

DMA Domáci úkol č. 10b

Tento domácí úkol se neodevzdává.

Toto jsou příklady na indukci vhodné obtížnosti pro semestrální písemku. Nejprve vždy příklad vyřešte samostatně a snažte se o pěkný zápis důkazů, pak se podívejte na další stranu na řešení.

1. Dokažte indukci, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{12}{13} + \frac{12}{13^2} + \frac{12}{13^3} + \cdots + \frac{12}{13^n} = 1 - \frac{1}{13^n} \quad \text{neboli} \quad \sum_{k=1}^n \frac{12}{13^k} = 1 - \frac{1}{13^n}.$$

2. Dokažte indukci, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$7 + 13 + 19 + \cdots + (6n + 1) = n(3n + 4) \quad \text{neboli} \quad \sum_{k=1}^n (6k + 1) = n(3n + 4).$$

3. Dokažte indukci, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{k=1}^n (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sin(n).$$

Poznámka: Zkuste si tu sumu rozepsat dlouhým zápisem, pak uvidíte, co se tam vlastně děje.

4. Dokažte indukci, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je

$$\sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}.$$

Jako bonus pár zobrazení.

5. U následujících zobrazení rozhodněte, zda jsou prostá a zda jsou na. Své odpovědi dokažte.

a) $T: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_{13}$, $T(n) = (n-1) \bmod 13$;

b) $T: \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{P}$, $T(a, b) = ax^2 + b$.

Poznámka: \mathcal{P} značí množinu všech polynomů.

Speciální bonus pro přípravu na semestrální písemku (ty lehčí) i závěrečnou zkoušku (ty těžší).

6. U následujících tvrzení rozhodněte, zda jsou pravdivá.

Pokud je nějaké tvrzení pravdivé, napište důkaz.

Pokud nějaké tvrzení pravdivé není, tak:

—napište důkaz (nebo spíš jeho korektní počátek), jak by se psal, kdyby pravdivé bylo, a ukažte, v kterém kroku tento pokus ztroskotá a proč;

—ukážete protipříklad (ztroskotaný důkaz by měl napovědět).

A) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} reflexivní, tak je i $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

B) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} symetrické, tak je i $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

C) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} antisymetrické, tak je i $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

D) Necht' \mathcal{R} je relace na množině A . Jestliže je \mathcal{R}^{-1} reflexivní, tak je i \mathcal{R} .

E) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je \mathcal{R} symetrická, tak je i \mathcal{S} .

F) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je \mathcal{S} symetrická, tak je i \mathcal{R} .

G) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Jestliže je \mathcal{S} antisymetrická, tak je i \mathcal{R} .

H) Necht' \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou relace na množině A . Jestliže jsou \mathcal{R}, \mathcal{S} symetrické, tak je i $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Řešení:

1. (0) $n = 1$: $\frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13}$ platí.

(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, předpoklad: platí $\frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13^1}$.

$$\text{Pak } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{12}{13^k} = \sum_{k=1}^n \frac{12}{13^k} + \frac{12}{13^{n+1}} \stackrel{\text{IP}}{=} 1 - \frac{1}{13^n} + \frac{12}{13^{n+1}} = 1 - \left(\frac{1}{13^n} - \frac{12}{13^{n+1}} \right) = 1 - \frac{13-12}{13^{n+1}} = 1 - \frac{1}{13^{n+1}}.$$

2. (0) $n = 1$: $7 = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 4)$ platí.

(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, IP: $\sum_{k=1}^n (6k+1) = n(3n+4)$.

$$\text{Pak } \sum_{k=1}^{n+1} (6k+1) = \sum_{k=1}^n (6k+1) + (6(n+1)+1) \stackrel{\text{IP}}{=} n(3n+4) + (6n+7) = 3n^2 + 10n + 7 = (n+1)(3(n+1)+4).$$

3. (0) $n = 1$: $(\sin(1) - \sin(0)) = \sin(1)$ platí.

