DMA Domácí úkol č. 13a

Tento úkol vypracujte po přednášce jako přípravu za zkoušku, na druhé straně je řešení. Pokud vám něco není jasné, zeptejte se na cvičení nebo na konzultaci.

1. Napište princip inkluze a exkluze pro množiny A, B, C, D nejprve obecně, pak pro případ $B \cap C = \emptyset$ a $A \cap B = B$.

2. Vyřešte následující úlohy na Dirichletův šuplíkový princip.
a) Existuje šest druhů mincí. Kolik mincí potřebujete mít (jsou vybrány náhodně), aby byla jistota, že alespoň jedna mince se vyskytne alespoň desetkrát?
b) Do davu čítajícího sedm lidí rozhazuje reklamní agent míčky. Kdo jich nasbírá nejvíc, vyhraje cenu (remízy se počítají). Když jich rozhodí čtyřicet, jaký je nejmenší možný počet míčků vítěze?
c) Do předmětu DMA se přihlásilo 170 lidí. Dokažte, že existuje 15 z nich, kteří mají v datu narození stejný měsíc.

Řešení:

1. Obecný princip:

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| \\
& -|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\
& +|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.
\end{aligned}
$$

Speciální verze: Pokud $B \cap C = \emptyset$, pak také $A \cap B \cap C = \emptyset$, $B \cap C \cap D = \emptyset$ a $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$.

Pokud $A \cap B = B$, pak také $A \cap B \cap C = B \cap C = \emptyset$ (viz předtím), $A \cap B \cap D = B \cap D$ a $A \cap B \cap C \cap D = B \cap C \cap D = \emptyset$.

Proto

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| \\
& -|B| - |A \cap C| - |A \cap D| - 0 - |B \cap D| - |C \cap D| \\
& +0 + |B \cap D| + |A \cap C \cap D| + 0 - 0. \\
= {} & |A| + |C| + |D| - |A \cap C| - |A \cap D| - |C \cap D| + |A \cap C \cap D|.
\end{aligned}
$$

2.

a) Nejméně příznivé je, když se mince rozdělují rovnoměrně, protože pak počet kopií jednoho druhu roste pomalu. Ještě 6×9 mincí lze rozdělit tak, aby žádná nebyla desetkrát. Odpověď je proto $6 \cdot 9 + 1 = 55$.

b) Podle Dirichletova šuplíkového principu je to $\lceil \frac{40}{7} \rceil = \lceil 5.714... \rceil = 6$.

Selským rozumem: Kdyby měl vítěz pět, tak nikdo nemůže mít víc, tedy celkový počet míčků nepřevýší $7 \cdot 5 = 35$, ale je jich víc.

c) Rozdělíme lidi do krabiček podle měsíce narození. Pokud by tvrzení nebylo správné, tak je v každé krabičce nejvýše 14 lidí, tedy nejvýše $12 \cdot 14 = 168$ lidí, to je moc málo. Jinak podle Dirichletova principu je nejmenší možný počet ve vítězné krabičce $\lceil \frac{170}{12} \rceil = \lceil 14.166... \rceil = 15$.