouze z složky E u TE vlny dojde k zjednodušení výsledku:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{E}_z \end{vmatrix} = \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \mathbf{j}. \quad (4.81)$$

Právě vypočtenou levou, i pravou stranu následně roznásobíme vektorem \mathbf{n} (vektorem normálovým na rozhraní):

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) = - \mathbf{n} \times j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}. \quad (4.82)$$

Vektorový součin na levé straně vyřešíme s pomocí determinantu:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} & -\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = - \mathbf{n} \times j\omega\mu \underline{\mathbf{H}} \quad (4.83a)$$

$$\left(-\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} n_y - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} n_x \right) \cdot \mathbf{k} = - \mathbf{n} \times j\omega\mu \underline{\mathbf{H}} \quad (4.83b)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}; \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right) \cdot (n_x; n_y) \cdot \mathbf{k} = - \mathbf{n} \times j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}. \quad (4.83c)$$

Výraz na levé straně lze také vyjádřit pomocí gradientu:

$$\text{grad } \underline{E}_z \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = - \mathbf{n} \times j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}. \quad (4.84)$$

A samotná Neumannova okrajová podmínka může být též rozepsána pomocí gradientu:

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \mathbf{n}} = \text{grad} \underline{E}_z \cdot \mathbf{n}. \quad (4.85)$$

To znamená, že na levou stranu rovnice 4.85 můžeme dosadit výraz představující Neumannovu okrajovou podmínku:

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = - \mathbf{n} \times j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}. \quad (4.86)$$

Roznásobíme-li pravou stranu normálovým vektorem \mathbf{n} (a levou stranu vektorem \mathbf{k}) obsahujícím pouze tečnou složku, dostaneme skalární vyjádření:

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \mathbf{n}} = -j\omega\mu \underline{H}_t. \quad (4.87)$$

Na levé straně máme tedy zápis Neumannovy okrajové podmínky a na straně pravé její funkční vyjádření.

Posledním krokem je dosazení pravé strany z 4.87 do 4.80 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} (\omega\mu H_{(t \text{ imag})} v) d\Gamma, \quad (4.88a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} (-j\omega\mu H_{(t \text{ real})} v) d\Gamma. \quad (4.88b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření pravé strany, tudíž „vector form”. Člen μ se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$2 \pi f H_{(t \text{ imag})} v \quad (4.89)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$- 2 \pi f H_{(t \text{ real})} v \quad (4.90)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{H} v kartézských souřadnicích

Neumannova okrajová podmínka se objeví při výpočtu slabých forem jako člen integro-diferenciální rovnice (4.33) ve formě plošného integrálu:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zRe}}{\partial \mathbf{n}} v d\Gamma, \quad (4.91a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zIm}}{\partial \mathbf{n}} v d\Gamma. \quad (4.91b)$$

Pro získání její hodnoty budeme vycházet z 2.3a (1. Maxwellovy rovnice ve frekvenční oblasti pro harmonicky proměnné pole). Na levé straně provedeme výpočet operace rotace. Vzhledem k přítomnosti pouze z složky H u TM vlny dojde k zjednodušení výsledku:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{H}_z \end{vmatrix} = \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \mathbf{j}. \quad (4.92)$$

Právě vypočtenou levou, i pravou stranu následně roznásobíme vektorem \mathbf{n} (vektorem normálovým na rozhraní):

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}. \quad (4.93)$$

Vektorový součin na levé straně vyřešíme s pomocí determinantu:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} & -\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}} \quad (4.94a)$$

$$\left(-\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} n_y - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} n_x \right) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}} \quad (4.94b)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}; \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right) \cdot (n_x; n_y) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}. \quad (4.94c)$$

Výraz na levé straně lze také vyjádřit pomocí gradientu:

$$\text{grad } \underline{H}_z \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}. \quad (4.95)$$

A samotná Neumannova okrajová podmínka může být též rozepsána pomocí gradientu:

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \mathbf{n}} = \text{grad} \underline{H}_z \cdot \mathbf{n}. \quad (4.96)$$

To znamená, že na levou stranu rovnice 4.96 můžeme dosadit výraz představující Neumannovu okrajovou podmínku:

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}. \quad (4.97)$$

Roznásobíme-li pravou stranu normálovým vektorem \mathbf{n} (a levou stranu vektorem \mathbf{k}) obsahujícím pouze tečnou složku, dostaneme skalární vyjádření:

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \mathbf{n}} = j\omega\varepsilon \underline{E}_t. \quad (4.98)$$

Na levé straně máme tedy zápis Neumannovy okrajové podmínky a na straně pravé její funkční vyjádření.

Posledním krokem je dosazení pravé strany z 4.98 do 4.91 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (-\omega\varepsilon E_{(t \text{ imag})} v) \, d\Gamma, \quad (4.99a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (j\omega\varepsilon E_{(t \text{ real})} v) \, d\Gamma. \quad (4.99b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření

pravé strany, tudíž „vector form”. Člen ε se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$-2 \pi f E_{(t \text{ imag})} v \quad (4.100)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$2 \pi f E_{(t \text{ real})} v \quad (4.101)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru \underline{H} .

Tvar pro \underline{E} ve válcových souřadnicích

Neumannova okrajová podmínka se objeví při výpočtu slabých forem jako člen integro-diferenciální rovnice (4.52) ve formě plošného integrálu:

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} r \frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial \mathbf{n}} v \, d\Gamma, \quad (4.102a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} r \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial \mathbf{n}} v \, d\Gamma. \quad (4.102b)$$

Pro získání její hodnoty budeme vycházet z 2.3b (2. Maxwellovy rovnice ve frekvenční oblasti pro harmonicky proměnné pole). Na levé straně provedeme výpočet operace rotace. Vzhledem k přítomnosti pouze φ složky \underline{E} u TE vlny dojde k zjednodušení výsledku:

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{E}_{\varphi}}{\partial z} \underline{\rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{E}_{\varphi})}{\partial r} \underline{k}. \quad (4.103)$$

Právě vypočtenou levou, i pravou stranu následně roznásobíme vektorem \underline{n} (vektorem normálovým na rozhraní):

$$\underline{n} \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{E}_{\varphi})}{\partial r} \underline{k} - \frac{\partial \underline{E}_{\varphi}}{\partial z} \underline{\rho} \right) = -\underline{n} \times j\omega\mu \underline{H}. \quad (4.104)$$

Vektorový součin na levé straně vyřešíme s pomocí determinantu:

$$\begin{vmatrix} \underline{\rho} & \underline{\phi} & \underline{k} \\ n_r & n_{\varphi} & n_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{E}_{\varphi})}{\partial r} & 0 & -\frac{\partial \underline{E}_{\varphi}}{\partial z} \end{vmatrix} = -\underline{n} \times j\omega\mu \underline{H} \quad (4.105a)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{E}_{\varphi}}{\partial z} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{E}_{\varphi})}{\partial r} n_z \right) \cdot \underline{\phi} = -\underline{n} \times j\omega\mu \underline{H} \quad (4.105b)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{E}_{\varphi}}{\partial z}; \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{E}_{\varphi})}{\partial r} \right) \cdot (n_r; n_z) \cdot \underline{\phi} = -\underline{n} \times j\omega\mu \underline{H}. \quad (4.105c)$$

Výraz na levé straně lze také vyjádřit pomocí gradientu:

$$\text{grad } \underline{E}_{\varphi} \cdot \underline{n} \cdot \underline{\phi} = -\underline{n} \times j\omega\mu \underline{H}. \quad (4.106)$$

A samotná Neumannova okrajová podmínka může být též rozepsána pomocí gradientu:

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} = \text{grad} \underline{E}_\varphi \cdot \underline{n}. \quad (4.107)$$

To znamená, že na levou stranu rovnice 4.107 můžeme dosadit výraz představující Neumannovu okrajovou podmínku:

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} \cdot \underline{\phi} = - \underline{n} \times \text{j} \omega \mu \underline{H}. \quad (4.108)$$

Roznásobíme-li pravou stranu normálovým vektorem \underline{n} (a levou stranu vektorem $\underline{\phi}$) obsahujícím pouze tečnou složku, dostaneme skalární vyjádření:

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} = -\text{j} \omega \mu \underline{H}_t. \quad (4.109)$$

Na levé straně máme tedy zápis Neumannovy okrajové podmínky a na straně pravé její funkční vyjádření.

