Lineární algebrou za energetické úspory V: lineární zobrazení, jeho vlastnosti a matice

Lineární zobrazení Připomeňte si, že zobrazení $\mathbf{f}$ z prostoru L_1 do prostoru L_2 (nad stejným tělesem T) je takové zobrazení, pro které platí

- $\mathbf{f}(\alpha\vec{v}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{v})$ pro každý vektor $\vec{v} \in L_1$ a pro každý skalár $\alpha \in T$
- $\mathbf{f}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \mathbf{f}(\vec{v_1}) + \mathbf{f}(\vec{v_2})$ pro každou dvojici vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in L_1$.

1. Ukažte, že pro každé lineární zobrazení $\mathbf{f}$ platí $\mathbf{f}(\vec{o_1}) = \vec{o_2}$, kde $\vec{o_i}$ značí nulový vektor příslušného lineárního prostoru.

2. Určete, která z následujících zobrazení mohou být lineární (prostory jsou nad odpovídajícími vhodnými tělesy):

   (a) Buď $a \in \mathbb{Z}_5$. $\mathbf{f_2} : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $x \mapsto a \cdot x$

   (b) $\mathbf{f_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$

   (c) $\mathbf{f_3} : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^2$
   $$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

   (d) $\mathbf{f_4} : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}[x]^{\leq 2}$
   $$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mapsto x^2 + 3;\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto 2x - 1;\ \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \mapsto x^2 + 4x + 1$$

   [jen $\mathbf{f_2}$ a $\mathbf{f_4}$]

3. U zobrazení z příkladu 2d určete obraz vektoru $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ a vzor prvků (tj. vektory(y), které se zobrazí na) $x^2 - 2x + 4$, resp. $x^2 + 2$.

   [$\mathbf{f_4}(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}) = 2x^2 + 2x + 5$, $\mathbf{f_4}^{-1}(x^2 - 2x + 4) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f_4}^{-1}(x^2 + 2) = \emptyset$]

Připomenutí výsledků z minula: (Pokud jste měli v minulém úkolu problém s úlohami 1 – 4, doporučuji si je znovu promyslet.)

Využijme výsledky z posledního úkolu, tj. buďte

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

vektory v lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$. Zjistili jsme, že je seznam B_1 lineárně nezávislý, a tedy tvoří uspořádanou bázi podprostoru $\mathcal{L} = \operatorname{span}(B_1) \subseteq \mathbb{R}^4$. Také máme další uspořádanou bázi prostoru $\mathcal{L}$, totiž $B_2 = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$, kde

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix}5\\0\\2\\7\end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{w_3} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\\1\end{pmatrix},$$

pro kterou platí: $\mathbf{coord}_{B_1}(\vec{w_1}) = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \mathbf{coord}_{B_1}(\vec{w_2}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{coord}_{B_1}(\vec{w_3}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. A nakonec jsme minule zjistili, že vektory $\vec{t_i} = \mathbf{coord}_{B_2}(\vec{w_i})$ pro $i = 1, 2, 3$ mají tvar

$$t_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení *Máme-li dva (ne nutně různé) lineární prostory L_1, L_2 (ale nad stejným tělesem) s bázemi M_1, M_2, pak lineárnímu zobrazení $f : L_1 \to L_2$ odpovídá matice $\mathbf{f}$ (vzhledem k bázím M_1 a M_2). Jak tuto matici vytvořit?*

(a) vezmu první vektor báze M_1

(b) ten zobrazím pomocí zobrazení f

(c) zjistím souřadnice výsledku vzhledem bázi M_2 (nyní mám sloupcový vektor)

(d) sloupcový vektor z předchozího bodu je první sloupec matice $\mathbf{f}$

A tento proces zopakuji se všemi vektory báze M_1; nutně tedy dostanu tolik sloupců, kolik je prvků báze M_1 (což je nutně $\dim(L_1)$).

