CAFOUREK

2.1. a) $AX + B = A^2X$

$$A^2X - AX = B$$

$$(A^2 - A)X = B$$

$$\underline{\underline{X = (A^2 - A)^{-1}B}}$$

$$X = (A\cdot(A-I))^{-1}B = (A-I)^{-1}A^{-1}B$$

b) $X - A = XB$

$$X - XB = A$$

$$X(I - B) = A$$

$$\underline{\underline{X = A(I-B)^{-1}}}$$

c) $2X - AX + 2A = 0$

$$AX - 2X = 2A \longrightarrow (A - 2I)X = 2A$$

$$\cancel{X(A-2I) = 2A}$$

$$X = (A-2I)^{-1}2A = \underline{2(A-2I)^{-1}A}$$

$$X = 2\cdot 2^{-1}\left(\tfrac{1}{2}A - I\right)^{-1}A = \left(\tfrac{1}{2}A - I\right)^{-1}A$$

2.3 $$Ax + (y^TB)^T = \alpha 1$$

$$Ay + c = 0$$

$$\boxed{Ax + B^Ty - \alpha} = \boxed{0}$$

$$\boxed{0 + Ay + 0} = \boxed{-c} \longrightarrow q = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix}$$

$$P\cdot w \Rightarrow P = \begin{bmatrix} A & B^T & -1 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Pw = q$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} A & B^T & -1 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix}}}$$

CAFOUREK

3.1. a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = 0\}$ pro dané $a \in \mathbb{R}^n$

Je to lineární podprostor. Množina je uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

Pro $a = 0$ je dimenze rovna n. Vektor x není nijak omezen.

Pro $a \neq 0$ je dimenze rovna $n-1$. Vektor x je omezen, vektor a určuje už jeden ze směrů v podprostoru.

b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ pro dané $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

Je to afinní podprostor, konstanta b může být nenulová. Také není množina uzavřená na násobení skalárem.

Pro $a = 0$ a $b = 0$ je dimenze rovna n.

Pro $a \neq 0$ je dimenze rovna $n-1$.

Pro $a = 0$ a $b \neq 0$ je množina prázdná.

c) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T x = 1\}$

Toto není lineární ani afinní podprostor. Množina není uzavřená na sčítání ani násobení skalárem.

3.2. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0\}$ je lineární podprostor.

V bázi jsou tři vektory. Vektory x_1 a x_3 jsou navzájem závislé. Např. $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,0,1)$

CAFOUREK

3.7. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = (x+y, 2x-1, x-y) \longrightarrow f(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} A\mathbf{x}$

vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

1) lineární zobrazení: Ne ✗

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \cancel{0} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq f(x,y)$$

$\quad\ \ \|$
$\quad\ \ A$

matice neexistuje pro lineární zobrazení. Problém dělá člen $2x-1$. Konstanta -1 v $2x-1$ nemůže být u lin. zobrazení.

2) afinní zobrazení: Ano ✓

vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad f(x,y) \longrightarrow f(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} A\mathbf{x} + b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b} = (x+y, 2x-1, x-y)$$

Zde nám b umožnilo doplnit -1 do členu $2x-1$.

3.8.
$$x + 2y + z = 1$$
$$-x + y + 2z = 2$$

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

x_0: $\underline{x = 1 - 2y - z}$

$-1 + 2y + z + y + 2z = 2$

$3y + 3z = 3 \quad /:3$

$y + z = 1$

$\underline{y = 1 - z}$

$\Rightarrow x = 1 - 2 + 2z - z = z - 1$

$z = 0 \Rightarrow \underline{x_0 = (-1, 1, 0)}$

2) homogenní soustava

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x = -2y - z$

$2y + z + y + 2z = 0$

$3y + 3z = 0$

$y + z = 0$

$\underline{y = -z}$

$\Rightarrow x = z \quad \boxed{z = t}, t \in \mathbb{R}$

$(x, y, z) = t(1; -1; 1)$

báze podprostoru X je span$\{(1,-1,1)\}$

$$\underline{(x, y, z) = \underbrace{(-1, 1, 0)}_{x_0} + t\underbrace{(1; -1; 1)}_{X}, \ t \in \mathbb{R}}$$

CAFOOREK

3.10. a)

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ x_2 - x_3 + 2x_1)$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$a_1 = (1,2)$, $a_2 = (-1,1)$, $a_3 = (0,-1)$

$a_1 = -a_2 - 3a_3$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ rng $A = 2$

$\Rightarrow$ báze rng A např. $\{(1,0), (0,1)\}$

null $A \Rightarrow Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = x_2$

$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$3x_1 - x_3 = 0$

$x_3 = 3x_1$

$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,1,3)$

$\Rightarrow$ báze nulového prostoru (null A) je $\{(1,1,3)\}$