DMA Domácí úkol č. 7a

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Pro řetězec písmen w definujeme jeho délku $l(w)$ jako počet znaků.
Uvažujme relaci $\mathcal{R}$ na množině A konečných řetězců (třeba latinské abecedy, ale klidně si zkuste i jinou) danou předpisem

$$w_1 \mathcal{R} w_2 \iff l(w_1) = l(w_2),$$

tedy porovnáváme řetězce podle jejich délky.
a) Dokažte, že tato relace je ekvivalence.
b) Vyberte si z kalendáře pět jmen (náhodně či řízeně). Pro tuto množinu řetězců nakreslete graf relace $\mathcal{R}$ a vypište komponenty. Napište rozklad množiny odpovídající této relaci.

Poznámka: Když kreslíme graf ekvivalence, tak pro zjednodušení nekreslíme smyčky a namísto obousměrných šipek tam a zpět prostě kreslíme spojnice.

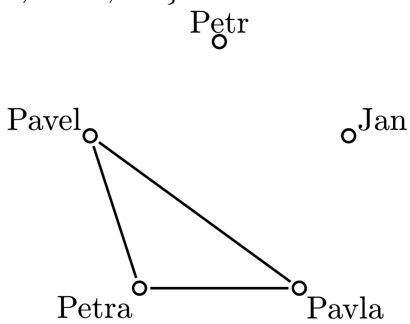
2. Pro následující zobrazení T odhadněte, zda jsou prostá, na, popřípadě bijekce. Nemusíte to dokazovat.
a) T: {nějaká množina lidí z ČR} $\mapsto \mathbb{N}$, T(člověk) = jeho rodné číslo.

b) T: {nenulové polynomy} $\mapsto \mathbb{N}_0$, $T(p) = \deg(p)$.

c) T: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(a, b) = (b, a)$.

Řešení:

1. a) Dokážeme reflexivitu, symetrii a tranzitivitu, rovnou pro relaci na celých čísel, je to stejná práce, pak to platí i pro všechny podmnožiny.
R: Nechť $w \in \mathbb{Z}$. $l(w) = l(w)$ a tedy $w\mathcal{R}w$.
S: Nechť $w_1, w_1 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$, pak $l(w_1) = l(w_2)$, proto i $l(w_2) = l(w_1)$ a tedy $w_2\mathcal{R}w_1$.
T: Nechť $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{Z}$. Jestliže $w_1\mathcal{R}w_2$ a $w_2\mathcal{R}w_3$, pak $l(w_1) = l(w_2)$ a $l(w_2) = l(w_3)$. Proto i $l(w_1) = l(w_3)$ a tedy $w_1\mathcal{R}w_2$.
b) Vybral jsem $A = \{$Petr,Pavel,Petra,Pavla,Jan$\}$.



Komponenty:
$[\text{Petr}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Petr}\}$,
$[\text{Pavel}]_{\mathcal{R}} = [\text{Petra}]_{\mathcal{R}} = [\text{Pavla}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Pavel,Petra,Pavla}\}$,
$[\text{Jan}]_{\mathcal{R}} = \{\text{Jan}\}$.
Rozklad:

$$\{\text{Petr,Pavel,Petra,Pavla,Jan}\} = \{\text{Petr}\} \cup \{\text{Pavel,Petra,Pavla}\} \cup \{\text{Jan}\}.$$

2. a) T je doufejme prosté (v 90. letech se ukázalo, že není, byl to docela průšvih, ale snad už to spravili). Protože jsou rodná čísla desetimístná, tak nikdo nemá rodné číslo 13. Takže T není na.
Není to bijekce.

b) T není prosté (a proto ani bijekce), protože třeba $T(x^2 + 1) = 2 = T(x^2)$.
T je na: Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ najdeme polynom, který pak T pošle na toto n, jmenovitě nějaký polynom stupně n. Například $T(x^n) = n$.

c) Tohle by měla být bijekce (prosté i na). Když ve dvou různých vektorech prohodím složky, tak budou zase různé. A ke každému vektoru $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ se umím dostat pomocí T, stačí začít s prohozeným vektorem (d, c).