CAFOUREK

6.1. a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)(x-y) + xy - x - y$

polynom, 2 proměnné, stupeň polynomu 3, není homogenní

b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^T x$, a je dáno

polynom, n proměnných, stupeň 1, homogenní

c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$

není polynom, n proměnných

d) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|Ax + b\|^2$, A, b jsou dány

polynom, n proměnných, stupeň 2, není homogenní

e) $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^T y$

polynom, 2n proměnných, stupeň 2, homogenní

f) $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(X) = a^T X b$, a, b jsou dány

polynom, n^2 proměnných, stupeň 1, homogenní

g) $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \det X$

polynom, n^2 proměnných, stupeň n, homogenní

CAFOUREK

6.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \begin{cases} \underline{\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}} \\ \underline{\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$(A - \lambda I) v = 0$$

$\lambda_1 : \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 2 \\ -1 & -2-\sqrt{2} \end{bmatrix} v_1 = 0$ v_1 je například $\underline{(2, \sqrt{2} - 2)}$

$\lambda_2 : \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 \\ -1 & -2+\sqrt{2} \end{bmatrix} v_2 = 0$ v_2 je například $\underline{(2, -2-\sqrt{2})}$

6.8. b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 3 > 0$

$\lambda_2 = 1 > 0$

obě vlastní čísla jsou kladná, takže matice je positivně definitní.

g) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ → matice je indefinitní, protože na její diagonále se střídají znaménka prvků.

Také vůdčí minory $I = \{1\}$ a $I = \{1,2\}$ jsou záporné, ale $I = \{1,2,3\} = A$ je kladný.

Proto je indefinitní.

6.16. CAFOUREK

a) diagonální prvky jsou 1,2,0
Protože prvky jsou nezáporné, může být matice positivně semidefinitní. Může být ale indefinitní, pokud by aspoň jeden hlavní minor byl záporný.

b) diag. prvky jsou 1,2,3
Matice může být positivně definitní (diag. prvky jsou kladné), pozitivně semidefinitní (kdyby nějaký hlavní minor byl nulový) nebo indefinitní.

c) diag. prvky jsou -4,-2,-1
Matice může být negativně definitní (všechny diag. prvky jsou záporné), negativně semidefinitní nebo indefinitní (kdyby aspoň jeden hl. minor byl kladný).

d) diag. prvky jsou -1,2,0
Matice je indefinitní, protože je na diagonále kladný i záporný prvek.