Lineární algebrou za energetické úspory IV: souřadnice vůči bázi, operace s maticemi

Medicínské výzkumy ukázaly, že studium Lineární algebry je funkční prevencí před onemocněním koronavirem: dokonce mezi lineárněalgebraickými schopnostmi a odolností prý existuje přímá (=lineární!) úměra.

Opakování z minula Buďte $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ vektory v lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ a označme $B_1 = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$.

1. Ukažte, že je seznam B_1 lineárně nezávislý. [Vyřeším soustavu s vektory ve sloupcích na levé straně a samými nulami na pravé]

Seznam B_1 tedy tvoří uspořádanou bázi podprostoru $L = \operatorname{span}(B_1) \subseteq \mathbb{R}^4$.

2. Vyberte z množiny $\left\{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ ty vektory, které leží v L. [$\left\{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$]

3. Ukažte, že množina C sestávající z vektorů vybraných v předchozím bodě je lineárně nezávislá.

Rozmyslete si, že díky bodu 3 můžeme tvrdit, že množina C tvoří bázi prostoru L. Uspořádejte množinu C do uspořádaného seznamu (báze) B_2, a to vzestupně podle hodnot v druhé souřadnici vektorů (tedy první bude vektor s nejnižší hodnotou v druhé souřadnici, poté s druhou nejnižší atd.). Vektory seznamu B_2 označme postupně $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$.

4. Určete $\vec{u_i} = \mathbf{coord}_{B_1}(\vec{w_i})$ pro $i = 1, 2, 3$. [$\mathbf{coord}_{B_1}(\vec{w_1}) = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \mathbf{coord}_{B_1}(\vec{w_2}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{coord}_{B_1}(\vec{w_3}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$]

5. Je množina $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislá? Dá se odpověď zjistit bez počítání (například jen pomocí výsledků z předchozích cvičení)? [Ano. Lin. (ne)závislost nezáleží na volbě báze, takže je jedno, jestli zjišťuji (ne)závislost pro sloupcové vektory $(\operatorname{coord}_{K_4}(\vec{w_i}))$ ve cvič. 2 nebo pro sloupcové vektory $\operatorname{coord}_{B_1}(\vec{w_i})$ ze cvič. 4.]

6. Určete $\vec{t_i} = \mathbf{coord}_{B_2}(\vec{w_i})$ pro $i = 1, 2, 3$. [$t_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$]

7. Určete množiny, pro které platí, že M_i je bází prostoru $\operatorname{span}(M_i)$. Určete příslušné dimenze $\dim(\operatorname{span}(M_i))$. (Pracujeme v prostoru $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$):

   (a) $M_1 = \{x^2, x, 1\}$
   (b) $M_2 = \{x^2, 3x, 2\}$
   (c) $M_3 = \{x^2 + 3x + 2\}$
   (d) $M_4 = \{x^2 + x, x + 1\}$
   (e) $M_5 = \{x + 2, x + 1\}$
   (f) $M_6 = \{x^2, x^2 + x, 2x, x + 2\}$

   [Všechny až na M_6, protože ta je lineárně závislá. Všimněte si, že $\operatorname{span}(M_1) = \operatorname{span}(M_2) = \operatorname{span}(M_6) = \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, $\dim(\operatorname{span}(M_3)) = 1$, $\dim(\operatorname{span}(M_4)) = 2$, $\dim(\operatorname{span}(M_5)) = 2$]

8. Položme $\vec{p} = x^2 + 3x + 2$. Pokud je množina M_i z předchozího cvičení bází $\operatorname{span}(M_i)$ a zároveň $\vec{p} \in \operatorname{span}(M_i)$, určete $\operatorname{coord}_{\mathbf{M_i}}(\vec{p})$. [$\operatorname{coord}_{M_1}(\vec{p}) = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\operatorname{coord}_{M_2}(\vec{p}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\operatorname{coord}_{M_3}(\vec{p}) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $\operatorname{coord}_{M_4}(\vec{p}) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$]

Operace s maticemi *Operace sčítání, odčítání a násobení skalárem jsou na maticích definovány vcelku přirozeně. Dobrá grafická pomůcka pro méně intuitivní násobení matic je popsána zde.*

9. Mějme tři matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. S maticemi obecně umíme 3 operace: $+$, $-$, $\times$.

   (a) Kolik s výchozími třemi maticemi existuje různých zadání tvaru „matice - operace - matice“ (tj. např. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$)? [27]

   (b) Kolik z nich dává smysl (tj. příslušná operace je definována; např. součet $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definován není)? [11]

   (c) Ta zadání, která mají smysl, spočítejte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

   [

   - $\mathbf{A} + \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
   - $\mathbf{B} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
   - $\mathbf{C} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
   - $\textbf{matice}\,\mathbf{X} - \textbf{matice}\,\mathbf{X} = \mathbf{O}_{\substack{\text{stejného} \\ \text{rozměrů}}}$
   - $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
   - $\mathbf{C} \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
   - $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
   - $\mathbf{C} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
   - $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   ]

10. Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem následující tvrzení: Tvoří-li v reálném prostoru $\mathbb{R}^3$ seznam vektorů $S = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ jeho uspořádanou bázi a pro vektor $\vec{w}$ platí $\mathbf{coord}_S(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, pak je množina $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w}\}$ též bází $\mathbb{R}^3$.