Lineární algebrou za tučné reparace IX: permutace, determinanty

Možné numerické problémy ohledně soustav lineárních rovnic: GEM je skvělý algoritmus, avšak zaokrouhlování (typicky tedy strojové zpracování) může mít neblahé důsledky[1]. Někdy může ale na vině být i soustava jako taková:

1. (a) Vyřešte pomocí GEM (klidně s pomocí kalkulačky) soustavu, která má rozšířenou matici $\left(\begin{array}{cc|c} 0,835 & 0,667 & 0,168 \\ 0,333 & 0,266 & 0,067 \end{array}\right)$.

   $[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}]$

   (b) Vyřešte pomocí GEM (klidně s pomocí kalkulačky) soustavu, která má rozšířenou matici $\left(\begin{array}{cc|c} 0,835 & 0,667 & 0,168 \\ 0,333 & 0,266 & 0,066 \end{array}\right)$.

   $[\begin{pmatrix} -666 \\ 834 \end{pmatrix}]$

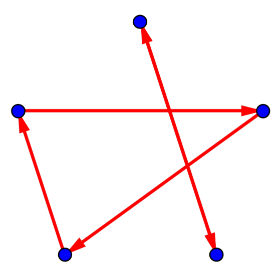
   Vidíme, že malá změna (ke které může dojít třeba zaokrouhlením) může mít obrovský vliv na řešení (takovémuto typu soustavy se říká *špatně podmíněná*).

Permutace množiny *Permutace množiny* $\{1, \dots, n\}$ je libovolná bijekce (tedy zobrazení které je prosté a na) na této množině. (Permutace ale není lineární zobrazení!)

2. Napište všechny permutace φ na množině $\{1, \dots, 4\}$, pro které je $\varphi(2) = 3$.

   $[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}]$

3. Na obrázku je nakreslená permutace π pětiprvkové množiny (šipka vede ze vzoru do jeho obrazu), ovšem bez očíslování vrcholů. Zvolte si alespoň dvě různá očíslování a pro každé spočítejte $sign\,(\pi)$ (formalismus strunových diagramů z **Přednášky 7A**, aneb „počítání překřížení" je nejelegantnější, co znám).



[pro libovolné očíslování je $sign\,(\pi) = -1$]

Permutace se využívají v definici determinantu čtvercové matice (**Přednáška 7A**) [2].

Determinant čtvercové matice Determinant je definován pouze pro čtvercové matice a vyjadřuje orientovaný objem rovnoběžnostěnu daného sloupci matice (v příslušném n-dimenzionálním prostoru). Jeho definici viz na **slidu 9 přednášky 7A**.

Uvažujme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. Spočítejme determinant matice přímo z definice (dohromady bude v tabulce $3! = 6$ řádků):

[1] Právě proto se o GEM v knize, kde najdete další konkrétní příklady, kdy může konkrétně nezvládnutá **GEM** dělat VELKÉ problémy, *Carl D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM 2000*, odkud je vzatý i náš příklad, praví „Although the Gauss–Jordan method is not recommended for solving linear systems that arise in practical applications, it does have some theoretical advantages."

[2] ale ve skutečnosti je to dost zásadní nástroj i jinde v algebře, např. na nich stojí důkaz průlomové Abelovy–Ruffiniho věty

$\pi \in \mathbb{S}_3$	$sign\,(\pi)$	odpovídající prvky v $\mathbf{A}$	součin prvků v 2. a 3. sloupci
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	-1	$a_{2,1} = 2, a_{1,2} = \frac{3}{2}, a_{3,3} = -2$	$(-1) \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-2) = 6$

det $\mathbf{A}$ = ____ (součet všech prvků ve 4. sloupci)

[det $\mathbf{A} = \frac{13}{2}$]

Determinant pomocí GEM Počítání determinantu přímo z definice, jak vidíme na předchozím příkladu, není úplně příjemné. Naštěstí si můžeme práci ulehčit využitím GEM: **je-li matice horní (dolní) trojúhelníková, její determinant je roven součinu prvků na diagonále** (proč?).