Posledním krokem je dosazení pravé strany z 4.109 do 4.102 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} (\omega \mu H_{(t \text{ imag})} v) r \, d\Gamma, \quad (4.110a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} (-\text{j} \omega \mu H_{(t \text{ real})} v) r \, d\Gamma. \quad (4.110b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření pravé strany, tudíž „vector form”. Člen μ se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$2 \pi f H_{(t \text{ imag})} r v \quad (4.111)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$- 2 \pi f H_{(t \text{ real})} r v \quad (4.112)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{H} ve válcových souřadnicích

Neumannova okrajová podmínka se objeví při výpočtu slabých forem jako člen integro-diferenciální rovnice (4.71) ve formě plošného integrálu:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} r \frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial \underline{n}} v \, d\Gamma, \quad (4.113a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} r \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial \underline{n}} v \, d\Gamma. \quad (4.113b)$$

Pro získání její hodnoty budeme vycházet z 2.3a (1. Maxwellovy rovnice ve frekvenční oblasti pro harmonicky proměnné pole). Na levé straně provedeme výpočet operace rotace. Vzhledem k přítomnosti pouze φ složky H u TM vlny dojde k zjednodušení výsledku:

$$\text{rot } \underline{H} = -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} \underline{\rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} \underline{k}. \quad (4.114)$$

Právě vypočtenou levou, i pravou stranu následně roznásobíme vektorem \underline{n} (vektorem normálovým na rozhraní):

$$\underline{n} \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} \underline{k} - \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} \underline{\rho} \right) = \underline{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E}. \quad (4.115)$$

Vektorový součin na levé straně vyřešíme s pomocí determinantu:

$$\begin{vmatrix} \underline{\rho} & \underline{\phi} & \underline{k} \\ n_r & n_\varphi & n_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} & 0 & -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \underline{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E} \quad (4.116a)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} n_z \right) \cdot \underline{\phi} = \underline{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E} \quad (4.116b)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z}; \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} \right) \cdot (n_r; n_z) \cdot \underline{\phi} = \underline{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E}. \quad (4.116c)$$

Výraz na levé straně lze také vyjádřit pomocí gradientu:

$$\text{grad } \underline{H}_\varphi \cdot \underline{n} \cdot \underline{\phi} = \underline{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E}. \quad (4.117)$$

A samotná Neumannova okrajová podmínka může být též rozepsána pomocí gradientu:

$$\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \underline{n}} = \text{grad} \underline{H}_\varphi \cdot \underline{n}. \quad (4.118)$$

To znamená, že na levou stranu rovnice 4.118 můžeme dosadit výraz představující Neumannovu okrajovou podmínku:

$$\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \underline{n}} \cdot \underline{\phi} = \underline{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E}. \quad (4.119)$$

Roznásobíme-li pravou stranu normálovým vektorem \underline{n} (a levou stranu vektorem $\underline{\phi}$) obsahujícím pouze tečnou složku, dostaneme skalární vyjádření:

$$\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \underline{n}} = j\omega\varepsilon \underline{H}_t. \quad (4.120)$$

Na levé straně máme tedy zápis Neumannovy okrajové podmínky a na straně pravé její funkční vyjádření.

Posledním krokem je dosazení pravé strany z 4.120 do 4.113 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (-\omega\varepsilon H_{(t \text{ imag})} v) r \, d\Gamma, \quad (4.121a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (j\omega\varepsilon H_{(t \text{ real})} v) r \, d\Gamma. \quad (4.121b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření pravé strany, tudíž „vector form”. Člen ε se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$-2 \pi f H_{(t \text{ imag})} r v \quad (4.122)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$2 \pi f H_{(t \text{ real})} r v \quad (4.123)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru H.

4.2.3 Newtonova okrajová podmínka

Newtonova, tzv. smíšená, okrajová podmínka spojuje obě předcházející podmínky (Dirichletovu a Neumannovu). Někdy bývá také označována jako Cauchyho nebo Robinova okrajová podmínka. Tato podmínka definuje impedanci na hranici řešené oblasti:

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial n}\right) = f_{New}(x, y, z, t). \quad (4.124)$$

Tvar pro \underline{E} v kartézských souřadnicích

Obecný zápis 4.124 lze pro \underline{E} v kartézských souřadnicích konkretizovat do tvaru:

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n} + K_1 \underline{E}_z = K_2. \quad (4.125)$$

Jak již název této okrajové podmínky napovídá, řešení vychází z výpočtu impedance:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}. \quad (4.126)$$

Cílem je upravit rovnici 4.126 do tvaru v 4.125.

Použijeme rovnici 2.3b a za \underline{H} dosadíme z této rovnice do rovnice 4.126. Tuto rovnici následně vektorově roznásobíme normálovým vektorem \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \underline{E} = -j\omega\mu(\mathbf{n} \times \underline{H}). \quad (4.127)$$

Na pravou stranu dosadíme podle rovnice:

$$\underline{H}_t = \mathbf{n} \times \underline{H} \quad (4.128a)$$

$$\underline{H}_t = \frac{\underline{E}_z}{\underline{Z}_0}, \quad (4.128b)$$

vycházející z 4.126. Levou stranu vektorově roznásobíme \mathbf{n} , vyjádříme pomocí gradientu a substituujeme do výrazu představujícího Neumannovu podmínku (postupuje se stejně jako v kapitole 4.2.2).

Vzhledem k tomu, že objektem výpočtu je TE vlna, bude přítomna pouze složka z pole \underline{E} :

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \underline{n}} = -j\omega\mu \underline{H}_t \quad (4.129a)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \underline{n}} = -j\omega\mu \frac{\underline{E}_z}{\underline{Z}_0}. \quad (4.129b)$$

Tento tvar lze podobně jako v kapitole 4.2.2 dosadit do 4.80 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \left(\frac{\omega\mu}{\underline{Z}_0} E_{(z \text{ imag})} v \right) d\Gamma, \quad (4.130a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \left(-\frac{j\omega\mu}{\underline{Z}_0} E_{(z \text{ real})} v \right) d\Gamma. \quad (4.130b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření levé strany, tudíž „matrix form”. Stejně jako u vyjádření levé strany u objemových integrálů použijeme substituci veličiny E za u . Reálná složka

$$\frac{2 \pi f}{\underline{Z}_0} u v \quad (4.131)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 2$. Imaginární složka

$$- \frac{2 \pi f}{\underline{Z}_0} u v \quad (4.132)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 1$.

Položky s indexy $i = 1, j = 1$ a $i = 2, j = 2$ v matici jsou nulové (obsaženy jsou pouze diagonální prvky), neuvádí se proto ani do xml modulu.

Také pravá strana rovnice (vector form) je nulová. Konkrétně to znamená, že pro $i = 1, j = 1$ je v xml modulu vyjádřena 0 a pro $i = 2, j = 2$ je v xml modulu též vyjádřena 0.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{H} v kartézských souřadnicích

Obecný zápis 4.124 lze pro \underline{H} v kartézských souřadnicích konkretizovat do tvaru:

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \underline{n}} + K_1 \underline{H}_z = K_2. \quad (4.133)$$

Jak již název této okrajové podmínky napovídá, řešení vychází z výpočtu impedance:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}. \quad (4.134)$$

Cílem je upravit rovnici 4.134 do tvaru v 4.133.

Použijeme rovnici 2.3a (bez uvažování proudové hustoty J a za \underline{E} dosadíme z této rovnice do rovnice 4.134). Tuto rovnici následně vektorově roznásobíme normálovým vektorem \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \underline{H} = j\omega\varepsilon(\mathbf{n} \times \underline{E}). \quad (4.135)$$

Na pravou stranu dosadíme podle rovnice:

$$\underline{E}_t = \mathbf{n} \times \underline{E} \quad (4.136a)$$

$$\underline{E}_t = \underline{Z}_0 \underline{H}_z, \quad (4.136b)$$

vycházející z 4.134. Levou stranu vektorově roznásobíme \mathbf{n} , vyjádříme pomocí gradientu a substituujeme do výrazu představujícího Neumannovu podmínku (postupuje se stejně jako v kapitole 4.2.2).

Vzhledem k tomu, že objektem výpočtu je TM vlna, bude přítomna pouze složka z pole \underline{H} :

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \mathbf{n}} = j\omega\varepsilon \underline{E}_t \quad (4.137a)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \mathbf{n}} = j\omega\varepsilon \underline{Z}_0 \underline{H}_z. \quad (4.137b)$$

Tento tvar lze podobně jako v kapitole 4.2.2 dosadit do 4.91 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (-\omega\varepsilon \underline{Z}_0 \underline{H}_{(z \text{ imag})} v) d\Gamma, \quad (4.138a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (\omega\varepsilon \underline{Z}_0 \underline{H}_{(z \text{ real})} v) d\Gamma. \quad (4.138b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření levé strany, tudíž „matrix form”. Stejně jako u vyjádření levé strany u objemových integrálů použijeme substituci veličiny H za u . Reálná složka

$$-2 \pi f \underline{Z}_0 u v \quad (4.139)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 2$. Imaginární složka

$$2 \pi f \underline{Z}_0 u v \quad (4.140)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 1$.

