Lineární algebrou za lepší svět XII - naposled!
Skalární součin

Skalární součin *Standardní skalární součin (vzpomeňte si na analytickou geometrii), který známe, si můžeme představovat jako*

- *prostě vzorec, kdy se spolu násobí příslušné souřadnice:*
  - *ve 2D:* $$\vec{\mathbf{v}} = (\boxed{\mathbf{a}}; \boxed{\mathbf{b}})$$ $$\vec{\mathbf{w}} = (\boxed{\mathbf{c}}; \boxed{\mathbf{d}})$$ $$< \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{w}} >= \mathbf{ac} + \mathbf{bd}$$
  - *ve 3D:* $$\vec{\mathbf{v}} = (\boxed{\mathbf{a}}; \boxed{\mathbf{b}}; \boxed{\mathbf{c}})$$ $$\vec{\mathbf{w}} = (\boxed{\mathbf{d}}; \boxed{\mathbf{e}}; \boxed{\mathbf{f}})$$ $$< \vec{\mathbf{v}} | \vec{\mathbf{w}} >= \mathbf{ad} + \mathbf{be} + \mathbf{cf}$$
  - *atd.*
- *(lépe) po semestru lineární algebry jako násobení matic:*
$$< \vec{v} \,|\, \vec{w} >= \vec{v}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{w}$$
- *(nejlépe, protože předchozí body fungují jen pro standardní skalární součin; s pomocí **Věty** na **slidu 10** přednášky **10 B**) jako násobení s vloženou maticí, která určuje skalární součin („**metrický tenzor**“; v případě standardního skalárního součinu jde o jednotkovou matici)*
$$< \vec{v} \,|\, \vec{w} >= \vec{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{G} \cdot \vec{w}$$

Poslední způsob je praktický i pro případy, kdy je skalární součin nestandardní.

1. Určete $< \vec{v_i} \,|\, \vec{w_i} >$ pro zadané skalární součiny
   (a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, skalární součin je standardní na $\mathbb{R}^2$ [5]
   (b) $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, skalární součin je standardní na $\mathbb{R}^3$ [3]
   (c) $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, skalární součin je zadán metrickým tenzorem $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ na $\mathbb{R}^2$ [1]

*Jakmile máme skalární součin, umíme určovat velikost (**normu**) vektorů:*

$$\boxed{||\vec{v}|| = \sqrt{< v \,|\, v >}}$$

a jakmile máme normu, můžeme určovat úhel, který vektory svírají

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{<\vec{v} \,|\, \vec{w}>}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||}}$$

2. Určete $||\vec{v_i}||, ||\vec{w_i}||$ a úhly mezi vektory a skalární součiny pro vektory z příkladu 1
   [(a) $||\vec{v_1}|| = \sqrt{10}$, $||\vec{w_1}|| = \sqrt{5}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; (b) $||\vec{v_2}|| = \sqrt{6}$, $||\vec{w_2}|| = \sqrt{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; (c) $||\vec{v_3}|| = \sqrt{5}$, $||\vec{w_3}|| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$]

Výhodou maticového pohledu na skalární součin je například jednoduchost hledání kolmých vektorů:

Příklad. *Najděte vektory kolmé na vektor* $\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vůči standardnímu skalárnímu součinu v* $\mathbb{R}^2$.

Řešení: Hledáme takové vektory $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *aby platilo* $\vec{p}^T \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \vec{q} = 0$ *(**kolmost je definována jako nulovost příslušného skalárního součinu**). To ale po roznásobení odpovídá rovnici* $-x + y = 0$, *jejíž řešení najdeme běžným způsobem (např. pomocí GEM):* span $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *což odpovídá i běžné geometrické představě.*

3. Najděte vůči příslušným skalárním součinům všechny kolmé vektory na vektory z příkladu 1 a pak vektory, které jsou kolmé na oba.

[

1. kolmé na $\vec{v_1}$: span $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, kolmé na $\vec{w_1}$: span $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, kolmé na oba: průnik předchozích dvou podprostorů $= \vec{o}$.
2. kolmé na $\vec{v_2}$: span($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), kolmé na $\vec{w_2}$:span($\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), kolmé na oba: span($\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)
3. kolmé na $\vec{v_3}$: span $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, kolmé na $\vec{w_3}$: span $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, kolmé na oba: $\vec{o}$.

]

Ortogonální a ortonormální množina *Máme-li skalární součin $< - | - >$, pak vektory $\vec{v}, \vec{w}$ jsou na sebe kolmé (**ortogonální**), platí-li $< \vec{v} \,|\, \vec{w} >= 0$. Množina, která obsahuje pouze navzájem kolmé vektory se nazývá **ortogonální**. Platí-li navíc pro každý její vektor $||\vec{v}|| = 1$, říkáme, že je množina **ortonormální**. Platí, že je-li množina ortogonální, je i lineárně nezávislá.*

4. Ověřte, že je množina $M = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, kde $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, ortonormální, a je tedy bází prostoru $\mathbb{R}^3$.

