Numerik Klausur

- Vorwärts Differenzen, Interpolationspolynom, Darstellung nach Newton
- Interpolationsfehler, Restgliedformel
- Kubische natürliche Splinefunktion
- Bisektionsverfahren
- zusammengesetzte Trapezregel, Fehlerabschätzung
- Simpsonregel
- Newtonverfahren
- Sekantenverfahren
- Konvergenz
- Iteration, Iterationsabbildung, Iterationsfolge
- Bestapproximation im Unterraum
- Hornerschema

Numerik

Rundungsfehler bei der Gleitkommarechnung

$a \neq 0$

$$a = \pm 10^q (.d_1 d_2 d_3 \ldots) \quad , d_1 \neq 0$$

Auf dem Rechner stehen nur t Stellen zur Verfügung.

$$\Rightarrow \quad gl(a) = \pm 10^q (. \delta_1 \ldots \delta_t)$$

Für den Exponenten gelten Grenzen

$$\Rightarrow -N \leq q \leq N$$

$q > N$ Fehlermeldung Überlauf

$q < -N$ Unterlauf, $gl(a) = 0$

i) Streichen $\quad \delta_i = d_i \quad (1 \leq i \leq t)$

ii) Runden $\quad \delta_t = d_t$, falls $d_t < 5$

$\delta_t = [d_t + 0{,}5]$ für $d_t > 5$

Hilfsatz

$a \neq 0$, $gl(a)$ die Gleitkommadarst. von a

Dann: $|a - gl(a)| \leq 5 \, |a| \, 10^{-t} \rho$

mit $\rho = 1$ beim Runden, $\rho = 2$ beim Streichen

Exakte Fehlerabschätzungen sind mit der Intervall-arithmetik möglich:

$a \in [a_1, a_2]$, $\quad a_1, a_2 > 0$

$b \in [b_1, b_2]$, $\quad b_1, b_2 > 0$

$$\Rightarrow a \cdot b \in [a_1 b_1, a_2 b_2]$$

Nachteil: Man erkauft sich mit den sicheren Grenzen hier i. a. eine zu pessimistische Aussage.

Bsp. 20.000 4 stellige gerundete Zahlen

$$0{,}1 < |a_i| < 1$$

Diese gerundeten Zahlen haben also einen Fehler $|\Delta a_i| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow$ Für die Summe dieser Zahl

$$|\Delta S| \leq 20000 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}$$
$$= 1$$

Stochastik

Mit einer stat. Behandlung des Problems In 99 % aller Fälle ist der Fehler $< 0{,}5 \cdot 10^{-2}$

Bei der Aufstellung von Algorithmen sollte numerisches Auslöschen vermieden werden.

$$10^{9}(.123456789) - 10^{9}(.12345678)$$

$$\left[= 10^{9}(.00\ldots011)\right]$$

$$= 10^{9-6}(.11\underbrace{0\ldots0}_{\text{Diese Stellen enthalten keine Information}})$$

Def.

a) Ein mathematisches Problem heißt <u>gut konditioniert</u> wenn eine geringe rel. Störung der Eingabedaten nur eine geringe rel. Änderung des Ergebnisses mit sich bringt.

Sonst spricht man von schlecht konditioniert.

b) Gegeben ist ein math. Problem und ein numerisches Verfahren zu seiner Lösung.

Das num. Verfahren heißt gut konditioniert wenn es eine exakte Lösung eines math. ~~...~~ Problems ist, das aus ursprünglichem durch geringe Abweichung hervorgeht. Sonst schlecht konditioniert.

<u>Bsp.</u>

$$\begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{pmatrix}$$

Exakte Lösung : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Durch ein num. Verfahren erhält man

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ ist eine schlechte Näherung

Setzt man $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ in die Gleichung ein und rechnet die rechte Seite aus, dann erkennt man, dass das Ergebnis um weniger als 10^{-8} abweicht. (in den Komponenten)

Es liegt nicht an dem Verfahren, sondern das Problem ist schlecht konditioniert.

b) $p(x) = \prod_{v=1}^{20} (x - v) = x^{20} - 210x^{19} + \dots + 20!$

Die Nullstellen des Polynoms sind $1, 2, \dots, 20$

Bei x^{19} wählen wir den Koeffizienten:

$-210 + 2^{-23}$, alle anderen Koeffizienten bleiben wie bisher.

Obwohl dies eine winzige Änderung ist ergibt sich als eine Nullstelle: $z = 16{,}73 + i \cdot 2{,}81$

Das Problem ist schlecht konditioniert.

§3 Interpolation

Gegeben seien Knoten $x_0 \dots x_n$, $x_i < x_{i+1}$

Interpolationsdaten $y_0 \dots, y_m$

Gesucht ist eine möglichst einfache Funktion

p mit $p(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n)$

Als „einfache Fkt" wollen wir Polynome verwenden

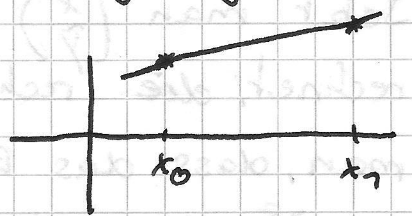
$$P_k(x) = \sum_{l=0}^{k} a_l x^l, \text{ Grad } p_k = k,$$

falls $a_k \neq 0$

Gesucht ein Polynom möglichst geringen Grades

$x_0 \quad x_1$

$y_0 \quad y_1$



$$y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + y_0$$

Polynom 1. Grades bei 2 Werten

Vermutung: Bei $(m+1)$ Knoten $(x_0 < \dots < x_m)$ und Daten $(y_0 \dots y_n)$ könnten ein Polynom vom Grad $\leq m$ sein?!

Wir müssen nachweisen: 1. Existenz

2. Eindeutigkeit

Die Menge der Polynome vom Grad $\leq m$

Π_m ist ein Vektorraum.

$\dim \Pi_m = m+1$ und eine Basis ist:

$$(1, x^1, x^2 \dots x^m)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k$$

Satz 3.1

Gegeben seien die Knoten $x_0 < \dots < x_m$ und die Interpolationsdaten $\mu_0 \dots \mu_m$

Dann folgt: Es gibt genau ein Polynom P von Grad $\leq m$ mit $P(x_i) = y_i$

Beweis konstruktive nach Lagrange

Wir suchen zunächst sog Lagrange-Grundpolynome

$$e_i = \Pi_m$$

$$\text{mit } e_i(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{für } k=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad *$$

$$\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} (x - x_k)$$

$$e_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} (x_i - x_k)$$ erfüllt $*$

Die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms P.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} y_x \cdot e_k(x) \in \Pi_m$$

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{m} y_k e_k(x_i)$$

$$= y_i\, e_i(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq m)$$

Damit ist die Existenz des Polynoms nachgewiesen, bleibt die Eindeutigkeit.

<u>Annahme</u>

$\exists$ zwei Polynome $P, Q \in \Pi_m$ mit $P(x_i) = y_i = Q(x_i) \quad (0 \leq i \leq m)$

$P - Q \in \Pi_m$

$$(P-Q)(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = y_i - y_i = 0$$

d.h. $P-Q$ hat mind. $m+1$ reelle NS

$\Rightarrow$ Fundamentalsatz

$P - Q \equiv 0$, also $P = Q$

Bem. Man hat das Problem auch über ein lineares Gleichungssystem lösen können.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k$$

Interpolationsbed. $P(x_i) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x_i^k = y_i$ $(0 \leq i \leq m)$

$(m+1) \times (m+1)$ Matrix Vandermonde $=$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

det $\mathcal{A} \neq 0$, da x_i - Werte ungleich sind
$x_i \neq x_j$, $i \neq j$

b) Das Lagrange Grundpolynom ist das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom zu:

$$x_0 < x_i < x_m$$
$$0, \dots 0, 1, 0, \dots 0$$

c) Bei der Darstellung des Interpolationspolynoms nach Lagrange ist ein Nachteil folgendes: Bei Zunahme eines Nebenknotens x_{m+1} und eines zusätzlichen Interpolationswertes y_{m+1} müssen alle Rechnungen neu gemacht werden.

d) Knotenpolynom
$$W_m(x) = \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)$$

$$\frac{w_m(x)}{x - x_i} \in \Pi_m \text{ und erfüllt}$$

$$\tilde{\omega}_m(x_\mu) = 0 \quad (\mu \neq i)$$

$$W_n'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} (x_i - x_j)$$

$$l_i(x) = \frac{W_m(x)}{(x - x_i)\, W_m'(x_i)}$$

und $P(x) = \sum_{i=0}^{m} y_i \cdot \frac{W_m(x_i)}{(x - x_i) W_m(x_i)}$

Hinweise

$x_0 \dots x_m \in [a,b]$, $a < b$

$\mathcal{C}[a,b]$ sei der Vektorraum, der auf $[a,b]$ stetige Fkt $f \in \mathcal{C}[a,b]$

Hiervon kennt man nur $y_i = f(x_i)$

Betrachte den Lagrange-Interpolationsoperator

$$L_m \; \mathcal{C}[a,b] \to \Pi_m$$

$$L_m(f) = P_m \text{ mit } P_m(x_i) = f(x_i)$$
$$(0 \leq i \leq m)$$

Satz 3.3

L_m ist eine Projektion von $\mathcal{C}[a,b]$ auf Π_m

Bew.

Zu zeigen: L_m ist linear

$$L_m(L_m(f)) = L_m(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}[a,b]$$

$\Rightarrow$ Eigenschaft der Projektion

Nachzurechnen ist $L_m(f+g) = L_m(f) + L_m(g)$
$\forall f,g \in \mathcal{C}[a,b]$

$L_m(f+g)$ ist das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad $\leq m$ mit $(f+g)(x_i) = H_m(x_i) = L_m(f+g)(x_i$

$$(0 \leq i \leq m)$$

$$L_m(f)(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq m)$$
$$L_m(g)(x_i) = g(x_i)$$
$$L_m(f) + L_m(g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i)$$
$$= f+g(x_i)$$

Eindeutigkeit liefert:

$$L_m(f+g) = L_m(f) + L_m(g)$$

genauso:

$$\alpha L_m(f) = L_m(\alpha f)$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in C[a,b]$$

Die Projektionseigenschaft ist trivial

$L_m\ C[a,b] \ni f \Rightarrow L_m(f) \in \Pi_m$

Was passiert für $f \to \infty$?

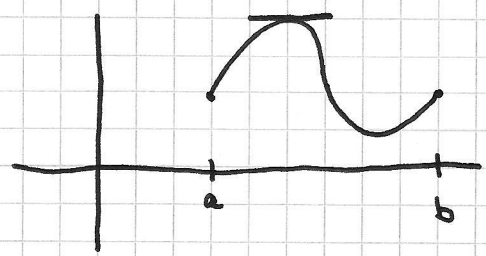
Gilt dann $L_m(f) \Rightarrow f$?

Die gleichmäßige Konvergenz oder Konvergenz der Čelišio - Norm

$$\| L_m f - f \|_{\check{C}} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_m(f)(x)|$$

Fehlerabschätzungen: Wie groß ist die Abweichung zwischen f und dem Interpolationspolynom $L_m(f)$?

Hilfsmittel: Satz von Rolle



f stetig auf $[a,b]$

f muss differenzierbar sein auf $[a,b]$

mit $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\ x_0 \in\ ]a,b[$

$f'(x_0) = 0$

<u>Satz 3.4</u>

f sei $(m+1)$ - stetig differenzierbar auf $[a,b]$

$L_m(f)$ sei das zu f und zu den Knoten $x_i \in [a,b]$

$x_0 \leq \ldots \leq x_m$ gehörende Interpolationspolynom.

Dann exist. zu jedem $x \in [a,b]$

$\exists\, \xi_x \in\,]a,b[$ mit

$$f(x) - L_m(f)(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!}\, \omega_m(x)$$

<u>Beweis</u> Wenn $x \in \{x_0 \dots x_m\}$ ist nichts zu beweisen.

$x \in [a,b]$, $x \neq x_k$ $(0 \le k \le m)$

$\Rightarrow$ $\omega_m(x) \neq 0$

Für festes x betrachte die Konstante K

$$K = \frac{f(x) - L_m(f)(x)}{\omega_m(x)}$$

<u>Hilfsfunktion</u>

$$G\ [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$G(z) = f(z) - L_m(f)(z) - K\,\omega_m(z)$$

f ist $(m+1)$-mal stetig differenzierbar

$$\circledast\quad G^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - K \cdot (m+1)!$$

Numerik Übung   1. Serie

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, wie sich ein rel. Fehler $\frac{\delta x}{x}$ im Argument von f auf das Ergebnis auswirkt.

a) $f:]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := \ln x$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin x$

Wiederholung: Fehlerfortpflanzung

Anfangsfehler $\Rightarrow$ Ergebnisfehler

abs. Fehler $\delta x = \underbrace{x + \delta x}_{\text{Eingabe}} - \underbrace{x}_{\text{wahre Größe}}$ | $f[(x) + (\delta x)] - f(x)$

rel. Fehler $\frac{\delta x}{x}\ (x \neq 0)$ | $\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{f(x)}\ (f(x) \neq 0)$

Relativer Fehler ist wichtiger als absoluter Fehler.

Satz von Taylor: $f[(x) + (\Delta x)] = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(\xi)(\Delta x)^2$
$(\exists\ \xi$ zw. x und $x + \Delta x)$

Falls $|\Delta x| << 1$ gilt näherungsweise $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x$

Dies ergibt $\underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}_{\text{rel. Fehler im Ergebnis}} \approx \underbrace{\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x}_{\text{Verstärkungsfaktor}} \ \underbrace{\frac{\Delta x}{x}}_{\text{rel. Anfangsfehler}}$

„Konditionszahl"

Problem heißt gut konditioniert wenn $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\, x\right|$ klein ist. Es heißt schlecht konditioniert wenn dieses groß ist.

Lösung

a) Für $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ ist

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{\frac{1}{x} \cdot x}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$$

Schlecht konditioniert wenn $\ln x \approx 0$, also $x \approx 1$

Für große x und x nahe 0 gut konditioniert.

Bsp. $\ln 1.111 = 0.105261 \qquad x = 1.111$

$\ln 1.11 = 0.095310 \qquad x + \delta x = 1.11$

Relativer Fehler: Am Anfang $\left|\frac{\delta x}{x}\right| = \frac{10^{-3}}{1.111} = 9 \cdot 10^{-4}$

$$\left|\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{f(x)}\right| = \frac{9.01 \cdot 10^{-4}}{0{,}105261} = 8{,}6 \cdot 10^{-3}$$

Der rel. Fehler hat sich verzehnfacht.

$\ln 11.1 = 2{,}4069$

$\ln 11 = 2{,}3979$

$$\left|\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{f(x)}\right| = \frac{0{,}009}{2{,}4069} = 3{,}74 \cdot 10^{-3}$$

$$\left|\frac{\delta x}{x}\right| = \frac{0{,}1}{11{,}1} = 9 \cdot 10^{-3}$$

rel. Fehler hat sich um den Faktor ca. 2,5 verkleinert.

b) Für $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{\cos(x) \cdot x}{\sin(x)} = \frac{x}{\tan(x)}$$

Schlecht konditioniert wenn $\tan(x) \approx 0$ ist, (bzw. $\sin(x) = 0$)

also für $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$

Ausnahme: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan(x)}$$ Regeln von de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x)'}{(\tan(x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \to 0} \cos^2(x) = 1$$

Bsp.

$$\sin 3.1415 = 9{,}256 \cdot 10^{-5}$$

$$\sin 3{,}14 = 1{,}593 \cdot 10^{-3}$$

$$\left| \frac{f[(x) + (\Delta x)] - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{0{,}001593 - 0{,}000093}{0{,}000093} \right|$$

$$= 16{,}19$$

$$\left| \frac{\delta x}{x} \right| = \frac{0{,}0015}{3{,}1415} = 4{,}77 \cdot 10^{-4}$$

Der Fehler hat sich ca. um $4 \cdot 10^4$ verstärkt.

Für $x \approx 0$

$$\sin 1{,}569 = 0{,}9999880$$

$$\sin 1{,}57 = 0{,}9999997$$

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \right| = \frac{1{,}17 \cdot 10^{-5}}{0{,}9999880} \approx 1{,}17 \cdot 10^{-5}$$

$$\left| \frac{\delta x}{x} \right| = \frac{0{,}001}{1{,}5659} = 6{,}39 \cdot 10^{-4}$$

Fehler um den Faktor 50 kleiner.

Subtraktion zweier etwa gleich großer Zahlen

$\sqrt{97} \cdot 16{,}87 - \frac{1}{6} \cdot 1000$

$= 166{,}1502 - 166{,}6667$ (ab 7. Ziffer gerundet)

$= -0{,}5165$ ← schon ab der 4ten Ziffer nicht mehr exakt.

