Lineární algebrou za energetické úspory VI:
skládání lineárních zobrazení, transformace souřadnic

Lineární prostor lineárních zobrazení *Z přednášky **4A** víme, že pro libovolné dva lineární prostory L_1, L_2 nad stejným tělesem je množina $\mathrm{Lin}\,(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ lineárním prostorem (jde o množinu všech matic správných rozměrů (jakých?) nad tím samým tělesem s operacemi sčítání matic a jejich násobení skalárem). **Příklad 7.1.2** na straně 92 sbírky doc. Velebila pak nabízí hezkou bázi tohoto prostoru (**Příklad 7.3.1** taktéž pak také ilustruje chování tohoto typu prostorů).*

1. Ukažte, že množina $B = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$ je bází reálného prostoru $\mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right)$. (Že je lineárně nezávislá, to vidíme i se zavřenýma očima. Důležité je rozmyslet si, že jde opravdu o generující množinu prostoru $\mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right)$.)

Pokud si člověk rozmyslí předchozí bod, snadno uvidí, že množina $C = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$ je bází prostoru $\mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)$.

2. Definujme lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) \to \mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)$ zadáním na bázi B takto

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Určete matici zobrazení $\mathbf{f}$ vůči bázím B a C. $[\,[f]_B^C = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}]$

3. Uvažujme zobrazení $\mathbf{g}$ mezi reálnými prostory $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ a $\mathbb{R}^2$:

$$x^2 \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, x \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, 1 \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 2x^2 + 3x \mapsto \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}.$$

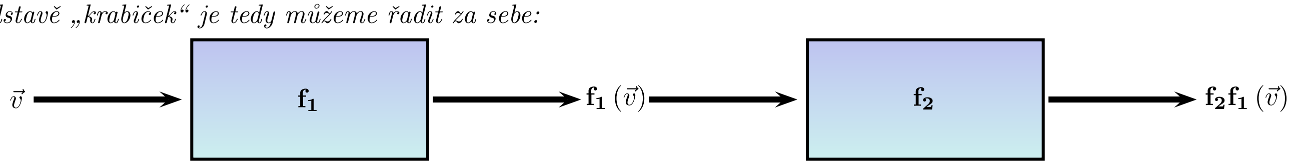
Zkontrolujte, že takto splňuje podmínku linearity a určete jeho matici vzhledem k bázím $D = (x^2, x, 1)$ a $E = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$. $[[\mathbf{g}]_D^E = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\ ]$

4. Určete jádra, obrazy, defekty a hodnosti zobrazení $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$. $[\ker \mathbf{f} = \vec{o}, \operatorname{def} \mathbf{f} = 0, \operatorname{im}\mathbf{f} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}), \operatorname{rank} \mathbf{f} = 2;$ $\ker \mathbf{g} = \operatorname{span}(1), \operatorname{def} \mathbf{g} = 1, \operatorname{im} \mathbf{g} = \mathbb{R}^2, \operatorname{rank} \mathbf{g} = 2\ ]$

*Důležitým faktem (**Poznámka** na str. **13** prezentace k přednášce **5A**) je, že všechny prostory stejné dimenze nad daným tělesem (v našem případě $\mathbb{R}$) jsou izomorfní, tedy z hlediska algebry stejné. Dále tedy budeme matice $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ z cvičení 2. a 3. považovat za matice zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, resp. $\mathbf{g} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ vzhledem ke kanonickým bázím.*

5. Určete čísla n, m, p, q z předchozího odstavce. $[n = 2, m = 3, p = 3, q = 2]$

Zobrazení mezi jednotlivými lineárními prostory můžeme samozřejmě skládat (pokud má toto skládání smysl), v představě „krabiček“ je tedy můžeme řadit za sebe:



Přičemž je především potřeba, aby $\mathbf{f_1}$ *vedlo do stejného prostoru, ze kterého* $\mathbf{f_2}$ *vychází. Dále víme, že skládání zobrazení odpovídá násobení matic: matice jsou ale typicky zadané vůči nějakým bázím, proto je potřeba, aby si „výstupní báze“ z* $\mathbf{f_1}$ *a „vstupní báze“ do* $\mathbf{f_2}$ *odpovídaly. Obrázkově:*

$$\vec{v} \xrightarrow{\text{v bázi } M_1} \boxed{[\mathbf{f_1}]_{M_1}^{M_2}} \xrightarrow{\text{v bázi } M_2} \mathbf{f_1}(\vec{v}) \xrightarrow{\text{v bázi } M_2} \boxed{[\mathbf{f_2}]_{M_2}^{M_3}} \xrightarrow{\text{v bázi } M_3} \mathbf{f_2 f_1}(\vec{v})$$

6. V případě zobrazení $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ je možné tato zobrazení složit v obou pořadích a dostat tak dvě různá zobrazení: $\mathbf{fg} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{gf} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Určete matice těchto zobrazení vůči kanonickým bázím.

$$[[\mathbf{fg}]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, [\mathbf{gf}]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]$$

7. Určete obraz vektoru (vůči příslušné kanonické bázi), který má vůči kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ souřadnice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, při zobrazení

   (a) $\mathbf{f}$ $\quad [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$

   (b) $\mathbf{gf}$ $\quad [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$

   (c) $\mathbf{gfgf}$ $\quad [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; nebylo potřeba počítat]

*(**Definice** a **Tvrzení** z přednášky **5A**) Zobrazení mezi konečnědimensionálními prostory* $\mathbb{F} : L_1 \to L_2$ *je*

- ***monomorfismus**, pokud platí* $def(\mathbf{F}) = 0$, *což je ekvivalentní* $\ker(\mathbf{F}) = \vec{o}$
- ***epimorfismus**, pokud je* $Im(F) = L_2$, *což je ekvivalentní* $\dim(Im(\mathbf{F})) = \dim(L_2)$
- ***izomorfismus**, pokud je monomorfismem a epimorfismem zároveň.*

8. Určete u každého ze zobrazení $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{fg}, \mathbf{gf}$, zda se jedná o mono-/epi-/izomorfismus.

