

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ  
KATEDRA TEORETICKÉ ELEKTROTECHNIKY

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelování vf zařízení

Plzeň 2013

Lukáš BRTNA

## Anotace

Účelem diplomové práce je nastínit problematiku vř obvodů a šíření vř vln, matematický popis vř šíření a následné zapracování získaných znalostí ve formě odvozených slabých forem do xml modulu pro Agros.

## Klíčová slova

TE vlna, TM vlna, TEM vlna, slabá forma, vř modelování

# **Abstract**

The objective of the diploma thesis is to summarize hf wave propagation and create mathematical description of hf wave propagation. The knowledge is subsequently processed in the weak forms of propagation and creation an xml modul for Agros2D.

# **Keywords**

TE Wave, TM Wave, TEM Wave, Weak Form, HF Modelling

## Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne 20. února 2013

Jméno a příjmení

.....

## Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce, panu Ing. Davidu Pánkovi, za jeho cenné rady a profesionální vedení bez něžž by vznik této práce nebyl vůbec možný.

# Obsah

<b>Seznam symbolů a zkratk</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Šíření vysokofrekvenčního elektromagnetického pole</b>	<b>4</b>
2.1 Vlnová rovnice . . . . .	5
2.2 Helmholtzova rovnice . . . . .	6
2.3 Šíření vln ve volném prostoru . . . . .	8
2.3.1 Rovinná homogenní vlna . . . . .	8
2.4 Šíření vln pomocí vlnovodů a vedení . . . . .	10
2.4.1 Vlnovody . . . . .	10
2.4.2 Typy vln šířících se prostřednictvím vlnovodů . . . . .	11
2.4.3 Maxwellovy rovnice pro šíření uvnitř válcových vlnovodů . . . .	11
2.4.4 TEM vlny . . . . .	13
2.4.5 TE vlny . . . . .	15
2.4.6 TM vlny . . . . .	16
<b>3 Numerické řešení elektromagnetického pole</b>	<b>18</b>
3.1 Metoda konečných prvků . . . . .	18
3.2 Agros 2D . . . . .	18
<b>4 Návrh modulu pro VF pole</b>	<b>19</b>
4.1 Slabé formulace vlnových rovnice . . . . .	19
4.1.1 Slabá formulace fázoru E v kartézské souřadnicové soustavě . . .	20
4.1.2 Slabá formulace fázoru H v kartézské souřadnicové soustavě . .	22
4.1.3 Slabá formulace fázoru E ve válcové souřadnicové soustavě . . .	25
4.1.4 Slabá formulace fázoru H ve válcové souřadnicové soustavě . . .	28
<b>5 Zatím moje pokusy</b>	<b>33</b>
5.1 Vkládání obrázků . . . . .	33
5.2 Vkládání tabulek . . . . .	34
5.3 Sazba rovnic . . . . .	34
5.4 Odrážky a číslování . . . . .	36
5.4.1 Odrážkový seznam . . . . .	36
5.4.2 Číslovaný seznam . . . . .	36
5.4.3 Popisné výčty (prostředí „Description”) . . . . .	37
5.4.4 Odsazování - tabulátor . . . . .	37
5.5 Citace . . . . .	37
5.6 Verbatim . . . . .	37
<b>6 Závěr</b>	<b>38</b>
<b>Použitá literatura</b>	<b>39</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>40</b>

<b>Seznam tabulek</b>	<b>41</b>
<b>Přílohy</b>	<b>1</b>

## Seznam symbolů a zkratk

<b>TE</b> .....	Transverzálně elektrický
<b>TEM</b> .....	Transverzálně elektromagnetický
<b>TM</b> .....	Transverzálně magnetický



# 1 Úvod

Předkládaná diplomová práce má za cíl rozšířit program Agros2D, resp. jeho knihovnu Hermes, vyvíjený na katedře KTE o modul umožňující modelování vysokofrekvenčního pole. Práce také shrnuje obecné poznatky v oblasti vysokofrekvenčního elektromagnetického pole a pokládá teoretický základ pro následnou tvorbu modulu.

Posuzování toho, co je vysoká frekvence je subjektivně závislé na oboru, v kterém se pohybujeme. Pro člověka pracujícího se síťovou frekvencí (50 Hz) bude 1 kHz již frekvence vysoká. Kdežto pro někoho navrhujícího satelitní spoje bude i 1 GHz frekvence nízká. Tato práce bude považovat za vysokofrekvenční zařízení systémy pracující s frekvencí odpovídající rádiovému a mikrovlnnému spektru - tj. 100 MHz až 1000 GHz. [2]

## 2 Šíření vysokofrekvenčního elektromagnetického pole

Každé nestacionární elektromagnetické pole má charakter elektromagnetické vlny, která se šíří prostředím. Toto pole lze popsat veličinami vztahujícími se k jednotlivému elektrickému a magnetickému poli:

$\mathbf{E}$	$[\text{V} \cdot \text{m}^{-1}]$	intenzita elektrického pole,
$\mathbf{D}$	$[\text{C} \cdot \text{m}^{-2}]$	elektrická indukce,
$\mathbf{H}$	$[\text{A} \cdot \text{m}^{-1}]$	intenzita magnetického pole,
$\mathbf{B}$	$[\text{T}]$	magnetická indukce.

Vztahy mezi jednotlivými veličinami lze vyjádřit pomocí základních zákonů pro teorii elektromagnetického pole - soustavy Maxwellových rovnic, níže uvedených v diferenciálním tvaru:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1c)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.1d)$$

kde  $\mathbf{J}$   $[\text{A} \cdot \text{m}^{-2}]$  je vektor proudové hustoty a  $\rho$   $[\text{C} \cdot \text{m}^{-3}]$  objemová hustota náboje.

Vztahy mezi vektorem indukce ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ) a vektorem intenzity pole ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) lze potom vyjádřit:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.2b)$$

kde  $\varepsilon_0$   $[\text{F} \cdot \text{m}^{-1}]$  je permitivita vakua,  $\varepsilon_r$  relativní permitivita prostředí nebo materiálu,  $\mu_0$   $[\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$  permeabilita vakua a  $\mu_r$  relativní permeabilita prostředí nebo materiálu.

Pro harmonicky proměnné pole lze Maxwellovy rovnice přepsat do frekvenční oblasti pomocí symbolicko-komplexní metody, nahrazením diference  $\partial/\partial t$  za  $j\omega$  a dosazením 2.2a a 2.2b:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}, \quad (2.3a)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}}, \quad (2.3b)$$

$$\text{div}(\varepsilon \underline{\mathbf{E}}) = \rho, \quad (2.3c)$$

$$\text{div}(\mu \underline{\mathbf{H}}) = 0. \quad (2.3d)$$

Výše uvedené rovnice platí v nepozměněné podobě pro lineární, homogenní, izotropní prostředí. Lineární znamená, že  $\varepsilon$ ,  $\mu$  a  $\gamma$  nejsou závislé na veličinách pole, homogenní že  $\varepsilon$ ,  $\mu$  a  $\gamma$  nejsou závislé na prostorových souřadnicích a izotropní že  $\varepsilon$ ,  $\mu$  a  $\gamma$  nejsou závislé na směru vektorů veličin pole. Veličina  $\gamma$  je měrná vodivost s jednotkou  $\text{S}^{-1}$ .

## 2.1 Vlnová rovnice

### Vlnová rovnice pro vektor $\mathbf{E}$

Popsat elektromagnetické vlnění lze velmi dobře pomocí vlnové rovnice odvoditelné z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru. Použijeme 2.1a (první Maxwellovu rovnici), ale budeme uvažovat, že kromě indukovaného proudu  $\mathbf{J}$  se v oblasti nachází také proud vnucený vnějším zdrojem  $\mathbf{J}_{ext}$ . Výsledkem bude modifikace rovnice 2.1a na:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.4)$$

Na levou stranu rovnice 2.4 dosadíme za  $\mathbf{H}$  výraz z 2.2b. Na pravou stranu dosadíme za  $\mathbf{J} = \gamma \cdot \mathbf{E}$ ,  $\gamma$  [ $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ] a za  $\mathbf{D}$  výraz z 2.2a:

$$\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_{ext} \quad (2.5a)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \gamma \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.5b)$$

Na 2.1b (druhou Maxwellovu rovnici) použijeme operaci rotace:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} \quad (2.6)$$

Za výraz  $\text{rot } \mathbf{B}$  na pravou stranu rovnice dosadíme 2.5b:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \gamma \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_{ext} \right). \quad (2.7)$$

Na levou stranu rovnice použijeme vztah vektorové identity  $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ , pravou stranu rovnice roznásobíme:

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{ext}}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Z 2.1c (třetí Maxwellovy rovnice) dosadíme za  $\text{div } \mathbf{E}$  výraz  $\rho/\varepsilon$ . Na pravou stranu rovnice přesuneme zdrojové funkce elektromagnetického pole. Výsledkem je **zobecněná nehomogenní vlnová rovnice pro vektor  $\mathbf{E}$** :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{ext}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Pokud na dané prostředí nepůsobí vnější zdroje ( $\rho = 0$  a  $\mathbf{J}_{ext} = 0$ ), je pravá strana nulová a rovnice přechází do tvaru **zobecněné homogenní vlnové rovnice pro vektor  $\mathbf{E}$** :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.10)$$

### Vlnová rovnice pro vektor $\mathbf{B}$

Postup při odvozování vektoru magnetické indukce  $\mathbf{B}$  se příliš neliší od odvození vektoru intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$ . Z 2.4 (modifikované první Maxwellovy rovnice) opět vyjádříme 2.5b ( $\text{rot } \mathbf{B}$ ). Na rovnici poté použijeme operaci rotace:

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mu\gamma \text{rot } \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \text{rot } \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.11)$$

Na levou stranu rovnice použijeme vztah vektorové identity  $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ , za výraz  $\text{rot } \mathbf{E}$  na pravé straně dosadíme 2.1b (druhá Maxwellova rovnice):

$$\text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.12)$$

Nakonec dosadíme z 2.1d (čtvrté Maxwellovy rovnice)  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  a zdrojové funkce elektromagnetického pole opět přesuneme na pravou stranu. Získáme **nehomogenní vlnovou rovnici pro vektor  $\mathbf{B}$** :

$$\Delta \mathbf{B} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.13)$$

Pokud na dané prostředí nepůsobí vnější zdroje ( $\rho = 0$  a  $\mathbf{J}_{ext} = 0$ ), je pravá strana nulová a rovnice přechází do tvaru **homogenní vlnové rovnice pro vektor  $\mathbf{B}$** :

$$\Delta \mathbf{B} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.14)$$

### Vlnové rovnice pro vektory $\mathbf{D}$ a $\mathbf{H}$

Téměř identické rovnice platí také pro vektory elektrické indukce  $\mathbf{D}$  a intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta \mathbf{D} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{ext}}{\partial t}, \quad (2.15a)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\mu \text{rot } \mathbf{J}_{ext}. \quad (2.15b)$$

Výše uvedené nehomogenní rovnice 2.15 přejdou při  $\mathbf{J}_{ext} = 0$  a  $\rho = 0$  do rovnic homogenních stejně jako 2.10 a 2.14 (pravá strana rovnic bude rovna 0).

