DMA Domácí úkol č. 12b

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 13.

1. Najděte řešení pro rovnici $a_{n+2} - a_n = 0$, $n \geq 0$,
které splňuje počáteční podmínky $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

2. Najděte obecné řešení pro rovnici $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$, $n \geq 2$.
Jaká je jeho typická asymptotická rychlost růstu v nekonečnu?
Poznámka: Nezapomeňte rovnici nejprve upravit na standardní tvar.

Řešení:

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - \lambda^0 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$,
odtud charakteristická čísla $\lambda = \pm 1$, proto obecné řešení $a_n = 1^n u + (-1)^n v = u + (-1)^n v$, $n \geq 0$.
Počáteční podmínky dávají $a_0 = u + v = 0$, $a_1 = u - v = 2$. Odtud $u = 1$, $v = -1$, proto řešení $a_n = 1 - (-1)^n$, $n \geq 0$.
Mimochodem, je to posloupnost $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, 0 \dots\}$.
Poznámky:
- Občas někdo zapomene dát -1 do závorky při vyrábění posloupností. Pozor, -1^n není totéž co $(-1)^n$. Například $-1^2 = -1$, ale $(-1)^2 = 1$.
- Pokud zadáváme posloupnost vzorcem, tak vždy musíme říct, odkud kam běhá index. Vzorec $a_n = 1 - (-1)^n$ tedy nestačí. Ti, kdo píšou odpovědi jako $\{1 - (-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$, mají vystaráno.
- Nestačí napsat $u = 1$, $v = -1$. Otázka zní „najdi řešení“, takže ho musíme ukázat.

2. Přepis rovnice: $a_{n+1} - 6a_n + 9a_{n-1} = 0$, $n \geq 2$.
Posun indexu: $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, $n \geq 1$.
Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 6\lambda^2 + 9\lambda^0 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$,
odtud charakteristická čísla $\lambda = 3, 3$ neboli $\lambda = 3$ $(2\times)$.
Proto obecné řešení (viz speciální trik) $a_n = 3^n u + n3^n v$, $n \geq 1$.
V typickém případě (tedy $u, v \neq 0$) je $a_n = \Theta(n3^n)$ nebo také $a_n \sim n3^n v$ pro $n \sim \infty$.