CAFOUREK

10.1. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stac. bod $(2,1,5)$

$f''(2,1,5)$ má vl. čísla $\lambda$ a) $\{2,3,-1\}$

↳ na diag. jsou kladná i záporná čísla → Hessián je indefinitní ⇒ v bodě je sedlo

b) $\{2,3,0\}$

→ Hessián je poz. semidefinitní

→ nelze rozhodnout, zda je v bodě extrém, nebo ne

c) $\{2,1,1\}$

→ Hessián je poz. def.

→ v bodě je minimum.

10.2. d) $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

$f'(x,y) = [3-3x^2-3y^2 ; -6xy] = 0$

$3-3x^2-3y^2=0$

$-6xy=0 \to x=0$, $\to y=0$

pokud $x=0$:

$y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

$x=0$ a $y=0$: $3 \neq 0$ ✗

pokud $y=0$:

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

stac. body: $(0,-1), (0,1), (-1,0), (1,0)$

$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$

$f''(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \to$ INDEF → sedlo

$f''(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \to$ INDEF → sedlo

$f''(-1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \to$ PD → min.

$f''(1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \to$ ND → max.

e) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

$f'(x,y) = [6y^2-6x^2 ; 12xy-12y^3] = 0$

$6y^2-6x^2=0$

$12xy-12y^3=0$

1) $x=0$ a $y=0$: ✓

2) $6(y-x)(y+x)=0$

↳ $y=\pm x$

$x=y$:

$12y^2-12y^3 = 12y^2(1-y)$ ✓

$y=0$ ↳ $x=0$; $y=1$ ↳ $x=1$

$x=-y$:

$-12y^2-12y^3 = -12y^2(1+y)$ ✓

$y=0$ ↳ $x=0$; $y=-1$ ↳ $x=1$

stac. body: $(0,0), (1,1), (1,-1)$

$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x-36y^2 \end{bmatrix}$

$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x=0$: $f(0,y) = -3y^4$

$y=0$: $f(x,0) = -2x^3$

↳ sedlo

$f''(1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix}$

↳ ND → max

$f''(1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -24 \end{bmatrix}$

↳ ND → max

10.3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $f(x) = a^T x - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$, a je daný vektor CAFOUREK

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - x_i \ln x_i \Rightarrow$ stačí řešit extrém v $\overset{g(x)=}{a_i x_i - x_i \ln x_i}$ pro nějaké $x_i$

$\Rightarrow g'(x_i) = a_i - \ln x_i - 1 = 0$

$\ln x_i = a_i - 1$

$x_i = e^{a_i - 1} > 0$

$g''(x_i) = -\frac{1}{x_i} < 0 \rightarrow$ v $x_i$ je maximum $\Rightarrow$ Takže v $x = (e^{a_1 - 1}, \dots, e^{a_n - 1})$ je max

10.5. $\sin x = \frac{1}{2} x$ x je v radiánech

$f(x) = \sin x - \frac{1}{2} x$

Newtonova iter. metoda: $x = a - (f'(a))^{-1} f(a) = a - \frac{\sin a - \frac{a}{2}}{\cos a - \frac{1}{2}}$

$a = 2$ : 1. iter: $x \approx 1{,}901$
2. iter: $x \approx 1{,}89551$
3. iter: $x \approx 1{,}89549$
4. iter: $x \approx \underline{1{,}89549}$

10.6. $f(x,y) = x^2 - y + \sin(y^2 - 2x)$ extrémy Newt. metodou

poč. odhad $(x_0, y_0) = (1,1)$

$f'(x,y) = [2x - 2 \cdot \cos(y^2 - 2x) ; -1 + 2y \cos(y^2 - 2x)]$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(y^2 - 2x) & 4y \sin(y^2 - 2x) \\ 4y \sin(y^2 - 2x) & 2\cos(y^2 - 2x) - 4y^2 \sin(y^2 - 2x) \end{bmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (f''(x_0, y_0))^{-1} (f'(x_0, y_0))^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (f''(1,1))^{-1} (f'(1,1))^T$

1. iter: $x \approx \begin{pmatrix} 0{,}6521 \\ 0{,}7185 \end{pmatrix}$

poté by se iterace opakovaly