Lineární algebrou pro lepší den I:
polynomy & jejich kořeny, soustavy lineárních rovnic

V první části prvního úkolu začneme zlehka: povětšinou se jen ujistíme, že to, co jsme dnes dělali, opravdu umíme..

1. Určete počet kořenů polynomu $2x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x$ v závislosti na oboru, ve kterém uvažujeme x (tj. kolik má kořenů, pokud je $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots$) – je fajn použít Hornerovo schéma.

2. Vymyslete polynomiální rovnici (lineární, kvadratickou, kubickou..) tak, aby
   (a) měla řešení v $\mathbb{Z}$, ale ne v $\mathbb{N}$
   (b) měla řešení v $\mathbb{Q}$, ale ne v $\mathbb{Z}$
   (c) měla řešení v $\mathbb{R}$, ale ne v $\mathbb{Q}$
   (d) neměla řešení v $\mathbb{R}$ (a tedy ani v žádném ze zbylých tří menších oborů).

3. Rozložte polynom $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$ na součin polynomů co nejnižších stupňů (např. na kořenové činitele, pokud to jde) v $\mathbb{R}[x]$. $[p(x) = (x-1)(x-3)(x^2+1)]$

4. Rozložte polynom $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$ na kořenové činitele v $\mathbb{C}[x]$. $[p(x) = (x-1)(x-3)(x+i)(x-i)]$

5. Napište polynom s koeficienty v daném tělese T, který má za kořeny pouze zadaná čísla:
   (a) $T = \mathbb{C}$, kořeny $1, 2, 3$ [$r \cdot (x-1)(x-2)(x-3)$ pro libovolné nenulové $r \in \mathbb{C}$]
   (b) $T = \mathbb{R}$, kořen 1 násobnosti 2, kořen -2 násobnosti 3 [$r \cdot (x-1)^2(x+2)^3$ pro libovolné nenulové $r \in \mathbb{R}$]
   (c) $T = \mathbb{R}$, kořeny $1, i$ [neexistuje]
   (d) $T = \mathbb{C}$, kořeny $1, i$. [$r \cdot (x-1)(x-i)$ pro libovolné nenulové $r \in \mathbb{C}$]

Teď ještě chvíli zavzpomínáte na soustavy lineárních rovnic - dobře si rozmyslete hlavně v příkladu (c) (a jemu podobných, to poznáte), jaké je řešení! Je to jednoduché, ale o to jasněji v tom potřebujeme mít - stojí na tom celá lineární algebra.

6. Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

   (a) $\begin{cases} 2x + 3y &= 8 \\ 3x - 5y &= -7 \end{cases}$ $[x = 1, y = 2]$

   (b) $\begin{cases} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + 6y &= 8 \end{cases}$ $[\emptyset]$

   (c) $\begin{cases} 2x + 3y &= 8 \\ -10x - 15y &= -40 \end{cases}$ $[x = 1 - 3t, y = 2 + 2t; t \in \mathbb{R}]$

   (d) $\begin{cases} 2x + y + 3z &= 6 \\ x + z &= 2 \\ 5x + 2y + 7z &= 14 \end{cases}$ $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}\right]$

   (e) $\begin{cases} 2x + y + 3z &= 6 \\ x + z &= 2 \\ 5x + 2y + 7z &= 13 \end{cases}$ $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \emptyset\right]$

   (f) $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 5 \\ -2x - 4y - 6z &= -10 \\ 4x + 8y + 12z &= 20 \end{cases}$ $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ \frac{(5-t-2s)}{3} \end{pmatrix}; t, s \in \mathbb{R}\right]$