Lineární algebrou proti inflaci II: tělesa, lineární prostory, lineární kombinace

Konečná tělesa V konečných tělesech $\mathbb{F}_p$ (také se používá značení $\mathbb{Z}_p$) [p musí být prvočíslo!] počítáme jako v běžných celých číslech, ale výsledek vždy nakonec vezmeme $\bmod p$, přičemž „modulit“ můžeme i v průběhu: např. při zjišťování, kolik je $3 \cdot 4 + 4$ v $\mathbb{F}_5$, mohu počítat buď $3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16$ a nakonec spočítat $16 \bmod 5 = 1$, nebo $3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 \overset{12 \bmod 5 = 2}{=} 2 + 4 = 6 \overset{6 \bmod 5 = 1}{=} 1$.

1. Doplňte tabulky násobení a sčítání

   (a) v tělese $\mathbb{F}_3$

   i.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

   ii.

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

   (b) v tělese $\mathbb{F}_5$

   i.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

   ii.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

2. Napište si tabulku násobení mod 6 a zkuste přijít na to, proč „$\mathbb{F}_6$“ není těleso. [Neexistuje zde např. invers k prvku 2.]

Operace „−“ je definována tak, že např. -4 v $\mathbb{F}_5$ je takové číslo a, že $4 + a = 0$, tedy (z tabulky 1.(b).i vidíme, že) $a = 1$. Podobně inverzní prvek „$\frac{1}{4}$“$= 4^{-1}$ je takové číslo b, že $4 \times b = 1$, tudíž (z tabulky 1.(b).ii vidíme, že) $b = 4$.

3. Určete, čemu se rovná výraz $[(2 + 1) \cdot 4 - 4]^{-1}$

   (a) počítáme-li v $\mathbb{F}_5$ [$3^{-1} = 2$]

   (b) počítáme-li v $\mathbb{F}_7$ [$1^{-1} = 1$]

4. Vyřešte následující rovnice (soustavy) v tělese $\mathbb{F}_5$ (nenechte se zaskočit „jiným počítáním“, postup je stejný jako třeba v $\mathbb{R}$):

   (a) $3x + 4 = 2$ [$x = 1$]

   (b) $\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 4 \\ x + 3 = 4y \end{cases}$ [$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$]

   (c) $2x+3y+3 = 2$ [$\begin{pmatrix} 2+t \\ t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{F}_5$]

Lineární prostory

5. Které z následujících množin jsou lineárními prostory nad $\mathbb{R}$?

   (a) $\emptyset$

   (b) množina $\{0\}$

   (c) $\mathbb{Z}$

   (d) $\mathbb{R}$

   (e) $\mathbb{Z}_3$

   (f) $\mathbb{C}[x]$

   (g) množina všech reálných řešení soustavy $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

   (h) množina všech reálných řešení soustavy $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

   (i) množina všech reálných řešení soustavy $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

   [pouze (b), (d), (f), (i)]

Vzpomeňte si z přednášky, co znamená ***lineární kombinace vektorů*** *(případně koukněte na slidy z přednášky 1B).*

6. Napište vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ jako lineární kombinaci seznamu vektorů $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$. [$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$]

7. Napište vektor $p(x) = x^2 + 3x + 2$ z lineárního prostoru $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$ jako lineární kombinaci seznamu vektorů

   (a) $(x^2; x; 1)$ [$p(x) = 1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2 \cdot 1$]

   (b) $(x^2 + 1; 3x - 1; 1)$. [$p(x) = 1 \cdot (x^2 + 1) + 1 \cdot (3x - 1) + 2 \cdot 1$]