5.1. CAFOUREK

$Ax=b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \neq 0$

a) $m < n \Rightarrow$ vždy řešení ? Neplatí

např: $b = 2$ $A = [0\ 0\ 0]$ $\begin{matrix} m=1 \\ n=3 \end{matrix}$ $m<n$, ale $0x$ cokoliv nemůže se rovnat $\underset{b=}{2}$.

b) $m > n \Rightarrow$ nikdy řešení ? Neplatí

např: $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} m=2 \\ n=1 \end{matrix}$ $m > n$, ale pro $x = (1)$ má soustava řešení $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $m < n$ & $\operatorname{rank} A = m \Rightarrow$ vždy nekonečně mnoho řešení ? Platí

matice A lineárně nezávislé řádky, $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$, tedy $\operatorname{rng} A = \mathbb{R}^m \Rightarrow$

$\Rightarrow$ tzn. že soustava $Ax=b$ má vždy řešení a jelikož $m<n$

a $\underbrace{\dim \operatorname{rng} A}_{=m=\operatorname{rank} A} + \underbrace{\dim \operatorname{null} A}_{>0} = n$, tak soustava má nekonečně mnoho řešení.

netriviální nulový prostor

5.3. b) $Pu = q$ $\min_u \|Pu - q\|^2$ vzdálenost bodu $y \in \mathbb{R}^n$ od přímky $\{a + ts \mid t \in \mathbb{R}\}$, $a, s \in \mathbb{R}^n$

$\min \|y - (a + ts)\|^2 = \min (y_1 - a_1 - ts_1)^2 + \dots + (y_n - a_n - ts_n)^2$

$st = y - a$ $P = s$, $u = t$, $q = y - a$

$Pu = q$

P je jednosloupcová matice, protože s je vektor

normální rovnice

$P^T P u = P^T q \Rightarrow s^T s t = s^T (y-a)$

$t = \frac{s^T(y-a)}{\|s\|^2}$ $s^T s = \|s\|^2$

$\downarrow$

$\left\| y - a - \frac{s^T(y-a)}{\|s\|^2} s \right\| = \left\| (y-a) - \frac{s s^T}{\|s\|^2}(y-a) \right\| =$

$= \left\| \left(I - \frac{s s^T}{\|s\|^2}\right)(y-a) \right\|$

CAFOUREK

5.8. $u=(2,1,-3)$, $v=(1,-1,1)$

ortogonální projekce vektoru $(2,0,1)$ na podprostor

c) $\operatorname{span}\{u,v\}$ $\quad y = Pb \quad b=(2,0,1)$

$$P = AA^+ = A(A^TA)^{-1}A^T \qquad A = \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2&1&-3\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}2&1&-3\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14&-2\\-2&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} =$$

$\det A^{-1} = 14\cdot 3 - 4 = 38$

$A = \frac{1}{\det A^{-1}}\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{38}\right)\cdot\begin{bmatrix}3&2\\2&14\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{38}\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\44\end{pmatrix} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}62\\-35\\17\end{pmatrix}$$

d) $\operatorname{span}(\{u,v\})^\perp$ $\quad y=(I-P)b \quad b=(2,0,1)$

$$y = \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{38}\right)\begin{bmatrix}3&2\\2&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-3\\1&-1&1\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{38}\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&1&-7\\18&-12&8\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{38}\begin{bmatrix}34&-10&-6\\-10&13&-15\\-6&-15&29\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix}4&10&6\\10&25&15\\6&15&9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}14\\35\\21\end{pmatrix}$$

5.9. $X = \operatorname{span}\left\{\left(-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5},0\right),(0,0,0,1),\left(\frac{4}{5},0,\frac{3}{5},0\right)\right\}$

$-\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_3$

$x_4 = 0$

$\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_3 = 0 \Rightarrow \frac{16}{15}x_3 + \frac{3}{5}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \qquad x_2 = t,\ t\in\mathbb{R}$

$x_1 = 0 \qquad t=1$

$X^\perp$ je $\operatorname{span}\{(0,1,0,0)\}$

protože $U = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ je tvořena ortonormální bázi $X^\perp$, což je jeden sloupec,

tak platí $P = UU^T \Rightarrow P = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}(0\ 0\ 1\ 0) = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

Pak ~~projektor~~ projektor na podprostor X je $I-P \Rightarrow I - UU^T = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

5.17. $a, b \in \mathbb{R}^n$

Cafourek

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 \stackrel{?}{=} \|a\|^2 + \|b\|^2$$

Důkaz

$\|a\|^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2$
$= a^T a$

$\|b\|^2 = b_1^2 + \ldots + b_n^2$
$= b^T b$

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \begin{bmatrix} a^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^T a + b^T b$$

$$a^T a + b^T b = a^T a + b^T b = \|a\|^2 + \|b\|^2 \quad \checkmark$$