Rel. Fehler mind. $\frac{10^{-4}}{0{,}5} = 2 \cdot 10^{-4}$

Aufg. 2

Begründen sie weshalb die folg. Ausdrücke Rundungsfehler für die geg. x Fehleranfällig sind und bestimmen sie einen math. äquivalenten aber weniger rundungsanfälligen Ausdruck

a) $\frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ für $|x| << 1$

Rundungsfehleranfällig da für $|x| << 1$

$\frac{1+x^2}{1-x^2} \approx \frac{1}{1}$

$\frac{1}{1+x^2} \approx \frac{1}{1}$

x	$\frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{3x^2+x^4}{1-x^4}$
10^{-4}	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
10^{-8}	0	$3 \cdot 10^{-14}$
10^{-12}	0	$3 \cdot 10^{-22}$
10^{-6}	$3 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-10}$

$$\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{3x^2+x^4}{1-x^4}$$

b) $\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^3}$, $x \gg 1$

Für sehr große x ist $x^6+x^3 \approx x^6$ und $x^6-x^3 \approx x^6 \Rightarrow$ Bei großen x ist das Ergebnis irgendwann 0.

$$\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^3} = \frac{(\sqrt{}-\sqrt{})(\sqrt{}+\sqrt{})}{\sqrt{x^6+x^3}+\sqrt{x^6-x^3}}$$

$$= \frac{x^6+x^3-(x^6-x^3)}{\sqrt{x^6+x^3}+\sqrt{x^6-x^3}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^6+x^3}+\sqrt{x^6-x^3}}$$

≈ 1 für große x.

Aufgabe 3 Interpolation

Gegeben:

x_i	-1	0	2	3
y_i	3	2	1	4

(4 Punkte)

Gesucht: Gibt es eine möglichst einfache Fkt. P die durch diese Punkte geht.
(Polynom mögl. kleinen Grades)

$$P(x_i) = y_i \quad \text{für } i = 0,1,2,3$$

Satz

Zu geg. (x_i, y_i), $i = 0 \dots n$ gibt es genau ein Polynom n-ten Grades.
mit $p(x_i) = y_i$.
Nämlich $P(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$

mit $l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$

$n = 3 \quad x_0 = -1, \; x_1 = 0, \; x_2 = 2, \; x_3 = 3$

$y_0 = 3, \; y_1 = 2, \; y_2 = 1, \; y_3 = 4$

$$L_3 = \underbrace{y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}}_{i=0} + \underbrace{y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}}_{i=1} + \underbrace{y_2 \ldots}_{i=2} + \underbrace{y_3 \ldots}_{i=3}$$

Beweis

α) $x \in \{x_0 \dots x_m\}$ dann trivial.

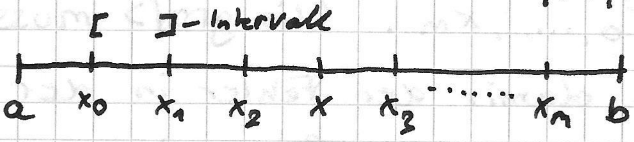
β) $x \notin \{x_0, \dots, x_m\}$ Betrachte zu festem x die Hilfsfunktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(z) = f(z) - l_m(f)(z) - K \cdot \omega_m(z)$$

$$K = \frac{f(x) - L_m(f)(x)}{\omega_m(x)}$$

φ ist $(m+1)$-mal stetig differenzierbar auf $[a,b]$.

φ hat Nullstellen bei $x_0, \dots, x_m, x$



Wende auf jedes Teilintervall den Satz von Rolle an.

φ' hat mind. $m+1$ Nullstellen.

Iteriere diesen Schritt.

Die 2te Ableitung, φ'' hat mind. m Nullstellen

Die φ^{m+1} te-Ableitung hat mind. 1 NS ξ_x.

$$\varphi^{(m+1)}(\xi_x) = 0 = f^{(m+1)}(\xi_x) - 0 - K \cdot (m+1)!$$

$$f(x) - L_m(f)(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \omega_m(x)$$

Bemerkung: Wir wissen nicht, wo die Stelle ξ_x genau liegt.

Um die Abschätzung anwenden zu können:

$$\left| f(x) - L_m(f)(x) \right| \leq \frac{\max_{y\in[a,b]} |f^{(m+1)}(y)|}{(m+1)!} \left| \omega_m(x) \right|$$

b) $$\max_{x\in[a,b]} | f(x) - L_m(f)(x) | = \| f - L_m(f) \|_Č$$

$$\leq \frac{\max_{y\in[a,b]} |f^{(m+1)}(y)|}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} |\omega_m(x)|$$

c) Typische Aufgabenstellung

$f(x) = \cos x \quad , [0,1]$

Knoten $x_0, \dots, x_m$. Wie groß muss ich m wählen, damit der Fehler in der Čebyševnorm $\leq \frac{1}{1000}$ ist.

$$\| \cos - L_m(\cos) \|_Č \leq \frac{1}{(m+1)!} \cdot 1 < \frac{1}{10000} \quad m \geq 6$$

d) Die Abschätzung (s.o.) war unter c) gut zu benutzen, weil $\max_{y\in[a,b]} |f^{(m+1)}(y)| \leq$

K und auch $\max_{x\in[a,b]} |\omega_m(x)| \leq L \; (\forall m)$

Dann liefert die Fehlerabschätzung, dass der Fehler gegen 0 geht für $n \to \infty$.

Aber im Allg. wächst $\omega_m(x)$ an und ebenso ist oftmals $\max_{y\in[a,b]} |f^{(m+1)}(y)|$ nicht zu begrenzen und kann in seinem

Wachstum den Faktor $\frac{1}{(m+1)!}$ egalisieren.

Bsp.

$$f \in \mathcal{C}[0,1], \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{\pi}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{i+1} \quad (0 \leq i \leq m)$$

$$f(x_i^{(m)}) = 0 \quad (0 \leq i \leq m)$$

$$\Rightarrow L_m(f) \equiv 0 \quad \forall m$$

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - L_m(f)(x)| \quad \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \not\to 0$$

Dies zeigt: Es gibt Knoten und Funktionen, bei denen der Fehler für $m \to \infty$ nicht gegen 0 geht.

b) Satz von Faber

Zu vorgegebenen Knoten $x_0^{(m)} < \ldots < x_m^{(m)}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ aus $[a,b]$ existiert stets eine stetige Fkt.
$f \in \mathcal{C}[a,b]$ mit $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_m(f)(x)|$

$$= \| f - L_m(f) \|_\infty \not\to 0$$

§ 4 Dividierte Differenzen und Newton-Darst.

Zu vorgegebenen Knoten und Daten ist das Interpolationspolynom eindeutig bestimmt
Wir haben kennen gelernt die Darst. nach Lagrange:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} y_i \cdot \ell_i(x) \leftarrow \text{Grundpolynome}$$

Erhöht man die Knotenzahl auf x_{m+1} und das Datum y_{m+1} so muss man alle Berechnungen nach Lagrange neu machen.
Deshalb möchte man eine andere Darstellung des Interpolitionspolynoms gewinnen.
(Exist. im Π_n eine geeignete Basis)

Wir wollen das Interpolationspolynom schreiben

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \dots + a_m(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{m} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$$

Setzt man die Interpolationsbed. ein, $\underline{\underline{P(x_0) = y_0 = a_0}}$

$$P(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_1)$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \leftarrow \text{dividierte Differenz}$$

Def. 4.1

Es sei $[x_\mu] = y_\mu$ für $0 \le \mu \le m$
Dann bildet man die dividierten Diff.
für $0 \le i < k \le m$

$$[x_i \dots x_k] = \frac{[x_{i+1}, \dots x_k] - [x_i \dots x_{k-1}]}{x_k - x_i}$$

Schema

$$\begin{array}{c|cccc}
x_0 & [x_0] & & & \\
 & & [x_0,x_1] & & \\
x_1 & [x_1] & & [x_0,x_1,x_2] & \\
 & & [x_1,x_2] & & [x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_2 & [x_2] & & [x_1,x_2,x_3] & \\
 & & [x_2,x_3] & & \\
x_3 & [x_3] & & &
\end{array}$$

Zahlenbsp.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & & & \\
 & & -\frac{1}{2} & & \\
3 & 1 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 1 & & -\frac{1}{8} \\
4 & 2 & & 0 & \\
 & & 1 & & \\
5 & 3 & & &
\end{array}$$

$\frac{1-2}{2}$ – Vorgänger
← Intervall (Diff. 3−1)

Hilfsatz 4.2 Für $0 \leq i \leq k \leq m$ gilt:

$$[x_i, \dots, x_k] = \sum_{\lambda=i}^{k} \frac{y_\lambda}{\prod\limits_{\substack{\mu=i \\ \mu\neq\lambda}}^{k} (x_\lambda - x_\mu)}$$

Beweis durch volls. Induktion

Über $r = k - i$

Satz 4.3
(Newton-Darst.)
Für das Interpolationspolynom zu den Knoten $x_0 < \dots < x_m$ und den Daten $y_0, \dots, y_m$ gilt:
$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} [x_0, \dots, x_i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Beweis

Da $1, (x-x_0), \dots, \prod\limits_{j=0}^{m-1} (x-x_j)$ eine Basis von Π_m bildet, exist. zu dem eindeutig bestimmten Interpolationspolynom P Koeff. a_i

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$P(x_\mu) = y_\mu \quad (0 \leq \mu \leq m)$$

Für festes k $(0 \leq k \leq m)$ betrachte

$$Q_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$Q_\mu(x_\mu) = \sum_{i=0}^{k} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x_\mu - x_j) \quad (0 \leq \mu \leq k)$$

$$= \sum_{i=0}^{\mu} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x_\mu - x_j)$$

$$= P(x_\mu) = y_\mu$$

Q_k ist das eindeutig best. Interpolationspolynom zu $x_0 < \dots < x_k$ und den Daten $y_0 < \dots < y_k$ vom Grad $\leq k$.

Vergleich mit der Lagrange Formel

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j \, \ell_j(x)$$

Lagrange Grundpolynome

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\prod_{\substack{e=0 \\ e \neq j}}^{k} \frac{x - x_e}{x_j - x_e} \right) y_j$$

Schaue den Koeff. von x^k an.

$$a_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j}{\prod_{\substack{e=0 \\ e \neq x}}^{k} (x_e - x_k)}$$

$=$ (siehe Hilfsatz) $[x_0, \dots, x_k]$

Bem

Bei der Newton-Darst. kommt bei Hinzunahme von x_{m+1} und y_{n+1} zu dem Interpolationspolynom hinzu.
$P(x_0)$ + (s. unten)

$$= \sum_{i=0}^{m} [x_0 \dots x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) + \left([x_0, \dots x_{m+1}] \cdot \prod_{j=0}^{m} (x - x_j) \right)$$

Die bisherige Berechnung kann man nutzen und nur den letzten Summanden (siehe Klammern) neu berechnen.

Schematisch

$$\begin{array}{llll}
x_0 & [x_0] & & \\
\vdots & \vdots & \dots [x_0, \dots x_m] & \\
x_m & [x_m] & & [x_0, \dots, x_{m+1}] \\
 & & [x_1, \dots, x_{m+1}] & \\
x_{m+1} & [x_{m+1}] & &
\end{array}$$

b) Wir haben vorausgesetzt, dass $x_0 < \dots < x_m$ ist haben davon aber nur benutzt $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$. Die Knoten müssen also nur paarweise verschieden sein.

Betrachte den Sonderfall, dass die Knoten x_i äquidistant sind. $x_k = x_0 + k \cdot h$ $(0 \leq k \leq m, \ h > 0)$
h ist die Schrittweite.

Def. 4.4

(vorwärts genommene Differenzen)

$$\left.\begin{aligned} \Delta^0 y_k &:= y_k \quad (0 \le k \le m) \\ \Delta^r y_k &:= \Delta^{r-1} y_{k+1} - \Delta^{r-1} y_k \end{aligned}\right\} \text{rekursive Definition}$$

Beisp.

$$\Delta^1 y_0 = \Delta^0 y_1 - \Delta^0 y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0)$$

$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$

Schema

$$\begin{array}{cccc} y_0 & & & \\ & \Delta^1 y_0 & & \\ y_1 & & \Delta^2 y_0 & \\ & \Delta^1 y_1 & & \Delta^3 y_0 \\ y_2 & & \Delta^2 y_1 & \\ & \Delta^1 y_2 & & \\ y_3 & & & \end{array}$$

Hilfsatz 4.5

Für äquidistante Knoten $x_k = x_0 + k \cdot h$ $(0 \le k \le m, h > 0)$ und für $0 \le i \le k \le m$ gilt:

$$[x_i, \dots, x_k] = \frac{\Delta^{k-i} y_i}{(k-i)!\, h^{k-i}}$$

Beweis durch vollst. Induktion

$\ell = k - i$

$\ell = 0$ d.h. $k = i$

$$[x_k] = y_k = \frac{\Delta^0 y_k}{0!\, h^0} \checkmark$$

$\ell - 1 \to \ell \quad (\ell \geq 1)$

Es sei also $i \leq k$ und $k - i = \ell$

$$[x_i, \ldots, x_k] = \frac{1}{x_k - x_i}\Big(\underbrace{[x_{i+1}, \ldots, x_k] - [x_i, \ldots x_{k-1}]}_{\text{Hierauf wird die Induktionsvoraussetzung angewendet.}}\Big)$$

$$= \frac{1}{(k-i)\cdot h}\left(\frac{\Delta^{k-(i+1)} y_{i+1}}{[k-(i+1)]!\; h^{k-(i+1)}} - \frac{\Delta^{k-1-i} y_i}{(k-1-i)! \cdot h^{k-1-i}}\right)$$

$$= \frac{1}{(k-i)\cdot h}\cdot\left(\frac{\Delta^{k-i-1} y_{i+1} - \Delta^{k-i-1} y_1}{(k-1-i)!\; h^{k-1-i}}\right)$$

$$= \frac{1}{(k-i)! \cdot h^{k-i}}\left(\Delta^{k-1-i} y_{i+1} - \Delta^{k-i-1} y_i\right)$$

$$= \frac{1}{(k-i)!\; h^{k-i}}\, \Delta^{k-i} y_i$$

Satz 4.6

Bei äquidistanten Knoten $x_k = x_0 + k \cdot h \;(0 \leq k \leq m,\, h > 0)$ lässt sich das Interpolationspolynom P schreiben als:

$$P(x) \sum_{i=0}^{m} \frac{\Delta^i y_0}{i!\, h^i} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

Bsp.

$$\begin{array}{c|cccc} & x_i & \Delta^0 y_i & & \\ \hline & -1 & 2 & & \\ h=1 & & & -1 & \\ & 0 & 1 & & 2 \\ & & & 1 & \\ & 1 & 2 & & \end{array}$$

$$P(x) = 2 - (x+1) + \frac{2}{2!}(x+1)\cdot x$$

$$= 1 + x^2$$

Bem 4.7

Verfahren von Aitken und Neville

$P_0, P_1 \in \Pi_m$, Knoten $x_0, \dots, x_{m+1}$

(paarweise verschieden) $y_0, \dots, y_{m+1}$

$$P_0(x_\mu) = y_\mu \quad (0 \le \mu \le m)$$

$$P_1(x_\mu) = y_\mu \quad (1 \le \mu \le m+1)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{x_{m+1} - x_0} \left\{ P_0(x)(x_{m+1} - x) - P_1(x)(x_0 - x) \right\}$$

$$\underset{1 \le \mu \le m}{P(x_\mu)} = \frac{1}{x_{m+1} - x_0} \left(y_\mu (x_{m+1} - x_\mu) - y_\mu (x_0 - x_\mu) \right)$$

$$= y_\mu$$

$$P(x_0) = \frac{1}{x_{m+1} - x_0} \quad P_0(x_0)(x_{m+1} - x_0)$$

$$= P_0(x_0) = y_0$$

$$P(x_{m+1}) = \frac{1}{x_{m+1} - x_0} (-1) P_1(x_{m+1})(x_0 - x_{m+1})$$

$$= P_1(x_{m+1}) = y_{m+1}$$

Mit dieser Konstruktion haben wir ein Polynom vom Grad $\leq m+1$ gewonnen.

$$P(x_\mu) = y_\mu \quad (0 \leq \mu \leq m+1)$$

<u>Bem</u>

a) $f \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_\mu = f(x_\mu)$ $\leftarrow$ Daten zu den Knoten $x_0, \dots x_m$. Anstelle von $[x_0, \dots, x_m] = [x_0, \dots, x_m; f]$ bzw.

$$\Delta^r y_0 = \Delta^r f(x_0, \dots, x_k)$$

b) f sei r-mal stetig differenzierbar

$$[x_0, \dots\dots x_r; f] = \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!} \quad , \quad \xi \in]x_0, .. x_r[$$

$$P_h(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\Delta^i f(x_0, \dots, x_r)}{i! \cdot h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$\xrightarrow[x_j/y \to x]{} \sum_{\substack{i=0 \\ i=r}}^{m} \frac{f^{(i)} x_0}{i!} (x - x_0)^i$$

Taylorpolynom m-ten Grades im x_0

Bem

a) Wir haben für die Interpolation benötigt:

- $\dim \Pi_m = m+1$
- jedes Polynom vom Grad $\leq m$ hat höchstens m reelle NS, es sei denn es ist das Nullpolynom

Verallgemeinerung

Ein Vektorraum V als Teilmenge der reellen FKT $\dim V = m+1$ heißt Čebysew-Unterraum (Haar-Unterraum), wenn jedes $p \in V$ höchstens m NS hat mit Ausschluss der Nullfunktion.