## 2.2 Helmholtzova rovnice

Úpravou vlnové rovnice pro harmonicky proměnné ( $j\omega$ ) pole ve frekvenční oblasti vznikne tzv. Helmholtzova rovnice, pojmenovaná podle německého fyzika Hermanna Ludwiga Helmholtze.

**Helmholtzova rovnice pro fázor vektoru  $\underline{E}$** 

Aplikací Fourierovy transformace na 2.9 (nehomogenní vlnovou rovnici pro vektor  $\underline{E}$ ) a použitím symbolicko-komplexní metody, lze rovnici zapsat ve formě:

$$\Delta \underline{E} - j\omega\mu\gamma \underline{E} - j^2\omega^2\mu\varepsilon \underline{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu \underline{J}_{ext} \quad (2.16)$$

a následně jí malou úpravou (vytknutím) přepsat jako:

$$\Delta \underline{E} - j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \underline{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu \underline{J}_{ext}. \quad (2.17)$$

Pro další krok je potřeba zavést konstantu šíření  $\underline{k} = \pm\sqrt{-j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)}$ . Substitutece potom rovnici zjednoduší na:

$$\Delta \underline{E} + \underline{k}^2 \underline{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu \underline{J}_{ext}. \quad (2.18)$$

Tato rovnice se označuje jako **nehomogenní Helmholtzova rovnice (pro  $\underline{E}$ )**.

Pro oblast bez vnějších zdrojů ( $\rho = 0$ ,  $\underline{J}_{ext} = 0$ ) lze tuto rovnici zjednodušit do tvaru **homogenní Helmholtzovy rovnice (pro  $\underline{E}$ )**:

$$\Delta \underline{E} + \underline{k}^2 \underline{E} = 0. \quad (2.19)$$

**Helmholtzova rovnice pro fázor vektoru  $\underline{B}$** 

Podobně se postupuje i pro vyjádření  $\underline{B}$ . Aplikací Fourierovy transformace na 2.13 (nehomogenní vlnovou rovnici pro vektor  $\underline{B}$ ) a použitím symbolicko-komplexní metody, lze rovnici zapsat ve formě:

$$\Delta \underline{B} - j\omega\mu\gamma \underline{B} - j^2\omega^2\mu\varepsilon \underline{B} = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext} \quad (2.20)$$

a následně jí malou úpravou (vytknutím) přepsat jako:

$$\Delta \underline{B} - j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \underline{B} = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext}. \quad (2.21)$$

Zavedení konstanty šíření  $\underline{k} = \pm\sqrt{-j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)}$  potom rovnici zjednoduší na:

$$\Delta \underline{B} + \underline{k}^2 \underline{B} = -\mu \text{rot } \underline{J}_{ext}. \quad (2.22)$$

Tato rovnice se označuje jako **nehomogenní Helmholtzova rovnice (pro  $\underline{B}$ )**.

Pokud v regionu nejsou přítomny vnější zdroje ( $\rho = 0$ ,  $\underline{J}_{ext} = 0$ ) lze tuto rovnici zjednodušit do tvaru **homogenní Helmholtzovy rovnice (pro  $\underline{B}$ )**:

$$\Delta \underline{B} + \underline{k}^2 \underline{B} = 0. \quad (2.23)$$

Konstanta  $k$  [ $\text{m}^{-1}$ ], zavedená výše, je definována jako konstanta šíření, nebo také vlnové číslo. Odráží existenci materiálových parametrů prostředí, ve kterém se vlna šíří. Konstanta je závislá na permitivitě, permeabilitě, konduktivitě a také na frekvenci. Pro prostředí s nulovou vodivostí  $\gamma$  rovnice vypadá takto:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (2.24)$$

## Vlnová impedance

Dalším parametrem, kterým je možné popsat určité prostředí, je vlnová impedance  $Z$  [ $\Omega$ ]:

$$\underline{Z} = \frac{\omega\mu}{\underline{k}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \omega}}. \quad (2.25)$$

Vlnová impedance je obecně komplexní veličinou popisující poměr mezi intenzitou elektrického pole  $\underline{E}$  a intenzitou magnetického pole  $\underline{H}$ :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{H}}. \quad (2.26)$$

Ve volném prostoru je vlnová impedance rovna tzv. vlastní (intrinsic) impedanci:

$$\underline{Z}_0 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega. \quad (2.27)$$

## 2.3 Šíření vln ve volném prostoru

V následujícím textu bude uvažováno šíření vln ve volném neohraničeném prostředí. Jedná se o prostor bez přítomnosti překážek (různých objektů), které mají jiné materiálové konstanty  $\varepsilon$ ,  $\mu$  a  $\gamma$  než okolní prostředí, ve kterém se vlna šíří.

### 2.3.1 Rovinná homogenní vlna

Každá vlna je každým jednotlivým řešením vlnové rovnice. Subjektivně lze vlnu vnímat jako rozruch šířící se v prostoru a čase. Fyzikálně jde o změnu fáze vycházející z rovnosti druhých parciálních derivací podle času a souřadnic. Množina bodů, v nichž má fáze v daném čase stejnou hodnotu se nazývá vlnoplochu. Nejvýznamnějším druhem vln jsou rovinné (vlnoplochy jsou roviny) a vlny sférické (vlnoplochy jsou kulové plochy).

Vzhledem k omezením (konečnosti) rozměrů zdroje elektromagnetického záření nemůže žádný zdroj emitovat vlnu, jejíž vlnoplocha by byla dokonale rovinná. Rovinná vlna je zjednodušením aplikovaným na sférickou vlnoplochu v dostatečné vzdálenosti od zdroje vlnění, kde se již uvažovaný výřez její vlnoplochy s akceptovatelnou chybou jeví jako rovina. Výhodou použití rovinných homogenních vln je mimo jiné možnost sestavování složitějších vln jejich prostou superpozicí. Homogenní vlnou se nazývá vlna, u které je na vlnoploše konstantní hodnota amplitudy. [[9]]

Pro harmonické pole bez vnějších zdrojů vycházejme z homogenní Helmholtzovy rovnice 2.19. Rovnici rozepíšme pro jednotlivé souřadnice kartézské souřadné soustavy, zvolené vzhledem k vhodnosti pro šíření rovinných vln:

$$\Delta \underline{E}_x + \underline{k}^2 \underline{E}_x = 0, \quad (2.28a)$$

$$\Delta \underline{E}_y + \underline{k}^2 \underline{E}_y = 0, \quad (2.28b)$$

$$\Delta \underline{E}_z + \underline{k}^2 \underline{E}_z = 0. \quad (2.28c)$$

Rozepíšeme operátor delta pomocí parciálních derivací. Z předchozího vyjádření se tedy stala soustava parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_x = 0, \quad (2.29a)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_y = 0, \quad (2.29b)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_z = 0. \quad (2.29c)$$

Zvolíme-li, že se vlna bude šířit ve směru osy  $z$ , bude vlnoplocha kolmá na tuto osu a rovnoběžná s rovinou tvořenou osami  $x$  a  $y$ . To znamená výrazné zjednodušení řešeného problému. Dalším zjednodušením je uvažování vektoru intenzity elektrického pole  $\underline{E}$  pouze ve směru osy  $x$ .

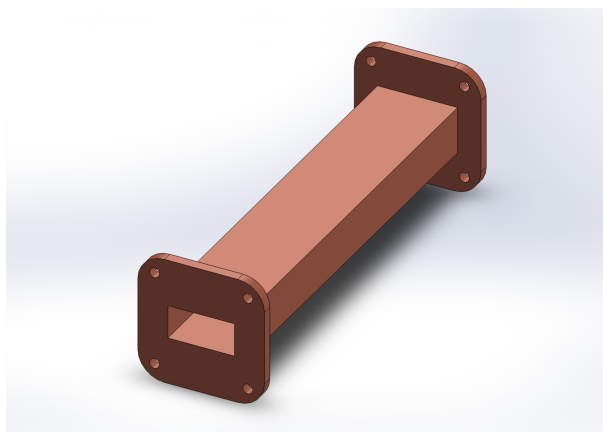
V důsledku to znamená, že vektor  $\underline{E}$  bude ve směru osy  $y$  a  $z$  nulový, tedy že  $\underline{E}_y = 0$  a  $\underline{E}_z = 0$ . Dalším důsledkem je, že velikost a fáze vektoru  $\underline{E}$  ve směru osy  $x$  bude konstantní. Proto  $\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} = 0$  a  $\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = 0$ . Po aplikaci na soustavu 2.29 dojde k tomu, že rovnice 2.29b a 2.29c se celé vynulují a vypadnou. U rovnice 2.29a vypadnou první dva členy na levé straně, výsledná rovnice bude tedy vypadat takto:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{E}_x = 0. \quad (2.30)$$

## 2.4 Šíření vln pomocí vlnovodů a vedení

### 2.4.1 Vlnovody

Píše se rok 1893 a britský matematik a fyzik Oliver Heaviside pracuje na jednom ze svých projektů. Zabývá se možností šíření elektromagnetických vln uvnitř duté trubice. A tuto myšlenku odmítá. Věří, že elektromagnetickou energii nelze přenášet bez pomoci dvou vodičů. O čtyři roky později, roku 1897, tuto otázku přezkoumává jiný britský fyzik, Lord Reyleigh. A matematicky dokazuje, že šíření elektromagnetických vln dutou trubicí je možné, a to jak pro vlnovody s kruhovým, tak pravoúhlým průřezem.



