Lineární algebrou za rozumné prezidentské kandidáty VII:
Gaussova eliminační metoda

Gaussova eliminační metoda aneb GEMologie *je důležitá metoda užitečná k*

- *řešení jakékoli soustavy lineárních rovnic (ideálně zapsané rozšířenou maticí)*
- *zjišťování ranku matice (a tedy i příslušných lin. zobrazení)*
- *hledání inverzní matice (brzy zjistíme, o co jde)*
- *zahánění nudy (na odpoledne postačí libovolná matice rozměru např. 20 × 20)*
- *plno dalším věcem.*

*Princip je ve zkratce (podrobnosti viz přednáška **6A**; **AKLA**, oddíl **6.3** a především formulace algoritmu na str. 146) následující:*

(i) najdu zleva první sloupec matice, ve kterém se vyskytuje nenulový prvek a v tomto sloupci vyberu pivot (se kterým se dobře počítá)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 8 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) řádek s pivotem prohozením přesunu na první řádek a zbytek zvoleného sloupce vynuluji

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{3}R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 8R_1 \end{array}$$

(iii) postup opakuji, ale již si řádků s pivotem a nad ním, ani sloupců nalevo od právě vynulovaného včetně něj nevšímám:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

(iv) GEM skončí v momentě, kdy již nemohu najít nový pivot.

1. Dané matice nad příslušnými tělesy:
   - interpretujte jako matice homogenních soustav rovnic (tj. napište příslušné homogenní soustavy)
   - eliminujte (tj. převeďte do horního blokového tvaru)
   - u každého příkladu některý z kroků **GEM** popište pomocí násobení matice soustavy zleva vhodnou maticí izomorfismu (viz přednášku **6A**, slidy 11, 12, 14)
   - po převedení do horního blokového tvaru opět interpretujte jako matice soustav

   (a) nad $\mathbb{F}_5$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [soustava je $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$; po eliminaci např. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, což odpovídá $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$]

   (b) nad $\mathbb{F}_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   [$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ x = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$; např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x + z + t = 0 \\ z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$]

(c) nad $\mathbb{Q}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

[$\begin{cases} b+2c+3d=0 \\ 3b+d=0 \\ 4b+3c+d=0 \end{cases}$; např. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$; $\begin{cases} b+2c+3d=0 \\ -6c-8d=0 \\ -\frac{13}{3}d=0 \end{cases}$]

Pokud pracuji s rozšířenou maticí soustavy, např.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 8 & -2 & -6 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \overset{\textbf{GEM}}{\cdots} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- ***partikulárním řešením*** *je vektor tvaru* $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, *přičemž volit mohu na pozicích, které odpovídají sloupcům* ***bez pivotu***, *tj. v tomto případě* x_3 *a* x_4*; zbylé hodnoty* x_1, x_2 *dopočítávám na základě zvolených hodnot z matice (je tedy rozumné volit tak, aby se mi dobře počítalo).*
- ***fundamentální systém řešení*** *je tvořen (v tomto případě dvěma = počet proměnných, které mohu volit) vektory tvaru* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, *přičemž volit mohu opět na stejných pozicích; zbylé hodnoty dopočítávám na základě těchto zvolených hodnot z matice* ***s nulovou pravou stranou*** *(opět je rozumné volit tak, aby se mi dobře počítalo; zároveň ale* ***musím zajistit lineární nezávislost těchto vektorů****)*
- ***řešením*** *pak je množina* $\vec{x}_p + \operatorname{span}(\textit{fundamentální systém})$
- *v uvedeném příkladu bych tedy volil např.* $x_3 = 0 = x_4$: $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ *dopočítám z matice* $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *a pro výpočet fundamentálního řešení* $x_3 = 0, x_4 = 1$, *resp.* $x_3 = 1, x_4 = 0$ *(obecně bývá výhodné kombinovat* 0 *a* 1*):* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *a řešením je* $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

2. Berme matice z cvičení 1 jako matice homogenních soustav (tj. s nulovými pravými stranami) nad příslušnými tělesy. Najděte řešení těchto soustav.

[

(a) např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$; za partikulární řešení jsme klidně mohli vzít i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ap.

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$

]

3. Pomocí **GEM** převeďte matice do horního blokového tvaru a najděte řešení příslušných soustav lineárních rovnic:

(a) nad $\mathbb{Q}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 13 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$ $[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}]$

(b) nad $\mathbb{Q}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ [$\emptyset$ (rozšířená matice má větší hodnost než matice bez pravých stran)]

(c) nad $\mathbb{F}_7$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 5 \end{array}\right)$ $[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})]$

[V předchozím případě jste možná získali jiný fundamentální systém. To, že obsahuje jiné vektory, ale neznamená, že by byl nutně špatně: koneckonců nám jde o span, jehož je f.s. bází, a víme, že bází obecně existuje velké množství. Jak zkontrolovat, že vy i já máme stejné řešení? Obecně: jak ověřit, zda dvě LNZ podmnožiny nějakého lineárního prostoru generují stejný podprostor?]

4. K řešení následujících problémů využívejte (mimojiné) **GEM**:

   (a) Pracujme nad $\mathbb{F}_5$: Leží vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve span$(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$? Pokud některý z nich leží, napište jej jako lineární kombinaci zadané trojice vektorů. (Nedá se hledat odpověď pro oba vektory najednou?) [ano; ne]

   (b) Pracujme nad $\mathbb{F}_3$: položme $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\vec{v}_2$ buď vektor tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ ležící zároveň ve span$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   Najděte řešení soustavy $\left(\begin{array}{c|c} (\vec{v}_1)^T & 1 \\ (\vec{v}_2)^T & 2 \end{array}\right)$. [např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$]

   (c) Je možné o řešitelnosti předchozí soustavy rozhodnout i bez znalosti a, b, c? [Ano. První a poslední sloupec levé strany generují $(\mathbb{F}_3)^2$]

A jeden důkazeček na konec:

5. Dokažte, že pro matici $\mathbf{A}$ rozměru $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) nad tělesem $\mathbb{F}$ je ekvivalentní:

   (a) je maticí izomorfismu

   (b) $\ker \mathbf{A} = \{\vec{o}\}$

   (c) na konci algoritmu **GEM** s maticí $\mathbf{A}$ na vstupu nezůstane žádný nulový řádek ani sloupec.