   [$\mathbf{f}$ je pouze mono, $\mathbf{g}$ je pouze epi; $\mathbf{fg}$ není (bez počítání; proč?) ani jedno; $\mathbf{gf}$ není ani jedno (tady je potřeba počítat)]

9. U následujících reálných matic, které uvažujeme jako lineární zobrazení z $\mathbb{R}^{\text{počet sloupců}}$ do $\mathbb{R}^{\text{počet řádků}}$, vždy určete, zda pro nějaké hodnoty na místech vyznačených $\bullet$ může jít o mono-/epi-/izomorfismus. Pokud ano, nějaké odpovídající hodnoty najděte.

   Také určete, které z typů zobrazení daná matice rozhodně být nemůže.

   (Hodně může pomoci **Tvrzení** z přednášky **5A**, **slide 7**.)

   (a) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$

   [nemůže být mono; může být epi: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

   (b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$

   [nemůže být epi; může být mono: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]

   (c) $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ [může být buď izo, nebo ani jedno: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & cokoli \end{pmatrix}$]

   (d) $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & \bullet \\ 2 & \bullet \end{pmatrix}$ [může být buď izo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, nebo ani jedno: $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t \end{pmatrix}$]

   (e) $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \bullet \end{pmatrix}$ [nemůže být mono; může být epi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & ne\,1 \end{pmatrix}$]

(f) $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \bullet \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ [nemůže být epi; může být mono: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & ne\,4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$]

Matice transformace souřadnic *Již víme, že když počítáme s maticí nějakého lineárního zobrazení, je důležité vědět, v jakých bázích daná matice funguje - do „krabičky" lze vkládat jen ve správné bázi:*

$$\vec{v} \xrightarrow{\text{v bázi } M_1} \boxed{[\mathbf{f}]_{M_1}^{M_2}} \xrightarrow{\text{v bázi } M_2} \mathbf{f}(\vec{v})$$

*Co když ale mám vektor, jehož obraz chci spočítat, zadaný v jiné bázi, případně chci obraz znát v jiné bázi? Nezbývá než souřadnice přepočítat do správné báze (viz předchozí úkol). Podle přednášky **3B, slide 7** je ale výpočet souřadnic lineární zobrazení, tedy musí mít svou matici (**matici transformace souřadnic**). Tu zkonstruuji běžným způsobem (první sloupec matice je obraz /=souřadnice v nové bázi/ prvního vektoru původní báze atd.).*

$$\vec{v} \xrightarrow{\text{v bázi } B} \boxed{[\mathbf{T}]_{B \mapsto C}} \xrightarrow{\text{v bázi } C} \vec{v}$$

10. Uvažujme uspořádanou bázi $B = (\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ prostoru $\mathbb{R}^2$. Určete matici transformace souřadnic z K_2 do B (tj. $T_{K_2 \mapsto B}$). [$T_{K_2 \mapsto B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]

11. Určete pomocí matice z předchozího cvičení $\operatorname{coord}_B(\vec{v})$ pro vektor $\vec{v}$, který má vůči K_2 souřadnice $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
    [$\operatorname{coord}_B(\vec{v}) = T_{K_2 \mapsto B} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$]

V příkladu 6 jsme našli matici zobrazení **gf** *vůči kanonické bázi, tj. funguje takto:*

$$\vec{v} \xrightarrow{\text{v bázi } K_2} \boxed{[\mathbf{gf}]_{K_2}^{K_2}} \xrightarrow{\text{v bázi } K_2} \mathbf{gf}(\vec{v})$$

Co když ale například chceme výsledek znát v bázi B? Stačí jen za krabičku (= zobrazení, matici) přidat krabičku, která přepočítává souřadnice:

$$\vec{v} \xrightarrow{\text{v bázi } K_2} \boxed{[\mathbf{gf}]_{K_2}^{K_2}} \xrightarrow{\text{v bázi } K_2} \mathbf{gf}(\vec{v}) \xrightarrow{\text{v bázi } K_2} \boxed{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} \xrightarrow{\text{v bázi } B} \mathbf{gf}(\vec{v})$$

12. Určete matice zobrazení **gf** vůči
    (a) bázím K_2 a B (tedy vkládám v K_2 a výsledek dostávám v B) [$[\mathbf{gf}]_{K_2}^{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]
    (b) bázi B (tedy vkládám v B a výsledek dostávám v B)
    [$[\mathbf{gf}]_{B}^{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$]

13. Určete vůči bázi B souřadnice obrazu vektoru $\vec{v}$ při zobrazení **gf**, má-li vektor $\vec{v}$ v bázi B souřadnice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Porovnejte s příkladem 7.) [$\operatorname{coord}_B(\mathbf{gf}(\vec{v})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$]

A jeden důkazeček na konec:

14. Dokažte bez použití pojmů *dimenze* nebo *rank*, že lineární zobrazení $\ell : L_1 \to L_2$, kde L_1 je konečné dimenze, je epimorfismus právě tehdy, pokud obrazem generující množiny v L_1 je generující množina v L_2.