**Obr. 2.1:** Vlnovod masivnější konstrukce pro šíření vln o nižší frekvenci (okolo 1 GHz)

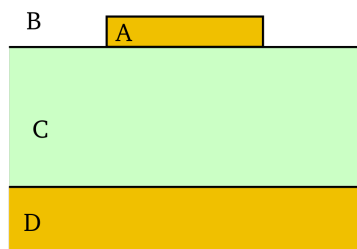
Výhodou vlnovodů je jejich nízký útlum a schopnost přenášet vysoké výkony, stinnou stránkou ale je jejich rozměrnost (čím nižší frekvence, tím masivnější konstrukce) a cena. Pro frekvenci kolem 1 GHz jsou rozměry již 20 cm x 10 cm a s klesající frekvencí dále rostou (viz. obr. 2.1. Pro vysoké frekvence (nad 100 GHz) naopak rozměry klesají na desetiny milimetru a takovéto vlnovody jsou proto náročné na výrobu. Nezřídka se proto používají tzv. nadrozměrné vlnovody, kdy velikost vlnovodu překročí hranici pro šíření jednoho vidu a vlnovodem se šíří vidů více.

Druhým způsobem pro přenos vysokých frekvencí jsou koaxiální vedení. Koaxiální vedení vynikají šířkou pásma, kterou mohou přenášet a jsou i cenově dostupnější, nicméně již méně jsou vhodná pro stavbu komplexních mikrovlnných komponent.

Alternativu představují planární vlnovody vyráběné ve formě stripline, microstrip, koplanárního vlnovodu a mnoha dalších. Kromě malých rozměrů a nízké ceny umožňují díky planární technologii výroby i snadnou integrovatelnost s dalšími elektronickými prvky a stavbu mikrovlnných obvodů.

Microstrip je dnes nejpoužívanějším médiem pro integrované mikrovlnné obvody. Sestává se z vodivého proužku, který je od země oddělen dielektrickým substrátem, jak je znázorněno na obr. 2.2. Microstrip byl vyvinut v laboratořích ITT jako konkurent jiné technologii, zveřejněné v roce 1952, stripline. Nevýhodou technologie microstrip v porovnání s klasickými vlnovody jsou její vyšší ztráty a nižší výkon, který je schopna přenášet. Z důvodu neuzavřenosti je také microstrip náchylnější na přeslechy a rušení.





Obr. 2.2: Microstrip a jeho části

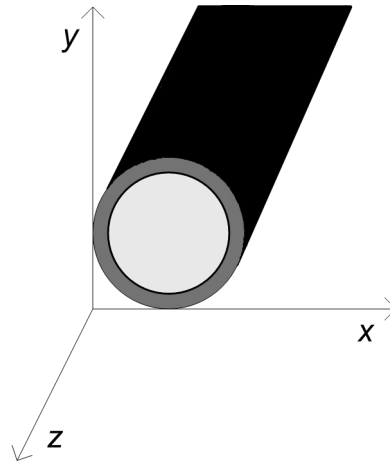
Elektromagnetická vlna šířící se microstripem existuje z části v dielektrickém substrátu a z části ve vzduchu nad ním. A jelikož dielektrická konstanta substrátu je jiná (větší) než vzduchu, vzniká nehomogenní médium, skrz které se vlna šíří. Nehomogenita a frekvenční rozptyl se ještě dále zhoršují spolu s větší šířkou substrátu. Proto až zvládnutí technologie výroby dostatečně tenkých substrátů umožňující menší frekvenční závislost vedení a potlačení podélných složek elektromagnetického pole umožnilo široké rozšíření a skutečný nástup technologie microstrip.

#### 2.4.2 Typy vln šířících se prostřednictvím vlnovodů

Za běžných okolností nabývají vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  hodnot v osách roviny kolmé na šíření pole i roviny rovnoběžné s šířením pole (podélné). V určitých případech však může dojít k potlačení podélné složky šíření. Přenosová vedení skládající se ze dvou a více vodičů umožňují šíření tzv. TEM vln (Transverse ElectroMagnetic - transverzálně elektromagnetických). Tyto vlny postrádají podélnou složku elektrického i magnetického pole. Vlnovody sestávající se z jednoho vodiče umožňují šíření TE vln (Transverse Electric - transverzálně elektrických) postrádajících podélnou složku elektrického pole nebo TM vln (Transverse magnetic - transverzálně magnetických) postrádajících podélnou složku magnetického pole. Nikoli však obou současně. Výhodou TEM vln je, že mají jedinečně definované napětí, proud a charakteristickou impedanci. U TE a TM vln toto jednoznačné určení charakteristické impedance není možné, ale existuje matematický postup, který dokáže úspěšně pracovat s modelem charakteristické impedance i u těchto vln.

#### 2.4.3 Maxwellovy rovnice pro šíření uvnitř válcových vlnovodů

Předpokladem je šíření harmonického pole se závislostí  $e^{j\omega t}$  podél osy  $z$  válcového přenosového vedení nebo vlnovodu, které je ve směru osy  $z$  uniformní, nekonečně dlouhé a dokonale vodivé. Geometrie takového vlnovodu je znázorněna na obr. 2.3 Elektrické



**Obr. 2.3:** Geometrie válcového vlnovodu v kartézském souřadném systému

a magnetické pole potom může být vyjádřeno takto:

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = [\underline{\mathbf{e}}(x, y) + \hat{z}e_z(x, y)]e^{j\beta z}, \quad (2.31a)$$

$$\underline{\mathbf{H}}(x, y, z) = [\underline{\mathbf{h}}(x, y) + \hat{z}h_z(x, y)]e^{j\beta z}. \quad (2.31b)$$

$\underline{\mathbf{e}}(x, y)$  a  $\underline{\mathbf{h}}(x, y)$  vyjadřují příčnou (transverzální) složku elektrického a magnetického pole,  $e_z$  a  $h_z$  představují složku podélnou. Pokud by se vlna šířila v opačném směru (ne ve směru  $+z$ , ale  $-z$ ), nahradí se  $\beta$  za  $-\beta$ . V případě, kdy by byl přítomen útlum, nahradí se se konstanta šíření  $j\beta$  za komplexní konstantu  $\gamma$ ,  $\gamma = \alpha + j\beta$ .

Pokud ve vlnovodu nebo přenosovém vedení nejsou zdroje  $J$ , mohou být Maxwellovy rovnice vyjádřeny:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}, \quad (2.32a)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}. \quad (2.32b)$$

. Tyto vektorové rovnice mohou být převedeny do tvaru jednotlivých parciálních diferenciálních rovnic:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x, \quad (2.33a)$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y, \quad (2.33b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z, \quad (2.33c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x, \quad (2.34a)$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y, \quad (2.34b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z. \quad (2.34c)$$

Z těchto rovnic mohou být následně vyjádřeny příčné (transverzální) složky jednotlivých  $E$  a  $H$  polí:

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \quad (2.35a)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (2.35b)$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (2.35c)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right). \quad (2.35d)$$

Příklad výpočtu pro získání složky  $H_x$  dosazením  $E_y$  z 2.34b do 2.33a:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\beta H_x}{\omega\varepsilon} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta \left( -\frac{\beta H_x}{\omega\varepsilon} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\frac{\beta^2 H_x}{\omega\varepsilon} - \frac{\beta}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_x + j\frac{\beta^2 H_x}{\omega\varepsilon} \\ H_x &= \frac{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta^2}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}}{-j\omega\mu + j\frac{\beta^2}{\omega\varepsilon}} \\ H_x &= j \frac{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta^2}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \\ H_x &= j \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \frac{\omega\varepsilon}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \\ k_c^2 &= k^2 - \beta^2 = (\omega\sqrt{\mu\varepsilon})^2 - \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2 \\ H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left( \mu\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$k$  je vlnové číslo materiálu uvnitř přenosového vedení nebo vlnovodu,  $k_c$  potom tzv. mezní (cutoff) vlnové číslo. V případě přítomnosti ztrát je  $\varepsilon$  nahrazeno komplexním  $\varepsilon(1 - j \tan \gamma)$ , kde  $\gamma$  představuje ztrátový úhel materiálu.

#### 2.4.4 TEM vlny

Pro TEM (transverzálně elektromagnetické) vlny platí, že  $E_z = 0$  a  $H_z = 0$  (není zde přítomna podélná složka elektrického ani magnetického pole). Dosazením těchto

hodnot do 2.35 zjistíme, že  $H, E = j(0 - 0)/k_c^2$  a tedy  $H, E = 0/(k_c^2)$ . Příčné složky polí jsou tedy také nulové. Pokud se ovšem  $k_c^2 = 0$ , potom získáváme neurčitý výsledek. To mimo jiné znamená, že mezní (cutoff) vlnové číslo pro TEM vlny  $k_c = 0$ .