(1) $n \in \mathbb{N}$ libovolné, IP: $\sum_{k=1}^n (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sin(n)$.

$$\text{Pak } \sum_{k=1}^{n+1} (\sin(k) - \sin(k-1)) = \sum_{k=1}^n (\sin(k) - \sin(k-1)) + (\sin(n+1) - \sin(n)) \\ \stackrel{\text{IP}}{=} \sin(n) + (\sin(n+1) - \sin(n)) = \sin(n+1).$$

Poznámka: Vzorec říká, že

$$(\sin(1) - \sin(0)) + (\sin(2) - \sin(1)) + (\sin(3) - \sin(2)) + \dots \\ + (\sin(n-1) - \sin(n-2)) + (\sin(n) - \sin(n-1)) = \sin(n) - \sin(0).$$

Celý vnitřek součtu se pokrátí navzájem a zůstane jen začátek a konec. Takovým sumám se někdy říká „teleskopická“.

4. (0) $n = 2$: $\sum_{k=2}^2 k \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 = 8 = (2-1) \cdot 2^3$ platí.

(1) $n \geq 2$ libovolné, IP: $\sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}$.

$$\text{Pak } \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot 2^k = \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k + (n+1)2^{n+1} \stackrel{\text{IP}}{=} (n-1)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} = (n-1+n+1)2^{n+1} \\ = 2n2^{n+1} = n2^{n+2} = ((n+1)-1)2^{(n+1)+1}.$$

5.a) $T: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_{13}$, $T(n) = (n-1) \bmod 13$;

prosté: ne. Protipříklad: $T(5) = 4 = T(18)$.

na: ano. Dk: Nechť $b \in \mathbb{Z}_{13}$. Pak $n = b+1 \in \mathbb{Z}$ a

$$T(n) = T(b+1) = ((b+1)-1) \bmod 13 = b \bmod 13 = b.$$

V posledním rovnítku jsme použili to, že $b \in \mathbb{Z}_{13}$, tedy $0 \leq b < 13$, proto $b \bmod 13 = b$.

5.b) $T: \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{P}$, $T(a, b) = ax^2 + b$.

prosté: ano. Dk: Nechť $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ takové, že $T(a, b) = T(c, d)$. Pak $ax^2 + b = cx^2 + d$. Polynomy se rovnají pouze tehdy, pokud mají stejné koeficienty, takže $a = c$ a $b = d$ neboli $(a, b) = (c, d)$.

na: ne. Protipříklad: $b = x$. Neexistuje $a, b \in \mathbb{Z}$ takové, že $x = ax^2 + b$.

A) Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou reflexivní.

Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ je reflexivní.

Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A: (a, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$. Poznámka: Toto není implikace, proto není přirozený začátek důkazu (další předpoklad), musí se vymyslet.

Důkaz (pokračování): $a \in A$ lib. \mathcal{R} reflex. proto $(a, a) \in \mathcal{R}$. \mathcal{S} reflex. proto $(a, a) \in \mathcal{S}$. Tedy $(a, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

Platí.

B) Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou symetrické.

Chceme $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \implies (b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$. Pak dvě možnosti.

1) možnost $(a, b) \in \mathcal{R}$, ze symetrie \mathcal{R} pak $(b, a) \in \mathcal{R}$ a proto $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

2) možnost $(a, b) \in \mathcal{S}$, ze symetrie \mathcal{S} pak $(b, a) \in \mathcal{S}$ a proto $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

Ve všech případech $\underline{(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

Platí.

C) Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou antisymetrické.

Krok stranou: Chceme: $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ je antisymetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: [(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}] \implies a = b$.

Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$. Pak čtyři možnosti.

1) možnost $(a, b) \in \mathcal{R}$ a $(b, a) \in \mathcal{R}$, pak z antisymetrie \mathcal{R} máme $a = b$, zatím dobré.