Zu jeder FKT f und zu Knoten $x_0, \dots x_m$ exist. genau ein $p \in V$ mit $f(x_i) = p(x_i)$ $(0 \leq i \leq m)$.

Bsp.

a) Π_m

b) h streng monoton wachsend

$V = \langle p_0 \dots p_m \rangle$ Čebysew-Unterraum

$\hat{V} = \langle p_0 \circ h, \dots, p_m \circ h \rangle$

$\dim \hat{V} = m+1$ und ist ein Čebysew-Unterraum

$$\hat{p}(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, p_i(h(x))$$

$$= p(h(x)), \quad p = \sum \alpha_i p_i$$

$\Pi_m = < \pi_0, \ldots, \pi_m >$, $h(x) = e^x$

$\tilde{V} = < 1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{mx} >$

$\tilde{V}$ ist ein Čebyšev-Unterraum

b) Trigonometrischen Polynom vom Grad m

$$T_m = < t \mid t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k \cdot x) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin(k \cdot x) >$$

bilden einen Vektorraum der Dim $2m+1$

T_m hat in $[0, 2\pi[$ höchstens $2m$ Nullstellen, ist also ein Čebyšev-Unterraum

Ist f 2π-periodisch und $0 \le x_0 < \ldots < x_m < 2\pi$ so exist genau ein trig. Polynom vom Grad $\le m$, nämlich t, mit $t(x_i) = f(x_i)$

§5 Hermide-Interpolation

Gegeben seien die Knoten $x_0 < \ldots < x_m$ und die Daten

$y_0, \ldots, y_m$

$y_0', \ldots, y_m'$

Gesucht ist ein Polynom $p \in \Pi_{2m+1}$ mit $p(x_i) = y$ und $p'(x_i) = y_i'$ $(0 \le i \le m)$

Satz 5.1

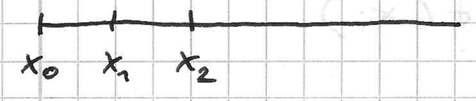
Es exist. genau ein $p \in \Pi_{2m+1}$ mit $\circledast$

Beweis

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2m+1} a_i x^i$$

Gesucht sind $(2m+2)$ Koeff. a_i, die die $(2m+2)$ Gleichung (*) erfüllen.
Es ist ein quadratisches lineares Gleichungssystem für a_i $(0 \leq i \leq 2m+1)$
Ein quad. GS ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das homogene System nur die triviale Lösung $p = 0$ besitzt.

$$p \in \Pi_{2m+1}, \quad p(x_i) = 0, \quad p'(x_i) = 0 \quad (0 \leq i \leq m)$$



Nach dem Satz von Rolle exist in $]x_0, x_1[$ eine NS $\hat{x}_0$ von p' $\quad p'(\hat{x}_0) = 0$
$\exists$ in $]x_{m-1}, x_m[$ eine NS $\hat{x}_{m-1}$ von $p'(\hat{x}_{m-1}) = 0$

Jetzt zähle NS von p' $\quad \underbrace{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{m-1}, x_0, \dots, x_m}_{2m+1 \text{ NS}}$

$$p' \in \Pi_{2m} \implies p' = 0 \implies p \equiv c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Wegen der Interpolationsbed. $p(x_i) = 0$ folgt $c = 0$.

Wie berechnet man p?

Erinnerung Lagrange-Interpolation

Grundpolynome $e_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq i \\ 1 & \text{für } k = i \end{cases}$

$$e_i \in \Pi_m$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} y_i \, e_i(x), \quad P(x_j) = \sum_{i=0}^{m} y_i \, e_i(x_j)$$
$$= y_j$$

Diesen Trick wollen wir für die Hermite-Interpolation anwenden. $p(x) = \sum_{k=0}^{m} y_k \cdot A_k(x) + \sum_{k=0}^{m} y_k' B_k(x)$

$A_k, B_k \in \Pi_{2m+1}$, $\quad A_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$A_k'(x_i) = 0, \quad \forall k, i$$

$B_k(x_i) = 0, \ \forall k, i \quad / \quad B_k'(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Wenn wir solche A_k, B_k finden, sind wir fertig

$$p(x_i) = \sum_{k=0}^{m} y_k A_k(x_i) + \sum_{k=0}^{m} y_k' B_k(x_i)$$
$$= y_i$$

$$p'(x_i) = \sum_{k=0}^{m} y_k \cdot A_k'(x_i) + \sum_{k=0}^{m} y_k' B_k'(x_i)$$
$$= y_i'$$

Bem 5.2

Bestimme A_k und B_k

$$A_k(x) = \left(1 + c(x - x_k)\right) e_k^2(x)$$

$$A_k(x_i) = \left(1 + c(x_i - x_k)\right) e_k^2(x_i)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } k = i \\ 0 & \text{für } k \neq i \end{cases}$$

$$A_k'(x_i) = c \cdot e_k^2(x_i) + \left(1 + c(x_i - x_k)\right)$$

$$2 \cdot e_k'(x_i) \cdot e_k(x_i)$$

$$= \begin{cases} 0 & i \neq k \\ c + 2 e_i'(x_i) & i = k \end{cases}$$

soll 0 ergeben, $c = -2\, e_k'(x_k)$

$$A_k(x) = \left[1 - 2\, e_k'(x_k) \cdot (x - x_k)\right] e_k^2(x)$$

Oft findet man: $e_k(x) = \dfrac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}$

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i)$$

$$e_k'(x) = \frac{\omega'(x - x_k) - \omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)^2}$$

$$e_k(x_k) = \lim_{x \to x_k} e_k'(x)$$

Regel von de l'Hôpital

Regel von de' Hôpital [Literatur]

$$B_K(x) = (x - x_k)\, e_K^2(x)$$

$$B_k(x_i) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 0 & k = i \end{cases}$$

$$B_K'(x_i) = e_K^2(x) + (x - x_k) \cdot 2\, e_k(x)\, e_k'(x)$$

$$B_k'(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq K \\ 1 & i = K \end{cases}$$

Damit hat man eine Darst. für das Hermide-Interpolationspolynom

Numerik Übung

Gegeben: Knoten x_i; Daten y_i $\quad i = 0, 1 \ldots n$

Nicht gesucht: Interpolationspolynom vom Grad n

Gesucht: Wert des Interpolationspolynoms $P_n(x)$ an der Stelle $x = \xi$

Aufgabe 10

Berechne zu $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $y_i = \frac{1}{x_i}$, $i = 0, 1, 2$ den Wert von $P_2(x)$ für $x = \xi = 4$

Lösung

x_i	$\xi - x_i$	$y_i = P(x_i, \xi)$
x_0	$\xi - x_0$	$y_0 = P(x_0, \xi)$
x_1	$\xi - x_1$	$y_1 = P(x_1, \xi)$
x_2	$\xi - x_2$	$y_2 = P(x_2, \xi)$
x_3	$\xi - x_3$	$y_3 = P(x_3, \xi)$

Fortsetzung siehe Rückseite

mit $P(x_i, \dots, x_{i+k}, \xi)$ als Wert des Interpolationspolynoms zu den Knoten $x_i, \dots x_{i+k}$ u. Daten $y_i \dots y_{i+k}$ an der Stelle ξ

$P(x_i, x_{i+1}, \xi)$ $\qquad$ $P(x_0, \dots x_n, \xi) = P_n(5)$

$P(x_1, \xi) \cdot (\xi \cdot x_0) - P$ etc.

x_i	$\xi - x_i$	$y_i = P(x_i, \xi)$	$P(x_i, x_{i+1}, \xi)$
1	$4-1=3$	1	$\frac{\frac{1}{3}\cdot 3 - 1 \cdot 1}{3-1} = 0$
3	$4-3=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{6}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot(-2)}{6-3} = \frac{5}{18}$
6	$4-6=-2$	$\frac{1}{6}$	

$P(x_0, x_1, x_2, \xi)$

$$\frac{\frac{5}{18}\cdot 3 - 0 \cdot (-2)}{6-1} = \frac{1}{6} = P_2(4)$$

Aufg. 11

a) Beweisen sie, dass es zu Knoten $0 = x_0 < \dots < x_n$ und Daten y_i, $i = 0, 1, \dots, n$ genau ein gerades Polynom

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i} = a_0 + a_2 x^4 + \dots a_n x^{2n}$$

gilt. mit $P(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1 \dots n$

1. Lösung (elementar)

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x^2)^i$$

$z := x^2 \implies \sum_{i=0}^{n} a_i z^i =: q(z)$

Bekannt: Für alle gegebenen Knoten $z_0, \dots, z_n$ exist. genau eine Lösung $a_0, \dots, a_n$, sodass $q(z)$ die Punkte z_i, y_i interpoliert.

Wählt man $z_i := x_i^2$, so sind $z_0 = x_0^2, \dots, z_n = x_n^2$ $n+1$ (versch. Knoten), d.h. es exist. genau eine Lösung $a_0 \dots a_n$, so dass $q(z_i) = y_i$ ist. $(i = 0, \dots, n)$ $\Rightarrow$ Es exist. genau eine Lösung $a_0, \dots, a_n$ so dass $y_i = \sum_{k=0}^{n} a_k (x_i^2)^k = P(x_i)$ für $i = 0, \dots, n$.

2. Lösung (nicht elementar) $[\text{mit } \Pi := [0, \infty[\,]$

Sei $\mathbb{R}^\Pi := \{ f : \Pi \to \mathbb{R} \}$ und $V := \{ P \mid P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i} \}$ $\subseteq \mathbb{R}^\Pi$ (Unterraum)

V ist ein Čebyšev Unterraum von $\mathbb{R}^\Pi$

(jedes $f \in V$ erfüllt die „Haarsche Bedingung")

f besitzt in Π höchstens $\dim V = n+1$ Nullstellen.

Stimmt, da jedes gerade Polynom vom Grade $2n$ zwar $2n$ Nullstellen besitzen kann, aber die Hälfte davon in $]-\infty, 0]$ liegt $(P(x) = 0 \Leftrightarrow P(-x) = 0)$

Satz: In jedem Čebyšev-Unterraum V der $\dim V = n+1$ gibt es zu $n+1$ geg. Knoten u. Daten genau eine interpolierende Funktion $f \in V$

Kriterium: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ und $h: M \to \mathbb{R}$ injektiv, so bildet $g_0, \dots g_n : M \to \mathbb{R}$, def. durch $g_i(t) = h(t^i)$, $i = 0, \dots, n$ ein Čebysev System, d.h sie sind Basis eines Čebysev Raum, also $V = \langle g_0, \dots g_n \rangle$ ist Čebysev-Raum (Interpolationsprob. ist eindeutig lösbar)

Anwendung in Aufgabe 11a)

$M := [0, \infty[$, $h: M \to \mathbb{R}$, $h(x) := x^2$ ist injektiv, also ist $V = \langle h(1), h(t) \dots h(t^n) \rangle$ $= \langle 1, x^2, x^4, \dots x^{2n} \rangle$ ein Čebysev-Raum.

Damit 11a) bewiesen.

Anmerkung: Für bel. Knoten $x_0, \dots x_n \in \mathbb{R}$ u. Daten $y_0, \dots, y_n$ wäre das Interpolationsprob. in 11a) nicht mehr eindeutig lösbar

Bsp.

$x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$

$P(x) = a_0 + a_1 x^2$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 = 1$$
$$a_0 + a_1 = 2 \ \lightning$$

11b) Begründen Sie, weshalb das Interpolationspolynom $p(x) = \sum_{i=0}^{2n} a_1 x^i$ vom Grade $\leq 2n$ ist, welches die Bedingung $p(x_i) = y_i = p(-x_i)$ für $i = 0, \dots n$ erfüllt. (2n+1 Bedingungen)

Lösung

Das IP von 11 a) erfüllt die Bedingung (*)
Es hat den Grad $2n$ und ist daher die eindeutige Lösung unter allen Polynomen der Gestalt $p(x) = \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$

11c

Bestimme das eindeutige IP vom Grad 6 zu den folg. Knoten und Daten.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-2	1	3	4	3	1	-2

Lsg. Nach 11 b) kann man ansehen und das Problem reduzieren, auf

x_i	0	1	2	3
y_i	4	3	1	-2

$$P(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6$$

bzw nach 11a

z_i	0	1	4	9
y_i	4	3	1	-2

y_i	z_i	$[z_i, z_{i+1}]$	$[z_i\ z_{i+1}, z_{i+2}]$	$[z_0 \ldots z_n]$
4	0	-1		
3	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{-\frac{2}{3}+1}{4-0} = \frac{1}{12}$	$\frac{\frac{1}{120} - \frac{1}{12}}{9-0} = \frac{\frac{-9}{120}}{9} = -\frac{1}{120}$
1	4	$-\frac{3}{5}$	$\frac{-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{9-1} = \frac{1}{120}$	
-2	9			

$$q(z) = 4 - 1\cdot(z-0) + \frac{1}{12}(z-0)(z-4) - \frac{1}{120}(z-0)(z-4)(z-9)$$

$$p(x) = 4 - x^2 + \frac{1}{12}x^2(x^2-4) - \frac{1}{120}x^2(x^2-4)(x^2-9)$$

§6 Numerische Integration

Zu $f \in C[a,b]$ wird ein Näherungswert für $\int_a^b f(x)\,dx$ gesucht, insbesondere wenn.

α) f keine explizit angebbare Stammfkt.
β) Stammfkt. ist schwierig auszuwerten
γ) f ist nur an gewissen Stellen bekannt.

Die Näherungsformel soll die Gestalt haben:

5.1 $$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m} A_\mu \cdot f(x_\mu)}_{\substack{\text{Näherungsformel} \\ I_m(f)}} + \underbrace{R_m(f)}_{\text{Fehlerterm}}$$

Ansatz: Bestimme zu f das Lagrange-Interpolationspolynom und integriere dieses anstelle von f.

$$P(x) = \sum_{\mu=0}^{m} f(x_\mu)\, l_\mu(x)\,, \quad l_\mu \leftarrow \text{Lagrange Grundpolynome}$$

$$\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{\mu=0}^{m} f(x_\mu) \cdot \underbrace{\int_a^b l_\mu(x)\,dx}_{A_\mu}$$

Wir haben damit als Näherung $I_m(f)$ gemäß 5.1.

Man kann auch leicht eine Aussage über den Fehler treffen, denn wir kennen die Fehlerformel für die Interpolation.

Satz 6.2

$m \in \mathbb{N}_0$: $f \in C^{m+1}[a,b]$

Zu den Knoten $a \le x_0 \le \dots \le x_m \le b$ bilden wir die Interpolationsquadratur.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\mu=0}^{m} f(x_\mu)\cdot\left(\int_a^b \ell_\mu(x)\,dx\right) + R_m(f)$$

Dann gilt
$$|R_m(f)| \le \frac{\|f^{m+1}\|_\infty}{(m+1)!}\int_a^b |\omega_m(x)|\,dx \le \frac{\|f^{m+1}\|_\infty}{(m+1)!}(b-a)^{m+2}$$

$$\omega_m(x) = (x-x_0)\dots(x-x_m)$$

$$\|f^{m+1}\|_\infty = \max_{y\in[a,b]} |f^{m+1}(y)|$$

Beweis

Wir wissen $|f(x) - L_m(f)(x)| \le \frac{\|f^{m+1}\|_\infty}{(m+1)!}|\omega_m(x)|$

$$\Rightarrow |R_m(f)| = \left|\int_a^b \left(f(x) - L_m(f)(x)\right)dx\right|$$
$$\le \int_a^b |f(x) - L_m(f)(x)|\,dx$$
$$\le \int_a^b \frac{\|f^{m+1}\|_\infty}{(m+1)!}|\omega_m(x)|\,dx$$
$$= \frac{\|f^{m+1}\|_\infty}{(m+1)!}\int_a^b |\omega_m(x)|\,dx$$

$$|\omega_m(x)| = |x-x_0|\dots|x-x_m| \le (b-a)^{m+1}$$

$$\le \frac{\|f^{m+1}\|_\infty}{(m+1)!}(b-a)^{m+2}$$

Bem. 6.3

a) $\Pi_0(x) = 1 \quad \forall x$

$$L_m(\Pi_0) = \Pi_0$$

Näherungsformel $\int_a^b 1\,dx = \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu = (b-a)$

Die Gewichte A_μ ergeben aufsummiert $(b-a)$

b) Wir wissen von der Lagrange-Interpolation, dass
$L_m(P) = P \qquad \forall P \in \Pi_m$

Die $\underbrace{\text{Näherungsformel}}_{I_m}$ ist exakt für alle Polynome vom Grad $\leq m$.

c) Frage: War der Ansatz über die Interpolation natürlich oder nicht?