Pokud dosadíme  $E_z = 0$  do 2.33a,  $H_x$  poté do 2.34b a  $H_z = 0$ , získáme:

$$\begin{aligned} j\beta E_y &= -j\omega\mu H_x \\ H_x &= -\frac{\beta E_y}{\omega\mu} \\ -j\beta \left( -\frac{\beta E_y}{\omega\mu} \right) &= j\omega\varepsilon E_y \\ \frac{\beta^2}{\omega\mu} &= \omega\varepsilon \\ \beta^2 &= \omega^2\mu\varepsilon \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \end{aligned}$$

Uvažujeme-li kartézský souřadný systém a šíření vlny ve směru osy  $z$ , lze homogenní Helmholtzovu rovnici 2.19 přepsat do tvaru:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = k^2 \underline{\underline{E}} \quad (2.36)$$

a poté vyjádřit jednotlivé složky  $x$ ,  $y$  a  $z$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0, \quad (2.37a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_y = 0, \quad (2.37b)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0. \quad (2.37c)$$

Její tvar pro  $k = 0$  a příčné pole bez přítomnosti složky rovnoběžné se směrem šíření se poté zjednoduší na:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0, \quad (2.38a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_y = 0. \quad (2.38b)$$

Tyto rovnice potom mohou být přepsány do formy využívající Laplacova operátoru ve dvourozměrném příčném poli (poli kolmém ke směru šíření):

$$\Delta_t \underline{e}(x, y) = 0. \quad (2.39)$$

Stejný postup lze aplikovat i u příčného magnetického pole a dojít ke stejnému výsledku:

$$\Delta_t \underline{h}(x, y) = 0. \quad (2.40)$$

Vlnová impedance TEM vlny se získá jako podíl příčného elektrického a magnetického pole. První rovnice vychází z 2.34a při  $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ :

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.41a)$$

$$j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (2.41b)$$

$$\frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.41c)$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta. \quad (2.41d)$$

Druhá vychází z 2.33a:

$$Z_{TEM} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2.42a)$$

$$j\beta E_x = -j\omega\mu H_y \quad (2.42b)$$

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{\omega\mu}{\beta} \quad (2.42c)$$

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta. \quad (2.42d)$$

Výsledky z 2.41 a 2.42 je možno spojit do jedné rovnice:

$$\underline{h}(x, y) = \frac{1}{Z_{TEM}} \hat{z} \times \underline{e}(x, y). \quad (2.43)$$

Charakteristická impedance  $Z_0$  se vypočte jako  $U/I$  a lze jí získat z ?? a ??

### 2.4.5 TE vlny

Na rozdíl od TEM vln, kde jsou podélné složky  $H$  i  $E$  pole nulové, se u TE vln  $H_z \neq 0$ . Pro přítomnost podélné složky magnetického pole se jim také říká  $H$ -vlny. U TE vln mohou být rovnice 2.35 zjednodušeny na:

$$H_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2.44a)$$

$$H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (2.44b)$$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (2.44c)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (2.44d)$$

U TE vln neplatí, že  $k_c = 0$ , a konstanta šíření  $\beta$  je funkcí frekvence a geometrie vedení. Nejprve se proto musí spočítat  $H_z$  z Helmholtzovi vlnové rovnice (odvození této rovnice je nastíněno v 2.23):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z = 0. \quad (2.45)$$

Tato rovnice může být pro  $H_z(x, y, z) = h_z(x, y)e^{-j\beta z}$  upravena na:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) h_z = 0. \quad (2.46)$$

K vyřešení této rovnice musí být tedy známy hraniční podmínky a geometrie konkrétního vlnovodu.

Impedance TE vlny je:

$$Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2.47a)$$

$$j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \quad (2.47b)$$

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta}, \quad (2.47c)$$

z čehož plyne, že  $Z_{TE}$  je frekvenčně závislé.

#### 2.4.6 TM vlny

TM vlny jsou podobné TE vlnám tím, že je v nich též jedna podélná složka pole přítomna. V tomto případě je to složka  $z$  pole  $E$ . Platí tedy  $H_z = 0$ ,  $E_z \neq 0$ . Tyto vlny jsou proto také někdy nazývány jako  $E$  vlny. Rovnice 2.35 mohou být pro TM vlny vyjádřeny jako:

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.48a)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.48b)$$

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.48c)$$

$$E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (2.48d)$$

Stejně jako u TE vln, neplatí, že  $k_c = 0$ , a konstanta šíření  $\beta$  je funkcí frekvence a geometrie vedení. Nejprve se proto musí spočítat  $E_z$  z Helmholtzovi vlnové rovnice (odvození této rovnice je nastíněno v 2.19):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0. \quad (2.49)$$

Tato rovnice může být pro  $E_z(x, y, z) = e_z(x, y)e^{-j\beta z}$  upravena na:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) e_z = 0. \quad (2.50)$$

K vyřešení této rovnice musí být tedy známy hraniční podmínky a geometrie konkrétního vlnovodu.

Impedance TM vlny je:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.51a)$$

$$j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (2.51b)$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}, \quad (2.51c)$$

z čehož plyne, že  $Z_{TM}$  je frekvenčně závislé.

## **3 Numerické řešení elektromagnetického pole**

### **3.1 Metoda konečných prvků**

### **3.2 Agros 2D**



## 4 Návrh modulu pro VF pole

Navrhovaný modul pro VF pole je .xml soubor obsahující upravené předpisy a rovnice, potřebné pro výpočet veličin vln ve volném prostoru a vlnovodech. Na základě těchto rovnic potom vlastní engine programu Agros2D, knihovna Hermes2D a algoritmus hp fem, vypočítají potřebné veličiny šířící se vlny v jednotlivých bodech zdiskretizovaného prostředí a vytvoří modelové rozložení elektromagnetického pole.

### 4.1 Slabé formulace vlnových rovnic

Prostředí programu Agros2D předpokládá pouze určité typy a způsoby šíření vln vedoucí k zjednodušení modelové situace. Agros2D simuluje pole v 2D prostoru, v třetím rozměru se předpokládá, že je pole rozloženo rovnoměrně nebo symetricky k zakreslené geometrii. Předpokladem je také šíření harmonického pole. Proto je ideální použití Helmholtzovy rovnice (2.18 - Helmholtzova rovnice pro fázor vektoru  $\underline{E}$ ).

U Helmholtzovi rovnici dále předpokládáme rovnoměrné rozložení náboje  $\rho$ . Z toho plyne, že člen  $\text{grad}(\rho/\varepsilon)$  rovnice 2.18 bude roven nule. Pro planární problém budeme předpokládat šíření vln v kartézské souřadnicové soustavě ve směru osy  $z$ . Pro osově symetrický systém bude předpokladem šíření vln v polární souřadnicové soustavě mající pouze tangenciální složku.

Zavedením těchto zjednodušujících předpokladů se Helmholtzova rovnice 2.18 transformuje do tvaru:

$$\Delta \underline{E}_{(z)} + k^2 \underline{E}_{(z)} = j\omega\mu \underline{J}_{ext}. \quad (4.1)$$

Helmholtzovu rovnici pak lze vyjádřit pomocí takzvané slabé formulace. Označme symbolem  $u$  člen  $\underline{E}_{(z)}$  a symbolem  $f$  pravou stranu  $j\omega\mu \underline{J}_{ext}$ . Rovnici roznásobíme testovací funkcí  $v$  a následně jí zintegrujeme po ploše  $\Omega$  (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu):

$$-\Delta u - k^2 u = f \quad (4.2a)$$

$$-\Delta u v - k^2 u v = f v \quad (4.2b)$$

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega - \int_{\Omega} k^2 u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (4.2c)$$

Na výraz následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor  $\Delta$  na skalární součin dvou gradientů ( $\text{grad } u = \nabla u$ ):

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} k^2 u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (4.3)$$

Člen  $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma$  vychází z Greenovi věty a představuje Neumannovu okrajovou podmínku. Ve většině případů je tato podmínka (a proto i tento člen) nulová.

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic, které již umí řešit Hermes2D a jsou

tak vhodné pro simulaci (níže výpočet levé strany 4.3, na pravé se již nic nemění):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k u v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### 4.1.1 Slabá formulace fázoru $E$ v kartézské souřadnicové soustavě

Vycházejme z rovnice 4.1 - nehomogenní Helmholtzovy rovnice pro  $\underline{E}$  po aplikování zjednodušujících předpokladů. Prvním krokem pro vyjádření slabé formy je rozložení rovnice na reálnou a imaginární složku:

$$\Delta(E_{zRe} + jE_{zIm}) + (\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \gamma)(E_{zRe} + jE_{zIm}) = j\omega \mu (J_{extRe} + jJ_{extIm}) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{zRe} + j\Delta E_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu E_{zRe} + j\omega^2 \varepsilon \mu E_{zIm} - j\omega \mu \gamma E_{zRe} + \omega \mu \gamma E_{zIm} = \\ j\omega \mu J_{extRe} - \omega \mu J_{extIm}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Reálnou částí rovnice je:

$$\begin{aligned} R_e : \\ \Delta E_{zRe} + \omega^2 \varepsilon \mu E_{zRe} + \omega \mu \gamma E_{zIm} = -\omega \mu J_{extIm}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Imaginární potom:

$$\begin{aligned} I_m : \\ \Delta E_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu E_{zIm} - \omega \mu \gamma E_{zRe} = \omega \mu J_{extRe}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí  $v$  a následně je zintegrujeme po ploše  $\Omega$  (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2):

$$\begin{aligned} R_e : \\ \int_{\Omega} \Delta E_{zRe} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega = -\omega \mu \int_{\Omega} J_{extIm} v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ \int_{\Omega} \Delta E_{zIm} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega = \omega \mu \int_{\Omega} J_{extRe} v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor  $\Delta$  na skalární součin dvou divergencí ( $\text{div } E_{zRe} = \nabla \cdot E_{zRe}$ ;  $E_{zRe}$  je skalár, proto  $\text{grad } E_{zRe} = \nabla E_{zRe}$ ) (viz 4.3):

$$\begin{aligned} R_e : \\ - \int_{\Omega} \nabla E_{zRe} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zRe}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega = \\ = -\omega \mu \int_{\Omega} J_{extIm} v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
I_m : \\
- \int_{\Omega} \nabla E_{zIm} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} E_{zRe} v \, d\Omega = \\
= \omega \mu \int_{\Omega} J_{extRe} v \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Člen  $\int_{\Gamma} \frac{\partial E_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma$  představuje Neumannovu okrajovou podmínku. Okrajovým podmínkám se věnuje následující sekce, zde proto nebude uvažována.

