$5+\sqrt{13} \leq$ $2+\sqrt{2}$ $3+\sqrt{5}$

CAFOUREK

12.15.

a) $f(x) = |\max\{x_1, \dots, x_n\}|$

norma je pro $n=1 \Rightarrow f(x) = |x|$

$n \geq 2$ ~~...~~ není norma: např.: $f(x)=0$, ale $x=\{0,-1,0,-1,\dots\}$
(porušení axiomu 1)

b) $f(x) = \|x\|_1 + \|x\|_2$

norma je to pro všechna $n \geq 1$:

1) axiom: $\|x\|_1$ i $\|x\|_2$ jsou nezáporné normy a pro obě platí, že $\|x\|=0$, pokud $x=0$

2) axiom: obě normy jsou kladně homogenní:

$\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\,\|x\|_1$ a $\|\alpha x\|_2 = |\alpha|\,\|x\|_2$,

takže $f(\alpha x) = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha x\|_2 = |\alpha|\,\|x_1\| + |\alpha|\,\|x\|_2 = |\alpha|\, f(x)$

3) axiom: obě normy splňují troj. nerovnost,

takže $\|x+y\|_1 + \|x+y\|_2 \leq (\|x\|_1 + \|y\|_1) + (\|x\|_2 + \|y\|_2)$

c) $f(x,y) = \|x\|_1 + \|y\|_2$, kde $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$

norma je to opět pro všechna $n \geq 1$. (předpoklad, pokud by jeden z vektorů neexistoval, tak máme $f(x)=\|x\|_1$ nebo $f(y)=\|y\|_2$)

argumentace je podobná případu v b) pro všechny axiomy s tím rozdílem, že místo $\|x\|_2$ máme teď $\|y\|_2$

16.1. a) $f(x) = a^T x + b$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{konvexní: } f((1-\alpha)x+\alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \\ \text{konkávní: } f((1-\alpha)x+\alpha y) \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \end{array}}$

$a^T x$ je lineární

$\geq a^T(1-\alpha)x + b + a^T\alpha y + b \overset{\geq}{\leq} (1-\alpha)a^T x + \alpha a^T y + b$

$(1-\alpha)a^T x + \alpha a^T y + 2b = (1-\alpha)a^T x + \alpha a^T y + 2b$

konvexní i konkávní pro $n \geq 1$:

$0 \leq \alpha \leq 1$

b) $f(x) = x^T x = \|x\|_2^2$

$((1-\alpha)x)^T(1-\alpha)x + \alpha y^T \alpha y \leq (1-\alpha)x^T x + \alpha y^T y$

$\underbrace{(1-\alpha)^2}_{\leq 1-\alpha} x^T x + \underbrace{\alpha^2}_{\leq \alpha} y^T y \leq (1-\alpha)x^T x + \alpha y^T y$ platí, ovšem $\geq$ neplatí

pouze konvexní pro $n \geq 1$.

---

c) $f(x) = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

$\dfrac{(1-\alpha)x_1 + \dots + (1-\alpha)x_n}{n} + \dfrac{\alpha y_1 + \dots + \alpha y_n}{n} \overset{\geq ?}{\leq} (1-\alpha)\dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \alpha \dfrac{y_1 + \dots + y_n}{n}$

$0 \leq \alpha \leq 1$

$\dfrac{(1-\alpha)x_1 + \dots + (1-\alpha)x_n}{n} = (1-\alpha)\dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ takže i součet dvou arit. průměrů x a y je ekvivalentní proto jako výrazy na obou stranách nerovnosti rovnice a z nerovnosti je rovnost.

konvexní i konkávní pro $n \geq 1$.

16.1. ~~[illegible]~~ CAFOOREK

e) $f(x) = \min_{i=1}^{n} |x_i|$

pro $n=1$ konvexní

$\min |(1-\alpha)x + \alpha y| \leq (1-\alpha)|x| + \alpha|y|$

pro $n > 1$ není konvexní

např: $x=(1,0)$, $y=(0,1)$, $\alpha = 0{,}5$

$\min \left| \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right| \leq 0+0$

$0{,}5 \not\leq 0$

pro žádnm není konkávní např. $x=1$, $y=-1$, $\alpha=0{,}5$

$\min |0{,}5-0{,}5| \geq 0{,}5+0{,}5$

$0 \not\geq 1$

16.3. a) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2xe^{x^2}$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = \underbrace{\underbrace{2e^{x^2}}_{\geq 0}\underbrace{(1+4x^2)}_{>0}}_{>0}$ → kladná funkce na $\mathbb{R}$

=> konvexní

b) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = \underbrace{\underbrace{2e^{-x^2}}_{<0}\underbrace{(-1+4x^2)}_{\text{může být} \geq \text{i} \leq}}_{\text{může být} \geq \text{i} \leq}$ => ani konvexní ani konkávní

c) $f(x,y) = |x-y|$

↳ $g(x,y) = x-y$ je konvexní i konkávní (lineární)

$h(k) = |k|$ je konvexní, protože $|(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2| \leq (1-\alpha)|k_1| + \alpha|k_2|$

podobně jako pro $n=1$ ve 16.1. e)

=> takže $f(x,y) = h(g(x,y))$ je konvexní

e) $f(x) = \|Ax-b\|_2^2 = (Ax-b)^T(Ax-b) = x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb$

$f(x)' = 2x^TA^TA - 2b^TA$

$f(x)'' = \underbrace{2A^TA}_{\text{poz. semidef.}}$ → konvexní

CAFOUREK

16.4. $f(x) = (x^2-a)^2$

pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je konvexní?

$f(x)' = 2(x^2-a)2x = 4x(x^2-a) = 4x^3-4xa$

$f(x)'' = 12x^2-4a = 4(\underbrace{3x^2-a})$

$3x^2-a \geq 0$

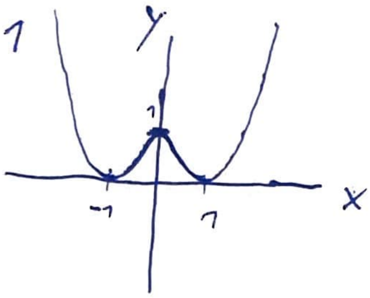
$3x^2 \geq a$

konvexní pro $a \leq 3x^2$

což na celém $\mathbb{R}$ znamená pouze $a=0$

nějaké a, pro které funkce není konvexní.

$a=1$



16.8. subkontura výšky 2 funkce $f(x) = x^2 - x$

↳ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 2\}$

$x^2 - x \leq 2$

$x^2 - x - 2 \leq 0$

$(x-2)(x+1) \leq 0$

$x_1 = 2$ $x_2 = -1$ → interval $\langle -1; 2 \rangle$