13.1. CAFOOREK

a) interval $[a,b]$ konvexní? <u>ANO</u>

$x,y \in [a,b]$, $0 \le \alpha \le 1$ $\to$ $(1-\alpha)x + \alpha y \overset{?}{\in} [a,b]$ ✓

protože $\underbrace{(1-\alpha)a + \alpha a}_{a} \in [a,b]$ a $\underbrace{(1-\alpha)b + \alpha b}_{b} \in [a,b]$, takže pro čísla $x,y \in [a,b]$ platí $(1-\alpha)x + \alpha y \in [a,b]$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ konvexní? <u>NE</u>

M″ $u,v \in M$, $0 \le \alpha \le 1$ $\to$ $(1-\alpha)\binom{x_1}{y_1} + \alpha\binom{x_2}{y_2} \overset{?}{\in} M$

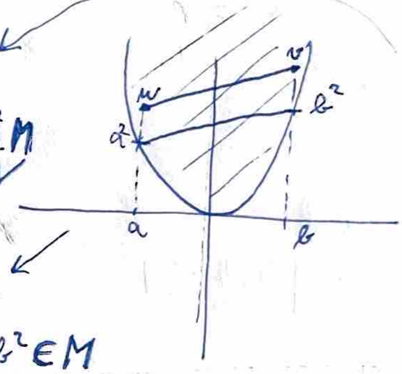
$(1-\alpha)\binom{x_1}{x_1^2} + \alpha\binom{x_2}{x_2^2} \overset{?}{\in} M$ ×

protipříklad: $\alpha = 0{,}5$ $u = (1,1)$, $v = (-1,1)$

$(1-0{,}5)\underset{\in M}{\binom{1}{1}} + 0{,}5\underset{\in M}{\binom{-1}{1}} = \binom{0}{1} \notin M$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge x^2\}$ konvexní? <u>ANO</u>

M″ $u,v \in M$, $0 \le \alpha \le 1$ $\quad \underbrace{(1-\alpha)u + \alpha v}$ $\overset{?}{\in} M$ ✓



úsečka a^2 b^2 $\in M$ a úsečka uv $\in M$

$u \ge a^2$
$v \ge b^2$

$\ge (1-\alpha)a^2 + \alpha b^2 \in M$

d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ Cx = d\}$ konvexní? <u>ANO</u>

M″ $x,y \in M$ $\quad Ax \le b$, $Cx = d$
$Ay \le b$, $Cy = d$
$0 \le \alpha \le 1$

$z = (1-\alpha)x + \alpha y \overset{?}{\in} M$

$\Rightarrow Az \overset{?}{\le} b$ a $Cz \overset{?}{=} d$ ✓

$A((1-\alpha)x + \alpha y) = (1-\alpha)\underset{\le b}{Ax} + \alpha \underset{\le b}{Ay} \le (1-\alpha)b + \alpha b = b$

$C((1-\alpha)x + \alpha y) = (1-\alpha)\underset{= d}{Cx} + \alpha \underset{= d}{Cy} = (1-\alpha)d + \alpha d = d$

g) $\mathbb{Z}$ (množina celých čísel) konvexní? <u>NE</u>

$x,y \in \mathbb{Z}$, $0 \le \alpha \le 1$

např. $x = 1$, $y = 2$, $\alpha = 0{,}5$

$(1-0{,}5)\cdot 1 + 0{,}5 \cdot 2 = 1{,}5 \notin \mathbb{Z}$

CAFOUREK

13.2 a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ konvexní ? ANO

$x_1, \dots, x_n \geq 0$ a $x_1 + \dots + x_n = 1$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ a $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

x_i jsou vrcholy mnohostěnu, lin. kombinace jsou opět elementy tohoto mnohostěnu

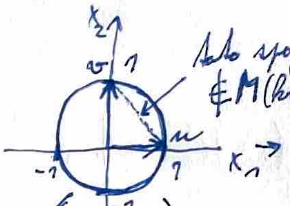
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{=1} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j}_{=1} = 1$$

---

b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ konvexní ? NE

$M =$

$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ → např. pro $\mathbb{R}^2$ $x_1^2 + x_2^2 = 1$



tato spojnice $\notin M$ (kružnice)