Složky intenzity elektrického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci  $u = E_z$ :

$$- \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = -\omega \mu \int_{\Omega} J_{ext} v \, d\Omega. \tag{4.13}$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$- \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = -\omega \mu \int_{\Omega} J_{ext} v \, d\Omega. \tag{4.14}$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici pro zjednodušení také vydělíme  $\mu$  a  $\omega$  vyjádříme pomocí  $f$ :

$$- \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v + 2 \pi f \gamma u v = -2 \pi f J_{ext} v. \tag{4.15}$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana  $\rightarrow$  maticový zápis, pravá strana  $\rightarrow$  vektorový zápis) a imaginárních složek.

Člen levé strany reálné části

$$- \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_{zRe}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial E_{zRe}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon E_{zRe} v \tag{4.16a}$$

$$- \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \tag{4.16b}$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Indexy udávají polohu v matici. Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o plně reálný člen (nejdou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$2 \pi f \gamma E_{zIm} v \tag{4.17a}$$

$$2 \pi f \gamma u v \tag{4.17b}$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 2$ . Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině ( $E_{zIm}$ ).

Člen levé strany imaginární části

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_{zIm}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial E_{zIm}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon E_{zIm} v \quad (4.18a)$$

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.18b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejdou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-2 \pi f \gamma E_{zRe} v \quad (4.19a)$$

$$-2 \pi f \gamma u v \quad (4.19b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 1$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině ( $E_{zRe}$ ).

Člen pravé strany reálné části

$$-2 \pi f J_{extIm} v \quad (4.20)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení  $z$  důvodu přehlednosti zachovává oba indexy  $i$  a  $j$ , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto  $i = j$ . Zde jsou indexy rovny 2, protože přestože jde o reálnou část, je zde obsažena imaginární veličina ( $J_{extIm}$ ).

Člen pravé strany imaginární části

$$2 \pi f J_{extRe} v \quad (4.21)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Zde jsou indexy rovny 1, protože přestože jde o imaginární část, je zde obsažena reálná veličina ( $J_{extRe}$ ).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis slabých formulací fázoru E.

#### 4.1.2 Slabá formulace fázoru $\underline{H}$ v kartézské souřadnicové soustavě

Na nehomogenní Helmholtzovu rovnici pro  $\underline{H}$  se aplikují stejné zjednodušující předpoklady jako na rovnici pro  $\underline{E}$ . Její tvar bude tedy podobný rovnici 4.1. Na pravé straně to mimo jiné znamená, že vzhledem k přítomnosti pouze  $z$  složky původního vektoru se  $\text{rot } \underline{J}_{ext} = \left( -\frac{\partial J_{ext(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{ext(y)}}{\partial x} \right) \mathbf{k}$ :

$$\Delta \underline{H}_{(z)} + k^2 \underline{H}_{(z)} = -\mu \left( -\frac{\partial J_{ext(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{ext(y)}}{\partial x} \right). \quad (4.22)$$

Prvním krokem pro vyjádření slabé formy je rozložení rovnice na reálnou a imaginární složku:

$$\Delta (H_{zRe} + j H_{zIm}) + (\omega^2 \varepsilon \mu - j \omega \mu \gamma) (H_{zRe} + j H_{zIm}) = -j \mu \left[ \left( -\frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x} \right) + j \left( -\frac{\partial J_{extIm(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{extIm(y)}}{\partial x} \right) \right] \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{zRe} + j\Delta H_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{zRe} + j\omega^2 \varepsilon \mu H_{zIm} - j\omega \mu \gamma H_{zRe} + \omega \mu \gamma H_{zIm} = \\ -j\mu \left( -\frac{\partial J_{extRe}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extRe}(y)}{\partial x} \right) + \mu \left( -\frac{\partial J_{extIm}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extIm}(y)}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Reálnou částí rovnice je:

$$\begin{aligned} R_e : \\ \Delta H_{zRe} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{zRe} + \omega \mu \gamma H_{zIm} = \mu \left( -\frac{\partial J_{extIm}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extIm}(y)}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Imaginární potom:

$$\begin{aligned} I_m : \\ \Delta H_{zIm} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{zIm} - \omega \mu \gamma H_{zRe} = -j\mu \left( -\frac{\partial J_{extRe}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extRe}(y)}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí  $v$  a následně je zintegrujeme po ploše  $\Omega$  (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2):

$$\begin{aligned} R_e : \\ \int_{\Omega} \Delta H_{zRe} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega = \\ = \mu \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial J_{extIm}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extIm}(y)}{\partial x} \right) v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ \int_{\Omega} \Delta H_{zIm} v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega = \\ = -\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial J_{extRe}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extRe}(y)}{\partial x} \right) v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.28)$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor  $\Delta$  na skalární součin dvou divergencí ( $\text{div } H_{zRe} = \nabla \cdot H_{zRe}$ ;  $H_{zRe}$  je skalár, proto  $\text{grad } H_{zRe} = \nabla H_{zRe}$ ) (viz 4.3):

$$\begin{aligned} R_e : \\ - \int_{\Omega} \nabla H_{zRe} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zRe}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega = \\ = \mu \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial J_{extIm}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extIm}(y)}{\partial x} \right) v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ - \int_{\Omega} \nabla H_{zIm} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{zIm} v \, d\Omega - \omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{zRe} v \, d\Omega = \\ = -\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial J_{extRe}(x)}{\partial y} + \frac{\partial J_{extRe}(y)}{\partial x} \right) v \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.30)$$

Člen  $\int_{\Gamma} \frac{\partial H_{zIm}}{\partial n} v \, d\Gamma$  představuje Neumannovu okrajovou podmínku. Okrajovým podmínkám se věnuje následující sekce, zde proto nebude uvažována.

Složky intenzity magnetického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci  $u = H_z$ :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\ & = \mu \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial J_{ext(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{ext(y)}}{\partial x} \right) v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\ & \mu \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial J_{ext(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{ext(y)}}{\partial x} \right) v \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici pro zjednodušení také vydělíme  $\mu$  a  $\omega$  vyjádříme pomocí  $f$ :

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v + 2 \pi f \gamma u v = \left( -\frac{\partial J_{ext(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{ext(y)}}{\partial x} \right) v. \quad (4.33)$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana  $\rightarrow$  maticový zápis, pravá strana  $\rightarrow$  vektorový zápis) a imaginárních složek.

Člen levé strany reálné části

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial H_{zRe}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H_{zRe}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon H_{zRe} v \quad (4.34a)$$

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.34b)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Indexy udávají polohu v matici. Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o plně reálný člen (nejsou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$2 \pi f \gamma H_{zIm} v \quad (4.35a)$$

$$2 \pi f \gamma u v \quad (4.35b)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 2$ . Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině ( $H_{zIm}$ ).

Člen levé strany imaginární části

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial H_{zIm}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H_{zIm}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon H_{zIm} v \quad (4.36a)$$

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.36b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejsou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-2 \pi f \gamma H_{zRe} v \quad (4.37a)$$

$$-2 \pi f \gamma u v \quad (4.37b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 1$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině ( $H_{zRe}$ ).

Člen pravé strany reálné části

$$\left( -\frac{\partial J_{extIm(x)}}{\partial y} + \frac{\partial J_{extIm(y)}}{\partial x} \right) v \quad (4.38)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení z důvodu přehlednosti zachovává oba indexy  $i$  a  $j$ , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto  $i = j$ . Zde jsou indexy rovny 2, protože přestože jde o reálnou část, je zde obsažena imaginární veličina ( $J_{extIm}$ ).

Člen pravé strany imaginární části

$$\left( \frac{\partial J_{extRe(x)}}{\partial y} - \frac{\partial J_{extRe(y)}}{\partial x} \right) v \quad (4.39)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Zde jsou indexy rovny 1, protože přestože jde o imaginární část, je zde obsažena reálná veličina ( $J_{extRe}$ ).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis slabých formulací fázoru H.

#### 4.1.3 Slabá formulace fázoru E ve válcové souřadnicové soustavě

V trojrozměrné válcové souřadné soustavě je poloha bodu určena vzdáleností od středu  $r$ , úhlem  $\varphi$  a vzdáleností od roviny podstavky  $z$ . Podobně jako v kartézské souřadné soustavě vycházíme z 4.1 - nehomogenní Helmholtzovy rovnice pro  $\underline{E}$  po aplikování zjednodušujících předpokladů. Což v tomto případě znamená, že je přítomna pouze složka  $\underline{E}_\varphi$ . Rovnice 4.1 modifikovaná do válcových souřadnic potom vypadá takto:

$$\Delta \underline{E}_{(\varphi)} + k^2 \underline{E}_{(\varphi)} = j\omega\mu \underline{J}_{ext} \quad (4.40)$$

