DMA Domácí úkol č. 8a

Tento úkol vypracujte po přednášce a před cvičením, na druhé straně je řešení.
Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Uvažujte zobrazení T: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ dané $T(m,n) = m \cdot n$. Rozhodněte, zda je toto zobrazení prosté a na. Své odpovědi dokažte.

2. Dokažte, že množina S sudých celých čísel a množina L lichých celých čísel mají stejnou mohutnost. Nápověda: Obrázek pomůže.

Řešení:

1. Toto zobrazení není prosté, protože například $T(3,2) = 6 = T(2,3)$, ale $(3,2) \neq (2,3)$ v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Surjektivita: Toto zobrazení je na. Důkaz: Pro dané $y \in \mathbb{N}$ zvolíme $n = 1$, $m = y$, pak $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $T(m,n) = T(y,1) = y \cdot 1 = y$.
Rada: Než začnete s matematikou, je dobré si předložený objekt „osahat“, v tomto příkladě bych tedy začal tím, že bych si nejprve zkusil dosazovat do T nějaké dvojice čísel a koukal, co to dělá.

2. Uměli bychom šipkami propojit tyto dvě množiny?

$$S\colon \dots \overset{-2}{\bullet} \qquad \overset{0}{\bullet} \qquad \overset{2}{\bullet} \qquad \overset{4}{\bullet} \dots$$

$$L\colon \dots \underset{-1}{\bullet} \qquad \underset{1}{\bullet} \qquad \underset{3}{\bullet} \qquad \underset{5}{\bullet} \dots$$

Možností je mnoho, zkusím jednu nudnou, která se nabízí.
Uvažujme zobrazení $T\colon S \mapsto L$ dané předpisem $T(n) = n + 1$.
Je to dobrá definice? Asi všichni ví, že přičtením jedničky se změní parita. Kdyby někdo puntičkařil: Každé $n \in S$ se dá zapsat jako $2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak $T(n) = 2k+1$, což je liché celé číslo. Potvrzeno, že $T\colon S \mapsto L$.
Je prosté: Nechť $m, n \in S$ splňují $T(n) = T(m)$. Pak $n + 1 = m + 1$, tedy $n = m$.
Je na: Je-li dáno $m \in L$, pak je to celé liché číslo, proto je $n = m - 1$ celé sudé číslo neboli $n \in S$. Toto n splňuje $T(n) = n + 1 = (m - 1) + 1 = m$.
Takže T je bijekce z S na L, proto $|S| = |L|$.