5. Normalizujte vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vůči skalárnímu součinu:

   (a) standardnímu [$\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$]

   (b) zadanému metrickým tenzorem $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$]

   (c) zadanému vzorcem $< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \,|\, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} > = 5x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + y_1y_2$ [$\frac{1}{\sqrt{53}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$]

Souřadnice vůči ortonormální bázi *Je-li báze B v lineárním prostoru L se skalárním součinem ortonormální, určování souřadnic vektorů z L se stává hračkou: namísto řešení soustavy lineárních rovnic stačí spočítat skalární součiny s jednotlivými vektory báze, které pak tvoří jednotlivé souřadnice. Např. vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ by měl vůči ortonormální bázi z Příkladu 4 souřadnice $\begin{pmatrix} < \mathbf{b_1} \,|\, \vec{v} > \\ < \mathbf{b_2} \,|\, \vec{v} > \\ < \mathbf{b_3} \,|\, \vec{v} > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.*

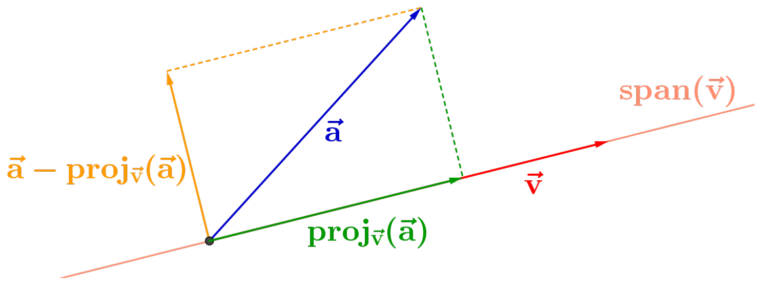
6. Určete souřadnice vektoru $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vůči ortonormální bázi z Příkladu 4. [$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$]

7. (a) Najděte k vektoru z Příkladu 5 a skalárnímu součinu z části 5b kolmý vektor tak, aby spolu tvořily ortonormální bázi B prostoru $\mathbb{R}^2$ (prvním vektorem báze nechť je normalizovaný výchozí vektor). [$\frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$]

   (b) Určete souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vůči bázi B z předchozího bodu. [$\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}$]

Projekce na podprostor

- ***na přímku*** *Pro přímku* $\text{span}(\vec{v})$ *a vektor* $\vec{a}$ *je vektor, který získáme jako* $\mathbf{proj}_{\vec{v}}(\vec{a}) = \frac{<\vec{v}\,|\,\vec{a}>}{||\vec{v}||^2} \cdot \vec{v}$, ***projekcí*** $\vec{a}$ *na ni.*



Z obrázku (i početně) vyplývá, že vektor $\vec{a} - \mathbf{proj}_{\vec{v}}(\vec{a})$ *je na danou přímku kolmý (říkáme mu* ***rejekce****).*

(Také je vidět, že pro vektor velikosti 1 se projekce zjednodušuje na $< \vec{v}\,|\,\vec{a} > \cdot\vec{v}$*)*

- ***na obecný podprostor*** *Pro podprostor* W *s* ***ortogonální*** *bází* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ *je projekce vektoru* $\vec{a}$ *do prostoru* W *součtem projekcí na jednotlivé „souřadicové osy" prostoru* W*, tj.* $\mathbf{proj}_W(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{<\vec{v}_i\,|\,\vec{a}>}{||\vec{v}_i||^2} \cdot \vec{v}_i$ *(všimněte si, jak se vše zjednoduší, je-li báze ortonormální) a příslušná rejekce, která je stále kolmá na* W*, má opět tvar* $\vec{a} - \mathbf{proj}_w(\vec{a})$*.*

8. Určete projekce a příslušné rejekce vektoru $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ na prostor

   (a) span($\mathbf{b}_1$) z Příkladu 4. $[\mathbf{proj}(\vec{a}) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{rej}(\vec{a}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}]$

   (b) span($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$) z Příkladu 4. $[\mathbf{proj}(\vec{a}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix}, \mathbf{rej}(\vec{a}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}]$

9. Přesvědčete se, že rejekce spočítané v předchozím cvičení jsou kolmé na prostory, do kterých projektujeme.

Grammův – Schmidtův ortogonalizační proces *je způsob, kterým ze zadané báze* $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\right\}$ *prostoru získáme ortogonální (ortonormální) bázi* $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$*. Algoritmus je následující:*

$C = \{\}$
for $i \le n$ ***do:***
$\vec{c}_i = \mathbf{rej}_{span(C)}\left(\vec{b}_i\right)$;
$\vec{c}_i = \frac{\vec{c}_i}{||\vec{c}_i||}$ *(nepovinné)*
$C = C \cup \{\vec{c}_i\}$
return C

Jde tedy vlastně o opakování procesu: „nakolmím" vektor vůči doposud získané části ON báze ⇝ *výsledek případně znormalizuji* ⇝ *přidám do vznikající báze; průběžná normalizace vektorů je výhodná z hlediska počítání potřebných projekcí. Zásadní vlastností takto vzniklé báze je, že pro libovolné* $1 \le m \le n$ *se* span *prvních* m *vektorů báze* B *nezmění, tj. platí rovnost* $\text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} = \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ *.*