Podobně jako při řešení v kartézské souřadné soustavě musíme rovnice rozložit na řešení pro reálnou a imaginární složku:

$$\Delta(E_{\varphi Re} + jE_{\varphi Im}) + (\omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\gamma)(E_{\varphi Re} + jE_{\varphi Im}) = j\omega\mu(J_{extRe} + jJ_{extIm}) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{\varphi Re} + j\Delta E_{\varphi Im} + \omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Re} + j\omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Im} - j\omega\mu\gamma E_{\varphi Re} + \omega\mu\gamma E_{\varphi Im} = \\ j\omega\mu J_{extRe} - \omega\mu J_{extIm}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Reálnou částí rovnice je:

$$\begin{aligned} R_e : \\ \Delta E_{\varphi Re} + \omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Re} + \omega\mu\gamma E_{\varphi Im} = -\omega\mu J_{extIm}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Imaginární potom:

$$\begin{aligned} I_m : \\ \Delta E_{\varphi Im} + \omega^2\varepsilon\mu E_{\varphi Im} - \omega\mu\gamma E_{\varphi Re} = \omega\mu J_{extRe}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí  $v$  a následně je zintegrujeme po ploše  $\Omega$  (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2). Předtím je ale potřeba ještě si uvědomit jednu věc ohledně numerického výpočtu získaného integrálu. Získaný integrál, přestože se zapisuje zjednodušeně jako  $\int_{\Omega} u d\Omega$  bude vnitřně numericky vypočítán jako trojitý integrál

$$\iiint_{\varphi \ r \ z} u \ r \ d\varphi \ dr \ dz. \quad (4.45)$$

Do integrálu  $\int_{\Omega} u \ d\Omega$  je proto nutno zapsat  $r$  vznikající v trojitém integrálu jako vyjádření úhlové délky pomocí inkrementu infinitezimální hodnoty  $r \ d\varphi$ :

$$\begin{aligned} R_e : \\ r \int_{\Omega} \Delta E_{\varphi Re} \ v \ d\Omega + r\omega^2\varepsilon\mu \int_{\Omega} E_{\varphi Re} \ v \ d\Omega + r\omega\mu\gamma \int_{\Omega} E_{\varphi Im} \ v \ d\Omega = -r\omega\mu \int_{\Omega} J_{extIm} \ v \ d\Omega \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} I_m : \\ r \int_{\Omega} \Delta E_{\varphi Im} \ v \ d\Omega + r\omega^2\varepsilon\mu \int_{\Omega} E_{\varphi Im} \ v \ d\Omega - r\omega\mu\gamma \int_{\Omega} E_{\varphi Re} \ v \ d\Omega = r\omega\mu \int_{\Omega} J_{extRe} \ v \ d\Omega. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor  $\Delta$  na skalární součin dvou divergencí ( $\text{div } E_{\varphi Re} = \nabla \cdot E_{\varphi Re}$ ;  $E_{\varphi Re}$  je skalár, proto  $\text{grad } E_{\varphi Re} = \nabla E_{\varphi Re}$ ) (viz 4.3):

$$\begin{aligned} R_e : \\ -r \int_{\Omega} \nabla E_{\varphi Re} \cdot \nabla v \ d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial n} \ v \ d\Gamma + r\omega^2\varepsilon\mu \int_{\Omega} E_{\varphi Re} \ v \ d\Omega + r\omega\mu\gamma \int_{\Omega} E_{\varphi Im} \ v \ d\Omega \\ = -r\omega\mu \int_{\Omega} J_{extIm} \ v \ d\Omega \end{aligned} \quad (4.48)$$



$$\begin{aligned}
I_m : \\
& -r \int_{\Omega} \nabla E_{\varphi Im} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial n} v \, d\Gamma + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} E_{\varphi Im} v \, d\Omega - r\omega\mu\gamma \int_{\Omega} E_{\varphi Re} v \, d\Omega \\
& = r\omega\mu \int_{\Omega} J_{ext Re} v \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Člen  $\int_{\Gamma} \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial n} v \, d\Gamma$  představuje Neumannovu okrajovou podmínku. Okrajovým podmínkám se věnuje následující sekce, zde proto nebude uvažována.

Složky intenzity elektrického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci  $u = E_{\varphi}$ :

$$-r \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + r\omega\mu\gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = -r\omega\mu \int_{\Omega} J_{ext} v \, d\Omega. \tag{4.50}$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$-r \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + r\omega\mu\gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = -r\omega\mu \int_{\Omega} J_{ext} v \, d\Omega. \tag{4.51}$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici pro zjednodušení také vydělíme  $\mu$  a  $\omega$  vyjádříme pomocí  $f$ :

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2\pi f)^2 \varepsilon u v + r 2\pi f \gamma u v = -r 2\pi f J_{ext} v. \tag{4.52}$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana  $\rightarrow$  maticový zápis, pravá strana  $\rightarrow$  vektorový zápis) a imaginárních složek.

Člen levé strany reálné části

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial E_{\varphi Re}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2\pi f)^2 \varepsilon E_{\varphi Re} v \tag{4.53a}$$

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2\pi f)^2 \varepsilon u v \tag{4.53b}$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Indexy udávají polohu v matici. Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o plně reálný člen (nejsou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$r 2\pi f \gamma E_{\varphi Im} v \tag{4.54a}$$

$$r 2\pi f \gamma u v \tag{4.54b}$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 2$ . Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině ( $E_{\varphi Im}$ ).

Člen levé strany imaginární části

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial E_{\varphi Im}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon E_{\varphi Im} v \quad (4.55a)$$

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.55b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejsou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-r 2 \pi f \gamma E_{\varphi Re} v \quad (4.56a)$$

$$-r 2 \pi f \gamma u v \quad (4.56b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 1$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině ( $E_{\varphi Re}$ ).

Člen pravé strany reálné části

$$-r 2 \pi f J_{ext Im} v \quad (4.57)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení  $i = 2$  z důvodu přehlednosti zachovává oba indexy  $i$  a  $j$ , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto  $i = j$ . Zde jsou indexy rovny 2, protože přestože jde o reálnou část, je zde obsažena imaginární veličina ( $J_{ext Im}$ ).

Člen pravé strany imaginární části

$$r 2 \pi f J_{ext Re} v \quad (4.58)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Zde jsou indexy rovny 1, protože přestože jde o imaginární část, je zde obsažena reálná veličina ( $J_{ext Re}$ ).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 1 v kapitole Zápis slabých formulací fázoru E.

#### 4.1.4 Slabá formulace fázoru H ve válcové souřadnicové soustavě

V trojrozměrné válcové souřadné soustavě je poloha bodu určena vzdáleností od středu  $r$ , úhlem  $\varphi$  a vzdáleností od roviny podstavy  $z$ . Na nehomogenní Helmholtzovu rovnici pro  $\underline{H}$  se aplikují stejné zjednodušující předpoklady jako na rovnici pro  $\underline{H}$ . Což v tomto případě znamená, že je přítomna pouze složka  $\underline{H}_{\varphi}$ . Její tvar bude podobný rovnici 4.1. Na pravé straně to mimo jiné znamená, že vzhledem k přítomnosti pouze  $\varphi$  složky původního vektoru se  $\text{rot } \underline{J}_{ext} = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext(r)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext(\varphi)}}{\partial r} \right) \mathbf{k}$ . Rovnice 4.1 modifikovaná do válcových souřadnic potom vypadá takto:

$$\Delta \underline{H}_{(\varphi)} + k^2 \underline{H}_{(\varphi)} = -\mu \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext(r)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext(\varphi)}}{\partial r} \right) \quad (4.59)$$

Podobně jako při řešení v kartézské souřadné soustavě musíme rovnice rozložit na řešení pro reálnou a imaginární složku:

$$\Delta(H_{\varphi Re} + jH_{\varphi Im}) + (\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \gamma)(H_{\varphi Re} + jH_{\varphi Im}) = -j\mu \left[ \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Re}(\varphi)}{\partial r} \right) + j \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Im}(\varphi)}{\partial r} \right) \right] \quad (4.60)$$

$$\Delta H_{\varphi Re} + j\Delta H_{\varphi Im} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Re} + j\omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Im} - j\omega \mu \gamma H_{\varphi Re} + \omega \mu \gamma H_{\varphi Im} = -j\mu \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Re}(\varphi)}{\partial r} \right) + \mu \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Im}(\varphi)}{\partial r} \right). \quad (4.61)$$

Reálnou částí rovnice je:

$R_e :$

$$\Delta H_{\varphi Re} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Re} + \omega \mu \gamma H_{\varphi Im} = \mu \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Im}(\varphi)}{\partial r} \right). \quad (4.62)$$

Imaginární potom:

$I_m :$

$$\Delta H_{\varphi Im} + \omega^2 \varepsilon \mu H_{\varphi Im} - \omega \mu \gamma H_{\varphi Re} = -j\mu \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Re}(\varphi)}{\partial r} \right). \quad (4.63)$$

Obě části roznásobíme testovací funkcí  $v$  a následně je zintegrujeme po ploše  $\Omega$  (oblast na které chceme znát řešení - např. vnitřní region vlnovodu; podobně jako v 4.2). Předtím je ale potřeba ještě si uvědomit jednu věc ohledně numerického výpočtu získaného integrálu. Získaný integrál, přestože se zapisuje zjednodušeně jako  $\int_{\Omega} u d\Omega$  bude vnitřně numericky vypočítán jako trojitý integrál

$$\iiint_{\varphi \ r \ z} u \ r \ d\varphi \ dr \ dz. \quad (4.64)$$

Do integrálu  $\int_{\Omega} u \ d\Omega$  je proto nutno zapsat  $r$  vznikající v trojitém integrálu jako vyjádření úhlové délky pomocí inkrementu infinitezimální hodnoty  $r \ d\varphi$ :

$R_e :$

$$\begin{aligned} & r \int_{\Omega} \Delta H_{\varphi Re} \ v \ d\Omega + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{\varphi Re} \ v \ d\Omega + r\omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{\varphi Im} \ v \ d\Omega = \\ & = r\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Im}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Im}(\varphi)}{\partial r} \right) v \ d\Omega \end{aligned} \quad (4.65)$$

$I_m :$

$$\begin{aligned} & r \int_{\Omega} \Delta H_{\varphi Im} \ v \ d\Omega + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{\varphi Im} \ v \ d\Omega - r\omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{\varphi Re} \ v \ d\Omega = \\ & = -r\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext Re}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext Re}(\varphi)}{\partial r} \right) v \ d\Omega \end{aligned} \quad (4.66)$$

Následně aplikujeme Greenovu větu pomocí které rozložíme operátor  $\Delta$  na skalární součin dvou divergencí ( $\text{div } H_{\varphi Re} = \nabla \cdot H_{\varphi Re}$ ;  $H_{\varphi Re}$  je skalár, proto  $\text{grad } H_{\varphi Re} = \nabla H_{\varphi Re}$ ) (viz 4.3):

$$\begin{aligned}
 R_e : \\
 & -r \int_{\Omega} \nabla H_{\varphi Re} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial n} v \, d\Gamma + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{\varphi Re} v \, d\Omega + r\omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{\varphi Im} v \, d\Omega \\
 & = r\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{extIm}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{extIm}(\varphi)}{\partial r} \right) v \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
 I_m : \\
 & -r \int_{\Omega} \nabla H_{\varphi Im} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial n} v \, d\Gamma + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} H_{\varphi Im} v \, d\Omega - r\omega \mu \gamma \int_{\Omega} H_{\varphi Re} v \, d\Omega \\
 & = -r\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{extRe}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{extRe}(\varphi)}{\partial r} \right) v \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Člen  $\int_{\Gamma} \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial n} v \, d\Gamma$  představuje Neumannovu okrajovou podmínku. Okrajovým podmínkám se věnuje následující sekce, zde proto nebude uvažována.