$u = (1,0) \in M$

$0 \leq \alpha \leq 1$ $v = (0,1) \in M$

$(1-\alpha) u + \alpha v \notin M$

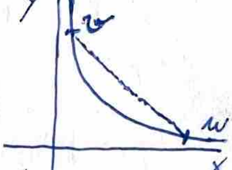
pro $\mathbb{R}^2$ je konvexní obal kruh

konvexní obal je $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$

---

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy = 1\} = M$

konvexní ? NE



$u, v \in M$

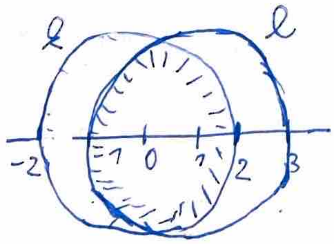
$0 \leq \alpha \leq 1$ $(1-\alpha) u + \alpha v \notin M$

konvexní obal je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \cancel{y > 0}, xy \geq 1\}$

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 2\}$

konvexní ? ANO

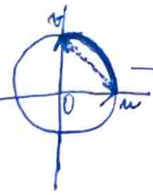
Tím, že množina je průnikem dvou kruhů, což jsou konvexní množiny, tak je i ona konvexní.



g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\} = M$

konvexní ? NE

stejný protipříklad jako u b)



$u = (1,0)$, $v = (0,1)$
$\in M$ $\in M$

$0 \leq \alpha \leq 1$ $(1-\alpha) u + \alpha v \notin M$

krajní spojnice je právě mezi body u a v

konvexní obal je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 1 - x\}$

(konv. obal není čtvrtkruh, protože v původní množině máme jen body na čtvrtkružnici)

13.2. CAFOUREK

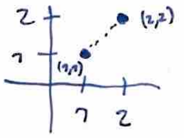
h) $\{-1,0,1\}$ konvexní? **NE**

V množině jsou jen body $\in\mathbb{R}$, takže spojnice mezi nimi logicky nejsou v množině

konvexní obal je interval $\langle -1; 1\rangle$

i) $\{(1,1),(2,2)\}$ konvexní? **NE**

V množině jsou pouze body $\in\mathbb{R}^2$, takže opět spojnice není v množině

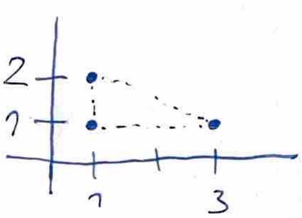


konvexní obal je

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2,\ \cancel{1\le y\le 2},\ y=x\}$$

j) $\{(1,1),(1,2),(3,1)\}$ konvexní? **NE**

Opět ze stejného důvodu jako u h) nebo i)



konvexní obal je

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 1,\ y\ge 1,\ \underbrace{y\le 2{,}5-0{,}5x}_{x+2y\le 5}\}$$

13.7. a) $M=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x^TCx\le 1\}$ C je poz. def.

M je konvexní mnohostěn? Díky C poz. def. je to konvexní množina

konv. mnohostěn je pouze pro $n=1$. Je to úsečka

vyjádřená jako $x\cdot c\cdot x\le 1$

$cx^2\le 1$

$-\frac{1}{\sqrt{c}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{c}}$

---

b) $\{\alpha v \mid \alpha\in\mathbb{R}\},\ v\in\mathbb{R}^n$

přímka procházející počátkem ve směru vektoru v.

je to tedy konvexní mnohostěn.

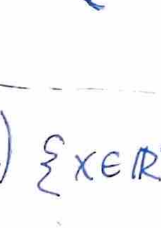
$$\{\alpha v \mid \alpha\in\mathbb{R},\ v\in\mathbb{R}^n,\ Av=0\}=\operatorname{span}\{v\}=\operatorname{null}A$$

$A^{(n-1)\times n}$

$\to a_i^Tv=0$ pro $i=1,\dots,n-1$

---

d) $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|_2\le\|x-b\|_2\}$, kde a, b jsou dány



$\|x-a\|=\|x-b\| \Rightarrow (a-b)^Tx=c \qquad c=(a-b)^T\frac{(a+b)}{2}=\frac{(\|a\|^2-\|b\|^2)}{2}$

$\Rightarrow (a-b)^Tx\ge\frac{(\|a\|^2-\|b\|^2)}{2}$

$\Rightarrow$ konvexní mnohostěn