Položky s indexy $i = 1, j = 1$ a $i = 2, j = 2$ v matici jsou nulové (obsaženy jsou pouze diagonální prvky), neuvádí se proto ani do xml modulu.

Také pravá strana rovnice (vector form) je nulová. Konkrétně to znamená, že pro $i = 1, j = 1$ je v xml modulu vyjádřena 0 a pro $i = 2, j = 2$ je v xml modulu též vyjádřena 0.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru H .

Tvar pro \underline{E} ve válcových souřadnicích

Obeční zápis 4.124 lze pro \underline{E} ve válcových souřadnicích konkretizovat do tvaru:

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} + K_1 \underline{E}_\varphi = K_2. \quad (4.141)$$

Jak již název této okrajové podmínky napovídá, řešení vychází z výpočtu impedance:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}. \quad (4.142)$$

Cílem je upravit rovnici 4.142 do tvaru v 4.141.

Použijeme rovnici 2.3b a za \underline{H} dosadíme z této rovnice do rovnice 4.142. Tuto rovnici následně vektorově roznásobíme normálovým vektorem \underline{n} :

$$\underline{n} \times \text{rot } \underline{E} = -j\omega\mu(\underline{n} \times \underline{H}). \quad (4.143)$$

Na pravou stranu dosadíme podle rovnice:

$$\underline{H}_t = \underline{n} \times \underline{H} \quad (4.144a)$$

$$\underline{H}_t = \frac{\underline{E}_\varphi}{\underline{Z}_0}, \quad (4.144b)$$

vycházející z 4.142. Levou stranu vektorově roznásobíme \underline{n} , vyjádříme pomocí gradientu a substituujeme do výrazu představujícího Neumannovu podmínku (postupuje se stejně jako v kapitole 4.2.2).

Vzhledem k tomu, že objektem výpočtu je TE vlna, bude přítomna pouze složka φ pole \underline{E} :

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} = -j\omega\mu H_t \quad (4.145a)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} = -j\omega\mu \frac{\underline{E}_\varphi}{\underline{Z}_0}. \quad (4.145b)$$

Tento tvar lze podobně jako v kapitole 4.2.2 dosadit do 4.102 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \left(\frac{\omega\mu}{\underline{Z}_0} E_{(\varphi \text{ imag})} r v \right) d\Gamma, \quad (4.146a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \left(-\frac{j\omega\mu}{\underline{Z}_0} E_{(\varphi \text{ real})} r v \right) d\Gamma. \quad (4.146b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření levé strany, tudíž „matrix form”. Stejně jako u vyjádření levé strany u objemových integrálů použijeme substituci veličiny E za u . Reálná složka

$$r \frac{2\pi f}{\underline{Z}_0} u v \quad (4.147)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 2$. Imaginární složka

$$-r \frac{2\pi f}{Z_0} u v \quad (4.148)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 1$.

Položky s indexy $i = 1, j = 1$ a $i = 2, j = 2$ v matici jsou nulové (obsaženy jsou pouze diagonální prvky), neuvádí se proto ani do xml modulu.

Také pravá strana rovnice (vector form) je nulová. Konkrétně to znamená, že pro $i = 1, j = 1$ je v xml modulu vyjádřena 0 a pro $i = 2, j = 2$ je v xml modulu též vyjádřena 0.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{H} ve válcových souřadnicích

Obecný zápis 4.124 lze pro \underline{H} ve válcových souřadnicích konkretizovat do tvaru:

$$\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial n} + K_1 \underline{H}_\varphi = K_2. \quad (4.149)$$

Jak již název této okrajové podmínky napovídá, řešení vychází z výpočtu impedance:

$$Z_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}. \quad (4.150)$$

Cílem je upravit rovnici 4.150 do tvaru v 4.149.

Použijeme rovnici 2.3a (bez uvažování proudové hustoty J a za \underline{E} dosadíme z této rovnice do rovnice 4.150). Tuto rovnici následně vektorově roznásobíme normálovým vektorem \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \underline{H} = j\omega\varepsilon(\mathbf{n} \times \underline{E}) \quad (4.151)$$

Na pravou stranu dosadíme podle rovnice:

$$\underline{E}_t = \mathbf{n} \times \underline{E} \quad (4.152a)$$

$$\underline{E}_t = Z_0 \underline{H}_\varphi, \quad (4.152b)$$

vycházející z 4.150. Levou stranu vektorově roznásobíme \mathbf{n} , vyjádříme pomocí gradientu a substituujeme do výrazu představujícího Neumannovu podmínku (postupuje se stejně jako v kapitole 4.2.2).

Vzhledem k tomu, že objektem výpočtu je TM vlna, bude přítomna pouze složka φ pole \underline{H} :

$$\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial n} = j\omega\varepsilon \underline{E}_t \quad (4.153a)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial n} = j\omega\varepsilon \underline{H}_\varphi Z_0 \quad (4.153b)$$

Tento tvar lze podobně jako v kapitole 4.2.2 dosadit do 4.113 (výrazu získaného při výpočtu slabých norem):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (-\omega \varepsilon \underline{Z}_0 \underline{H}_{(\varphi \text{ imag})} r v) d\Gamma, \quad (4.154a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} (\omega \varepsilon \underline{Z}_0 \underline{H}_{(\varphi \text{ real})} r v) d\Gamma. \quad (4.154b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření levé strany, tudíž „matrix form”. Stejně jako u vyjádření levé strany u objemových integrálů použijeme substituci veličiny H za u . Reálná složka

$$- r 2 \pi f \underline{Z}_0 u v \quad (4.155)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 2$. Imaginární složka

$$r 2 \pi f \underline{Z}_0 u v \quad (4.156)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 1$.

Položky s indexy $i = 1, j = 1$ a $i = 2, j = 2$ v matici jsou nulové (obsaženy jsou pouze diagonální prvky), neuvádí se proto ani do xml modulu.

Také pravá strana rovnice (vector form) je nulová. Konkrétně to znamená, že pro $i = 1, j = 1$ je v xml modulu vyjádřena 0 a pro $i = 2, j = 2$ je v xml modulu též vyjádřena 0.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru H .

4.2.4 Neumannova okrajová podmínka zadaná povrchovým proudem

Proudovou hustotu lze vyjádřit jako $\underline{J} = \gamma \underline{E}$. Opačně to také znamená, že intenzita elektrického pole \underline{E} může být vyjádřena pomocí proudové hustoty \underline{J} . Toho lze s výhodou využít při zadávání Neumannovy okrajové podmínky. Neumannova okrajová podmínka je obecně vyjádřena jako hodnota normálové derivace funkce, konkrétně v našem případě je pak udána prostřednictvím intenzity elektrického pole \underline{E} . A jak již bylo zmíněno, intenzita elektrického pole \underline{E} může být nahrazena proudovou hustotou \underline{J} .

Tvar pro \underline{J} a TE pole v kartézských souřadnicích

Budeme vycházet z tvaru 4.86, ke kterému jsme došli při výpočtu Neumannovy okrajové podmínky v kapitole 4.2.2

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \underline{n}} \cdot \underline{k} = - \underline{n} \times j\omega \mu \underline{H}. \quad (4.157)$$

Za veličinu \underline{H} na pravé straně dosadíme proudovou hustotu \underline{J} vynásobenou vodivostí γ na vnitřní straně rozhraní:

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \underline{n}} \cdot \underline{k} = -\underline{n} \times j\omega\mu \frac{\underline{J}}{\gamma}. \quad (4.158)$$

Na obou stranách rovnice provedeme součiny vektorů a veličinu \underline{J} rozepíšeme na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \underline{n}} = -j \omega\mu \frac{J_t}{\gamma} \quad (4.159a)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \underline{n}} = -j \frac{\omega\mu}{\gamma} (J_{(t \text{ real})} + J_{(t \text{ imag})} j) \quad (4.159b)$$

Rovnici tedy můžeme rozdělit na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial E_{(z \text{ real})}}{\partial \underline{n}} = \frac{\omega\mu}{\omega} J_{(t \text{ imag})} \quad (4.160a)$$

$$\frac{\partial E_{(z \text{ imag})}}{\partial \underline{n}} = -j \frac{\omega\mu}{\omega} J_{(t \text{ real})} \quad (4.160b)$$

Posledním krokem je dosazení pravé strany z 4.160 do 4.80 (výrazu získaného při výpočtu slabých forem):