Příklad. *Položme* $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ *v* $\mathbb{R}^3$ *se standardním skalárním součinem. Převeďme bázi* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ *Grammovým–Schmidtovým procesem na ON bázi.*

Řešení:

- *vektor* $\vec{b}_1$ *stačí znormovat, tedy* $c_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $C = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$

- $\mathbf{rej}_{span(C)}(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - < \vec{c}_1 \mid \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} > \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; *znormalizujeme:* $\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; $C = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}), \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix})$
- $\mathbf{rej}_{span(C)}(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - < \vec{c}_1 \mid \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} > \cdot \vec{c}_1 - < \vec{c}_2 \mid \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} > \cdot \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$; *znormalizujeme:* $\vec{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$; $C = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}), \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix})$, *což je hledaná ON báze*

10. Položme $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.
    (a) Převeďte bázi $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ Grammovým–Schmidtovým procesem na ON bázi. $[(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})]$
    (b) Najděte projekci vektoru $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ na prostor $\operatorname{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. $[\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}]$

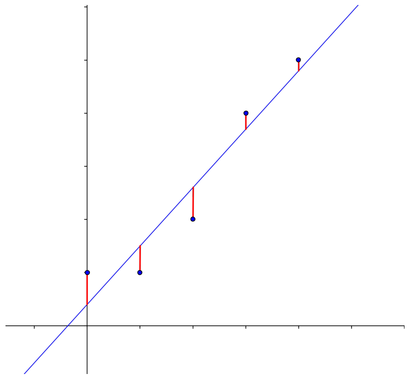
11. (a) Z následujících matic vyberte tu, kterou lze použít jako metrický tenzor skalárního součinu na $\mathbb{R}^3$:
    i. $\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix}6 & -28 & -11\\28 & 135 & -53\\-11 & -53 & 21\end{pmatrix}$ ii. $\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix}6 & 28 & -11\\28 & -135 & -53\\-11 & -53 & 21\end{pmatrix}$ iii. $\mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix}6 & 28 & -11\\28 & 135 & -53\\-11 & -53 & 21\end{pmatrix}$
    a nadále uvažujme skalární součin tímto metrickým tenzorem určený. [Jen $\mathbf{G}_3$ projde charakterizací pozitivně definitních matic z přednášky **9B**.]
    (b) Ověřte, že je vektor $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ vůči tomuto skalárnímu součinu jednotkový a najděte nějakou ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, která jej obsahuje. [např. $(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$]
    (c) Určete souřadnice vektoru $\mathbf{e}_1$ vůči této bázi. [záleží na zvolené bázi; pro předchozí příklad je $\operatorname{coord}_B(\mathbf{e}_1) = \sqrt{5}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$]
    (d) Určete projekci vektoru $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ do prostoru generovaného prvním vektorem báze z bodu 11b. $[\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}]$

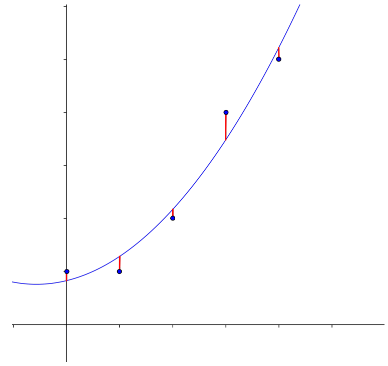
Metoda nejmenších čtverců *je způsob využívající projekcí v prostoru se skalárním součinem, jímž k soustavě lineárních rovnic* $\left(\mathbf{A} \mid \vec{\mathbf{b}}\right)$ *s nezávislými sloupci, která nemá řešení (tedy* $\vec{\mathbf{b}} \notin \operatorname{Im}\mathbf{A}$ *), nalezneme přibližné „řešení“, které je ve smyslu vzdálenosti („o kolik se sekneme“) optimální. Vysvětlení viz* ***Přednáška 11A****, pro praktický výpočet je důležité, že tímto řešením je v případě reálných vektorových prostorů řešení soustavy* $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T\vec{\mathbf{b}}\right)$.

12. Najděte přímku $y = kx + q$ tak, aby v součtu co nejblíže míjela body $[0;1]$, $[1;1]$, $[2;2]$, $[3;4]$, $[4;5]$. Určete poté, jaké chyby se touto přímkou v součtu dopouštíme. [$y = \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}$, celková chyba: norma rozdílového vektoru (tj. odmocnina součtu čtverců) $\sqrt{1{,}1}$]

13. Stejnými body jako výše proložte co nejpřesněji kvadratický polynom $y = ax^2 + bx + c$. Určete opět, jaké chyby se dopouštíme. [$y = \frac{3}{14}x^2 + \frac{17}{70}x + \frac{29}{35}$, chyba $\sqrt{\frac{16}{35}}$;

pro porovnání situace:





]