Při provádění GEM musíme mít na paměti několik faktů (stojí za rozmyšlení, jak souvisejí s definicí determinantu, resp. s jeho geometrickým významem)

- přičítání lin. komb. řádků determinant nemění (tj. když na pravé straně, kam píšeme úpravy, máme $1 \cdot R_i \pm \alpha \cdot R_j$ $(i \neq j)$)
- vynásobení řádku číslem α zvětší determinant α-krát (tj. když napravo máme $\alpha \cdot R_i$)
- prohození dvou řádků změní znaménko (prohození tří a více už se chová složitě a je lepší jej realizovat jako postupné prohazování dvou)
- *v případě výpočtu determinantu* mohu stejné úpravy, jako dělám se řádky, dělat i se sloupci (a platí stejná pravidla jako pro řádky)

Např. pro matici $\mathbf{A}$ by možný postup vypadal takto:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + 6R_3 \\ R_3 \end{matrix} =$$

$$= (-1) \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_3 \\ R_2 \end{matrix} = (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-13) = \frac{13}{2}$$

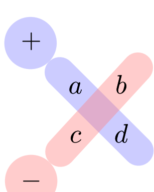
5. Spočtěte (ideálně pomocí GEM) determinanty matic nad danými tělesy:

   (a) nad $\mathbb{Q}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ [0]

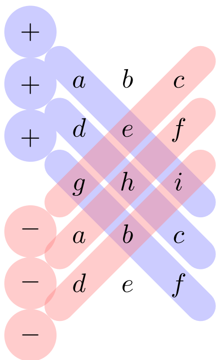
   (b) nad $\mathbb{Z}_5$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ [1]

Pomůcky na malé determinanty Determinanty velikostí 1×1, 2×2 a 3×3 lze počítat relativně přímočaře:

- Determinant matice 1×1 je triviální.
- Determinant matice 2×2 si lze představit pomocí následujícího obrázku:



- Determinant matice 3×3 si lze představit pomocí následujícího obrázku (tzv. *Sarrusovo pravidlo*), případně se lze setkat ještě s dalšími možnostmi:



(obrázek: Alain Matthes, https://bit.ly/2IXR6xx)

- Pro determinanty větší než 3×3 rozumné vizuální pravidlo neexistuje.

6. Spočtěte (ideálně pomocí pravidel výše) determinanty matic nad danými tělesy:

   (a) nad $\mathbb{Z}_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ [1]

   (b) nad $\mathbb{Q}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ [0]

Determinant pomocí rozvoje podle řádku/sloupce Při počítání determinantu velikosti n máme možnost jej redukovat na n determinantů velikost $n-1$ (a každý z nich pak případně na $n-1$ determinantů velikosti $n-2$ atd.) pomocí rozvoje podle řádku/sloupce (**přednáška 7B, slidy 3-5**).

Pro ilustraci rozvoj determinantu oblíbené matice $\mathbf{A}$ podle druhého sloupce (obecně je pro výpočty dobré rozvíjet podle sloupce/řádku s hodně nulami):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Prostřední člen vypadne díky násobení nulou; determinanty 2×2 už lze spočítat z hlavy pomocí pravidla z předchozího odstavce (ale samozřejmě bychom je mohli rozvíjet i dále).

Výhodou je možnost kombinovat všechny postupy dohromady podle toho, co je zrovna výhodné - především determinanty větší než 3×3 je dobré nejprve pomocí GEM/rozvoje zjednodušit.

7. Určete determinant racionální matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. [−23]

8. Určete orientovaný objem čtyřdimenzionálního rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^4$, jehož hrany jsou popsány vektory

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   [Stejné jako v předchozím příkladu, protože $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.]

9. Spočtěte nad $\mathbb{Q}$ determinant $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$. [−344]

A na závěr opět trochu teoretického tělocviku:

10. Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí:

    (a) Jsou-li prvky matice $\mathbf{A}$ přirozená čísla, je i její determinant přirozené číslo.

    (b) Determinant součinu dvou nenulových matic je nenulový.

    (c) Zobrazení $\det : M_n(T) \to T$ z prostoru všech čtvercových matic $n \times n$ nad tělesem T do tělesa T, které matici přiřadí její determinant, je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ lineární.