Lineární algebrou proti koronaviru VIII: aplikace GEM

Gaussova eliminační metoda (GEM) podruhé: ***GEM*** *se dá ještě dobře použít k hledání inverzní matice k regulární (tedy nutně čtvercové) matici* $\mathbf{A}$*: jde o takovou matici* $\mathbf{B}$*, že platí* $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}_{\substack{stejného\\ rozměru}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ *a takovou matici pak značíme* $\mathbf{A}^{-1}$.

Inverzní matici pomocí ***GEM*** *hledáme takto:*

- *napíšeme si rozšířenou matici, kde nalevo je* $\mathbf{A}$ *(rozměru* $n \times n$*) a napravo je* $\mathbf{E}_n$
- *celou matici (tj. i s onou velkou pravou stranou) upravujeme řádkovými úpravami (**GEM**) tak, abychom nalevo získali nejprve horní blokový tvar (protože je* $\mathbf{A}$ *regulární, musí být dokonce trojúhelníkový; zato napravo musí být dolní trojúhelníková matice)*
- *matici upravujeme řádkovými úpravami (tentokrát odčítáním spodních řádků od vrchních,* ***GEM*** *„vzhůru nohama“) tak, abychom nalevo získali jednotkovou matici*
- *na konci bude napravo* $\mathbf{A}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & & & \\ \mathbf{A} & & \bullet & & \\ & & & \bullet & \\ & & & & \bullet \\ & & & & 1\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \bullet & & & & & \bullet & & & & 0\\ & \bullet & & & & & \bullet & & & \\ & & \bullet & & & & & \bullet & & \\ 0 & & & \bullet & & & & & \bullet & \\ & & & & \bullet & & & & & \bullet\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \mathbf{A}^{-1} \\ & & & \bullet & & \\ & & & & 1 & \end{array}\right)$$

1. Najděte inverzní matici k regulárním maticím nad příslušnými tělesy:
   (a) nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{F}_5$: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ [nad $\mathbb{R}$: $\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; nad $\mathbb{F}_5$ je matice singulární]

   (b) nad $\mathbb{Z}_7$: $\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 4 & 6 & 5\end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$ [$\begin{pmatrix}2 & 5 & 5\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix}$]

   (c) nad $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ [$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$]

2. Najděte k reálné matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ zleva inverzní matici (tj. matici $\mathbf{B}$ takovou, že $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$) a ukažte, že k ní nemůže existovat zprava inverzní matice. [$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}a & \frac{1}{2} & -a\\ b & -\frac{1}{2} & 1-b\end{pmatrix}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$; zprava inverzní nemůže existovat, protože rank$\mathbf{A} = 2$ a potřeba je alespoň 3]

Pěknou vlastností inverzních matic je, že reprezentují inverzní zobrazení. Speciálně pro matice transformace souřadnic platí, že je-li $\mathbf{T}_{B\mapsto C}$ *matice transformace souřadnic od* B *k* C*, tak k ní inverzní matice je transformuje souřadnice nazpět, aneb* $(\mathbf{T}_{B\mapsto C})^{-1} = \mathbf{T}_{C\mapsto B}$.

3. Lineární zobrazení $\mathbf{g} : (\mathbb{Z}_3)^2 \to (\mathbb{Z}_3)^2$ je zadané na kanonické bázi předpisem

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1 + 2\cdot\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{e}_2 \mapsto 2\cdot\mathbf{e}_1 + \cdot\mathbf{e}_2$$

   (a) Určete matici $\mathbf{g}$ vzhledem ke kanonické bázi. [$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$]

(b) Určete hodnost a defekt $\mathbf{g}$ a jádro i obraz $\mathbf{g}$ vzhledem ke kanonické bázi. [def $\mathbf{g} = 1 = $ rank $\mathbf{g}$, im $\mathbf{g} = \text{span}(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})$, ker $\mathbf{g} = \text{span}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$]

(c) Určete matici $\mathbf{g}$ vzhledem k bázi $B = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$. [např. pomocí "obalení" vhodnými transformačními maticemi: $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$]

(d) Určete jádro i obraz $\mathbf{g}$ vzhledem k bázi B (rozmyslete si, že defekt ani hodnost nezávisejí na volbě báze). [ker $\mathbf{g} = \text{span}(\vec{w})$, kde $\text{coord}_B(\vec{w}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, im $\mathbf{g} = \text{span}(\vec{v})$, kde $\text{coord}_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$]

4. Uvažujme zobrazení $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadané vzhledem ke kanonické bázi maticí $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$. Rozmyslete si, že jde o izomorfismus.

