DMA Domácí úkol č. 8b

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 9.

1. Nechť $\mathcal{R}$ je relace na A. Dokažte:
Je-li $\mathcal{R}$ antisymetrická, tak je i $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Použijte novou strukturu důkazu (viz obdobný příklad na cvičení/semináři).

2. Uvažujte zobrazení T: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ dané $T(n) = 2n$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení prosté a zda je na. Své odpovědi dokažte.

3. Bonus: Uvažujte zobrazení T: $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$ dané $T(m,n) = m + n$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení prosté a zda je na. Své odpovědi dokažte.

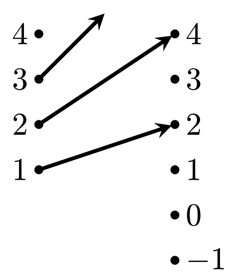
Řešení:

1. Dk: Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická. Dokážeme: $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Rozbor: Aby byla relace $\mathcal{S}$ antisymetrická, musí pro všechna $a, b \in A$ splňovat podmínku
$[(a,b) \in \mathcal{S} \wedge (b,a) \in \mathcal{S}] \implies a = b$, popřípadě $[a\mathcal{S}b \wedge b\mathcal{S}a] \implies a = b$ dle preferovaného značení.
My chceme toto aplikovat na relaci $\mathcal{R}^{-1}$, tedy potřebujeme čtenáře přesvědčit o platnosti podmínky $[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \implies a = b$. Tím je dáno, odkud kam jej chceme zavést.
Takže znovu:
Dk: Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická. Dokážeme: $\mathcal{R}^{-1}$ antisymetrická.
Vezměme libovolné $\underline{a, b \in A}$ splňující $\underline{(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}}$ a $\underline{(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}}$. Pak $(b,a) \in \mathcal{R}$ a $(a,b) \in \mathcal{R}$, díky antisymetrii $\mathcal{R}$ je tedy $b = a$ neboli $\underline{a = b}$.

Poznámka: Je také možné udělat kroky
$\underline{[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a]} \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow [a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a] \longrightarrow \underline{a = b}$.
Všimněte si, že jsme v druhém kroku neměnili pořadí prvků v relacích, ale použili komutativitu logické konjunkce $\wedge$.
V důkazu jsem dával pozor na přesný zápis antisymetrie, tedy že v rovnosti je stejné pořadí prvků jako v první relaci předpokladu. Je to podstatné? Z hlediska logiky samozřejmě ano, ale z hlediska praktického matematického života by to lidé obvykle neřešili, protože stejně víme, že v rovnosti na pořadí nezáleží. Takže bych to bral i takto:
$[a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a] \longrightarrow [b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \longrightarrow a = b$.

Poznámka: Je také možné použít náš tradiční jednodušší přímý postup od předpokladu k závěru:
Předpoklad: $\mathcal{R}$ antisymetrická $\longrightarrow (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \implies a = b$.
Relace v předpokladu přepíšeme dle definice $\mathcal{R}^{-1}$ a dostaneme
$(b\mathcal{R}^{-1}a \wedge a\mathcal{R}^{-1}b) \implies a = b$. Díky komutativitě $\wedge$ pak
$(a\mathcal{R}^{-1}b \wedge b\mathcal{R}^{-1}a) \implies a = b$ a tedy $\mathcal{R}^{-1}$ je antisymetrická.
Tento typ důkazu má dvě nevýhody: Vyžaduje nějak logicky odůvodnit přechod od jednoho logického výroku v jiný, což vyžaduje určitou zkušenost. Zásadnější problém je, že selhává v komplikovanějších situacích, zejména v těch, kdy předpoklad a závěr nemají téměř stejnou logickou strukturu jako zde. Proto jsem v zadání chtěl, ať si procvičíte novou strukturu důkazu, která je výrazně flexibilnější.

2. Intuitivní představa je



Toto zobrazení je prosté.
Dk: Lib. $m, n \in \mathbb{N}$, předpokládáme $T(m) = T(n)$. To znamená $2m = 2n$, tedy $m = n$.

Na: Intuitivně: Zobrazení vyrábí sudá čísla. To ale nepokryje $\mathbb{Z}$.
Toto zobrazení není na. Dk: Zvolme $b = 13 \in \mathbb{Z}$. Pak neexistuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $T(n) = 2n = 13$.
Poznámka: Je jasné, že za b lze zvolit libovolné liché číslo, libovolné záporné číslo či nulu.
Poznámka: Pokud nám nestačí intuice, je často dobrý nápad prostě zkusit důkaz: Vezmeme libovolné $b \in \mathbb{Z}$. Hledáme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $T(n) = b$. Takže chceme $2n = b$ neboli $n = \frac{1}{2}b$. Pak opravdu funguje vzorec $T(n) = 2n = 2 \cdot \frac{1}{2b} = b$, ale neplatí $n \in \mathbb{N}$ a tím se to zkazí.
Mimochodem to ukazuje, že když si někdo zvykne psát formálně to $k \in \mathbb{Z}$ a podobně, jak s tím pořád otravuju, a nezamyslí se nad tím, tak tady automaticky napíše $n \in \mathbb{N}$ a myslí si, že zobrazení je na.

3. T není prosté.
Dk: $T(1,2) = 3 = T(2,1)$.
Poznámka: Z rovnice $T(m,n) = T(x,y)$ dostaneme $m + n = x + y$, chceme získat $(m,n) = (x,y)$. To nejde.

T není na.
Dk: Neexistuje $(m,n) \in \mathbb{N}$ takové, že $T(m,n) = 1$. Pro $(m,n) \in \mathbb{N}$ totiž platí $m + n \geq 1 + 1 = 2$.

Poznámka: Pokud bychom T brali jako zobrazení $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tak už bude na.
Dk: Dáno $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zvolíme $m = 1$ a $n = b - 1$. Pak evidentně

$$T(m,n) = T(1, b-1) = 1 + (b-1) = b$$

a $m \in \mathbb{N}$. Víme $n \in \mathbb{Z}$ a díky $b \geq 2$ také $n \geq 1$, proto $n \in \mathbb{N}$ a tedy $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.