DMA Domácí úkol č. 6a

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Uvažujte následující relace na $\mathbb{N}$:
$a\mathcal{R}b$ právě tehdy, když $a < b$;
$a\mathcal{S}b$ právě tehdy, když a dělí b a $a \neq b$.
Rozhodněte, zda složená relace $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ (pozor, nejprve $\mathcal{R}$, pak $\mathcal{S}$) obsahuje dvojici $(3, 20)$ a dvojici $(3, 7)$.
Odpovědi zdůvodněte.

2. Nakreslete Hasseův diagram pro množinu $A = \{2, 4, 6, 12, 24, 36\}$ uspořádanou relací dělitelnosti, tedy aRb jestliže a dělí b.
Najděte její maximum, minimum, největší a nejmenší prvek, pokud existují.
Najděte nějaké lineární rozšíření této uspořádané množiny.

Řešení:

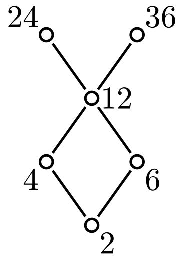
1. Aby byla nějaká dvojice (x, z) v relaci $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, tak se musí najít číslo y takové, že $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{S}z$ (neboli zkráceně $x\mathcal{R}y\mathcal{S}z$). Co to znamená? Musí být splněno $x < y$ a y dělí z a $y \neq z$.

$(3, 20)$: Hledáme y splňující $3 < y$, y dělí 20 a $y \neq 20$. Vyhovují $y = 4$, $y = 5$ a $y = 10$, ale stačilo by i jedno. Víme tedy, že $(3, 20) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Symbolicky: Pokud použiji $y = 5$, tak mám řetězec $3 \xrightarrow{\mathcal{R}} 5 \xrightarrow{\mathcal{S}} 20$, proto $3 \xrightarrow{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} 20$.

$(3, 7)$: Hledáme y splňující $3 < y$, y dělí 7 a $y \neq 7$. Pak musí být $4 \leq y \leq 6$ a mezi těmito čísly žádné nedělí 7. Proto neexistuje y, jaké potřebujeme, a $(3, 7) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

2.



Maximální prvky jsou $24, 36$, největší prvek neexistuje, minimální prvek je 2, nejmenší prvek je 2.
Pro linearizaci jsou čtyři možnosti:
$2 \prec_L 4 \prec_L 6 \prec_L 12 \prec_L 24 \prec_L 36$
nebo
$2 \prec_L 4 \prec_L 6 \prec_L 12 \prec_L 36 \prec_L 24$
nebo
$2 \prec_L 6 \prec_L 4 \prec_L 12 \prec_L 24 \prec_L 36$
nebo
$2 \prec_L 6 \prec_L 4 \prec_L 12 \prec_L 36 \prec_L 24$.