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \frac{\omega\mu}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v \, d\Gamma \quad (4.161a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} -j \frac{\omega\mu}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v \, d\Gamma \quad (4.161b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření pravé strany, tudíž „vector form”. Člen μ se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$\frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v \quad (4.162)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$- \frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v \quad (4.163)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{J} a TE pole ve válcových souřadnicích

Budeme vycházet z tvaru 4.108, ke kterému jsme došli při výpočtu Neumannovy okrajové podmínky v kapitole 4.2.2:

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} \cdot \underline{\phi} = - \underline{n} \times j\omega\mu \underline{H}. \quad (4.164)$$

Za veličinu \underline{H} na pravé straně dosadíme proudovou hustotu \underline{J} vynásobenou vodivostí γ na vnitřní straně rozhraní:

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} \cdot \underline{\phi} = -\underline{n} \times j\omega\mu \frac{\underline{J}}{\gamma}. \quad (4.165)$$

Na obou stranách rovnice provedeme součiny vektorů a veličinu \underline{J} rozepíšeme na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} = -j \omega\mu \frac{J_t}{\gamma} \quad (4.166a)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_\varphi}{\partial \underline{n}} = -j \frac{\omega\mu}{\gamma} (J_{(t \text{ real})} + J_{(t \text{ imag})} j) \quad (4.166b)$$

Rovnici tedy můžeme rozdělit na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial E_{(\varphi \text{ real})}}{\partial \underline{n}} = \frac{\omega\mu}{\omega} J_{(t \text{ imag})} \quad (4.167a)$$

$$\frac{\partial E_{(\varphi \text{ imag})}}{\partial \underline{n}} = -j \frac{\omega\mu}{\omega} J_{(t \text{ real})} \quad (4.167b)$$

Posledním krokem je dosazení pravé strany z 4.167 do 4.102 (výrazu získaného při výpočtu slabých forem):

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \frac{\omega\mu}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v r d\Gamma \quad (4.168a)$$

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} -j \frac{\omega\mu}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v r d\Gamma \quad (4.168b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření pravé strany, tudíž „vector form”. Člen μ se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$\frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v r \quad (4.169)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$- \frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v r \quad (4.170)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru E.

Tvar pro \underline{J} a TM pole v kartézských souřadnicích

Budeme vycházet z tvaru 4.97, ke kterému jsme došli při výpočtu Neumannovy okrajové podmínky v kapitole 4.2.2:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \underline{n}} \cdot \underline{k} = \underline{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E}. \quad (4.171)$$

Za veličinu \underline{E} na pravé straně dosadíme proudovou hustotu \underline{J} vynásobenou vodivostí γ na vnitřní straně rozhraní:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \frac{\underline{J}}{\gamma}. \quad (4.172)$$

Na obou stranách rovnice provedeme součiny vektorů a veličinu \underline{J} rozepíšeme na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \mathbf{n}} = j \omega\varepsilon \frac{J_t}{\gamma} \quad (4.173a)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial \mathbf{n}} = j \frac{\omega\varepsilon}{\gamma} (J_{(t \text{ real})} + J_{(t \text{ imag})} j) \quad (4.173b)$$

Rovnici tedy můžeme rozdělit na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial H_{(z \text{ real})}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\omega\varepsilon}{\omega} J_{(t \text{ imag})} \quad (4.174a)$$

$$\frac{\partial H_{(z \text{ imag})}}{\partial \mathbf{n}} = j \frac{\omega\varepsilon}{\omega} J_{(t \text{ real})} \quad (4.174b)$$

Posledním krokem je dosazení pravé strany z 4.174 do 4.91 (výrazu získaného při výpočtu slabých forem):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} -\frac{\omega\varepsilon}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v \, d\Gamma \quad (4.175a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} j \frac{\omega\varepsilon}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v \, d\Gamma \quad (4.175b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření pravé strany, tudíž „vector form”. Člen ε se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$-\frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v \quad (4.176)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$\frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v \quad (4.177)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru H.

Tvar pro \underline{J} a TM pole ve válcových souřadnicích

Budeme vycházet z tvaru 4.119, ke kterému jsme došli při výpočtu Neumannovy okrajové podmínky v kapitole 4.2.2:

$$\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \phi = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \underline{E}. \quad (4.178)$$

Za veličinu \underline{E} na pravé straně dosadíme proudovou hustotu \underline{J} vynásobenou vodivostí γ na vnitřní straně rozhraní:

$$\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi} = \mathbf{n} \times j\omega\varepsilon \frac{\underline{J}}{\gamma}. \quad (4.179)$$

Na obou stranách rovnice provedeme součiny vektorů a veličinu \underline{J} rozepíšeme na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} = j \omega\varepsilon \frac{J_t}{\gamma} \quad (4.180a)$$

$$\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} = j \frac{\omega\varepsilon}{\gamma} (J_{(t \text{ real})} + J_{(t \text{ imag})} j) \quad (4.180b)$$

Rovnici tedy můžeme rozdělit na její reálnou a imaginární složku:

$$\frac{\partial H_{(\varphi \text{ real})}}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\omega\varepsilon}{\omega} J_{(t \text{ imag})} \quad (4.181a)$$

$$\frac{\partial H_{(\varphi \text{ imag})}}{\partial \mathbf{n}} = j \frac{\omega\varepsilon}{\omega} J_{(t \text{ real})} \quad (4.181b)$$

Posledním krokem je dosažení pravé strany z 4.181 do 4.113 (výrazu získaného při výpočtu slabých forem):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} -\frac{\omega\varepsilon}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v r d\Gamma \quad (4.182a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} j \frac{\omega\varepsilon}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v r d\Gamma \quad (4.182b)$$

Takto získaný výraz lze již (bez integrálu o jehož detekci a výpočet se stará samotný programový kód Agrosu) zapsat do xml modulu. Bude se jednat o vyjádření pravé strany, tudíž „vector form”. Člen ε se vykrátí a ω rozepíšeme pomocí f . Reálná složka

$$-\frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ imag})} v r \quad (4.183)$$

bude označena indexy $i = 1, j = 1$. Imaginární složka

$$\frac{2 \pi f}{\gamma} J_{(t \text{ real})} v r \quad (4.184)$$

bude označena indexy $i = 2, j = 2$.

Přesný XML kód je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis okrajových podmínek fázoru H.

4.3 Postprocessor - dopočet různých veličin pole

Postprocessing v programu Agros2D umožňuje dopočíst a graficky zobrazit další veličiny pole z veličin již získaných. Vztahy pro dopočet dalších veličin i interpretaci hodnot již získaných musí být implementovány v xml modulu, resp. jeho podmodulu postprocessor.

V xml souboru parsovaném do knihovny Agrosu jsou v rovnicích použitých v postprocessoru použity následující symboly:

Tab. 4.1: Tabulka symbolů použitých v rovnicích xml modulu v sekci postprocessoru

value1	$H_{(z \text{ real})}$ resp. $H_{(\varphi \text{ real})}$
value2	$H_{(z \text{ imag})}$ resp. $H_{(\varphi \text{ imag})}$
dx1	$\frac{\partial H_{(z \text{ real})}}{\partial x}$
dx2	$\frac{\partial H_{(z \text{ imag})}}{\partial x}$
dy1	$\frac{\partial H_{(z \text{ real})}}{\partial y}$
dy2	$\frac{\partial H_{(z \text{ imag})}}{\partial y}$
dr1	$\frac{\partial H_{(\varphi \text{ real})}}{\partial r}$
dr2	$\frac{\partial H_{(\varphi \text{ imag})}}{\partial r}$
dz1	$\frac{\partial H_{(\varphi \text{ real})}}{\partial z}$
dz2	$\frac{\partial H_{(\varphi \text{ imag})}}{\partial z}$

4.3.1 Intenzita magnetického pole

Hodnoty pro intenzitu magnetického pole \underline{H} vycházejí přímo z řešených slabých forem a úkolem postprocessoru je tedy pouze jejich přímé zobrazení. Zápis v xml modulu v 6.

4.3.2 Intenzita elektrického pole

Vztah pro výpočet intenzity elektrického pole \underline{E} lze odvodit z 2.3a (1. Maxwellovy rovnice) a tím získat jeho hodnotu ze známé veličiny \underline{H} .