Annahme: Wir haben eine Näherungsformel die die Gestalt I_m hat:

$$I_m(f) = \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu (f(x_\mu))$$

und weiter sei I_m exakt für alle Polynome $P \in \Pi_m \Rightarrow A_\mu = \int_a^b \ell_\mu(x)\,dx$

Setze in die obige Formel $\ell_K \in \Pi_m$ ein.

$$I_m(\ell_K) = \int_a^b \ell_K(x)\,dx$$
$$= \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu \ell_K(x_\mu) = \underline{A_K}$$

d) Integrationsformel heißt Newton-Cotes-Formel, falls die Punkte x_i äquidistant sind.

Falls $x_\mu = a + \frac{b-a}{m} \cdot \mu \quad (0 \leq \mu \leq m)$

Bsp.

a) $m = 1 \qquad x_0 = a, \; x_1 = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_0 \cdot f(a) + A_1 f(b) + R_1(f)$$

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx$$

Einschub

$$\ell_\mu(x) = \prod_{k=0}^{m} \frac{x-x_k}{x_\mu - x_k} \quad (k \neq \mu)$$

$$= \left| \frac{1}{a-b} \frac{1}{2}(x-b)^2 \right|_a^b = \frac{1}{2} \cdot b-a$$

$$A_1 = \int_a^b \ell_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx) = \frac{b-a}{2}$$

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2} \cdot \left(f(a) + f(b)\right) \leftarrow \text{Trapezformel}$$

b) $m = 2 \qquad x_0 = a, \; x_1 = \frac{a+b}{2}, \; x_2 = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_2(f) + R_2(f)$$

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\,dx$$

$$= \frac{2}{(a-b)^2} \cdot \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx$$

$$= \frac{2}{(a-b)^2} \cdot \left(-\frac{(a-b)^3}{12}\right) = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1 = 2 \cdot \frac{b-a}{3}, \quad A_2 = \frac{b-a}{6}$$

$$I_2(f) = S(f) = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Simpsonregel

Satz 6.4

Fehlerabschätzung

a) Ist $f \in C^2[a,b]$, so gilt für den Fehler bei der Trapezregel:

$$|R_T(f)| \le \frac{\|f''\|_\infty}{12} (b-a)^3$$

Für die Simpsonregel gilt:

$$f \in C^4[a,b]$$

$$|R_S(f)| \le \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{2880} (b-a)^5$$

Bem. Simpsonregel ist nicht nur exakt für $m=2$, sondern auch für Polynome 3ten Grades

f ist integrierbar über $[a,b]$

$$\sup \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Untersumme}}}{U} = \inf \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Obersumme}}}{O}$$

Nachtrag zur Trapezregel

Wir hatten die Fehlerabschätzung:

$$|R(f)| \leq \frac{\|f^{n+1}\|_\infty}{(m+1)!} \int_a^b |\omega_m(x)|\,dx$$

$$\leq \frac{\|f^{n+1}\|_\infty}{(m+1)!} (b-a)^{m+2}$$

$$\|R_T(f)\| \leq \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12} (b-a)^3$$

$$\int_a^b |\omega_1(x)|\,dx = \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

Einschub: $[\omega_1(x) = (x-a)(b-x)]$

$$= \frac{(x-a)^2}{2}(b-x)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2}\,dx$$

$$= \left(\frac{(x-a)^2}{2}(b-x) + \frac{(x-a)^3}{6}\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{(b-a)^3}{6}$$

$$\Rightarrow \|R_T(f)\| \leq \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12} (b-a)^3$$

Bemerkung zur Rienam Integration

a) Wenn f beschränkt ist über $[a,b]$, dann ist f über $[a,b]$ integrierbar $\Leftrightarrow$

$\sup \mathcal{U} = \inf \mathcal{O}$ Dann $\int_a^b f(x)\,dx = \sup \mathcal{U}$

b) Ist f stückweise stetig oder streng monoton, so folgt: f ist über $[a,b]$ integrierbar.

Die Auswertung des Integrals erfolgt nach dem 2. Hauptsatz der Diff. + Integralrechnung und Rechenregeln.

Es gibt auch nicht integrierbare Fkt. z. B. Diriblet Fkt. $\chi \quad [a,b] \to [0,1]$

[Einschub: $\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$]

$$U(\chi, \mathfrak{Z}) = 0 = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$m_k = \inf \chi(x) = 0 \qquad (x \in [x_{k-1}, x_k])$$

$$\sup U = 0$$

$$O(\chi, \mathfrak{Z}) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k+1})$$

$$M_k = \sup \chi(x) = 1 \qquad (x \in [x_{k-1}, x_k])$$

$$= \cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + x_3 - \cancel{x_2} + \ldots + x_n - x_{n-1}$$

$$= x_n - x_0 = 1$$

$$\Rightarrow \inf O = 1$$

f ist Rieman-integrierbar über $[a,b]$, falls für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $x_0 = a, \ldots, x_n = b$

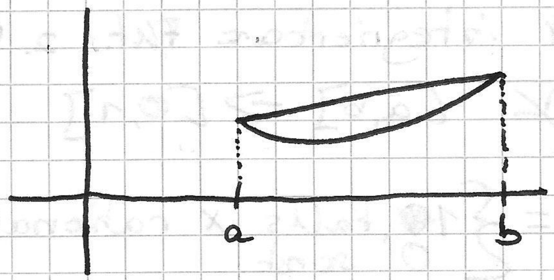
$$\delta_1 = m \quad (x_{i+1} - x_i), \quad \delta_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\xi^{(n)} \in [x_{i+1}, x_i]$

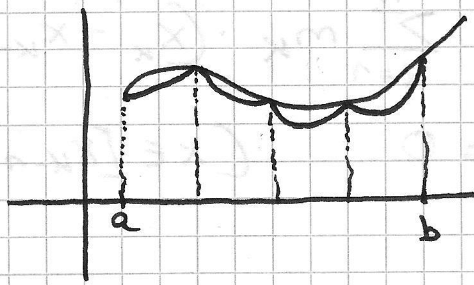
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i - x_{i-1})$$

Die Rieman-Summe S_n gegen ein und denselben Grenzwert konvergiert.

Die zusammengesetzte Trapezregel



Einfache Trapezregel



Zusammengesetzte Trapezregel: Wende auf jedes Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ die Trapezregel an.

Teil $[a,b]$ in $N \geq 1$ Teilintervalle, $x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{N}$
$(0 \leq n \leq N)$

Wende in $[x_n, x_{n+1}]$ die Trapezregel an
Dann erhält man mit $h = \frac{b-a}{N}$

$$T_N(f) = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{N-1}) + f(x_N)\Big)$$

$$= \frac{h}{2} \cdot \Big(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\Big)$$

Fehlerabschätzung für die Zusammengesetzte Trapezregel

$f \in C^2[a,b]$ Wir wenden die Abschätzung für die einfache Trapezregel auf $[x_n, x_{n+1}]$ an.

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_N(f) \right| \le \left[\frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12} h^3 \right] \sum_{i=0}^{N-1}$$

$$= N \cdot \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12} \cdot h^3 = \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12} \frac{(b-a)^3}{N^2}$$

Wir wissen: Bei den allg. Newton-Cotes-Formeln gilt i. a. <u>nicht</u>: $|R_n(f)| \to 0$

Für spez. Fkt. schon, aber nicht allgemein.

Was gilt für die zusammengesetzte Trapezregel?

<u>Konvergenz für die zusammengesetzte Trapezregel</u>

Es sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$, dann ist

$$\lim_{N \to \infty} T_N(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis: Siehe Definition der Rieman-Integrierbarkeit und auch das Rieman-Kriterium.

Dieses Zusammensetzen der Trapezregel steht beispielhaft für das Zusammensetzen von Newton-Cotes-Formeln überhaupt

<u>Bsp.</u> Die zusammengesetzte Simpson-Formel.

$f \in \mathcal{C}[a,b]$ Teile $[a,b]$ in $2N \geq 2$ Teilintervalle.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2N} = b$$

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{2N} \qquad (0 \le n \le 2N)$$

Auf jedes Teilintervall $[x_{2N}, x_{2N+2}]$ $(0 \le n \le N-1)$ wende die Simpson Regel an.

$$h = \frac{b-a}{2N}, \quad S_{2N}(f) = \frac{b-a}{6N} \cdot$$

[Einschub: $f(x_i) = f_i$]

$$\cdot \left(f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + f_4 + 4f_5 + f_6 + \dots \right.$$
$$\left. \dots + f_{2N}\right)$$

$$= \frac{b-a}{6N}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + f_{2N}\right)$$

<u>Fehlerabschätzung für die zusammengesetzte Simpsonregel</u>

$$f \in \mathcal{C}^4[a,b]$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S_{2N}(f) \right|$$
$$\le \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(2\cdot h)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_{\mathcal{C}}$$
$$= N \cdot \frac{(2h)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_{\mathcal{C}}$$

[Einschub: $h = \frac{b-a}{2N}$]

$$= \frac{1}{180} \|f^{(4)}\|_{\mathcal{C}} \frac{(b-a)^5}{(2N)^4}$$

§ 7 Nullstellenbestimmung

Aufgabe $f \in \mathcal{C}[a,b]$, f habe auf $[a,b]$ mind. 1 NS. Berechne diese.

Erinnerung ZWS

$$f \in \mathcal{C}[a,b], \quad f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] \quad f(x_0) = 0$$

Hieraus resultiert das Intervallhalbierungsverf. (Bisektionverfahren):

$$\text{O.B.d.A.} \quad f(a) < 0, \; f(b) > 0$$

$\frac{a+b}{2}$, falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ folg.

Falls nicht α) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, dann wähle

$$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

β) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, dann wähle

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$$

$y_0 = a$, $y_1 = b$ Iteriere diesen Schritt und generiere (y_n), $f(y_{n+1}) < 0$, $f(y_n) > 0$

$$y_{n+1} - y_n \leq \frac{1}{2}(y_n - y_{n+1})$$

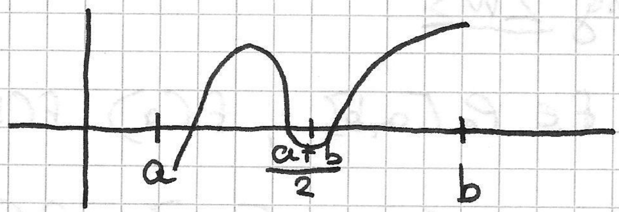
Es sei denn, ich treffe zufällig auf eine NS.

$y_n \to x_0$

$$\Rightarrow \lim f(y_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit}}}{=} f(x_0) = 0$$

Bem a) Bisektionsverfahren konvergiert, falls Voraussetzungen vorliegen, gegen eine NS, „langsame Konvergenz".

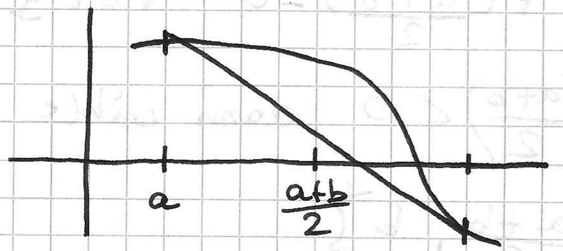
b) Man erhält eine NS, evt. nicht alle.



Die NS in $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ sind außen vor.

§7 Nullstellenverfahren

7.2



Regula Falsi Verfahren

Modifikation des Bisektionverfahrens, wähle nicht die Intervallmitte, sondern die NS der Verbindungsebene zwischen f(a) und f(b)

$$S_n(x) = f(a_n) + \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n)$$

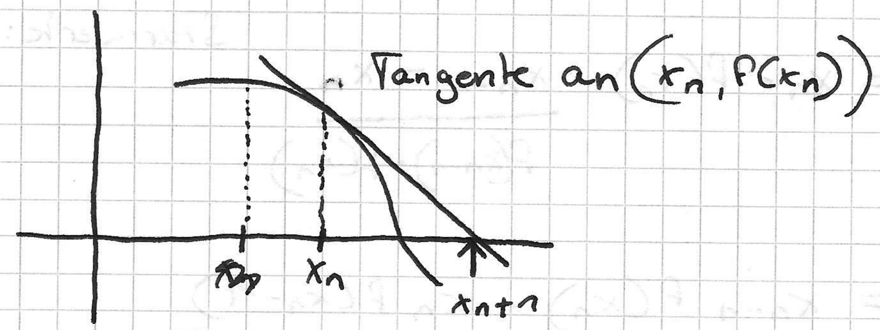
$$S_n(x_n) = 0 \iff$$

$$x_n = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{f(b_n)\,a_n - f(a_n)\,b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Die Regula Falsi konvergiert gegen eine Nullstelle von f, falls f stetig auf $[a,b]$ und $a_0 = a$, $b_0 = b$, $f(a)\,f(b) < 0$

Hierbei wird auch vorausgesetzt, das man bei dem Alg. nicht zufällig auf eine NS stößt.

7.3 Das Newton Verfahren



f sei differenzierbar auf $[a,b]$, x_0 sei ein Startwert. Berechne die Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ / $f'(x) \neq 0 \ \forall x$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad t(x_1) = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

<u>Bsp.</u>

$$f(x) = \cos x - x$$

In 5 Schritten : $0{,}7390851\ldots$

Das Verfahren scheint schnell zu sein!
Das Verfahren konvergiert aber nicht immer, es kommt offensichtlich auch auf die Güte des Startwerts an.

7.4. Sekantenverfahren

Wähle an Stelle der Tangente im Punkt $(x_n, f(x_n))$ und dem Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse die Sekante zwischen $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$ und ermittle den Schnittpunkt mit der x-Achse.

Startwerte: x_0, x_1

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$= \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Im Prinzip gilt dasselbe wie beim Newton-Verfahren.

Wir werden uns im Folgenden mit Verfahren beschäftigen: x_0 (Startwert)

eine Fkt ϕ $\quad x_{n+1} = \phi(x_n)$

§ 8 Das allg. Iterationsverfahren und der Fixpunkt von Banach.

Def. 8.1

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
V heißt <u>normierter Raum</u>, falls es auf V eine Norm gibt, d.h. Abb.

$$\| \; \| \quad V \to \mathbb{R} \text{ mit}$$

(N1) $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \, \|v\|$ $\quad \forall v, \in V$

(N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ $\quad \forall w, \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(Dreiecksungleichung)

Bsp.

a) In einem normierten Vektorraum kann man den Abstand zwischen Vektoren v und w festlegen. $\|v-w\|$

b)
α) $V = \mathbb{R}$, $|\ |$

$(\mathbb{R}, |\ |)$ ist ein normierter VR.