2) možnost $(a, b) \in \mathcal{S}$ a $(b, a) \in \mathcal{S}$, pak z antisymetrie \mathcal{S} máme $a = b$, zatím dobré.

3) možnost $(a, b) \in \mathcal{R}$ a $(b, a) \in \mathcal{S}$, pak máme problém.

Neplatí. Mimochodem, problém nastane i pro čtvrtou možnost $(a, b) \in \mathcal{S}$ a $(b, a) \in \mathcal{R}$.

Protipříklad: $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$ antisymetrická, $\mathcal{S} = \{(2, 1)\}$ antisymetrická,

$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ není antisymetrická,

D) Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}^{-1} je reflexivní.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{R} je reflexivní.

Potřebujeme ukázat: $\forall a \in A: (a, a) \in \mathcal{R}$. Poznámka: Toto není implikace, proto není přirozený začátek důkazu (další předpoklad), musí se vymyslet.

Důkaz (pokračování): $\underline{a \in A}$ lib. \mathcal{R}^{-1} reflex. proto $(a, a) \in \mathcal{R}^{-1}$. Pak (prohozením těch dvou a navzájem) $\underline{(a, a) \in \mathcal{R}}$.

Platí.

E) Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a \mathcal{R} je symetrická.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{S} je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{S} \implies (b, a) \in \mathcal{S}$.

Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a, b) \in \mathcal{S}}$. Pak ale (a, b) nemusí být v \mathcal{R} a my tak nemáme možnost využít předpoklad.

Neplatí.

Protipříklad: $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ není symetrická.

Jiný p-p: $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ není symetrická.

F) Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a \mathcal{S} je symetrická.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{R} je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{R}$.

Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a, b) \in \mathcal{R}}$. Podle $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ také $(a, b) \in \mathcal{S}$, ze symetrie \mathcal{S} pak $(b, a) \in \mathcal{S}$ a máme problém, protože to (b, a) nemusí být zase v \mathcal{R} .

Neplatí.

Protipříklad: $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$ není symetrická.

G) Důkaz: Předpoklad: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ a \mathcal{S} je antisymetrická.

Krok stranou: Chceme: \mathcal{R} je antisymetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}] \implies a = b$.

Důkaz (pokračování): $\underline{a, b \in A}$ lib. $\underline{(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}}$. Podle $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ pak máme $(a, b) \in \mathcal{S} \wedge (b, a) \in \mathcal{S}$ a z antisymetrie \mathcal{S} dostaneme $\underline{a = b}$.

Platí.

H) Důkaz: Předpoklad: \mathcal{R}, \mathcal{S} jsou symetrické.

Krok stranou: Chceme: $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ je symetrická.

Potřebujeme ukázat: $\forall a, b \in A: (a, b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \implies (b, a) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Důkaz (pokračování): $a, b \in A$ lib. $(a, b) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Pak musí existovat $x \in A$ takové, že $(a, x) \in \mathcal{R}$ a $(x, b) \in \mathcal{S}$.

Obě jsou symetrické, takže víme i $(x, a) \in \mathcal{R}$ a $(b, x) \in \mathcal{S}$. Prohodíme:

$(a, x) \in \mathcal{S}$ a $(x, b) \in \mathcal{R}$. Proto $(b, a) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, ale to je jiná relace než $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ a jsme v háji.

Neplatí.

Protipříklad: $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ symetrická, $\mathcal{S} = \{(2, 3), (3, 2)\}$ symetrická.

Ale jediný navazující dvoukrok je $1\mathcal{R}2\mathcal{S}3$, proto $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$, tato relace není symetrická.

Poznámka: Protože zde nevyužíváme množinové operace, je stejně praktické psát důkaz alternativním značením: $a(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})b$ pak $\exists x$ aby $a\mathcal{R}x\mathcal{S}b$. Ze symetrie $x\mathcal{R}a$ a $b\mathcal{S}x$ neboli $b\mathcal{S}x\mathcal{R}a$ a proto ...