Výpočtem operace rotace pro jedinou složku z \underline{H} a rozepsáním vektoru na pravé straně získáme:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{H}_z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon(\underline{E}_x\underline{i} + \underline{E}_y\underline{j}) \quad (4.185a)$$

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\underline{i} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\underline{j} = j\omega\varepsilon(\underline{E}_x\underline{i} + \underline{E}_y\underline{j}). \quad (4.185b)$$

Pro jednotlivé složky vektoru \underline{E} to potom znamená:

$$\underline{E}_x = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ real})}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ imag})}}{\partial y} j \right), \quad (4.186a)$$

$$\underline{E}_y = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ real})}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ imag})}}{\partial x} j \right). \quad (4.186b)$$

Rozepsáno na jejich reálné a imaginární složky:

$$E_{(x \text{ real})} = \frac{1}{\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ imag})}}{\partial y}, \quad (4.187a)$$

$$E_{(x \text{ imag})} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ real})}}{\partial y}, \quad (4.187b)$$

$$E_{(y \text{ real})} = -\frac{1}{\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ imag})}}{\partial x}, \quad (4.187c)$$

$$E_{(y \text{ imag})} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ real})}}{\partial x}. \quad (4.187d)$$

Z výše uvedených rovnic lze vyjádřit velikost (absolutní hodnotu) vektoru \underline{E} :

$$E = \frac{1}{\omega\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ imag})}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ real})}}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ imag})}}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \underline{H}_{(z \text{ real})}}{\partial x}\right)^2} \quad (4.188)$$

Podobně se postupuje i při výpočtu ve válcových souřadnicích. Zde je přítomna pouze složka φ \underline{H} . Rozepsáním vektoru na pravé straně získáme:

$$\begin{vmatrix} \underline{\rho} & \underline{\phi} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \underline{H}_\varphi & 0 \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon(\underline{E}_r \underline{\rho} + \underline{E}_z \underline{k}) \quad (4.189a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} \underline{k} - \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} \underline{\rho} = j\omega\varepsilon(\underline{E}_r \underline{\rho} + \underline{E}_z \underline{k}). \quad (4.189b)$$

Pro jednotlivé složky vektoru \underline{E} to potom znamená:

$$\underline{E}_r = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial \underline{H}_{(\varphi \text{ real})}}{\partial z} + \frac{\partial \underline{H}_{(\varphi \text{ imag})}}{\partial z} j \right), \quad (4.190a)$$

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_{(\varphi \text{ real})})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_{(\varphi \text{ imag})})}{\partial r} j \right). \quad (4.190b)$$

Rozepsáno na jejich reálné a imaginární složky:

$$E_{(r \text{ real})} = -\frac{1}{\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{(\varphi \text{ imag})}}{\partial z}, \quad (4.191a)$$

$$E_{(r \text{ imag})} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{(\varphi \text{ real})}}{\partial z}, \quad (4.191b)$$

$$E_{(z \text{ real})} = \frac{1}{\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_{(\varphi \text{ imag})})}{\partial r}, \quad (4.191c)$$

$$E_{(z \text{ imag})} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_{(\varphi \text{ real})})}{\partial r}. \quad (4.191d)$$

Z výše uvedených rovnic lze vyjádřit velikost (absolutní hodnotu) vektoru \underline{E} :

$$E = \frac{1}{\omega\varepsilon} \sqrt{\left(-\frac{\partial \underline{H}_{(\varphi \text{ Imag})}}{\partial z}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \underline{H}_{(\varphi \text{ Real})}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_{(\varphi \text{ Imag})})}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_{(\varphi \text{ Real})})}{\partial r}\right)^2} \quad (4.192)$$

Programový xml kód použitý v modulu je vyjádřen v 6.

4.3.3 Poyntingův vektor

Poyntingův vektor \underline{N} [W/m^2] představuje plošnou hustotu výkonu na řešené oblasti a je vyjádřen jako vektorový součin intenzity elektrického pole \underline{E} a intenzity magnetického pole \underline{H} :

$$\underline{N} = \underline{E} \times \underline{H}. \quad (4.193)$$

Provedeme výpočet vektorového součinu z pravé strany rovnice:

$$\underline{E} \times \underline{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = E_y H_z \mathbf{i} - E_x H_z \mathbf{j}. \quad (4.194)$$

A výsledek zapíšeme zpět do rovnice 4.193:

$$N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} = E_y H_z \mathbf{i} - E_x H_z \mathbf{j}. \quad (4.195)$$

Výraz vyjádříme pro jednotlivé složky vektoru \underline{N} :

$$\begin{aligned} N_x &= E_y H_z = (E_{(y \text{ real})} + E_{(y \text{ imag})}j)(H_{(z \text{ real})} + H_{(z \text{ imag})}j) \\ &= E_{(y \text{ real})}H_{(z \text{ real})} - E_{(y \text{ imag})}H_{(z \text{ imag})} + j(E_{(y \text{ real})}H_{(z \text{ imag})} + E_{(y \text{ imag})}H_{(z \text{ real})}), \end{aligned} \quad (4.196a)$$

$$\begin{aligned} N_y &= -E_x H_z = -(E_{(x \text{ real})} + E_{(x \text{ imag})}j)(H_{(z \text{ real})} + H_{(z \text{ imag})}j) \\ &= -E_{(x \text{ real})}H_{(z \text{ real})} + E_{(x \text{ imag})}H_{(z \text{ imag})} - j(E_{(x \text{ real})}H_{(z \text{ imag})} + E_{(x \text{ imag})}H_{(z \text{ real})}). \end{aligned} \quad (4.196b)$$

Poyntingův vektor představuje hustotu výkonu elektromagnetického pole. Jeho hodnota tedy musí být reálným číslem:

$$N_x = E_{(y \text{ real})}H_{(z \text{ real})} - E_{(y \text{ imag})}H_{(z \text{ imag})}, \quad (4.197a)$$

$$N_y = -E_{(x \text{ real})}H_{(z \text{ real})} + E_{(x \text{ imag})}H_{(z \text{ imag})}. \quad (4.197b)$$

Programový xml kód použitý pro zápis Poyntingova vektoru do postprocessoru v TM modulu je vyjádřen v 6. Za složky intenzity elektrického pole je zde dosazeno z části postprocessoru určené pro výpočet \underline{E} a za složky intenzity magnetického pole přímý výsledek výpočtu slabých forem.

Podobně se postupuje i při výpočtu ve válcových souřadnicích. Zde je přítomna pouze složka φ \underline{H} . Vycházíme z rovnice 4.193. Provedeme výpočet vektorového součinu:

$$\underline{E} \times \underline{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho} & \boldsymbol{\phi} & \mathbf{k} \\ E_r & 0 & E_z \\ 0 & H_\varphi & 0 \end{vmatrix} = E_r H_\varphi \mathbf{k} - E_z H_\varphi \boldsymbol{\rho}. \quad (4.198)$$

A výsledek zapíšeme zpět do rovnice 4.193:

$$N_r \boldsymbol{\rho} + N_z \mathbf{k} = E_r H_\varphi \mathbf{k} - E_z H_\varphi \boldsymbol{\rho}. \quad (4.199)$$

Výraz vyjádříme pro jednotlivé složky vektoru \underline{N} :

$$\begin{aligned}\underline{N}_r &= -\underline{E}_z \underline{H}_\varphi = -(E_{(z \text{ real})} + E_{(z \text{ imag})}j)(H_{(\varphi \text{ real})} + H_{(\varphi \text{ imag})}j) \\ &= -E_{(z \text{ real})}H_{(\varphi \text{ real})} + E_{(z \text{ imag})}H_{(\varphi \text{ imag})} - j(E_{(z \text{ real})}H_{(\varphi \text{ imag})} + E_{(z \text{ imag})}H_{(\varphi \text{ real})}),\end{aligned}\quad (4.200a)$$

$$\begin{aligned}\underline{N}_z &= \underline{E}_r \underline{H}_\varphi = (E_{(r \text{ real})} + E_{(r \text{ imag})}j)(H_{(\varphi \text{ real})} + H_{(\varphi \text{ imag})}j) \\ &= E_{(r \text{ real})}H_{(\varphi \text{ real})} - E_{(r \text{ imag})}H_{(\varphi \text{ imag})} + j(E_{(r \text{ real})}H_{(\varphi \text{ imag})} + E_{(r \text{ imag})}H_{(\varphi \text{ real})}).\end{aligned}\quad (4.200b)$$

Poyntingův vektor představuje hustotu výkonu elektromagnetického pole. Jeho hodnota tedy musí být reálným číslem:

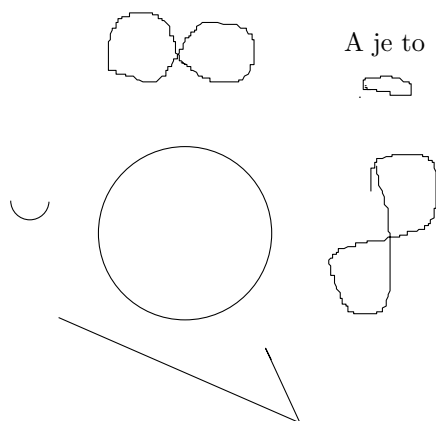
$$N_r = -E_{(z \text{ real})}H_{(\varphi \text{ real})} + E_{(z \text{ imag})}H_{(\varphi \text{ imag})}, \quad (4.201a)$$

$$N_z = E_{(r \text{ real})}H_{(\varphi \text{ real})} - E_{(r \text{ imag})}H_{(\varphi \text{ imag})}. \quad (4.201b)$$

Programový xml kód použitý pro zápis Poyntingova vektoru do postprocessoru v TM modulu je vyjádřen v 6. Za složky intenzity elektrického pole je zde dosazeno z části postprocessoru určené pro výpočet \underline{E} a za složky intenzity magnetického pole přímý výsledek výpočtu slabých forem.