β) $\mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v^2}$ ↙ euklidische Norm

$(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$ ist normierter Vektorraum

γ) $\mathbb{R}^n$, $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$

$(\mathbb{R}^n, \|v\|_1)$ ist auch ein nor. Vektorraum

δ) $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|v\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (|v_i|)$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein norm. Vektorraum

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= \{(x_1, x_2) \mid \|x\|_2 \leq 1\} \\ S_1 &= \{(\quad) \mid \|x\|_1 \leq 1\} \\ S_\infty &= \{\quad \mid \|\cdot\|_\infty \leq 1\} \end{aligned}\right\} \text{Einheitskreise}$$

ε) $\mathcal{C}[a,b]$, $\|\cdot\|_\mathcal{C}$, $\|f\|_\mathcal{C} = \max\limits_{x \in [a,b]} (|f(x)|)$

τ) $\mathcal{C}[a,b]$, $\|\cdot\|$. $\int_a^b |f(x)| \, dx = \|f\|$

$\int_a^b |f(x)| \, dx = 0$, $a < b$

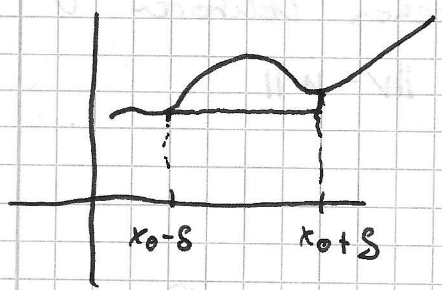
Klar ist $\int_a^b |\Theta(x)| = 0$

Es sei also $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, z.z. $f = \Theta$

<u>Annahme:</u>

f sei nicht die Nullfunktion

$\Rightarrow \exists x_0 \quad |f(x_0)| > 0 \quad x_0 \in [a,b]$



$|f|$ ist stetig $\Rightarrow \exists$ eine Umgebung $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ mit $|f(y)| > 0 \quad \forall y \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ $|f|$ nimmt auf $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ sein Minimum an. $f(y_0) > 0$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \geq |f(y_0)| \cdot 2\delta > 0$$

<u>Def. 8.2</u>

Es sei V ein normierter Vektorraum.

a) Eine Folge (v_n) von Vektoren aus V heißt konvergent gegen $v_0 \in V$

$\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ exist. n_ε:

$\|v_n - v_0\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

b) (v_n) heißt Cauchy Folge $\Leftrightarrow$

zu jedem $\varepsilon > 0$ exist n_ε

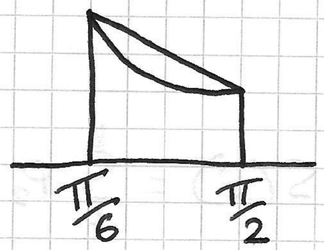
$\|v_n - v_m\| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_\varepsilon$

Numerik Übung

Aufgabe 19

Berechnen Sie Näherungswerte für $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx$

a) Trapezregel

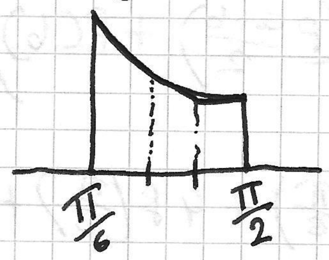


$$T(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{2}\left(f\left(\tfrac{\pi}{6}\right)+f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot(2+1) = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots$$

b) Zusammengesetzte Trapezregel

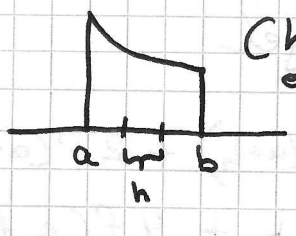


$T_N(f)$

(Unterteilung von $[a,b]$ in N gleichgroße Teilintervalle.)

$$T_N(f) = \frac{h}{2}\cdot f(a) + f(a+h) + \frac{h}{2}\left(f(a+h)+f(a+2h)\right) + \ldots$$
$$+ \frac{h}{2}\left(\left(f(a+N-1)h\right) + f(b)\right)$$

mit $\frac{b-a}{N} = h$



(h = Länge von einem Intervall)

$$= \frac{h}{2}\left(\left(f(a) + 2f(a+h) + \ldots + 2f(a+N-1)h + f(b)\right)\right)$$

$N = 3$

$$\Rightarrow h = \frac{b-a}{N} = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{9}$$

$$T_3(f) = \frac{\pi}{18} \cdot \left(f\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{9}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} + 2\,\frac{1}{\sin\frac{5}{18}\pi} + 2\,\frac{1}{\sin\frac{7}{18}\pi} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(2 + 2\cdot 1{,}3054 + 2\cdot 1{,}0642 + 1\right)$$

$$= 1{,}35074$$

c) Simpsonregel

$$S(f) = \int_a^b P_2(x)\,dx$$

P_2: Das Interpolations-polynom vom Grade ≤ 2

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\left(f\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{6}\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}} + 4\,\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} + 1\right.$$

$$= \frac{\pi}{18}\left(3 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$$

d) Zusammengesetzte Simpsonregel

$$S_{2N}(f) = \frac{2h}{6}\big(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h)$$
$$+ 4f(a+3h) + \ldots + 4f(a+2Nh) + f(b)\big)$$

$\boxed{\text{(2N kleine Teilintervalle) } [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, 1 \ldots, 2N}$

Für $2N = 4$ ist $h = \frac{b-a}{2N} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{4} = \frac{\pi}{12}$

$$S_4(f) = \frac{h}{3}\Big(\Big(f\Big(\frac{\pi}{6}\Big) + 4f\Big(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\Big) + 2f\Big(\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{12}\Big) +$$
$$4f\Big(\frac{\pi}{6}+3\frac{\pi}{12}\Big) + f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big)$$
$$= \frac{\pi}{36}\Big(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} + \frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{4}{\sin\frac{5}{12}\pi} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\Big)$$
$$= 1{,}31836587$$

Fehlerabschätzung

a) $\left| T(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|$

$$\Big[\text{Die Norm } \|f^k\| := \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)| \Big]$$

b) $\left| T_N(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{(b-a)h^2}{12} \|f''\|$

$$\Big[\xrightarrow{h \to 0} 0 \Big]$$

c) $\left| S(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|$

d) $\left| S_{2N}(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{(b-a)h^4}{180} \|f^{(4)}\|$

Wir benötigen für $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

$f'(x) = \frac{-1\ \cos x}{\sin^2 x}$, $f''(x) = \frac{\sin^2 x \cdot \sin x - (-\cos x)\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^4 x}$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$f'''(x) = \frac{-2\cos \sin^2 x - 3(\cos x + \cos^3 x)}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{-2\cos x\,(1-\cos^3 x) - 3\cos x - 3\cos^3 x}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{-\cos^3 x - 5\cos x}{\sin^4 x}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{\sin^4 x \cdot (-3\cos^2 x \cdot (-\sin x) + 5\sin x)}{\sin^8 x}$$

$$+ \frac{(\cos^3 x + 5\cos x) + 4\sin^3 x\ \cos x}{\sin^8 x}$$

$$= \frac{3\sin^2 x\cos^2 x + 5\sin^2 x + 4\cos^4 x + 20\cos^2 x}{\sin^8 x}$$

$$= \ldots = \frac{\cos^4 x + 18\cos^2 x + 5}{\sin^8 x}$$

Auf $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $\sin x > 0$ u. monoton wachsend

$\cos x \geq 0$ u. monoton fallend

Daher ist auch $\sin^3 x$ und $\sin^5 x$ monoton wachsend, $\cos^2 x$ und $\cos^4 x$ monoton fallend.

$\Rightarrow f''$ ist > 0 und monoton fallend, ebenso $f^{(4)}$

Daher ist $\|f''\| = \max\limits_{x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]} |f''(x)| = f''(\frac{\pi}{6})$

$$= \frac{1 + \cos^2 \frac{\pi}{6}}{\sin^3 \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}{(\frac{1}{2})^3}$$

$$= 8 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = 14$$

$$\|f^{(4)}\| = \max_{x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]} |f^{(4)}(x)|$$

$$= \frac{\cos^4 \frac{\pi}{6} + 18 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6} + 5}{\sin^5 \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^4 + 18(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + 5}{(\frac{1}{2})^5}$$

$$= \frac{(\frac{3}{4})^2 + 18\,\frac{3}{4} + 5}{1/32}$$

$$= 32 \cdot \left(\frac{9}{16} + \frac{27}{2} + 5\right)$$

$$= 18 + 27 \cdot 16 + 32 \cdot 5$$

$$= \underline{\underline{610}}$$

a) $\left| T(f) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx \right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^3}{12} \cdot 14$

$= \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 \cdot \frac{7}{6} = 1{,}3398$

b) $\left| T_3(f) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx \right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{9}^2}{12} \cdot 14$

$= \ldots = \frac{\pi^3}{243} \cdot \frac{7}{6} = 0{,}1489\ldots$

c) $\left| S(f) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \| f^{(4)} \|$

$= \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^5}{2880} \cdot 610 = \frac{\pi^5}{243} \cdot \frac{610}{2880}$

$= 0{,}2667$

d) $\left| S_4(f) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx \right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)^4 \cdot 610}{180}$

$= \frac{\pi^5 \cdot 610}{12^4 \cdot 3 \cdot 180} = 0{,}01667$

$S_4(f) = 1{,}31836587$

$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin \frac{x}{2}+\frac{x}{2}}\,dx$

$= \int \frac{1}{2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}\,dx$

1. Mögl.:

$$\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

$$\frac{u = \sin\frac{x}{2}}{du = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx} \qquad \int \frac{1}{\cancel{2}\,u(1-u^2)}\,du$$

Weiter mit Partialbruchzerlegung...

2. Mögl

$$= \int \frac{1}{2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}} \cdot \tan'\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Exakter Wert:

$$\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(\tan\frac{\pi}{12}\right) = 1{,}316957897\ldots$$

§8 Fixpunktsatz von Banach

- normierter Vektorraum

Def. 8.2

V ein normierter VR.

a) (V_n), $V_n \in V$, $v_n \to v_0 \iff$ zu jedem $\varepsilon > 0$ exist. $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\| V_n - V_0 \| < \varepsilon$ $\forall n \leq \varepsilon_n$

b) (V_n) heißt Cauchy-Folge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ exist. n_ε $\| V_n - V_m \| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_\varepsilon$

Bem.

Jede konver. Folge ist eine Cauchy Folge, umgekehrt ist nicht jede Cauchy Folge notwendigerweise konvergent.

Def. 8.3

Ein normierter VR V heißt Banach-Raum falls er vollständig ist, d.h. jede Cauchy Folge konvergiert.

Bsp.

a) $((\mathbb{R}), |\cdot|)$ ist ein Banach Raum, denn in $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy Folge konvergent.

b) $\mathbb{R}^n$ ist mit jeder der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ ein Banach-Raum

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $x_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_k^{(n)} \end{pmatrix}$

Mittels der Dreiecksungleichung rechnet man für jede der drei Normen aus $(x_k) \Rightarrow x_0 \Longleftrightarrow$

$$x_1^{(k)} \longrightarrow x_1^{(0)} \quad \circledast$$
$$x_n^{(k)} \longrightarrow x_n^{(0)}$$

Jetzt nutzt man das Ergebniss für $\mathbb{R}^n$ aus.
Ist (x_k) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$, so ist für jedes ν $(1 \leq \nu \leq n)$. $x_k^{(\nu)}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert sonst gegen $x_0^{(\nu)} \Rightarrow$ Besteht wegen $\circledast$

c) $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist auch ein Banach-Raum

$(f_1), \dots (f_n)$ Cauchy-Folge

d.h. $\exists$ z, $\varepsilon > 0$ ein n_ε.

$$\|f_n - f_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_\varepsilon$$

Wähle ein festes $x \in [a,b] \Rightarrow f_n(x)$ ist Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ also dort konvergent gegen $f(x)$

So konstruiert um f, z.z. bleibt f stetig.

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(y) - f(y) - f_n(y_n) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(y) - f(y)| + |f_n(y) - f_n(x)|$$

d) $\mathcal{C}[a,b]$, $\|\cdot\|$, $\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx$

$\mathcal{C}[a,b]$ ist unter dieser Norm nicht vollständig.

f_n bildet eine Cauchy Folge.

Aber der mögliche Grenzwert, nämlich die Fkt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x < \frac{a+b}{2} \\ 1 & \text{für } x > \frac{a+b}{2} \end{cases}$$ liegt nicht in

$\mathcal{C}[a,b]$.

Def. 8.4

$f: V \to V$, V Vektorraum

$x_0 \in V$ heißt Fixpunkt von $f \iff f(x_0) = x_0$

Bem

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 Fixpunkt $f \iff F(x) = f(x) - x$ in x_0 eine NS besitzt.

Satz 8.5

Fixpunktsatz von Banach

V sei ein Banach-Raum mit der Norm $\|\cdot\|$. Die Abbildung $f: V \to V$ sei kontrahierend:

$$\|f(v) - f(u)\| \leq d \cdot \|v-u\| \qquad \forall v,w \in V$$
$$d \in [0,1[$$

Dann gilt f besitzt genau einen Fixpunkt v^*

Dieser Fixpunkt v^* lässt sich mit dem allg. Iterationsverfahren (Picard'sche Iteration) berechnen

v_0 Startwert, $v_{n+1} = f(v_n)$ dann $v_n \to v^*$

Es gilt die Fehlerabschätzung $|v_n - v^*| \leq \frac{d^n}{1-d} \|v_0 - v_1\|$

Bew

$$\|v_2 - v_1\| = \|f(v_1) - f(v_0)\|$$
$$\leq d\, \|v_1 - v_0\|$$

$$\|v_3 - v_2\| = \|f(v_2) - f(v_1)\|$$
$$\leq d\, \|v_2 - v_1\|$$
$$\leq d^2 \cdot \|v_1 - v_0\|$$

$$\|v_{n+1} - v_n\| = \|f(v_n) - f(v_{n-1})\|$$
$$\le \alpha^n \cdot \|v_1 - v_0\| \qquad \text{(volls. Induktion)}$$

Wir wollen zeigen v_n ist eine Cauchy-Folge

$$\|v_{n+p} - v_n\| \le \|v_{n+p} - v_{n+p-1}\| + \|v_{n+p-1} - v_{n+p-2}\| \dots$$
$$\|v_{n+1} - v_n\|$$

$$\le \alpha^{n+p-1}\|v_1 - v_0\| + \alpha^{n+p-2}\|v_1 - v_0\| + \dots$$
$$+ \alpha^n \|v_1 - v_0\|$$

$$= \alpha^n \|v_1 - v_0\| \left\{ \underbrace{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{p-1}}_{\text{Anfang einer geometrischen Reihe}} \right\}$$

$$\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|v_1 - v_0\|$$

Für $n \to \infty$ strebt dieser Ausdruck gegen 0.

<u>Nebenbei.</u>

Die geomet. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ konvergiert für $|\alpha| < 1$

mit den Grenzwert $\frac{1}{1-\alpha}$

v_n ist Cauchy Folge. Da V ein Banach-Raum ist, also vollständig, exist v^* mit $v_n \to v^*$

v^* ist ein Fixpunkt, denn $\|v^* - f(v^*)\|$

$= \|\lim v_n - f(\lim v_n)\| = \|\lim v_n - \lim f(v_n)\|$

Wegen der Stetigkeit von f

$= \|\lim (v_n - v_{n+1})\| = 0$

$\Rightarrow$ Auf Grund der Normeigenschaft

$$v^* = f(v^*), \quad v^* \text{ ist Fixpunkt.}$$

Es bleibt die Ungleichung.

$$\|v_n - v^*\| = \|v_n - \lim_{p\to\infty} v_{n+p}\|$$

$$\leq \lim_{p\to\infty} \|v_n - v_{n+p}\| \quad [\text{Stetigkeit}]$$

$$\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|v_1 - v_0\|$$

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen

Ann.: Es exist. mind. 2 Fixpunkte v^* und w^*

$$\|v^* - w^*\| = \|f(v^*) - f(w^*)\|$$

$$\leq \alpha \|v^* - w^*\| \quad \alpha \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \|v^* - w^*\| = 0$$

$$\Rightarrow v^* = w^*$$

Bem 9.6.

a) Ist eine Abb. $f: V \to V$ (V- Banach Raum) schwach kontrahierend, d.h. $\|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$, so kann man im Allg. nicht auf die Existenz eines Fixpunktes schließen.
Falls er existiert ist er eindeutig bestimmt (siehe Beweisteil des Banach'schen Fixpunktsatzes).

b) Die Aussage des Banach'schen Fixpunktsatzes bleibt auch erhalten, falls die Abb. $f: A \to A$ (wobei A eine abgeschlossene, nicht leere Teilmenge von V ist.)
$[\text{z.B. } A = \{x \mid \|x\| \leq r\}]$

Damit ist gemeint: Die Abb. $f: A \to A$ ist kontrahierend und der Startwert $x_0 \in A$ ...

Satz 9.7

$f[a,b] \to [a,b]$, f sei stetig differenzierbar

Dann gilt: f ist kontrahierend, genau dann, wenn
$$\|f'\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$$

Bew.

„$\Rightarrow$" f sei kontrahierend, d.h.
$$|f(x)-f(y)| \leq \alpha \cdot |x-y| \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \alpha$$
$\forall x,y \quad x \neq y$

$$|f'(x)| = \left| \lim_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq \alpha$$

$$\forall x, y \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \|f'\|_{\mathcal{C}} \leq \alpha < 1$$

"$\Leftarrow$"

nach dem MWS: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$

$(x \neq y)$

$$|f(x) - f(y)| < |f'(\xi)| \cdot |x-y|$$
$$\leq \underbrace{\|f'\|_{\mathcal{C}}}_{\alpha} \; \|x-y\| = \alpha \cdot |x-y|$$

Def 9.8 Konvergenzordnung

Konstruiere eine Folge $x_{n+1} = f(x_n)$, x_0

$x_n \to x^*$

Dann betrachte den Fehler $\varepsilon_n = \|x_n - x^*\|$

Das Verfahren konvergiert von der Ordnung p, falls

$$\varepsilon_{n+1} \leq C \cdot \varepsilon_n^p \quad \forall n$$

mit $0 \leq C$ falls $p > 1$

falls $p = 1$ dann $0 \leq C < 1$

Im Fall $p=1$ spricht man von linearer Konvergenz

für $p > 1$ spricht man von superlinearer Konvergenz

für $p = 2$ " " " quadratischer "

für $p = 3$ " " " kubischer "

Satz 9.9

Es gelten die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes, dann konvergiert das allg. Iterationsverfahren mind. linear.

__Beweis__

$$\varepsilon_{n+1} = \| f(x_n) - x^* \| = \| f(x_n) - f(x^*) \|$$
$$\leq \alpha \| x_n - x^* \| = \alpha \cdot \varepsilon_n$$

$$0 \leq \alpha < 1$$

Satz 9.10

f sei p-mal stetig differenzierbar

$x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$ sei konvergent gegen x^*, und $f^{(\nu)}(x^*) = 0$ $(1 \leq \nu \leq p-1)$

Dann konvergiert das Verfahren mind. von der Ordnung p.

