Lineární algebra pro klidnější mysl X:
aplikace determinantů: adjungovaná matice, Cramerovo pravidlo

Determinant a regularita matic *Zajímavou informací, kterou podává determinant matice, je*

$$\boxed{\text{matice je regulární} \Leftrightarrow \text{její determinant je nenulový}}$$

1. K těm z následujících matic, které jsou regulární, najděte inverzní matice. U singulárních určete jádro Ker.

   (a) nad $\mathbb{Z}_5$: $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ [det $\mathbf{A}_1 \neq 0$, tedy je regulární $\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$]

   (b) nad $\mathbb{R}$: $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ [det $\mathbf{A}_2 \neq 0$, tedy je regulární; $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$]

   (c) nad $\mathbb{Z}_5$: $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   [det $\mathbf{A}_3 = 0$, tedy je singulární (stačí vzít výsledek předchozího bodu modulo 5); Ker$\mathbf{A}_3 = \text{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$]

2. Najděte nad $\mathbb{R}$ řešení (dvou) soustav se společnou levou stranou: $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$. Doporučuji využít výsledku z předchozího cvičení a faktu, že soustavu rovnic můžeme řešit i s využitím následujícího pozorování: $(\mathbf{A}|\ \vec{b}) \sim (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}|\ \mathbf{A}^{-1}\vec{b}) = (\mathbf{E}_n|\ \mathbf{A}^{-1}\vec{b})$.

   [$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$]

Adjungovaná matice *Pro matici* $\mathbf{M} = (m_{ij})$ *nazýváme matici* adj $(\mathbf{M}) = (M_{ji})$, *tedy transponovanou matici jejích algebraických doplňků, k ní* ***adjungovanou*** *maticí (****Přednáška 7B****, slide* ***6****). Adjungovanou matici tedy spočítáme tak, že*

(i) každý prvek matice $\mathbf{M}$ *nahradíme jeho algebraickým doplňkem, tj. determinantem matice vzniklé vypuštěním řádku a sloupce, v němž se daný prvek nachází, opatřený znaménkem* $(-1)^{i+j}$*; vizuální pomůcka: znaménka jsou cik-cak:*

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \\ - & + & - & & \\ + & - & \ddots & & \\ - & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

(ii) následným transponováním získané matice.

Příklad. *Pro* $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *je*

(i) nahrazení prvků algebraickými doplňky:

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

(ii) transponování výsledku: $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{adj}(\mathbf{M})$.

3. Určete adj $(\mathbf{A}_i)$ pro matice z Příkladu 1. [(a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$]

Není náhodou, že pro ty z matic, které jsou regulární, vycházejí adjungované matice jako násobky inverzních: pro regulární matice platí

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{A})}$$

4. Určete nad $\mathbb{Z}_3$ pomocí adjungované matice inverzní matici k $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. [$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$]

5. Bylo by pro určení inverzní matice pomocí **GEM** potřeba více či méně operací (transpozici matice nepočítejme)?

Cramerovo pravidlo *Cramerovo pravidlo (**Přednáška 7B**, slidy **12** a dál) dává možnost počítat pomocí determinantů řešení soustav lin. rovnic s regulární levou stranou po jednotlivých složkách (a tím občas ušetří práci). Pro soustavu s rozšířenou maticí* $(\mathbf{A} \mid \vec{b})$ *platí* $x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$, *kde matice* $\mathbf{A}_i$ *vznikne nahrazením sloupce příslušného proměnné* x_i *sloupcem* $\vec{b}$ *pravých stran.*

Je vidět, že Cramerovo pravidlo můžeme úspěšně použít jen pro regulární levou stranu – pro singulární je $\det \mathbf{A} = 0$ *a nemůžeme dělit. V ten moment buď soustava nemá řešení, nebo je řešení více, což ale bez dalších výpočtů nejsme schopni zjistit. (Velice užitečné je pak Cramerovo pravidlo pro soustavy s parametry.)*

6. Jsou dány body $A\,[1;1]$, $B\,[2;2]$ a $C\,[\alpha;3]$, $(\alpha \in \mathbb{R})$. V závislosti na parametru α hledáme kvadratickou funkci $y = ax^2 + bx + c$, která jimi prochází.
   (a) Určete koeficienty a, b, c tohoto polynomu v závislosti na α. [$a = \frac{\alpha-3}{-\alpha^2+3\alpha-2}$, $b = \frac{-\alpha^2+7}{-\alpha^2+3\alpha-2}$, $c = \frac{2\alpha-6}{-\alpha^2+3\alpha-2}$]
   (b) Pro která α nelze takový polynom najít? Proč? [$\alpha \neq 1, 2, 3$; doporučuji si nakreslit, co by každá možnost znamenala, na obrázku]

A na závěr opět trocha teorie:

7. Která z následujících tvrzení platí pro obecnou matici $\mathbf{A}$?
   (a) $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{A}$
   (b) $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{A}^{-1}$
   (c) $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ je invertibilní právě tehdy, je-li invertibilní $\mathbf{A}$
   (d) je-li $\mathbf{A}$ diagonální, pak má tu samou vlastnost i $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$.