5 Zatím moje pokusy

5.1 Vkládání obrázků



Obr. 5.1: Obrázek v pdf kreslený v ipe



Obr. 5.2: Fotka v jpg

5.2 Vkládání tabulek

Zkušební tvorba tabulek. Nejhorší je tvorba siroteků. Otázkou je, jak jím předejít. Klasické parametry nepomáhají. Problém se ani na fórech neřeší...

Tab. 5.1: Tabulka s přizpůsobením šířky sloupců

Frekvenční pásmo	Technologie	Region
700Mhz	LTE	USA
800Mhz	LTE	Evropa
850Mhz	GSM	USA
900Mhz	GSM	Evropa
1700Mhz	3G	USA
1800Mhz	GSM	Evropa
1900Mhz	GSM	USA
2100Mhz	3G	Evropa
2600Mhz	LTE	Evropa

Fixní šířka sloupce může být nastavena příkazem "`p{5cm}`", ale tento příkaz vyvolá zarovnání doleva. Při požadavku na zarovnání na střed nebo doprava ho nelze použít a buňka se musí manuálně roztáhnout doplněním násilných mezer " "v první řádce tak, aby všechny sloupce byly stejně široké.

Tab. 5.2: Tabulka s fixní šířkou sloupců

Frekvenční pásmo	Technologie	Region
700Mhz	LTE	USA
800Mhz	LTE	Evropa
850Mhz	GSM	USA
900Mhz	GSM	Evropa
1700Mhz	3G	USA
1800Mhz	GSM	Evropa
1900Mhz	GSM	USA
2100Mhz	3G	Evropa
2600Mhz	LTE	Evropa

5.3 Sazba rovnic

Slavná rovnice Alberta Einsteina praví: $E = m \cdot c^2$. Platí pro všechny částice s nenulovou klidovou hmotností. Energie fotonu je naproti tomu determinována pouze jeho frekvencí (a Planckovou konstantou) $E = h \cdot f$.

Nyní se podíváme na zoubek číselným rovnicím. Co třeba takhle první Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru?

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.1)$$

Pro sazbu matematiky platí obecně jiná pravidla. Jinak se například zadávají mezery nebo tučné písmo.

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad x^{2+p} \geq 0 \quad (5.2)$$

Zkusíme i odkazování. Vzpomínáte si na první Maxwellovu rovnici? Jestli ne, je to tato: 5.1. Btw., znáte ten hezký symbol pro množinu reálných čísel? Je to tento: \mathbf{R}

A teď třeba funkce a odmocniny. Jako příklad do písemky z matematiky. Najděte definiční obor funkce:

$$f(x) : \quad \left(\frac{\sqrt{3^{-x}}}{\sqrt[3]{x-7}} \right)^2 \quad (5.3)$$

Studenti, pamatujete si ještě, derivace? Tohle musíte umět z hlavy i kdybych vás probudil uprostřed noci: $y = \cos(x^3) \quad y' = \quad y'' =$

Kdo z vás si vzpomene ještě na limity a ví, co tato znamená?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Vrátíme se zpět k Maxwellovým rovnicím. Budeme pokračovat popořadě a podíváme se na druhou Maxwellovu rovnici, tentokrát v integrálním tvaru:

$$\oint_c \mathbf{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.4)$$

A nyní něco trochu komplikovanějšího. Jak se spočte taková zřídlovost?

$$\nabla \times \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

Občas bude zapotřebí vysázet víc rovnic současně. Například všechny Maxwellovy rovnice. Následující ukázka předvádí použití příkazu "align" nahrazující "equation" pro sazbu více rovnic. Rovnítko se musí doplnit znaky "&": "&=", aby byly rovnice správně vycentrovány na střed.

$$f(x) = \cos x \quad (5.6a)$$

$$f'(x) = -\sin x \quad (5.6b)$$

$$\operatorname{div} x = 0 \quad (5.6c)$$

Nebo napsat vysvětlivku k rovnici, která nebude odsazená.

5.4 Odrážky a číslování

5.4.1 Odrážkovaný seznam

Státy USA, které jsem navštívil:

- Kalifornie
- Florida
- New Jersey
- New York
- Illinois
- Wisconsin
- Minnesota
- Pensylvánie
- Maryland
- Virginia
- District of Columbia

5.4.2 Číslovaný seznam

Pořadí, v jakém jsem je navštívil:

1. Illinois
2. Wisconsin
3. Minnesota
4. Kalifornie
5. New York
6. New Jersey
7. Pensylvánie
8. Maryland
9. District of Columbia
10. Virginia
11. Florida

5.4.3 Popisné výčty (prostředí „Description”)

Hlavní města některých států USA, které jsem navštívil:

Kalifornie Sacramento

Wisconsin Madison

Maryland Annapolis

5.4.4 Odsazování - tabulátor

Největší města některých států USA, která jsem navštívil:

Illinois	Chicago
Maryland	Baltimore
Kalifornie	Los Angeles

5.5 Citace

L^AT_EX nabízí i speciální prostředí pro citace a zvýraznění textu:

„Veni, vidi, vici.”

5.6 Verbatim

Prostředí „Verbatim” se hodí na sazbu textů, kde není žádoucí brát zřetel na formátovací značky. Příkladem je sazba zdrojových kódů.

```
System.out.println("Ja su lama, nevzpomenu si ani na zapis hlavicky v Jave")
```

6 Závěr

Věřím, že se povede dojít až k úspěšnému odvození finálních rovnic a vytvoření modulu pro modelování vysokofrekvenčního pole.

V současné době zdokonaluji kapitulu o vlnovodech a chtěl bych odvodit okrajové podmínky pro Helmholtzovu rovnici (ale nevím, co to je ani jak na to) - samotnou Helmholtzovu rovnici jsem již odvodil. Také bych Helmholtzovu rovnici chtěl vyjádřit ve válcových souřadnicích.

V další fázi bych dotáhl do konce kapitulu o šíření vln ve volném prostoru a vytvořil kapitulu (nebo přílohu) se stručnými informacemi o programu Agros2D a jeho ovládání.

Poté přijde na řadu to nejtěžší. Zjistit bližší informace o tom, co jsou to tzv. slabé formy, odvodit rovnice, vytvořit modul a analyzovat jeho chování uvnitř programu Agros2D.

Na závěr potom porovnat jeho chování a modelování vysokofrekvenčních zařízení v programu Comsol.

Modleme se za to, že se práce úspěšně povede dotáhnout do konce a v dubnu tedy bude moci čnít: „Práce dokončena”

In nomine Patris et Filii et Spiritus Sancti. Amen.

Použitá literatura

- [1] POZAR, David M. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 1998. Second Edition. ISBN 0-471-17096-8.
- [2] POZAR, David M. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2012. Fourth Edition. ISBN 978-0-470-63155-3.
- [3] KASTNER, Raphael. SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING, Tel Aviv University. Antennas and Radiation. Tel Aviv, 2009. Dostupné z: <http://www.scribd.com/doc/56316827/3/Maxwell-Equations-in-the-Frequency-Domain>
- [4] Rectangular waveguide dimensions. Microwaves101.com [online]. Tucson, AZ, November 3, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.microwaves101.com/encyclopedia/waveguidedimensions.cfm>
- [5] Microstrip. Microwaves101.com [online]. Tucson, AZ, February 18, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.microwaves101.com/encyclopedia/microstrip.cfm>
- [6] Intrinsic Impedance. Antenna-Theory.com [online]. (c) 2009-2011 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.antenna-theory.com/definitions/intrinsicimpedance.php>
- [7] KARBAN, Pavel. FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING, University of West Bohemia in Pilsen. Agros2D [online]. Plzeň, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.agros2d.org/>
- [8] KOUDELA, Lukáš. *Simulace šíření elektromagnetických vln*. Plzeň, 2011. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická, Katedra teoretické elektrotechniky. Vedoucí práce Ing. Pavel Karban, Ph.D.
- [9] Rovinné vlny. *Fyzikální sekce Matematicko-fyzikální fakulty UK* [online]. [cit. 2013-02-20]. Dostupné z: http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/optika/1_3
- [10] THE HP-FEM GROUP. *www.hpFEM.org* [online]. 2013 [cit. 2013-04-09]. Dostupné z: <http://hpfem.org/>
- [11] KARBAN, Pavel. ELEKTROTECHNICKÁ FAKULTA, Západočeská univerzita v Plzni. *Numerické metody: Metoda konečných diferencí*. Plzeň, 22.03.2012. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~karban/ATE/prednaska_06.pdf
- [12] MAYER, Daniel, Josef POLÁK. *Metody řešení elektrických a magnetických polí*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1983, 450 s.
- [13] Finite element method. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method

- [14] MAYER, Daniel. FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ, Západočeská univerzita v Plzni. *Teorie elektromagnetického pole: 2. díl*. 3. vyd. Lektor: Zdeňka BENEŠOVÁ. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004, 358 s. ISBN 80-7082-826-9.