Určete:

(a) souřadnice vektoru $\mathbf{h}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ v kanonické bázi [$\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$]

(b) vůči kanonické bázi vzor vektoru $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ při zobrazení $\mathbf{h}$ [$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$]

(c) matici inverzního zobrazení $\mathbf{h}^{-1}$ vůči kanonické bázi [viz příklad 1a)]

(d) hodnost a defekt zobrazení $\mathbf{h}^2 = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}$ (tj. dvakrát za sebou iterované zobrazení $\mathbf{h}$) [jelikož je $\mathbf{h}$ izomorfismus, musí být i $\mathbf{h}^2$ izomorfismus]

(e) matici zobrazení $\left(\mathbf{h}^{-1}\right)^2$ vůči kanonické bázi. [$\frac{1}{25}\begin{pmatrix}7 & -4\\-6 & 7\end{pmatrix}$]

5. Jsou dány body $A\,[1;1]$, $B\,[2;2]$ v rovině $\mathbb{R}^2$.

(a) Popište množinu všech reálných polynomů stupně 4, které těmito dvěma body procházejí a napište dva konkrétní příklady. [polynomy mají tvar $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, přičemž $a \neq 0$; koeficienty leží v množině $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \text{span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-15\\14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-7\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-3\\2\end{pmatrix})$ & koeficient u prvního vektoru fund. systému není 0 (první souřadnice odpovídá koef. a); ne vždy je nejvýhodnější v **GEM** nulovat první sloupec; příklady: třeba $x^4 - 14x + 14$, $x^4 + x^3 + x^2 - 24x + 22$]

(b) Zapište obecný polynom z bodu 5a v bázi $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

$$[\begin{pmatrix}14\alpha + 6\beta + 2\gamma\\-15\alpha - 7\beta - 3\gamma + 1\\\gamma\\\beta\\\alpha\end{pmatrix}]$$

(c) Zapište obecný polynom z bodu 5a v bázi $C = \{1, x-1, x^2-x+1, x^3-x^2+x-1, x^4-x^3+x^2-x+1\}$. (Nápověda: hledejte vhodnou matici transformace souřadnic ve cvičení 1)

$$[\begin{pmatrix}-\alpha - \beta - \gamma + 1\\-15\alpha - 7\beta - 2\gamma + 1\\\gamma + \beta\\\beta + \alpha\\\alpha\end{pmatrix}]$$

6. (Ze střední školy si určitě ještě pamatujete, že:) Každou přímku v rovině lze zapsat v parametrickém tvaru, ve směrnicovém tvaru a v obecném tvaru.

(a) Rozmyslete si, že parametrický tvar je ve skutečnosti popis tvaru $\vec{v} + \text{span}\,(\vec{w})$ (inspiraci k příkladům můžete hledat např. v prvním domácím úkolu).

(b) (Klasickým problémem na střední škole bývalo:) „Přímku v tvaru **XXX** převeďte do tvaru **YYY**.“ Směr

obecný tvar (libovolného lineárního útvaru AKA **afinního prostoru** v libovolnědimensionálním prostoru)	$\rightsquigarrow$	parametrický tvar

už umíme (**GEM**). Algoritmus na opačný směr je popsán v přednášce **6B**, slide 12 a dále, resp. **AKLA Tvrzení 6.4.8** na str. 155.

(c) Popište rovnicemi afinní prostor (rovinu v $\mathbb{R}^4$) $\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. [např. $\begin{cases} x - y = -1 \\ x - y + t = 2 \end{cases}$ (případně libovolné lineární kombinace řádků)]

(d) (dobrovolné) Jak vypadá průnik ρ a čtyřdimenzionální kulové plochy o poloměru $\sqrt{13}$ se středem $[0;0;0;0]$, která má tím pádem rovnici $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 13$?

[Opravdu je to kružnice.]

A na závěr opět důkaz:

7. Dokažte, že pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ je ekvivalentní:

(a) matice je regulární

(b) soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má pro libovolnou pravou stranu $\mathbf{b}$ jediné řešení

(c) $\mathbf{A}$ je maticí izomorfismu.