7.1. $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $i,j = 1,\dots,n$ CAFOUREK

$\min\left\{ \sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j \text{ , kde } x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_i x_i^2 = 1 \right\}$

$\sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \dots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow x^T C x$, kde $C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$

$x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$

$\sum_i x_i^2 = 1 \rightarrow x^T x = 1$

C není symetrická $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(C + C^T)$ je symetrická

a tato úloha vyžaduje symetrickou matici

Optimální hodnota je rovna nejmenšímu vlastnímu číslu matice $\frac{1}{2}(C+C^T)$.

7.2. Bude platit tvrzení v úloze 7.1. pokud matice A nebude symetrická?

Nebude. Vlastní čísla matice A a matice $\frac{1}{2}(A+A^T)$ jsou jiná. PCA pracuje se sym. maticí. Bez ní máme chybný výsledek.

7.5. $\max\{ x^T A x \text{ , } x \in \mathbb{R}^n \mid x^T x = 1 \text{ , } v_i^T x = 0 \text{ , } i = 1,\dots,k \}$

Dokažte:

1) opt. hodnota je λ_{k+1}

$x^T A x = \underbrace{x^T V}_{y^T} \Lambda \underbrace{V^T x}_{y} = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

$x = Vy$

nová úloha $\max\{ y^T \Lambda y \mid y^T y = 1 \text{ , } y_i = 0 \text{ pro } i = 1,\dots,k \}$ $y \in \mathbb{R}^n$

$y^T y = x^T \underbrace{V V^T}_{I} x = x^T x$

$V^T x = y \Rightarrow v_i^T x = y_i$

$\underbrace{\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2}_{=0 \text{ kvůli podmínkám}} + \underbrace{\lambda_{k+1} y_{k+1}^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}$

$y^T y = y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1$

$y_1, \dots, y_k = 0 \Rightarrow y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2 = 1$

permutací jsme schopni zařídit, že opt. hodnota bude λ_{k+1}, a tedy $y^T \Lambda y = \lambda_{k+1}$

2) z předchozího λ_{k+1} plyne, že $x = v_{k+1}$, protože pro $y_{k+1} = 1$ a $y_{k+2}, \dots, y_n = 0$ platí $y = e_{k+1}$, takže $x = V e_{k+1} = v_{k+1}$

7.6. CAFOUREK

$x_1, \dots, x_k$ sloupce X

dokažte: $tr(X^TAX) = \langle AX, X\rangle = \langle A, XX^T\rangle = x_1^TAx_1 + \dots + x_k^TAx_k$

1) $tr(X^TAX) = \langle AX, X\rangle$

$\langle AX, X\rangle = \sum_i \sum_j (ax)_{ij}\, x_{ij}$

$B = X^TAX \Rightarrow b_{ij} = \sum_k (ax)_{ki}\, x_{kj}$

$tr(B) = \sum_j b_{jj} \Rightarrow tr(X^TAX) = \sum_j \sum_k (ax)_{kj}\, x_{kj}$

$\Rightarrow tr(X^TAX) = \langle AX, X\rangle$ ✓

2) $tr(X^TAX) = \langle A, XX^T\rangle$

použijeme důkaz 1): $\langle A, XX^T\rangle = tr(A^TXX^T)$

Pokud A je symetrická, tak
$tr(A^TXX^T) = tr(AXX^T)$

$tr(ABC) = tr(BCA)$

$\Rightarrow tr(\underset{B}{A}\underset{C}{X}\underset{A}{X^T}) = tr(X^TAX)$

$\Rightarrow tr(X^TAX) = \langle A, XX^T\rangle$ ✓

3) $tr(X^TAX) = x_1^TAx_1 + \dots + x_k^TAx_k$

~~$tr(X^TAX) =$~~

použijeme 1): $B = X^TAX \Rightarrow b_{ij} = \sum_k (ax)_{ki}\, x_{kj} = x_i^TAx_j$

$tr(B) = \sum_j b_{jj} \Rightarrow tr(X^TAX) = x_1^TAx_1 + \dots + x_k^TAx_k$ ✓

7.13.

CAFOCREK

Komutuje operace ortogonální projekce s operací těžiště?

body ... $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$

$P \dots$ ~~projekce~~ operace projekce

$T(a_1, \dots, a_n) \dots$ operace těžiště

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$P(T(a_1, \dots, a_n)) \stackrel{?}{=} T(P(a_1), \dots, P(a_n))$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\right)$$

P je lineární zobrazení

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\right)$$

Ano, komutují.