__Bew.__

Die Taylorformel im Punkt x^* von der Ordnung p.

$$f(x) = f(x^*) + \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{f^{(\nu)}(x^*)}{\nu!} (x - x^*)^\nu + \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!} (x - x^*)^p$$

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!} \cdot (x - x^*)^p$$

Setze $x = x_n$

$$x_{n+1} = x^* + \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}(x_n - x^*)^r$$

$$\varepsilon_{n+1} \leq C \cdot \varepsilon_n^r$$

$$C = \max_{x \in [a,b]} |f^{(r)}(x)| = \|f^{(r)}\|_\infty$$

Anwendung auf das Newton-Verfahren

$$x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wir wollen die NS'en von f berechnen.

Dazu betrachte $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, φ hat einen Fixpunkt $(\varphi(x^*) = x^*) \iff f(x^*) = 0$

Die NS Bestimmung von f ist dasselbe, wie die Berechnung der Fixpunkte von φ.

Wende auf φ die Ergebnisse des Banach'schen Fixpunktsatzes an.

Satz 9.11

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f sei zweimal stetig diff.

mit folg. Bedingungen:

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Darüberhinaus gilt, dass $\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq d < 1 \quad \forall x$

So konvergiert das Newtonsche Iterationsverfahren bei bel. Startwert x_0 gegen die eindeutig bestimmte NS x^* von f.

<u>Beweis</u>

Prüfe die Voraussetzungen des Banach-schen Fixpunktsatzes für φ nach:

Kontraktionseigenschaft (vgl. Satz 9.7)

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= \frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| = \max \frac{|f(x)\cdot f''(x)|}{(f'(x))^2} \leq \alpha < 1$$

Folg. 9.12

Unter den Voraussetzungen von Satz 9.11 konvergiert das Newtonverfahren mind. quadratisch

<u>Beweis</u> Nutze Satz 9.10 aus und zeige $\varphi'(x^*) = 0$

Dann folgt die Behauptung aus Satz 9.10

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)\cdot f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

Wir haben uns überlegt, dass der Banach-sche Fixpunktsatz auch für abgeschlossene Mengen gilt.

Satz 9.13

f sei 2-mal stetig differenzierbar auf $[a,b]$

α) $f'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$

β) $\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{(f'(x))^2} \leq \mathcal{L} < 1 \qquad \forall x \in [a,b]$

γ) $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in [a,b] \qquad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ f besitzt auf $[a,b]$ genau eine NS x^*, die mit dem Newtonverfahren berecherbar ist. $x_0 \in [a,b]$

<u>Beweis</u>

Betrachte $\varphi\ [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

dann gilt $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$, wende jetzt den Banach-schen Fixpunktsatz an.

Nullstellenbestimmung

Gegeben: $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, stetig
Gesucht: Eine NS $\bar{x}$ von f

Bsp. $f(x) := \cos x - x$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \cos 0 = 1 > 0 \\ f(1) = \cos 1 - 1 < 0 \end{array}\right\} \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists \bar{x} \in [0,1] \, . \, f(\bar{x}) = 0$$

Aufg. 23

a) Bisektionsverfahren

Anfangsintervall $[a_0, b_0] := [a, b] := [0, 1]$ mit $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

$$x_n := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, x_n], & \text{falls } f(a_n) \cdot f(x_n) < 0 \\ [x_n, b_n], & \text{falls } f(b_n) \cdot f(x_n) < 0 \end{cases}$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$
0	0	1	0,5	1	-0,460	0,378
1	0,5	1	0,75	0,378	-0,460	-0,018
2	0,5	0,75	0,675	0,378	-0,018	0,186
.	.	.	.	.	.	.
5	0,7187	0,75	0,7343	0,034	-0,018	0,0079

Näherungsweise - Nullstelle

b) Regula Falsi

Wie a) aber als nächste Näherung nicht die Intervallmitte, sondern den Schnittpunkt der Sekante durch die Punkte $(a, f(a)), (b, f(b))$

ergibt:

$$x_n = \frac{a_n (f(b_n)) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$
0	0	1	0,68507	1,0	-0,460	0,089
1	0,68507	1	0,73630	0,089	-0,460	0,004
2	0,73630	1	0,73895	0,004	-0,460	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$
3	0,73895	1	0,739078	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$	-0,460	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$

c) Newton Verfahren (sofern f differenzierbar)

Idee: Startwert x_0 vorgeben

Für $n = 0, 1, 2 \ldots$

Berechne x_{n+1} als Schnittpunkt der Tangente mit dem Graphen von f in x_0 mit der x-Achse (d.h. NS der Tangente)

Andere Interpretation: Ersetze f durch das Taylorpolynom 1. Grades mit x_0 als Entwicklungspunkt. Berechne x_1 als NS dieses Taylorpolynoms. Wiederhole dies für x_{n+1} $n = 0, 1, 2 \ldots$

Ergibt:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 := x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Allg.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , n = 0, 1, 2 \ldots$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	1	-1
1	1	$-0{,}460$	$-1{,}84$
2	$0{,}75036$	$-1{,}9 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}68$
3	$0{,}73911$	$-4{,}6 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}67$
4	$0{,}73906..$	$-2{,}8 \cdot 10^{-10}$	$-1{,}67$
5	$0{,}73908..$	$0{,}0$	$-1{,}67$

d) Sekantenverfahren

Wie regula falsi, aber ohne Vorzeichenabfrage.
Für a_n, b_n werden stets die beiden letzten Näherungen genommen.

Ergibt: $$x_{n+1} = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\left[= \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right]$$

Andere Interpretation

Wie Newton, aber $f'(x_n)$ wird durch

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$ ersetzt.

Fazit: Etwas mehr Schritte als beim Newtonverfahren nötig, aber man benötigt nicht in jedem Schritt $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ sondern es wird nur $f(x_n)$ berechnet.

Aufgabe 24

Sei f stetig differenzierbar und konvex, d.h.

$$(*) \quad f(y) - f(x) \geq f'(x)\cdot(y-x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Außerdem sei $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, und f besitzt eine NS $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Beweise:

a) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \bar{x}$

b) $x_n \geq \bar{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $\bar{x} \leq x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

Beweis

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow x < \bar{x} \Rightarrow f(x) < f(\bar{x}) = 0$

und $x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > f(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \bar{x}$

b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

zu zeigen: $x_{n+1} \geq \bar{x}$

Da f Konvex ist gilt:

$$f(y) - f(x) \geq f'(x) \cdot (y - x)$$

Mit $y := x_n$ und $x = \bar{x}$ erhält man

$f(x_n) - \underbrace{f(\bar{x})}_{=0} \geq \underbrace{f'(\bar{x})}_{>0} (x_n - \bar{x})$, bringt im

Moment nichts.

mit $y := \bar{x}$ und $x = x_n$ erhält man

$$\underbrace{f(\bar{x})}_{0} - f(x_n) \geq \underbrace{f'(x_n)}_{>0}(\bar{x} - x_n)$$

Dies ergibt: $\dfrac{-f(x_n)}{f'(x_n)} \geq \bar{x} - x_n$ und damit

$$\underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{x_{n+1}} \geq \bar{x}$$

also $x_{n+1} \geq \bar{x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ d.h. $x_n \geq \bar{x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $\overline{x} \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

ist schon in b) bewiesen.

Bleibt zu zeigen $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Es ist $x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{>0}$

da $f(x_n) > 0$ wegen $x_n > \overline{x}$ nach b) und a)
und $f'(x_n) > 0$ nach Voraussetzung.

d) Nach c) ist x_n monoton fallend und nach unten beschränkt. Also konvergiert x_n.

Sei $x^* := \lim_{n \to \infty} x_n$

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$

folgt $x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)$

$= \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$= x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$

$\Rightarrow f(x^*) = 0$

$\Rightarrow x^* = \overline{x}$

da f streng monoton wachsend ist.

Vorlesung Numerik 3.12.12

Bem.

a) Bei einer einfachen NS konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch.

b) $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ und $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$

Ferner habe f in $\xi \in]a,b[$ eine NS.

Dann existiert eine Umgebung $U = [\xi - \delta, \xi + \delta]$ $\subset [a,b]$ sodass für bel. Startwert $x_0 \in U$ das Newtonverfahren gegen ξ konvergiert.

c) Die Aussage b) rechtfertigt folgende Vorgehensweise. Man besorge sich einen möglichst guten Startwert x_0, z.B. durch das Intervallhalbierungsverfahren, dann rechne mit dem Newtonverfahren weiter.

d) Das Newtonverfahren konvergiere gegen die NS ξ, habe aber darin eine mehrfache NS, also z.B. $f'(\xi) = 0$, $f'(x) \neq 0$ $\forall x \neq \xi$

Dann konvergiert das Newtonverfahren (siehe. Allg. Iterationsverfahren) nur linear.

Bsp.

Heronverfahren zur Bestimmung von $\sqrt{a}$, $a > 0$

Das Heronverfahren basiert auf dem Newtonverfahren, nämlich bestimmt die positive NS von $f(x) = x^2 - a$

x_0 Startwert, $x_0 > 0$

$$x_{n+1} = x_1 - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$

Es gilt:

Das Heronverfahren konvergiert für einen positiven Startwert x_0 gegen $\sqrt{a}$, mehr noch $x_n \geq \sqrt{a}$

$x_n \searrow \sqrt{a}$, $n \in \mathbb{N}$

<u>Beweis</u>

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0$$

Da x_n positiv ist $(\forall n)$, folgt $x_n \geq \sqrt{a}$

Weiter ist für $n \geq 1$

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x_n^2 - a}{x_n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(x_n^2 - a)\underbrace{\frac{x_n^2 - a}{x_n^2}}_{<1} < \frac{1}{4}(x_n^2 - a)$$

$x_n > x_{n+1} \Rightarrow (x_n)$ ist also streng monoton fallend und nach unten beschränkt.

$\Rightarrow (x_n)$ ist konvergent

$$0 \leq x_{n+1}^2 - a < \underbrace{\frac{1}{4}(x_n^2 - a)}_{0}$$

$\Rightarrow x_{n+1}^2 - a \Rightarrow 0$, d.h. $x_1 \Rightarrow \sqrt{a}$

§ 10 Auswertung von Polynomen

Horner-Schema

Dient zur Berechnung von Funktions- und Ableitungswerten von Polynomen.
Dieses Schema ist leicht und übersichtlich und es treten wenig Rundungsfehler auf, da nur Aditionen und Multiplikationen durchgeführt werden.

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Berechne $P_m(b)$. ($b \in \mathbb{R}$, fest gewählt)

$$P_m(x) : (x-b) = P_{m-1}(x) + \frac{a_0'}{x-b}$$

Falls man eine solche Darst. hat ist das Problem gelöst, dann kann ich schreiben:

$$P_m(x) = P_{m-1}(x)(x-b) + a_0'$$

Hieraus resultiert $P_m(b) = a_0'$

$$(a_m x^n + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0) : (x-b) =$$

$$a_m \cdot x^{m-1} + \ldots + \frac{a_0'}{x-b} = P_{m-1}(x) + \frac{a_0'}{x-b}$$

[Durchschrittliche Division]

$$P_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1}' \cdot x^i$$

$$a_m' = a_m \qquad \ldots \quad a_0' = a_1' \cdot b + a_0$$

$$a_{m-1}' = a_m' \cdot b + a_{m-1}$$

$$a_{m-2}' = a_{m-1}' \cdot b + a_{m-2}$$

Schema

	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	$\dots$	a_1	a_0
b	$-$	$b a'_m$	$b a'_{m-1}$		$b a'_2$	$a'_1 b$
	a'_m	a'_{m-1}	a'_{m-2}	$\dots$	a'_1	$a'_0 = P_m(b)$

Bsp.

a) $p(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x - 7$, $P(5)$

	1	-3	5	2	-7
5	$-$	5	10	75	385
	1	2	15	77	$378 = P(5)$

b) Null nicht vergessen

$p(x) = x^3 - x + 1$, $b = 2$

	1	0	-1	$+1$
2	$-$	2	4	6
	1	2	3	7

Wir setzen dieses Divisionsverfahren fort.

$$P_m(x) = P_{m-1}(x-b) + a'_0$$

$$P_{m-1}(x) = P_{m-2}(x-b) + a''_1$$

$$P_{m-2}(x) = P_{m-3}(x-b) + a'''_2 \quad \dots$$

$$\vdots$$

$$P_1(x) = P_0(x) \cdot x - b + a_{m-1}^{(m)}$$

$$P_0(x) = a_m^{(m+1)}$$

Setzen wir das ein, so erhalten wir

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i^{(i+1)} (x-b)^i$$

$\Rightarrow$ Taylorformel

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{P^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i$$

Der Koeff. vergleich liefert $a_i^{(i+1)} = \dfrac{P^{(i)}(b)}{i!}$

Diese Koeff. $a_i^{(i+1)}$ berechnet man mit dem fortgesetzten Hornerschema, dieses nennt man auch vollständiges Hornerschema.

Damit berechnet man die Ableitungswerte

$$\frac{P^{(i)}(b)}{i!}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
b & & \cdot b \ \ b a'_m & \cdot b \ \ b a'_{m-1} & & & & & \\
\hline
 & a'_m & a'_{m-1} & a'_{m-2} & \dots & a'_3 & a'_2 & a'_1 & \underbrace{a'_0}_{= P_m(b)} \\
b & & b a''_m & b a''_{m-1} & \dots & & & & \\
\hline
 & a''_m & a''_{m-1} & a''_{m-2} & \dots & & & a''_1 = P'_m(b) & \\
b & & b a'''_m & & & & & & \\
\hline
 & a'''_m & \dots \ a'''_{m-1} & & & & a'''_2 = \dfrac{P''_m(b)}{2!} & &
\end{array}$$

Bsp

Fortsetzung von Bsp. a) siehe nächste Seite

	1	2	15	77	378
		5	$7\cdot5=35$	250	
5	1	7	50	327	$= P'(5)$

Numerik Vorlesung 6.12.12

§ 9 Auswertung von Polynomen

Mit dem Hornerschema lässt sich „einfach"
$P(b)$, P: Polynom, $b \in \mathbb{R}$
Mit dem vollständigen Hornerschema ... $P'(b)$

Allg. Bem.

Das Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ heißt reelles Polynom, falls $a_k \in \mathbb{R}$ $(0 \leq k \leq m)$
Ein reelles Polynom hat höchstens m reelle NS, falls m der Grad des Polynoms ist.
Ein solch reelles Polynom P lässt sich auch über $\mathbb{C}$ betrachten. ($\mathbb{C}$: Kompl. Zahlen)
Dann besagt der Fundamentalsatz der Algebra:
P hat unter Berücksichtigung der Vielfachheit genau m NS (Komplexe)
P hat eine NS der Vielfachheit k in ξ, falls
$P(z) = (z - \xi)^k \cdot Q(z)$, $Q(\xi) \neq 0$
Ist z auch $\mathbb{C}$ Nullstelle des reellen Polynoms P so ist automatisch auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ NS von P.

$$\left[\begin{array}{l} z = a + ib \\ \bar{z} = a - ib \end{array}\right]$$

denn $P(z) = 0 \Rightarrow \overline{P(z)} = 0$

$$= \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} \cdot \overline{z}^k, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z})$$

In den Fällen $m = 1,2$ kann evt. vorhandene NS explizit berechnen, auch noch schwieriger für $m=3$ und teilweise $m=4$, dann a für $m > 4$ nicht mehr.
Folglich dann Anwendung von Iterationsver., zur NS-Bestimmung z.B. das Newtonverfahren.

Bestimmung Heronverfahren

Bestimmung von $\sqrt{a}$, $a > 0$
Wende das Newtonverfahren auf $x^2 - a$ an.

$$x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Dieses Verfahren konvergiert bel. Startwert $x_0 > 0$ streng monoton fallend gegen $\sqrt{a}$
$x_n \searrow \sqrt{a}$ $(n \in \mathbb{N})$
Dieses Ergebnis und die Beweistechnik ergeben:

<u>Satz 9.4</u>

P, reelles Polynom von Grad $\leq m$ mit den <u>reellen</u> NS $\xi_1 \geq .. \geq \xi_m$, wobei die einzelnen gemäß der Vielfachheit aufgeführt sind. Dann liefert das Newtonverfahren für alle Startwerte $x_0 > \xi_1$ eine gegen ξ_1 konvergierte, streng monoton fallende Folge.

Dies ergibt die Frage: Wo können eigentlich reelle NS eines geg. Polynoms liegen?

