Lineární algebrou za zkrocení inflace III:
lineární kombinace, lineární obal, báze

1. Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ (případně si vzpomeňte, jestli jste je už někdy neviděli). Budou se hodit!

   (a) $\begin{cases} 2x+3y &= 0 \\ -4x-6y &= 0 \end{cases}$ $[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ 2t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}]$

   (b) $\begin{cases} 2x+y+3z &= 6 \\ x+z &= 2 \\ 5x+2y+7z &= 14 \end{cases}$ $[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}]$

   (c) $\begin{cases} 2x+y+3z &= 6 \\ x+z &= 2 \\ 5x+2y+7z &= 13 \end{cases}$ $[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \emptyset]$

Označme jako $\mathcal{L}$ *lineární prostor* $\mathbb{R}^3$ *nad* $\mathbb{R}$ *a v něm položme* $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ *a* $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$.

2. Které z vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ leží ve $\operatorname{span}(M) \subseteq \mathcal{L}$? [Jen $\vec{v}_1$. Jak to souvisí se soustavou 1.b), resp. 1.c)?]

3. Ty z vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, které se ve $\operatorname{span}(M)$ nacházejí, zapište jako lineární kombinaci vektorů z množiny M. [Např. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Je to jediná možnost?]

4. (a) Zapište řešení soustavy (a) z příkladu 1) ve formě $\operatorname{span}(\check{T})$ pro vhodnou množinu $\check{T}$. [$\check{T} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$]

   (b) Která řešení ostatních soustav z příkladu 1) lze také zapsat ve formě $\operatorname{span}(\check{R})$ pro vhodné množiny $\check{R}$? [Žádná, protože nejde o lineární prostory (např. v nich chybí nulový vektor).]

5. Najděte dva nenulové vektory v množině $\operatorname{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$. Označme je $\vec{w}_1$ a $\vec{w}_2$. [Libovolné jejich lineární kombinace, např. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$]

Položme dále $N = \left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

6. Které z množin

   (a) N
   (b) M
   (c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
   (d) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$
   (e) $\{x, x^2 - x, 1 + x^2, 2\}$ v $\mathbb{Q}[x]$ jako lineárním prostoru nad $\mathbb{Q}$

   jsou nad příslušnými tělesy lineárně nezávislé? [Množiny v a), c) určitě. Lineární nezávislost množiny v d) záleží na konkrétní volbě vektorů $\vec{w}_i$.]

7. Z těch množin z předchozího cvičení, které jsou lineárně závislé, vytvořte odebráním vhodných vektorů lineárně nezávislé množiny. [Nejjednodušší způsob je v každé množině nechat jen jeden nebo žádný prvek. Zvládnete to ale udělat tak, abyste zachovali *span* příslušné množiny?]

Určitě jste si všimli, jak soustavy 1.b a 1.c souvisejí s otázkami 2. a 3. Připomeňte si z přednášky 3.A, že „báze lineárního prostoru“ je nějaká jej generující množina, která je zároveň lineárně nezávislá.

8. (a) Co lze na základě výsledku v 1.c říci ohledně toho, zda je množina M generující množinou pro prostor $\mathcal{L}$? [M negeneruje $\mathcal{L}$.]
   (b) Proč není M bází prostoru $\operatorname{span}(M)$? [Protože je lineárně závislá.]
   (c) Lze do M přidat nějaký vektor tak, aby se stala bází prostoru $\mathcal{L}$? [Ne.]

9. Existuje pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ řešení soustavy $\begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ x+z &= c \end{cases}$? Jak tato soustava a odpověď na tuto otázku souvisejí s problémem, zda množina $P = \{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \}$ generuje $\mathcal{L}$? [$x = \frac{a-b+c}{2}; y = \frac{a+b-c}{2} z = \frac{-a+b+c}{2}$, P proto generuje $\mathcal{L}$.]

10. Jsou množiny N a P bázemi prostoru $\mathcal{L}$? [Ano.]

11. Je seznam $B = (\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix})$ bází prostoru $\mathcal{L}$? Proč? [Ano. Jde o lineárně nezávislý seznam, který generuje celý $\mathcal{L}$.]

12. (Trocha nácviku k důkazům) Dokažte, že je-li $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ lineárně závislý seznam nenulových vektorů, pak lze některý z vektorů $\vec{v}_i$ napsat jako lineární kombinaci zbylých dvou.