Složky intenzity magnetického pole jsou v modulu vyjádřeny obecně, proto se vrátíme k substituci  $u = H_{\varphi}$ :

$$\begin{aligned}
 & -r \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + r\omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\
 & = r\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext}(\varphi)}{\partial r} \right) v \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Výpočtem divergencí a jejich skalárním roznásobením potom dojdeme k vyjádření výrazu pomocí parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
 & -r \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + r\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} u v \, d\Omega + r\omega \mu \gamma \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \\
 & r\mu \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext}(\varphi)}{\partial r} \right) v \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Ve výrazu zapisovaném do modulu nebudou přímo vyjádřeny integrály. O jejich výpočet se stará knihovna Hermes, ve které je obsažen programový kód umožňující detekci prvků, na které má být integrace aplikována a její následný výpočet. Celou rovnici pro zjednodušení také vydělíme  $\mu$  a  $\omega$  vyjádříme pomocí  $f$ :

$$\begin{aligned}
 & -r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon u v + r 2 \pi f \gamma u v = \\
 & = r \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{ext}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{ext}(\varphi)}{\partial r} \right) v.
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Pro účely zápisu rovnic do xml modulu, budou rovnice rozděleny podle stran rovnic (levá strana  $\rightarrow$  maticový zápis, pravá strana  $\rightarrow$  vektorový zápis) a imaginárních složek.

Člen levé strany reálné části

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H_{\varphi Re}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon H_{\varphi Re} v \quad (4.72a)$$

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.72b)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Indexy udávají polohu v matici. Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o plně reálný člen (nejsou v něm složky vztažené k imaginární části).

Člen levé strany reálné části

$$r 2 \pi f \gamma H_{\varphi Im} v \quad (4.73a)$$

$$r 2 \pi f \gamma u v \quad (4.73b)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 2$ . Značení  $i = 1$  reflektuje to, že se jedná o reálnou složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o člen závislý na imaginární veličině ( $H_{\varphi Im}$ ).

Člen levé strany imaginární části

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H_{\varphi Im}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon H_{\varphi Im} v \quad (4.74a)$$

$$-r \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + r (2 \pi f)^2 \varepsilon u v \quad (4.74b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 2$  odráží to, že jde o plně imaginární člen (nejsou v něm složky vztažené k reálné části).

Člen levé strany imaginární části

$$-r 2 \pi f \gamma H_{\varphi Re} v \quad (4.75a)$$

$$-r 2 \pi f \gamma u v \quad (4.75b)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 1$ . Značení  $i = 2$  reflektuje to, že se jedná o imaginární složku,  $j = 1$  odráží to, že jde o člen závislý na reálné veličině ( $H_{\varphi Re}$ ).

Člen pravé strany reálné části

$$r \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{extIm}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{extIm}(\varphi)}{\partial r} \right) v \quad (4.76)$$

bude označen indexy  $i = 2, j = 2$ . Značení  $z$  důvodu přehlednosti zachovává oba indexy  $i$  a  $j$ , přestože se jedná o jednorozměrný vektor, do kterého jsou členy zanášeny. Proto  $i = j$ . Zde jsou indexy rovny 2, protože přestože jde o reálnou část, je zde obsažena imaginární veličina ( $J_{extIm}$ ).

Člen pravé strany imaginární části

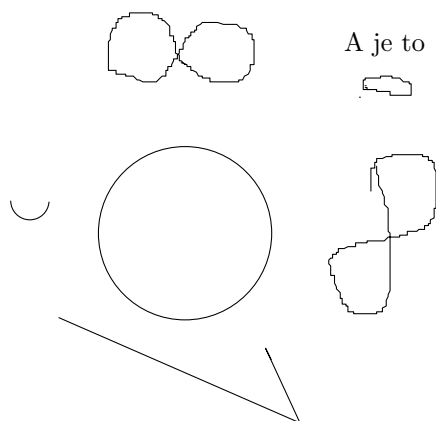
$$r \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial J_{extRe}(r)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_{extRe}(\varphi)}{\partial r} \right) v \quad (4.77)$$

bude označen indexy  $i = 1, j = 1$ . Zde jsou indexy rovny 1, protože přestože jde o imaginární část, je zde obsažena reálná veličina ( $J_{extRe}$ ).

Přesný XML kód použitý pro zápis výše uvedených rovnic je uveden v Příloze 2 v kapitole Zápis slabých formulací fázoru H.

## 5 Zatím moje pokusy

### 5.1 Vkládání obrázků



**Obr. 5.1:** Obrázek v pdf kreslený v ipe



**Obr. 5.2:** Fotka v jpg

## 5.2 Vkládání tabulek

Zkušební tvorba tabulek. Nejhorší je tvorba siroteků. Otázkou je, jak jím předejít. Klasické parametry nepomáhají. Problém se ani na fórech neřeší...

**Tab. 5.1:** Tabulka s přizpůsobením šířky sloupců

Frekvenční pásmo	Technologie	Region
700Mhz	LTE	USA
800Mhz	LTE	Evropa
850Mhz	GSM	USA
900Mhz	GSM	Evropa
1700Mhz	3G	USA
1800Mhz	GSM	Evropa
1900Mhz	GSM	USA
2100Mhz	3G	Evropa
2600Mhz	LTE	Evropa

Fixní šířka sloupce může být nastavena příkazem "`p{5cm}`", ale tento příkaz vyvolá zarovnání doleva. Při požadavku na zarovnání na střed nebo doprava ho nelze použít a buňka se musí manuálně roztáhnout doplněním násilných mezer " "v první řádce tak, aby všechny sloupce byly stejně široké.

**Tab. 5.2:** Tabulka s fixní šířkou sloupců

Frekvenční pásmo	Technologie	Region
700Mhz	LTE	USA
800Mhz	LTE	Evropa
850Mhz	GSM	USA
900Mhz	GSM	Evropa
1700Mhz	3G	USA
1800Mhz	GSM	Evropa
1900Mhz	GSM	USA
2100Mhz	3G	Evropa
2600Mhz	LTE	Evropa

## 5.3 Sazba rovnic

Slavná rovnice Alberta Einsteina praví:  $E = m \cdot c^2$ . Platí pro všechny částice s nenulovou klidovou hmotností. Energie fotonu je naproti tomu determinována pouze jeho frekvencí (a Planckovou konstantou)  $E = h \cdot f$ .



Nyní se podíváme na zoubek číslovaným rovnicím. Co třeba takhle první Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru?

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.1)$$

Pro sazbu matematiky platí obecně jiná pravidla. Jinak se například zadávají mezery nebo tučné písmo.

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad x^{2+p} \geq 0 \quad (5.2)$$

Zkusíme i odkazování. Vzpomínáte si na první Maxwellovu rovnici? Jestli ne, je to tato: 5.1. Btw., znáte ten hezký symbol pro množinu reálných čísel? Je to tento:  $\mathbb{R}$

A teď třeba funkce a odmocniny. Jako příklad do písemky z matematiky. Najděte definiční obor funkce:

$$f(x) : \quad \left( \frac{\sqrt{3^{-x}}}{\sqrt[3]{x-7}} \right)^2 \quad (5.3)$$

Studenti, pamatujete si ještě, derivace? Tohle musíte umět z hlavy i kdybych vás probudil uprostřed noci:  $y = \cos(x^3) \quad y' = \quad y'' =$

Kdo z vás si vzpomene ještě na limity a ví, co tato znamená?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Vrátíme se zpět k Maxwellovým rovnicím. Budeme pokračovat popořadě a podíváme se na druhou Maxwellovu rovnici, tentokrát v integrálním tvaru:

$$\oint_c \mathbf{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.4)$$

A nyní něco trochu komplikovanějšího. Jak se spočte taková zřídlovost?

$$\nabla \times \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

Občas bude zapotřebí vysázet víc rovnic současně. Například všechny Maxwellovy rovnice. Následující ukázka předvádí použití příkazu "align" nahrazující "equation" pro sazbu více rovnic. Rovnítko se musí doplnit znaky "&": "&=", aby byly rovnice správně vycentrovány na střed.

$$f(x) = \cos x \quad (5.6a)$$

$$f'(x) = -\sin x \quad (5.6b)$$

$$\operatorname{div} x = 0 \quad (5.6c)$$

Nebo napsat vysvětlivku k rovnici, která nebude odsazená.

## 5.4 Odrážky a číslování

### 5.4.1 Odrážkovaný seznam

Státy USA, které jsem navštívil:

- Kalifornie
- Florida
- New Jersey
- New York
- Illinois
- Wisconsin
- Minnesota
- Pensylvánie
- Maryland
- Virginia
- District of Columbia

### 5.4.2 Číslovaný seznam

Pořadí, v jakém jsem je navštívil:

1. Illinois
2. Wisconsin
3. Minnesota
4. Kalifornie
5. New York
6. New Jersey
7. Pensylvánie
8. Maryland
9. District of Columbia
10. Virginia
11. Florida

### 5.4.3 Popisné výčty (prostředí „Description”)

Hlavní města některých států USA, které jsem navštívil:

**Kalifornie** Sacramento

**Wisconsin** Madison

**Maryland** Annapolis

### 5.4.4 Odsazování - tabulátor

Největší města některých států USA, která jsem navštívil:

Illinois	Chicago
Maryland	Baltimore
Kalifornie	Los Angeles

## 5.5 Citace

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X nabízí i speciální prostředí pro citace a zvýraznění textu:

*„Veni, vidi, vici.”*

## 5.6 Verbatim

Prostředí „Verbatim” se hodí na sazbu textů, kde není žádoucí brát zřetel na formátovací značky. Příkladem je sazba zdrojových kódů.

```
System.out.println("Ja su lama, nevzpomenu si ani na zapis hlavicky v Jave")
```

## 6 Závěr

Věřím, že se povede dojít až k úspěšnému odvození finálních rovnic a vytvoření modulu pro modelování vysokofrekvenčního pole.