Erschließungssatz

Satz 9.5

$$P(x) = a_m x^m + \dots + a_0 \qquad a_m \neq 0$$

Es sei $M = \max\left(1, m \cdot \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right|, \dots, m \cdot \left|\frac{a_0}{a_m}\right|\right)$

Dann liegen alle mögl. NS in $\mathbb{R}$ von P in $[-M, M]$

Beweis

$$P(x) = a_m x^m \Big(1 + \overbrace{\frac{a_{m-1}}{a_m x} + \dots + \frac{a_0}{a_m x^m}}^{b}\Big)$$

Dieses Produkt ist sicher $\neq 0$, falls $x \neq 0$ und falls $|b| < 1$ ist.

$$\frac{1}{|x|^k} \leq \frac{1}{|x|} \qquad \text{für } |x| \geq 1$$

$$m \cdot \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right| \leq M, \quad \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right| \leq \frac{M}{m}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{m-k}}{a_m}\right| \leq \frac{M}{m}, \quad \left|\frac{a_{m-k}}{a_m}\right| \cdot \frac{1}{|x^k|} \leq \left|\frac{a_{m-k}}{a_m}\right| \cdot \frac{1}{|x|}$$

$$\frac{a_{m-k}}{a_m} \leq \frac{x}{m}, \quad x \geq M \qquad < \frac{1}{m}$$

$$\left|\frac{a_{m-k}}{a_m x}\right| < \frac{1}{m}$$

$$|b| \leq \underbrace{\left|\frac{a_{m-1}}{a_m x}\right|}_{< \frac{1}{m}} + \ldots + \underbrace{\left|\frac{a_0}{a_m x^m}\right|}_{< \frac{1}{m}} < 1$$

$\Rightarrow$ Behauptung

<u>Satz 9.6</u>

$$p(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$$

a) $$M_1 = \max \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right|, \sqrt[2]{\left|\frac{a_{m-2}}{a_m}\right|}, \ldots, \sqrt[m]{\left|\frac{a_0}{a_m}\right|}$$

Dann liegen alle möglichen NS in $]-2M_1, 2M_1[$

b) Alle NS liegen in $M_2 = \max \left\{1, \sum_{\mu=0}^{m-1} \left|\frac{a_\mu}{a_m}\right|\right\}$

$[-M_2, M_2]$

c) Alle NS liegen in $M_3 = \max \left\{ \left|\frac{a_0}{a_m}\right|, 1 + \left|\frac{a_1}{a_m}\right|, \ldots \right.$

$\left. \ldots, 1 + \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right| \right)$ in $[-M_3, M_3]$

Welche Abschätzung davon günstig ist muss man im Einzelfall sehen.

$$p(x) = x^3 - 8x^2 + \frac{51}{4}x - \frac{9}{2}$$

$$M = \max\left(1, 3 \cdot 8, 3 \cdot \frac{51}{4}, 3 \cdot \frac{9}{2}\right\}$$

$\Rightarrow$ Alle NS liegen in dem Bereich

$\left[-\frac{153}{4}, \frac{153}{4}\right]$

$$M_1 = \max\left(8, \sqrt[2]{\frac{51}{2}}, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right) = 8$$

$\Rightarrow$ Alle NS liegen in dem Bereich

$[-16, 16]$

Satz 9.7

$P \in \Pi_m$, mit den reellen NS $y_1 \dots y_m$

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $P'(x_0) = 0$, $\varrho = m \cdot \frac{|P(x_0)|}{|P'(x_0)|}$

Dann liegt mind. eine NS y_i im Intervall $[x_0 - \varrho, x_0 + \varrho]$

Bew. $a_m \neq 0$

$$P(x) = a_m (x - y_1)(x - y_m)$$

Ist $x \neq y_j \quad (1 \leq j \leq m)$

$$\left| \frac{P'(x)}{P(x)} \right| = \left| \frac{1}{x - y_1} + \dots + \frac{1}{x - y_m} \right|$$

$$\leq \frac{m}{\min |x - y_j|} \quad (1 \leq j \leq m)$$

$$\Rightarrow \min_{1 \leq j \leq m} |x_0 - y_j| \leq m \cdot \left| \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} \right|$$

$$= \varrho$$

Approximation in normierten Räumen

Es sei V ein norm. VR., $X \subseteq V$, $v_0 \in V$

Approximationskonstante $E_X(v_0) = \inf \|v_0 - v\|$, $v \in X$

Existiert so eine Beste Approximation an v_0 durch Elemente aus X:

$$\exists \bar{x} : \|v_0 - \bar{x}\| = \inf \|v - v_0\| \quad , v \in X$$

Wenn ja, ist diese eindeutig bestimmt?

$(\mathbb{R}^2, \| \ \|_2)$, $v_0 = (0,2)$, $X = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| \leq 1 \}$

Das Element bester App. ist das Element $(0,1)$ [siehe Einheitskreis] an v_0.

$(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$ $\| \ \|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$

Gesucht: Beste App. $v_0 = (0,2)$ durch $\hat{X} =$

$\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_\infty \leq 1 \}$ [siehe Einheitskreis]

Jedes Element der Form $(x,1)$ mit $-1 \leq x \leq 1$ mit bester App. an v_0.

7.12.12

Übung Numerik

Fixpunktiteration

In $\mathbb{R}$ äquivalente Aufgabenstellungen NS-Bestimmungen: Suche ein $\bar{x}$ mit $f(\bar{x}) = 0$.
Fixpunktbestimmung: Suche ein x^* mit $\phi(x^*) = x^*$.

$f(\bar{x}) = 0 \implies \bar{x}$ ist Fixpunkt für z.B.
$\phi(x) = x + f(x)$ oder für $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (Newton)
usw.
Stets ist dann $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$

$\phi(x^*) = x^* \implies x^*$ ist NS von z.B.
$f(x) = \phi(x) - x$ (es ist $f(x^*) = 0$)

Unterschied

Fixpunktproblem kann auf allg. metrische Räume (X, d) übertragen werden.

Lösungsansatz für Fixpunktproblem:

sei $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ geg. (Startwert)
Bilde (x_n), $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$
Unter geeignenten Vorraussetzungen konvergiert x_n gegen den Fixpunkt x^* von ϕ.

Banachschen Fixpunktsatz (BFPS)

Vorraussetzungen: (1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine abg., nicht leere Menge.

② Für $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ gelte $\phi([a,b]) \subset [a,b]$

③ ϕ sei „kontrahierend", d.h. es gebe ein $\alpha \in [0,1[$ mit

$$(*) \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq \alpha \, |x-y|$$

für alle $x, y \in [a,b]$

Bem.

Ist ϕ stetig diff., so gilt $(*)$ genau dann, wenn

$$(**) \quad |\phi'(x)| \leq \alpha \qquad \forall x \in [a,b]$$

Dann exist. genau ein Fixpunkt x^* von ϕ und für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ konvergiert die Folge (x_n), $x_{n+1} := \phi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ gegen x^*

Dabei gilt $|x_n - x^*| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \, |x_1 - x_0|$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \, |x_n - x_{n-1}|$$

Aufgabe 27

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - 1$ besitzt im $I := [0{,}66, 0.7]$ genau eine NS x^*

a) Zeige, dass x^* Fixpunkt von ϕ ist für

(i) $\phi(x) := 1 - x^3$ (ii) $\phi(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(iii) $\phi(x) := \sqrt[3]{1-x}$

Lösung:

(i) $f(x) = x^3 + x - 1 = 0 \iff x = 1 - x^3 = \phi(x)$

(ii) $f(x) = x^3 + x - 1 = 0 \iff 1 = x + x^3$

$$\iff \frac{1}{1+x^2} = x$$

$$\iff \phi(x) = x$$

(iii) $f(x) = x^3 + x - 1 = 0 \iff x^3 = 1 - x$

$$x = \sqrt[3]{1-x} = \phi(x)$$

b) Welche der Funktion ϕ aus a) erfüllt den BFPS?

(1) $I = [0{,}66, 0.7]$ ist abgeschlossen und nicht leer.

Für (2) und (3) benötigen wir $\phi'(x)$

(i) $\phi'(x) = -3x^2$

(ii) $\phi'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

(iii) $\phi'(x) = \frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = \frac{1}{3} \dfrac{-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

Alle Funktionen sind monoton fallend zu (2):

(i) $\phi([0.66, 0.7]) = [\phi(0.7), \phi(0.66)]$

$$= [1 - 0{,}343, 1 - 0{,}66^3]$$

(ii) $\phi([0.66, 0.7]) = [0.6711, 0.6966]$

(iii) analog

zu (3): (i) $|\phi'(x)| = 3x^2 > 1$, nicht kontrahierend

(ii) $|\phi'(x)| = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \leq \dfrac{2 \cdot 0.7}{(1+0.66^2)^2} = \dfrac{1.4}{2.0609}$

$$= 0.6793$$

(iii) $|\phi'(x)| = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} \leq \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-0{,}7)^2}} = 0{,}7428$

c) Abschätzen wieviele Schritte K höchstens nötig sind, damit x^* bis auf einen Fehler, der betragsmäßig $< 10^{-2}$ ist angenähert ist.

(ii) $x_0 = 0.66$, $x_1 = \phi(x_0) = \frac{1}{1+0.66^2} \approx 0.6966$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0| \leq 10^{-2}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^n \leq \frac{1-\alpha \cdot 10^{-2}}{|x_1 - x_0|}$$

d) k Schritte

(ii) $x_0 = 0.66$, $x_1 = 0.6966$, $x_2 = 0.6733 \ldots$

$x_6 = 0.6808$

$$|x_6 - x^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_6 - x_5|$$

$$= \frac{0{,}6405}{0{,}3595} \cdot (3.8 \cdot 10^{-3}) = 6.73 \cdot 10^{-3}$$

Aufg. 28

$$\phi : [1, \tfrac{5}{4}] \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) := \frac{1}{4x^2} + 1$$

a) Bew. ϕ ist kontrahierend

(i) mittels Def.

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \left| \frac{1}{4x^2} + 1 \left(\frac{1}{4y^2} + 1 \right) \right|$$

$$= \frac{1}{4} \left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 - y^2} \right|$$

$$\leq \frac{1}{4} \frac{\frac{5}{4} + \frac{5}{4}}{1} \cdot |x - y|$$

$$= \frac{5}{8} |x - y| \quad \forall x, y \in [1, \tfrac{5}{4}]$$

(ii) $|\phi'(x)| = |-\frac{2}{4}x^{-3}| \frac{1}{2x^3} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [1, \frac{5}{4}]$

b) Beweise: x_n, $x_{n+1} = \phi(x_n)$ kontrahiert gegen eine Lösung $\bar{x}$ der kubischen Gleichung $4x^3 - 4x^2 - 1 = 0$.

BFPS:

(1): $[1, \frac{5}{4}]$ ist abgeschlossen und nicht leer

(2): ϕ ist wegen $\phi'(x) = -\frac{1}{2x^3} < 0$ monoton fallend, also $\phi([1, 5/4]) = [\phi(\frac{5}{4}), \phi(1)] = [\frac{29}{25}, \frac{5}{4}]$

(3): ϕ ist kontrahierend, siehe a)

Außerdem $\phi(x) = x$ also $\frac{1}{4x^2+1} = x$

$\Leftrightarrow 1 + 4x^2 = 4x^3$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 - 1 = 0$

Numerik Vorlesung 10.12.

V normierter Vektorraum

$\emptyset \neq X \subseteq V \quad , v_0 \in V$

Approximationskonst. an v_0 bez. X

$$E_X(v_0) = \inf_{v \in X} \|v - v_0\|$$

Bsp. + Bem

a) Existiert ein Element bestehender Approximation aus X an v_0, d.h. $\exists \bar{v} \in X$.
$\exists\ E_X(v_0) = \| v_0 - \bar{v} \|$?

b) Verneint siehe Bsp. aus $\mathbb{R}^2$.

c) Ist im Fall der Existenz $\bar{v}$ eindeutig bestimmt?

d) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein normierter Raum $\quad X = \mathbb{Q}$
Wir wissen: Für jede reelle Zahl r gilt $E_{\mathbb{Q}}(r) = 0$, denn jede reelle Zahl lässt sich durch rationale Zahlen approximieren.

e) $\mathcal{C}[a,b]$, $\|\cdot\|_\infty$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Π_m

Existiert zu vorgegebenem $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ein (eindeutig) bestimmtes Polynom $p \in \Pi_m$ mit $\|f - p\|_\infty = E_{\Pi_m}(f)$?

f) $\mathcal{C}[a,b]$, $\|\cdot\|_\infty$

Wie gut kann eine vorgegebene stetige Fkt f durch Polynome approximieren?

$$X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Pi_m, \quad E_X(f) = \inf_{p\in X} \|f-p\|_\infty \ ?$$

Wir werden zunächst der Fragestellung aus f nachgehen.

Satz von Korovkin

11.2

$F_m : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ linear und positiv.
d.h.
(dabei heißt $f \geq 0$, falls $f(x) \geq 0 \ \forall x$)

Dann sind äquivalent

a) $\|F_m(f) - f\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}[a,b]$

b) $\|F_m(\pi_i) - \pi_i\|_\infty \to 0 \quad 0 \leq i \leq 2$
$\pi_i(x) = x^i$

Wenn also für die „Testfkt" π_i mit $\pi_i(x) = x^i$ $(0 \leq i \leq 2)$ die Konvergenz gilt, folgt diese schon für alle $f \in \mathcal{C}[a,b]$

Def. 11.3

Bernstein Operatoren B_m

$B_m \ \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$

$$B_m(f)(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \cdot f\left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot x^{\mu}(1-x)^{m-\mu}$$

Folgerung

11.4

B_m sind linear und positiv

Beweis

z.z. $B_m(f+y) = B_m(f) + B_m(y)$

$$B_m(f+y) = \sum_{\mu=0}^{m} (f+y)\left(\frac{\mu}{m}\right) x^{\mu}(1-x)^{m-\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \left(f\left(\frac{\mu}{m}\right) + y\left(\frac{\mu}{m}\right)\right)\binom{m}{\mu} x^{\mu}(1-x)^{m-\mu}$$

$$= \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m} f\left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot \binom{m}{\mu} x^{\mu}(1-x)^{m-\mu}}_{B_m(f(x))}$$

$$+ \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m} y\left(\frac{\mu}{m}\right)\binom{m}{\mu} x^{\mu}(1-x)^{m-\mu}}_{B_m(y(x))}$$

An:

Insbesondere $B_m(\alpha f)(x) = \alpha B_m(f)(x)$

so folgt $f\left(\frac{\mu}{m}\right) \geq 0 \quad (0 \leq \mu \leq m)$

$$\sum_{\mu=0}^{m} \underbrace{f\left(\frac{\mu}{m}\right)}_{\geq 0} \underbrace{\binom{m}{\mu} x^{\mu}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1-x)^{m-\mu}}_{\geq 0}$$

≥ 0, d.h. $B_m(f) \geq 0$

Ziel: Wende den Satz von Korovkin auf die Bernsteinoperatoren an. Dazu muss man:

$B_m(\pi_i)$ berechnen $(0 \le i \le 2)$

Grundlage hierfür bildet der binomische Lehrsatz:

$$\sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} a^{\mu} \cdot b^{m-\mu} = (a+b)^m$$

Folgerung 11.5

$$B_m(\pi_0) = \pi_0 \, , \; B_m(\pi_1) = \pi_1$$
$$B_m(\pi_2) = \pi_2 + \frac{\pi_1 - \pi_2}{m}$$

Beweis

$$B_m(\pi_0)(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \underbrace{\pi_0\left(\frac{\mu}{m}\right)}_{1} \cdot x^{\mu} \cdot (1-x)^{m-\mu}$$

$$= \sum \binom{m}{\mu} x^{\mu} \cdot (1-x)^{m-\mu}$$

$$= (x+1-x)^m = 1 \qquad \forall x$$

$$B_m(\pi_1)(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \cdot \pi_1\left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \cdot \frac{\mu}{m} \cdot x^{\mu} \cdot (1-x)^{m-\mu}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \binom{m-1}{\mu-1} x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}$$

$$= x \cdot \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m-1}{\mu-1} x^{\mu-1} (1-x)^{m-1-(\mu-1)} \qquad | \mu - 1 = k$$

$$= x \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} x^{k} \cdot (1-x)^{(m-1)-k}}_{=1} = x \qquad \text{(Bin. Formel)}$$

$$B_m(\pi_2)(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} \frac{\mu^2}{m^2} x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} \left[\frac{\mu}{m} \frac{\mu-1}{m-1} \frac{m-1}{m} + \frac{\mu}{m^2} \right] x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}$$

$$= \underbrace{\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\mu}{m} \frac{\mu-1}{m-1} \frac{m-1}{m} x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}}_{A} + \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} \frac{\mu}{m^2} \cdot x^{\mu} \cdot (1-x)^{m-\mu} \right\}$$

$$\{\ \} = \frac{1}{m} \underbrace{\sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} \left(\frac{\mu}{m}\right) x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}}_{B_m(\pi_1)(x) = x}$$

$$= \frac{x}{m}$$

$$A = \frac{m-1}{m} \sum_{\mu=2}^{m} \binom{m-2}{\mu-2} x^{\mu} (1-x)^{m-\mu}$$

$$= \frac{m-1}{m} x^2 \sum_{\mu=2}^{m} \binom{m-2}{\mu-2} x^{\mu-2} (1-x)^{m-2-(\mu-2)}$$

$$\mid k = \mu - 2$$

$$\Rightarrow \frac{m-1}{m} x^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-2}{k} x^{k} \cdot (1-x)^{(m-2)-k}}_{=1}$$

$$= \frac{m-1}{m} x^2$$

Gesamt: $= \frac{m-1}{m} x^2 + \frac{x}{m}$

$$= x^2 + \frac{x - x^2}{m} \quad \checkmark$$ (Vergleiche mit Annahme)

$$\| B_m \Pi_0 - \Pi_0 \|_{\mathcal{C}} = 0$$

$$\| B_m \Pi_1 - \Pi_1 \|_{\mathcal{C}} = 0$$

$$\| B_m \Pi_2 - \Pi_2 \|_{\mathcal{C}} = \| \max_{x \in [0,1]} \left| \cancel{x^2} + \frac{x - x^2}{m} - \cancel{x^2} \right|$$

$$= \| \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{m} \right| \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

Damit sind für die „Testfkt" die Voraussetzungen des Satzes von Korovkin erfüllt.
(Testfkt: Π_0, Π_1, Π_2)

Numerik Übung 14.12.12

Lokaler Konvergenzsatz

Aufgabe 31

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, mit Fixpunkt x^* mit $|\phi'(x^*)| < 1$
(„anziehender" Fixpunkt).
Beweisen Sie, dass ein $\delta > 0$ gilt, so dass ϕ auf $I : [x^* - \delta, x^* + \delta]$ die Voraussetzungen des BFPS erfüllt.