Seznam obrázků

2.1	Vlnovod masivnější konstrukce pro šíření vln o nižší frekvenci (okolo 1 GHz)	12
2.2	Microstrip a jeho části	13
2.3	Geometrie válcového vlnovodu v kartézském souřadném systému	14
3.1	Síť vygenerovaná v programu Agros2D	21
3.2	Postprocessing modelu v programu Agros2D	22
5.1	Obrázek v pdf kreslený v ipe	58
5.2	Fotka v jpg	58

Seznam tabulek

4.1	Tabulka symbolů použitých v rovnicích xml modulu v sekci postprocessoru	54
5.1	Tabulka s přizpůsobením šířky sloupců	59
5.2	Tabulka s fixní šířkou sloupců	59

Příloha I. - XML kód pro TE

Zápis slabých formulací fáze E

```
<module:volume>
  <module:quantity id="rf_te_permittivity" shortname="rf_eps"/>
  <module:quantity id="rf_te_permeability" shortname="rf_mur"/>
  <module:quantity id="rf_te_conductivity" shortname="rf_gamma"/>
  <module:quantity id="rf_te_current_density_external_real"
shortname="rf_Jer"/>
  <module:quantity id="rf_te_current_density_external_imag"
shortname="rf_Jei"/>
  <module:weakforms_volume>
    <module:weakform_volume analysistype="harmonic" equation="\curl
\left( \frac{1}{\mu}\, \, \curl \, \text{vecfaz}\{E\} \, \right) - \, \text{mj} \, \omega \, \left(
\sigma + \, \text{mj} \, \omega \, \text{varepsilon} \, \right) \, \text{vecfaz}\{E\} = \, \text{mj} \, \omega
\, \text{vecfaz}\{J\}_{\backslash\mathrm{ext}}">
      <module:quantity id="rf_te_permittivity"/>
      <module:quantity id="rf_te_permeability"/>
      <module:quantity id="rf_te_conductivity"/>
      <module:quantity id="rf_te_current_density_external_real"/>
      <module:quantity id="rf_te_current_density_external_imag"/>
      <module:matrix_form axi_linear="- 1 / (rf_mur * MU0) * (r *
udr * vdr + r * udz * vdz + (r > 0) * uval * vval/r + uval * vdr +
vval * udr) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval"
axi_newton="- r * 1 / (rf_mur * MU0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r *
pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" i="1" id="form" j="1"
planar_linear="- 1 / (rf_mur * MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 *
PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" planar_newton="- 1 / (rf_mur
* MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 *
uval * vval" symmetric="0"/>
      <module:matrix_form axi_linear="- 1 / (rf_mur * MU0) * (r *
udr * vdr + r * udz * vdz + (r > 0) * uval * vval/r + uval * vdr +
vval * udr) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval"
axi_newton="- r * 1 / (rf_mur * MU0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r *
pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" i="2" id="form" j="2"
planar_linear="- 1 / (rf_mur * MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 *
PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" planar_newton="- 1 / (rf_mur
* MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 *
uval * vval" symmetric="0"/>
      <module:matrix_form axi_linear="2 * PI * f * rf_gamma * uval *
vval" axi_newton="0" i="1" id="form" j="2" planar_linear="2 * PI * f *
rf_gamma * uval * vval" planar_newton="0"/>
      <module:matrix_form axi_linear="-2 * PI * f * rf_gamma * uval *
vval" axi_newton="0" i="2" id="form" j="1" planar_linear="- 2 * PI * f
* rf_gamma * uval * vval" planar_newton="0"/>
      <module:vector_form axi_linear="- r * 2 * PI * f * rf_Jei *
```

```

vval" axi_newton="- 1 / (rf_mur * MU0) * (updr * vdr + updz * vdz) +
r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * upval * vval - r * rf_Jer *
vval" i="1" id="form" j="1" planar_linear="- 2 * PI * f * rf_Jei *
vval" planar_newton="- 1 / (rf_mur * MU0) * (updx * vdx + updy * vdy) +
pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * upval * vval - rf_Jer * vval"/>
<module:vector_form axi_linear="r * 2 * PI * f * rf_Jer *
vval" axi_newton="- 1 / (rf_mur * MU0) * (updr * vdr + updz * vdz) +
r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * upval * vval - r * rf_Jei *
vval" i="2" id="form" j="2" planar_linear="2 * PI * f * rf_Jer * vval"
planar_newton="- 1 / (rf_mur * MU0) * (updx * vdx + updy * vdy) + pow(2
* PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * upval * vval - rf_Jei * vval"/>
</module:weakform_volume>
</module:weakforms_volume>
</module:volume>

```

Zápis okrajových podmínek fáze E

```

<module:surface>
  <module:quantity id="rf_te_electric_field_real" shortname="rf_Er"/>
  <module:quantity id="rf_te_electric_field_imag" shortname="rf_Ei"/>
  <module:quantity id="rf_te_magnetic_field_real" shortname="rf_Hr"/>
  <module:quantity id="rf_te_magnetic_field_imag" shortname="rf_Hi"/>
  <module:quantity id="rf_te_surface_current_real"
shortname="rf_Jr"/>
  <module:quantity id="rf_te_surface_current_imag"
shortname="rf_Ji"/>
  <module:quantity id="rf_te_impedance" shortname="rf_Z0"/>
  <module:weakforms_surface>
    <module:weakform_surface analysistype="harmonic"
default="rf_te_electric_field">
      <module:boundary equation="\vec{f}_{E} = \vec{f}_{E_0}"
id="rf_te_electric_field" name="Electric field">
        <module:quantity id="rf_te_electric_field_real"/>
        <module:quantity id="rf_te_electric_field_imag"/>
        <module:essential_form axi_linear="rf_Er" axi_newton="rf_Er"
i="1" id="form" planar_linear="rf_Er" planar_newton="rf_Er"/>
        <module:essential_form axi_linear="rf_Ei" axi_newton="rf_Ei"
i="2" id="form" planar_linear="rf_Ei" planar_newton="rf_Ei"/>
      </module:boundary>
      <module:boundary equation="n \times H = n \times H_0"
id="rf_te_magnetic_field" name="Magnetic field">
        <module:quantity id="rf_te_magnetic_field_real"/>
        <module:quantity id="rf_te_magnetic_field_imag"/>
        <module:vector_form axi_linear="r * 2 * PI * f * rf_Hi *
vval" axi_newton="r * 2 * PI * f * rf_Hi * vval" i="1" id="form" j="1"
planar_linear="2 * PI * f * rf_Hi * vval" planar_newton="2 * PI * f *