V současné době zdokonaluji kapitulu o vlnovodech a chtěl bych odvodit okrajové podmínky pro Helmholtzovu rovnici (ale nevím, co to je ani jak na to) - samotnou Helmholtzovu rovnici jsem již odvodil. Také bych Helmholtzovu rovnici chtěl vyjádřit ve válcových souřadnicích.

V další fázi bych dotáhl do konce kapitulu o šíření vln ve volném prostoru a vytvořil kapitulu (nebo přílohu) se stručnými informacemi o programu Agros2D a jeho ovládání.

Poté přijde na řadu to nejtěžší. Zjistit bližší informace o tom, co jsou to tzv. slabé formy, odvodit rovnice, vytvořit modul a analyzovat jeho chování uvnitř programu Agros2D.

Na závěr potom porovnat jeho chování a modelování vysokofrekvenčních zařízení v programu Comsol.

Modleme se za to, že se práce úspěšně povede dotáhnout do konce a v dubnu tedy bude moci čnít: „Práce dokončena”

In nomine Patris et Filii et Spiritus Sancti. Amen.

## Použitá literatura

- [1] POZAR, David M. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 1998. Second Edition. ISBN 0-471-17096-8.
- [2] POZAR, David M. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2012. Fourth Edition. ISBN 978-0-470-63155-3.
- [3] KASTNER, Raphael. SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING, Tel Aviv University. Antennas and Radiation. Tel Aviv, 2009. Dostupné z: <http://www.scribd.com/doc/56316827/3/Maxwell-Equations-in-the-Frequency-Domain>
- [4] Rectangular waveguide dimensions. Microwaves101.com [online]. Tucson, AZ, November 3, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.microwaves101.com/encyclopedia/waveguidedimensions.cfm>
- [5] Microstrip. Microwaves101.com [online]. Tucson, AZ, February 18, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.microwaves101.com/encyclopedia/microstrip.cfm>
- [6] Intrinsic Impedance. Antenna-Theory.com [online]. (c) 2009-2011 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.antenna-theory.com/definitions/intrinsicimpedance.php>
- [7] KARBAN, Pavel. FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING, University of West Bohemia in Pilsen. Agros2D [online]. Plzeň, 2012 [cit. 2012-11-19]. Dostupné z: <http://www.agros2d.org/>
- [8] KOUDELA, Lukáš. *Simulace šíření elektromagnetických vln*. Plzeň, 2011. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická, Katedra teoretické elektrotechniky. Vedoucí práce Ing. Pavel Karban, Ph.D.
- [9] Rovinné vlny. *Fyzikální sekce Matematicko-fyzikální fakulty UK* [online]. [cit. 2013-02-20]. Dostupné z: [http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz\\_fyziky\\_pro\\_DS/display.php/optika/1\\_3](http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/optika/1_3)

## Seznam obrázků

2.1	Vlnovod masivnější konstrukce pro šíření vln o nižší frekvenci (okolo 1 GHz) . . . . .	10
2.2	Microstrip a jeho části . . . . .	11
2.3	Geometrie válcového vlnovodu v kartézském souřadném systému . . . .	12
5.1	Obrázek v pdf kreslený v ipe . . . . .	33
5.2	Fotka v jpg . . . . .	33

## Seznam tabulek

5.1	Tabulka s přizpůsobením šířky sloupců . . . . .	34
5.2	Tabulka s fixní šířkou sloupců . . . . .	34

# Příloha I. - XML kód pro TE

## Zápis slabých formulací fáze E

```
<module:volume>
  <module:quantity id="rf_te_permittivity" shortname="rf_eps"/>
  <module:quantity id="rf_te_permeability" shortname="rf_mur"/>
  <module:quantity id="rf_te_conductivity" shortname="rf_gamma"/>
  <module:quantity id="rf_te_current_density_external_real"
shortname="rf_Jer"/>
  <module:quantity id="rf_te_current_density_external_imag"
shortname="rf_Jei"/>
  <module:weakforms_volume>
    <module:weakform_volume analysistype="harmonic">
      <module:quantity id="rf_te_permittivity"/>
      <module:quantity id="rf_te_permeability"/>
      <module:quantity id="rf_te_conductivity"/>
      <module:quantity id="rf_te_current_density_external_real"/>
      <module:quantity id="rf_te_current_density_external_imag"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 1 / (rf_mur *
MU0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0
* uval * vval" axi_newton="- r * 1 / (rf_mur * MU0) * (udr * vdr + udz
* vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" i="1"
j="1" planar_linear="- 1 / (rf_mur * MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) +
pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" planar_newton="- 1 /
(rf_mur * MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps
* EPS0 * uval * vval" symmetric="1"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 1 / (rf_mur *
MU0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0
* uval * vval" axi_newton="- r * 1 / (rf_mur * MU0) * (udr * vdr + udz
* vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" i="2"
j="2" planar_linear="- 1 / (rf_mur * MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) +
pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * uval * vval" planar_newton="- 1 /
(rf_mur * MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps
* EPS0 * uval * vval" symmetric="1"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="r * 2 * PI * f *
rf_gamma * uval * vval" axi_newton="0" i="1" j="2" planar_linear="2 *
PI * f * rf_gamma * uval * vval" planar_newton="0"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 2 * PI * f *
rf_gamma * uval * vval" axi_newton="0" i="2" j="1" planar_linear="- 2 *
PI * f * rf_gamma * uval * vval" planar_newton="0"/>
      <module:vector_form id="form" axi_linear="r * rf_Jer * vval"
axi_newton="- 1 / (rf_mur * MU0) * (updr * vdr + updz * vdz) + r *
pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * upval * vval - r * rf_Jer * vval"
i="1" j="1" planar_linear="rf_Jer * vval" planar_newton="- 1 / (rf_mur
* MU0) * (updx * vdx + updy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0
* upval * vval - rf_Jer * vval"/>
    </module:weakform_volume>
  </module:weakforms_volume>
</module:volume>
```



```

      <module:vector_form id="form" axi_linear="r * rf_Jei * vval"
axi_newton="- 1 / (rf_mur * MU0) * (updr * vdr + updz * vdz) + r *
pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 * upval * vval - r * rf_Jei * vval"
i="2" j="2" planar_linear="rf_Jei * vval" planar_newton="- 1 / (rf_mur
* MU0) * (updx * vdx + updy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0
* upval * vval - rf_Jei * vval"/>
    </module:weakform_volume>
  </module:weakforms_volume>
</module:volume>

```

## Příloha II. - XML kód pro TM

### Zápis slabých formulací fáze H

Zvolené názvosloví:

$$J_{erxdy}(updy) = \frac{\partial J_{extRe}(x)}{\partial y}$$

$$J_{erydx}(updx) = \frac{\partial J_{extRe}(y)}{\partial x}$$

$$J_{eixdy} = \frac{\partial J_{extIm}(x)}{\partial y}$$

$$J_{eiydx} = \frac{\partial J_{extIm}(y)}{\partial x}$$

$$J_{eirdf} = \frac{\partial J_{extIm}(r)}{\partial \varphi}$$

$$rJ_{eifdr} = \frac{\partial r J_{extIm}(\varphi)}{\partial r}$$

$$J_{errdf} = \frac{\partial J_{extRe}(r)}{\partial \varphi}$$

$$rJ_{erfdr} = \frac{\partial r J_{extRe}(\varphi)}{\partial r}$$

```
<module:volume>
  <module:quantity id="rf_tm_permittivity" shortname="rf_eps"/>
  <module:quantity id="rf_tm_permeability" shortname="rf_mur"/>
  <module:quantity id="rf_tm_conductivity" shortname="rf_gamma"/>
  <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_real"
shortname="rf_Jer"/>
  <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_imag"
shortname="rf_Jei"/>
  <module:weakforms_volume>
    <module:weakform_volume analysistype="harmonic">
      <module:quantity id="rf_tm_permittivity"/>
      <module:quantity id="rf_tm_permeability"/>
      <module:quantity id="rf_tm_conductivity"/>
      <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_real"/>
      <module:quantity id="rf_tm_current_density_external_imag"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 1 / (rf_mur *
MU0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0
* uval * vval" axi_newton="0" i="1" j="1" planar_linear="- 1 / (rf_mur
* MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 *
uval * vval" planar_newton="0" symmetric="1"/>
      <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 1 / (rf_mur *
MU0) * (udr * vdr + udz * vdz) + r * pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0
* uval * vval" axi_newton="0" i="2" j="2" planar_linear="- 1 / (rf_mur
```

```

* MU0) * (udx * vdx + udy * vdy) + pow(2 * PI * f, 2) * rf_eps * EPS0 *
uval * vval" planar_newton="0" symmetric="1"/>
  <module:matrix_form id="form" axi_linear="r * 2 * PI * f *
rf_gamma * uval * vval" axi_newton="0" i="1" j="2" planar_linear="2 *
PI * f * rf_gamma * uval * vval" planar_newton="0"/>
  <module:matrix_form id="form" axi_linear="- r * 2 * PI * f *
rf_gamma * uval * vval" axi_newton="0" i="2" j="1" planar_linear="- 2 *
PI * f * rf_gamma * uval * vval" planar_newton="0"/>
  <module:vector_form id="form" axi_linear="r * (- (1/r) * Jerf
+ (1/r) * rJerr) * vval" axi_newton="0" i="1" j="1" planar_linear="(-
Jerxdy + Jerydx) * vval" planar_newton="0"/>
  <module:vector_form id="form" axi_linear="r * (- (1/r)
* Jeif + (1/r) * rJeir) * vval" axi_newton="0" i="2" j="2"
planar_linear="(Jeixdy + Jeiydx) * vval" planar_newton="0"/>
  </module:weakform_volume>
</module:weakforms_volume>
</module:volume>

```