DMA Domácí úkol č. 11b

Tento úkol vypracujte a pak přineste na cvičení č. 12.

1. Uvažujte funkci zadanou $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ a $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ pro $n \in \mathbb{N}$.
a) Spočítejte několik prvních hodnot této funkce a odhadněte obecný vzorec pro $f(n)$
b) Dokažte indukcí, že váš odhadnutý vzorec je správně.

2. Uvažujte funkci zadanou $f(1) = 0$ a $f(n+1) = f(n) + n$ pro $n \in \mathbb{N}$.
Dokažte indukcí, že takto zadaná funkce splňuje nerovnost $f(n) \le n^2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Řešení:

1. a) $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = f(1) + 2f(0) = 4$, $f(3) = f(2) + 2f(1) = 8$, tipujeme $f(n) = 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
b) Správnost tohoto vzorce dokážeme indukcí.
Rozbor: V kroku (1) musíme zjistit, kolik je $f(n+1)$. Jediný známý vzorec je ten z definice $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$. Abychom je mohli využít, musíme znát $f(n)$ a $f(n-1)$, takže tyto dva vzorce musí přijít do IP.
Když jsou v IP dva vzorce, pak musí být také dva v (0), abychom ukázali, že IP lze někdy splnit. Jdeme na to.

(0) Pro $n = 0$ a $n = 1$ to platí: $f(0) = 1 = 2^0$, $f(1) = 2 = 2^1$.
Poznámka: V obou zápisech pro f je první rovnítko dané v zadání, druhým ověříme shodu s uhodnutým vzorcem.
(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Předpokládejme, že $f(n) = 2^n$ a $f(n-1) = 2^{n-1}$.
Pak podle definice f a pak předpokladu máme

$$f(n+1) = f(n) + 2f(n-1) \overset{\text{IP}}{=\!=} 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}.$$

Důkaz je hotov.

Poznámka: IP $f(n) = 2^n$ se dělá pro konkrétní zvolené n, proto tento vzorec nelze v kroku (1) použít pro $f(n-1)$ ani $f(n+1)$, protože $n \pm 1$ jsou už jiná čísla než n. Slabá indukce tedy neprojde.
Když v kroku (1) zvolíme nejmenší možné $n = 1$, tak se v IP mluví o $f(1)$ a o $f(0)$ a přesně tyto dvě hodnoty jsme potvrdili v (0), takže tento IP byl naplněn.

FAQ: Jak můžu do f dosazovat nulu, když je v zadání uvedeno „pro $n \in \mathbb{N}$"?
A: Ta specifikace se týká jen té induktivní rovnice, říká nám, pro jaká n ji máme k dispozici. Navazuje to správně, protože nejmenší možné n v této specifikaci vede na rovnici

$$f(2) = f(1) + 2f(0)$$

a vidíme, že se tím pádem existence $f(0)$ očekává. Pokud bychom u té rovnice dali specifikaci „pro $n \ge 0$", tak by také mohla vzniknout rovnice $f(1) = f(0) + 2f(-1)$ a máme problém.

2. (0): Pro $n = 1$: $f(1) = 0 \le 1^2$.
(1) Nechť $n \in \mathbb{N}$, IP: $f(n) \le n^2$.
Pak $f(n+1) = f(n) + n \overset{\text{IP}}{\le} n^2 + n \underset{[n+1>0]}{\le} n^2 + n + (n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
Poznámky:
• To, co se v důkazu indukcí dělá, se vždy odvíjí od toho, co dokazujeme, takže žádanou nerovnost $f(n) \le n^2$ musí být vidět v kroku (0), v indukčním předpokladu a v hlavním výpočtu. Naopak tam nesmí být něco odjinud, třeba $f(n+1) = f(n) + n$ není indukční předpoklad, ale fakt, který nám byl sdělen a je k volnému použití kdekoliv a kdykoliv v našem řešení, tedy i v indukci.
• Někteří se snažili najít pro f vzorec. Dá se to, třeba $f(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$, ale je to zbytečné. Konec konců, stačí malá změna v zadání a vzorec vůbec najít nepůjde, ale pořád je možnost, že i tak budeme umět dokázat nějaké vlastnosti indukcí, aniž bychom vlastně ten vzorec znali.