```

```

rf_Hi * vval"/>
    <module:vector_form axi_linear="- r * 2 * PI * f * rf_Hr *
vval" axi_newton="- r * 2 * PI * f * rf_Hr * vval" i="2" id="form"
j="2" planar_linear="- 2 * PI * f * rf_Hr * vval" planar_newton="- 2 *
PI * f * rf_Hr * vval"/>
    </module:boundary>
    <module:boundary equation="\faz{J}_{t} = - \frac{1}{\omega
\mu} \frac{\partial \vecf{E}}{\partial n_0} = \faz{J}_0"
id="rf_te_surface_current" name="Surface current">
        <module:quantity id="rf_te_surface_current_real"/>
        <module:quantity id="rf_te_surface_current_imag"/>
        <module:vector_form axi_linear="- 2 * PI * f * rf_Ji * r *
vval" axi_newton="- 2 * PI * f * rf_Ji * r * vval" i="1" id="form"
j="1" planar_linear="- 2 * PI * f * rf_Ji * vval" planar_newton="- 2 *
PI * f * rf_Ji * vval"/>
        <module:vector_form axi_linear="2 * PI * f * rf_Jr * r *
vval" axi_newton="2 * PI * f * rf_Jr * r * vval" i="2" id="form" j="2"
planar_linear="2 * PI * f * rf_Jr * vval" planar_newton="2 * PI * f *
rf_Jr * vval"/>
        </module:boundary>
        <module:boundary equation="- \frac{1}{\omega \mu}
\frac{\partial \vecf{E}}{\partial n_0} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}
- \mj \sigma / \omega \mu \vecf{E}" id="rf_te_impedance"
name="Impedance boundary condition">
            <module:quantity id="rf_te_impedance"/>
            <module:matrix_form axi_linear="r * 2 * PI * f / rf_Z0 *
uval * vval" axi_newton="-r * 2 * PI * f / rf_Z0 * uval * vval" i="1"
id="form" j="2" planar_linear="2 * PI * f / rf_Z0 * uval * vval"
planar_newton="- 2 * PI * f / rf_Z0 * uval * vval"/>
            <module:matrix_form axi_linear="- r * 2 * PI * f / rf_Z0 *
uval * vval" axi_newton="r * 2 * PI * f / rf_Z0 * uval * vval" i="2"
id="form" j="1" planar_linear="- 2 * PI * f / rf_Z0 * uval * vval"
planar_newton="2 * PI * f / rf_Z0 * uval * vval"/>
            <module:vector_form axi_linear="0" axi_newton="r * 2 * PI
* f / rf_Z0 * upval * vval" i="1" id="form" j="1" planar_linear="0"
planar_newton="2 * PI * f / rf_Z0 * upval * vval"/>
            <module:vector_form axi_linear="0" axi_newton="r * 2 * PI
* f / rf_Z0 * upval * vval" i="2" id="form" j="2" planar_linear="0"
planar_newton="2 * PI * f / rf_Z0 * upval * vval"/>
            </module:boundary>
        </module:weakform_surface>
    </module:weakforms_surface>
</module:surface>

```

Příloha II. - XML kód pro TM

Zápis slabých formulací fáze H

```
<module:volume>
  <module:quantity id="rf_tm_permittivity" shortname="rf_eps"/>
  <module:quantity id="rf_tm_permeability" shortname="rf_mur"/>
  <module:quantity id="rf_tm_conductivity" shortname="rf_gamma"/>
  <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_real"
shortname="rf_Jer"/>
  <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_imag"
shortname="rf_Jei"/>
  <module:weakforms_volume>
    <module:weakform_volume analysistype="harmonic" equation="\curl
\left( \frac{1}{\mu}\, \, \curl \, \vec{faz}\{H\} \, \right) - \, \mathbf{m} \, \omega
\left( \, \sigma + \, \mathbf{m} \, \omega \, \varepsilon \, \right) \, \vec{faz}\{H\} = - \, \curl
\, \vec{faz}\{J\}_{\mathrm{ext}}">
      <module:quantity id="rf_tm_permittivity"/>
      <module:quantity id="rf_tm_permeability"/>
      <module:quantity id="rf_tm_conductivity"/>
      <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_real"/>
      <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_imag"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 1 / (rf_eps *
EPS0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_mur * MU0
* uval * vval" axi_newton="0" i="1" j="1" planar_linear="- 1 / (rf_eps
* EPS0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_mur * MU0 *
uval * vval" planar_newton="0" symmetric="0"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 1 / (rf_eps *
EPS0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_mur * MU0
* uval * vval" axi_newton="0" i="2" j="2" planar_linear="- 1 / (rf_eps
* EPS0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_mur * MU0 *
uval * vval" planar_newton="0" symmetric="0"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="r * 2 * PI * f *
rf_gamma * 1 / (rf_eps * EPS0) * uval * vval" axi_newton="0" i="1"
j="2" planar_linear="2 * PI * f * rf_gamma * 1 / (rf_eps * EPS0) * uval
* vval" planar_newton="0"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 2 * PI * f *
rf_gamma * 1 / (rf_eps * EPS0) * uval * vval" axi_newton="0" i="2"
j="1" planar_linear="- 2 * PI * f * rf_gamma * 1 / (rf_eps * EPS0) *
uval * vval" planar_newton="0"/>
      <module:vector_form id="form" axi_linear="0" axi_newton="0"
i="1" j="1" planar_linear="0" planar_newton="0"/>
      <module:vector_form id="form" axi_linear="0" axi_newton="0"
i="2" j="2" planar_linear="0" planar_newton="0"/>
    </module:weakform_volume>
  </module:weakforms_volume>
</module:volume>
```

Zápis okrajových podmínek fázoru H

```
<module:surface>
  <module:quantity id="rf_tm_electric_field_real" shortname="rf_Er"/>
  <module:quantity id="rf_tm_electric_field_imag" shortname="rf_Ei"/>
  <module:quantity id="rf_tm_magnetic_field_real" shortname="rf_Hr"/>
  <module:quantity id="rf_tm_magnetic_field_imag" shortname="rf_Hi"/>
  <module:quantity id="rf_tm_surface_current_real"
shortname="rf_Jr"/>
  <module:quantity id="rf_tm_surface_current_imag"
shortname="rf_Ji"/>
  <module:quantity id="rf_tm_impedance" shortname="rf_Z0"/>
  <module:weakforms_surface>
    <module:weakform_surface analysistype="harmonic"
default="rf_tm_magnetic_field">
      <module:boundary equation="\vecf{H} = \vecf{H}_0"
id="rf_tm_magnetic_field" name="Magnetic field">
        <module:quantity id="rf_tm_magnetic_field_real"/>
        <module:quantity id="rf_tm_magnetic_field_imag"/>
        <module:essential_form id="form" axi_linear="rf_Hr"
axi_newton="0" i="1" planar_linear="rf_Hr" planar_newton="0"/>
        <module:essential_form id="form" axi_linear="rf_Hi"
axi_newton="0" i="2" planar_linear="rf_Hi" planar_newton="0"/>
      </module:boundary>
      <module:boundary equation="n \times E = n \times E_0"
id="rf_tm_electric_field" name="Electric field">
        <module:quantity id="rf_tm_electric_field_real"/>
        <module:quantity id="rf_tm_electric_field_imag"/>
        <module:vector_form id="form" axi_linear="- 2 * PI * f *
rf_Ei * r * vval" axi_newton="0" i="1" j="1" planar_linear="- 2 * PI *
f * rf_Ei * vval" planar_newton="0"/>
        <module:vector_form id="form" axi_linear="2 * PI * f * rf_Er
* r * vval" axi_newton="0" i="2" j="2" planar_linear="2 * PI * f *
rf_Er * vval" planar_newton="0"/>
      </module:boundary>
      <module:boundary equation="\f{J}_{t} = - \frac{1}{\omega\mu} \frac{\partial \vecf{E}}{\partial n_0} = \f{J}_0"
id="rf_tm_surface_current" name="Surface current">
        <module:quantity id="rf_tm_surface_current_real"/>
        <module:quantity id="rf_tm_surface_current_imag"/>
        <module:vector_form axi_linear="- 2 * PI * f * rf_Ji * r *
vval" axi_newton="0" i="1" id="form" j="1" planar_linear="- 2 * PI * f
* rf_Ji * vval" planar_newton="0"/>
        <module:vector_form axi_linear="2 * PI * f * rf_Jr * r *
vval" axi_newton="0" i="2" id="form" j="2" planar_linear="2 * PI * f *
rf_Jr * vval" planar_newton="0"/>
      </module:boundary>
```

```

<module:boundary equation="- \frac{1}{\omega \mu}
\frac{\partial \vec{faz}\{E\}}{\partial n_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}
- \frac{j \sigma}{\omega} \vec{faz}\{E}" id="rf_tm_impedance"
name="Impedance boundary condition">
  <module:quantity id="rf_tm_impedance"/>
  <module:matrix_form axi_linear="r * 2 * PI * f / rf_Z0 * uval
* vval" axi_newton="0" i="1" id="form" j="2" planar_linear="- 2 * PI *
f * rf_Z0 / uval * vval" planar_newton="0"/>
  <module:matrix_form axi_linear="- r * 2 * PI * f / rf_Z0 *
uval * vval" axi_newton="0" i="2" id="form" j="1" planar_linear="2 * PI
* f * rf_Z0 / uval * vval" planar_newton="0"/>
  <module:vector_form axi_linear="0" axi_newton="0" i="1"
id="form" j="1" planar_linear="0" planar_newton="0"/>
  <module:vector_form axi_linear="0" axi_newton="0" i="2"
id="form" j="2" planar_linear="0" planar_newton="0"/>
</module:boundary>
</module:weakform_surface>
</module:weakforms_surface>
</module:surface>

```

Programový kód postprocessoru