4. Definujme lineární zobrazení $g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ zadáním jeho hodnot na bázi B_1:

$$v_1 \mapsto w_1$$
$$v_2 \mapsto w_2$$
$$v_3 \mapsto w_3.$$

Určete matici zobrazení g vzhledem k

(a) bázím B_1 a B_2 [$\mathbf{E}_3$]

(b) bázi B_1 (tj. „vzhledem k bázím B_1 a B_1“) [$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$]

(c) bázím B_1 a K_4 (tady bereme $g : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^4$; co to změní a co to nezmění?). [$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$]

Obraz libovolného vektoru $\vec{v} \in L_1$ díky matici zobrazení nemusíme složitě počítat, ale stačí vynásobit $\mathbf{f} \cdot \mathrm{coord}_{M_1}(\vec{v})$ a tím dostaneme obraz vektoru vyjádřený v bázi M_2. (Můj oblíbený pohled: místo pouhého $\mathbf{f}$ psát matici zobrazení jako $[\mathbf{f}]_{M_1}^{M_2}$ a představovat si to jako následující „krabičku“:)

$$\vec{v} \xrightarrow{\text{v bázi } M_1} \boxed{[\mathbf{f}]_{M_1}^{M_2}} \xrightarrow{\text{v bázi } M_2} \mathbf{f}(\vec{v})$$

5. Vezmeme vektor, který má v kanonické bázi souřadnice $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Určete souřadnice jeho obrazu při zobrazení g, a to vůči bázi

(a) B_1 [$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$]

(b) B_2 [$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$]

(c) K_4. [$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$]

6. Vezmeme vektor, který má v bázi B_1 souřadnice $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Určete souřadnice jeho obrazu při zobrazení g, a to vůči bázi
   (a) B_1 [$\begin{pmatrix}7\\8\\2\end{pmatrix}$]
   (b) B_2 [$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$]
   (c) K_4. [$\begin{pmatrix}1\\8\\7\\16\end{pmatrix}$]

Důležité prostory související s lin. zobrazením *Jádro zobrazení* $\mathbf{f}$ *jsou všechny vektory, které se zobrazí na nulový vektor, tedy takové, že* $[\mathbf{f}]_{M_1}^{M_2} \cdot \operatorname{coord}(\vec{v}) = \vec{o}$. *Prakticky to tedy znamená, že hledáme takové vektory* $\vec{v} = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, *pro které platí* $[\mathbf{f}]_{M_1}^{M_2} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, *což je soustava lineárních rovnic, kde nalevo je matice* $\mathbf{f}$ *a napravo samé nuly:* $\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{f} & \begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix}\end{array}\right)$. *Jádro* $ker(\mathbf{f})$ *je pak řešením této soustavy a defekt* $def(\mathbf{f})$ *je dimenze tohoto jádra, tj.* $\dim(ker(\mathbf{f}))$. *Pozor na to, že takto získáme vektory v jádru popsané v bázi* M_1*!*

7. Pokud existují, najděte dva různé vektory, které leží v $\ker(g)$ a oba zapište v souřadnicích vůči B_1 i vůči K_4.
   [Jen $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.]

8. Určete $\ker(g)$ a $\operatorname{def}(g)$. [$\ker(g) = \{\vec{o}\}$, $\operatorname{def}(g) = 0$]

Podobně pro lineární zobrazení $\mathbf{f}$ *definujeme jeho obraz* $im(\mathbf{f})$. *V maticovém vyjádření jde o prostor generovaný sloupci matice* $\mathbf{f}$. *Opět pozor, že takto získám vektory v obrazu popsané v bázi* M_2*! Hodnost zobrazení, kterou značíme* $rank(\mathbf{f})$, *je pak dimenze tohoto obrazu.*

9. Pokud existují, najděte dva různé vektory, které leží v $\operatorname{im}(g)$ a zapište je v souřadnicích vůči B_1 i vůči K_4. [např. $\left[\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right]_{B_1} = \left[\begin{pmatrix}5\\0\\2\\7\end{pmatrix}\right]_{K_4}$ nebo $\left[\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right]_{B_1} = \left[\begin{pmatrix}6\\1\\3\\10\end{pmatrix}\right]_{K_4}$]

10. Určete $\operatorname{rank}(g)$. [$\operatorname{rank}(g) = 3$ (netřeba počítat - přednáška 5A: „Věta o dimensi jádra a obrazu")]

A jeden důkazeček na konec:

11. Buď L čtyřdimenzionální prostor nad tělesem T. Dokažte, že je-li množina $M \subseteq L$ čtyřprvková, pak je lineárně závislá právě tehdy, když není generující. Nepoužívejte tvrzení z přednášky, které tvrdí „je-li dimenze prostoru stejná jako počet prvků množiny, pak ta je LNZ, právě když je generující". (Doporučuji dokazovat po částech, tj. nejprve „pokud LZ, pak negeneruje" a poté naopak.)