15.3 a) min $2x_1 \quad - 3x_3 + x_4$ CAFOUREK

z.p.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \quad &\geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad &\leq 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$

max $0y_1 + 5y_2 + 6y_3$
$$\begin{aligned} y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\in \mathbb{R} \\ y_1 - y_2 + 2y_3 &\leq 2 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 &\leq 0 \\ -y_1 - 3y_2 - y_3 &\leq -3 \\ 2y_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

podm. komplementarity
$$\begin{aligned} y_1(x_1 - x_2 - x_3) &= 0 \\ y_2(-x_1 + 2x_2 - 3x_3) &= 0 \\ x_1(y_1 - y_2 + 2y_3 - 2) &= 0 \\ x_2(-y_1 + 2y_2 - y_3) &= 0 \\ x_3(-y_1 - 3y_2 - y_3 + 3) &= 0 \\ x_4(2y_3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

---

b) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} \max\limits_{i=1}^{n} |a_i - x|$ (střed intervalu)

$\hookrightarrow$ na úlohu LP: $\min\{\, y \mid y \geq a_i - x,\ y \geq x - a_i \,\}\ y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$y + x \geq a_i \wedge y - x \geq -a_i$

min $1y + 0x$

prim. úloha:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \geq \left.\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}\right\} 2n$$

$y \in \mathbb{R}$
$x \in \mathbb{R}$

duál. úloha: max $a^T u - a^T v$
$$u \geq 0$$
$$v \geq 0$$

$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \leftarrow$
$\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \leftarrow$
$$\begin{bmatrix} 1 \dots 1 & 1 \dots 1 \\ 1 \dots 1 & -1 \dots -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

podm. komplementarity: $(y = a_i - x$ nebo $u_i = 0)$ a $(y = x - a_i$ nebo $v_i = 0)$

15.2. $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ $\quad \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,, \quad -1 \le x_i \le 1$ CAFOUREK

a) když $c_i < 0$, tak chceme $x_i = -1$
když $c_i > 0$, tak chceme $x_i = 1$
} funguje jako abs. hodnota c_i
když $c_i = 0$, tak je výběr x_i jedno $x_i \in \langle -1; 1 \rangle$

$\Rightarrow$ takže optimální hodnota $\sum_{i=1}^{n} |c_i|$

b) sumu můžeme přepsat jako $\max c^T x$ za podmínek

$$\begin{array}{r} I_-: \\ \\ I_+: \end{array} \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}^{n}}_{A} \Big\}{\scriptstyle 2n} \quad \begin{bmatrix} \\ x \\ \\ \end{bmatrix} \Big\}{\scriptstyle n} \quad \begin{array}{c} \le \\ \\ \ge \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \Big\}{\scriptstyle 2n} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Matice A je rozdělena na dvě části

duální úloha

$\min \mathbf{1}^T y - \mathbf{1}^T z$ za podmínek $\longrightarrow$ $\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} z_i \;\middle|\; y_i \ge 0, z_i \le 0, y_i + z_i = c_i \right\}$

matice jedniček

$y \ge 0$

$z \le 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}$$

máme n min úloh, pro které je minimum
buď $y_i = c_i \ge 0$, $z_i = 0$
nebo $z_i = c_i \le 0$, $y_i = 0$,
takže opt. hodnota je $|c_i|$ $\Rightarrow$ pro celou sumu je to tedy $\sum_{i=1}^{n} |c_i|$

c) podm. komplementarity:

$(x_i = 1$ nebo $y_i = 0)$ a

$(x_i = -1$ nebo $z_i = 0)$

d) $n = 3 \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$