Folgerung

(x_n), $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ Konvergiert lokal
(d.h. für hinreichend gute Startwerte x_0 gegen x^*)

Beweis

Es sei $L := |\phi'(x^*)| < 1$

Da ϕ' stetig ist und die Betragsfunktion stetig ist $\Rightarrow$ $|\phi'|$ eine stetige Funktion.
$\Rightarrow \exists\ \delta > 0$, so dass $|\phi'(x)| \leq \frac{1+L}{2}$
für alle $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$
(anderenfalls wäre es möglich eine gegen x^* Konv. Folge (x_n) mit $|\phi'(x_n)| \geq \frac{1+L}{2}$ zu finden, woraus $\lim\limits_{n\to\infty} |\phi'(x_n)| = |\phi'(x^*)| \geq \frac{1+L}{2}$ ⚡

Damit ist (1) $I: [x^* - \delta, x^* + \delta]$ abgeschlossen und nicht leer.

(3) ϕ ist kontrahierend auf I

Bleibt zu zeigen:

(2) $\phi(I) \subseteq I$

Für alle $x \in I$ gilt:

$$|\phi(x) - \phi(\xi)| \underset{\text{kontrah.}}{\overset{\phi}{\leq}} \frac{1+L}{2} \underbrace{|x - x^*|}_{< \delta} < 1 \cdot \delta = \delta$$

$$\Rightarrow \phi(x) \in [\phi(x^*) - \delta, \phi(x^*) + \delta]$$
$$= [x^* - \delta, x^* + \delta]$$
$$= I$$

<u>Anwendung</u>

Newton $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\Rightarrow \phi'(x) = 1 - \frac{f'(x) f'(x) - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\phi'(x^*) = \frac{f(x^*) f''(x^*)}{(f'(x^*))^2}$$

$= 0$, da $f(x^*) = 0$, sofern $f'(x^*) \neq 0$

<u>Aufgabe 3.1</u>

$\Rightarrow$ Newtonverfahren konvergiert lokal

$|\phi'(x^*)| = 0$

Konvergenzgeschwindigkeit

$$\left[e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{Konvergiert „äußerst" langsam} \right]$$

Geg.

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \; n \in \mathbb{N}, \; x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit.

Abnahme des Abstandes $e_n := |x_n - x^*|$ von x_n zu x^* pro Schritt:

Konvergenzordnung p:

(x_n) Konvergiert gegen x^* mind. von der Ordnung p, wenn ein $C \geq 0$ exist. mit $e_{n+1} \leq C\, e_n^p$

(C bzw. $\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \leq C$; wird erfüllt, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = C \geq 0$)

$p=1$: Lineare Konvergenz

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{|x_{n+1} - x^*|}{x_n - x^*} \leq C$$

Der Abstand verringert sich pro Abschnitt mind. um den Faktor C. $(0 \leq C < 1)$

n	e_n	$\frac{e_{n+1}}{e_n}$
0	0,1	0,5
1	0,05	"
2	0,025	"
3	0,0125	"

lineare Konvergenz mit $C = \frac{1}{2}$

Kriterium

Ist ϕ p-mal stetig diff. und gilt:
$$\phi'(x^*) = \dots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0$$
[Konvergenz vorausgesetzt] so konvergiert (x_n) mindestens von der Ordnung p. Für $p=1$ (lin. Konvergenz) ist nur $|\phi'(x^*)| < 1$ erforderlich.
Gilt zusätzlich, dass $\phi^{(p)}(x^*) \neq 0$, so ist die Konvergenz genau von der Ordnung p.

Aufg. 32

a) Sei $a > 0$; bestimme alle Fixpunkte von
$$\phi_1(x) = ax - 1 + \frac{1}{a}, \quad \phi_2(x) = x(2-ax)$$
$$\phi_3(x) = x(1+(1-ax)+(1-ax)^2)$$

Lösung

$$\phi_1(x) = x \Rightarrow ax - 1 + \frac{1}{a} = x$$
$$\Leftrightarrow (a-1)x = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{a} \quad (\text{sofern } a \neq 1)$$
Im Falle $a=1$ ist $\phi_1(x) = x - 1 + 1 - x$ sind alle $x \in \mathbb{R}$ Fixpunkte.

$$\phi_2 = x(2-ax) = x \Leftrightarrow x=0 \text{ oder } 2-ax=1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{a} \text{ oder } x=0$$

$$\phi_3 = x(1+(1-ax)+(1-ax)^2) = x$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ oder } 1+(1-ax)+(1-ax)^2) = 1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ oder } 1-ax+(1-ax)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ oder } 1-ax=0 \text{ oder } 1+(1-ax)=0$$

$\Leftrightarrow x=0$ oder $x=\frac{1}{a}$ oder $x=\frac{2}{a}$

b) Untersuchen Sie, gegen welche Fixpunkte $(x_n), x_{n+1} = \phi(x_n)$ lokal (bei hinreichend gutem Startwert) konvergieren und bestimmen Sie die Konvergenzordnung p.

Lösung

Hinreichend für Konvergenz nach Aufgabe 31:
$|\phi'(x^*)| < 1$

$\phi_1'(x) = a$, $|\phi_1'(x^*)| = a$

Im Falle $a=1$ triviale Konvergenz für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$, da $x_1\ \phi(x_0) = x_0$.
Für $a \in [0,1[$ ist $x^* = \frac{1}{a}$ anziehender Fixpunkt, lokale Konvergenz.

Konvergenzordnung

$p=1$, da $|\phi'(x^*)| = a \in]0,1[$ (lin. Konvergenz)

$\phi_2'(x) = 2-2ax$ ergibt $|\phi_2'(0)| = 2 > 1$
(abstoßender Fixpunkt / keine lokale Konvergenz)

$\phi_2'(\frac{1}{a}) = 2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 0$
$\phi_2''(x) = -2a \neq 0$

Konvergenzordnung $p=2$ (quadratische Konvergenz)

$$\phi_3'(x) = 1 + 1 - 2ax + 1\cdot(1-ax)^2 + x\cdot 2(1-ax)\cdot(-a)$$

$$\phi_3'(0) = 2 + 1 = 3 \Rightarrow |\phi_3'(0)| = 3 > 1$$

(abstoßender Fixpunkt)
keine Konvergenz

$$\phi_3'\left(\tfrac{1}{a}\right) = \underbrace{1+1-2\cdot a\cdot\tfrac{1}{a}}_{0} + \underbrace{\left(1-a\tfrac{1}{a}\right)}_{0}^2 + \tfrac{1}{a}\cdot\left(2\underbrace{\left(1-a\cdot\tfrac{1}{a}\right)}_{0}\right)(-a)$$

$$= 0$$

$$\phi_3''(x) = -2a + 2(1-ax)\cdot(-a) - 2a + 4xa^2$$

$$\phi_3''\left(\tfrac{1}{a}\right) = -2a + 0 - 2a + \tfrac{4}{a}a^2 = 0$$

$$\phi_3'''(x) = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2 \quad , \ \phi_3'''\left(\tfrac{1}{a}\right) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Konvergenzordnung $p = 3$
(kubische Konvergenz)

$$\phi_3'\left(\tfrac{2}{a}\right) = 1 + 1 - 4 + (1-2)^2 + \tfrac{2}{a}\cdot 2\cdot(1-2)\cdot(-a)$$

$$= -1 + 4 = 3 \ , \ \left|\phi_3\left(\tfrac{2}{a}\right)\right| = 3 > 1$$

(abstoßender Fixpunkt)

c) Berechnen Sie iterativ, nur mit Additionen und Multiplikationen einen Näherungswert für $\frac{1}{13}$.

<u>Lösung</u> $x^* = \frac{1}{13}$ ist anziehender Fixpunkt für ϕ_3 mit $a = 13$

$x_0 = 0{,}1$. $\quad x_1 = \phi_3(x_0) = \phi_3(0{,}1) =$ nächste Seite

$$= \phi_3(x) = x\left(1 + (1-13x) + (1-13x)^2\right)$$

$= 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}3 + 0{,}3^2) = 0{,}1 \cdot (0{,}79) = 0{,}079$

$x_2 = 0{,}0769246 \quad , \quad x_3 = 0{,}0769231$

Es ist $\frac{1}{13} = 0{,}\overline{076923}$

Aufg. 33

a) Newton (siehe oben)

$$\phi''(x) = \frac{f(x)\, f'''(x)}{(f'(x))^2} + \frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{2 f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2}$$

b) Untersuche ob $f(x) := 4x - x^2$ gegen $\bar{x} = 0$ bzw. $\bar{x} = 1$ linear, quadratisch oder kubisch konvergiert.

Beweis

Gilt neben $f(\bar{x}) = 0$ auch $f'(\bar{x}) = 0$ (mehrfache NS) so konvergiert das Newtonverfahren nur linear. $(p=1)$

$f(x) = x^4 - x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 2x$

$f''(x) = 12x^2 - 2$

$f'''(x) = 24x$

für $\bar{x} = 0$

$$\underbrace{\begin{matrix} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{matrix}}_{\text{Mehrfache NS}}$$

$\Rightarrow$ nur lin Konvergenz

für $\bar{x} = 1$

$$\underbrace{\begin{matrix} f(1) = 0 \\ f'(1) = 2 \end{matrix}}_{\text{Einfache NS}}$$

$\Rightarrow$ mind quadratische Konvergenz

$p \geq 2$

$$\phi_1'(1) = \frac{f(1) \cdot f''(1)}{f'(1)} = 0$$

$f''(1) = 10$

$$\phi''(1) = \underbrace{\frac{f(1) \cdot f''(1)}{(f'(1))^2}}_{0} + \underbrace{\frac{f''(1)}{f'(1)}}_{5} - \underbrace{\frac{2 f(1) \cdot f''(1)}{(f'(1))^3}}_{0}$$

$$= 5 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Konvergenzordnung : $\underline{\underline{p = 2}}$

$\Rightarrow$ Quadratische Konvergenz

Numerik 7.1.13

Aufgabe zum neuen Jahr

Tombola: 1 Beamer, mehrere Handtücher, Wein

Die Wahrscheinlichkeit, dass Person A den Beamer und B eines der Handtücher gewinnt ist 10 %. Wieviele Weinpräsente gibt es? Wie groß ist die Belegschaft? Jedes Mitglied der Belegschaft bekommt ein Los. Es gibt keine Nieten.

M: Anzahl der Belegschaft

H: Anzahl der Handtücher

$$(*) \quad \frac{1}{10} = \underbrace{\frac{1}{M}}_{\text{W-Beamer}} \cdot \underbrace{\frac{H}{M-1}}_{\text{W-Handtücher}}$$

(wenn Beamer bereits gewonnen)

$$0 < \frac{H}{M-1} < 1$$

Aus $(*)$ folgt $\frac{1}{M} > \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow M < 10$$

Stelle $(*)$ um:

$$M \cdot (M-1) = 10 \cdot H$$

5 oder 6 einsetzen $\Rightarrow$ Anzahl der Weinpräsente

[Mit Nenner multiplizieren]

$M < 10 \Rightarrow$ mögl. Lösungen sind $\begin{cases} M = 6 \\ M = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Die Belegschaft besteht aus 5 oder 6 Personen und es gibt 2 Weinpräsente

Vorlesung

Erinnerung:

a) X ein normierter VR, V ein endlich dim. Teilraum

Dann exist. zu jedem $x_0 \in X$ mind. ein $v_0 \in V$: $\|x_0 - v_0\| \leq \|x_0 - v_0\|$, $v \in V$

b) $X = \mathcal{C}[a,b]$ mit der $\mathcal{C}$-Norm

$(\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

$V = \Pi_m$ Dann ist das Element bester Approximation sogar eindeutig bestimmt.

c) Alternantensatz

(Charakterisierung des Elementes bester Appr.)

$f \in \mathcal{C}[a,b]$, $P \in \Pi_m$, P ist minimal Lösung zu f, also das Element bester Appr. an f, $\Longleftrightarrow \exists (m+2)$ Pkt. x_μ:

$a \leq x_0 < x_1 < \quad < x_{m+1} \leq b$

mit $f(x_\mu) - P(x_\mu) = (-1)^\mu \eta \cdot \|f - P\|_{\mathcal{C}}$

$(0 \leq \mu \leq m+1$, $\eta = \{\pm 1$

$[-1, 1]$

$\check{C}_m(x) = \cos(m \cdot \arccos(x))$

$m = 0 \qquad \check{C}_0(x) = 1$

$m = 1 \qquad \check{C}_1(x) = x \quad \forall x$

Für $m \geq 1$ gilt eine Rekursionsformel:

$\circledast$ $\check{C}_{m+1}(x) = 2x\,\check{C}_m(x) - \check{C}_{m-1}(x)$

Bem

a) $\check{C}_{m+1}$ ein Polynom $(m+1)$-Grades
Diese Polynome heißen Čebyšev - Polynome (1. Art)

b) Höchstkoeffizient ist für $m \geq 1$ 2^m.

Beweis von $\circledast$

$$x = \cos\Theta \quad , \quad -\pi \leq \Theta \leq \pi$$

$\circledast$ lautet dann

$$\cos((m+1)\Theta) = 2\cos\Theta\,\cos(m\cdot\Theta) - \cos((m-1)\Theta)$$

$$\left[\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$\cos\underbrace{((m+1)\Theta)}_{\alpha} + \cos\underbrace{((m-1)\Theta)}_{\beta} = 2\cos\Theta\cdot\cos(m\cdot\Theta)$$

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\,\check{C}_m(x) \quad \text{für } m \geq 1$$

T_m ist ein Polynom vom Grad m mit dem Höchstkoeff. 1.

$$\Pi_m - T_m \in \Pi_{m-1} \qquad \Pi_m(x) = x^m$$

mit Hilfe des Alternantensatzes beweist man:

<u>Satz:</u> $\Pi_m - T_m$ ist die beste Appr. aus Π_{m-1} an Π_m.

<u>Beweis</u>

Wir sind laut Alternantensatz fertig, wenn wir $(m+1)$ - Punkte x_μ angeben können, mit

$$\Pi_m(x_\mu) - (\Pi_m - T_m)(x_\mu) = T_m(x_\mu) = (-1)^\mu \cdot \eta \, \|T_m\|_C$$

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m+1}} \, \mathcal{C}_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \cos(m \arccos x)$$

$$\|T_m\|_C = \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$x_\mu = \cos\left(\frac{m-\mu}{m} \cdot \pi\right) \qquad (0 \le \mu \le m)$$

$$T_m(x_\mu) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos\left(m \arccos\left(\cos \frac{m-\mu}{m} \cdot \pi\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} \left(\cos(m-\mu) \cdot \pi\right)$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} (-1)^{m-\mu}$$

$\Longrightarrow$ $\Pi_m - T_m$ ist laut Alternantensatz beste Appr. an Π_m.

Numerik 10.1.13

§ 12 Behandlung lin. Gleichungssysteme

Erinnerung: A: $(m \times n)$-Matrix

Gleichungssystem $A \cdot x = b$, $b \in \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{K}$)

$x \in \mathbb{R}^n$ gesucht.

Das Gleichungssystem heißt homogen, falls $b = 0$, sonst inhomogen.

$A = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i \in \mathbb{R}^m$, Spaltenvektoren von A.

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot s_i$, Linearkombination der Spaltenvektoren.

$A = x \cdot b$ besitzt eine Lsg. wenn eine Linearkombination der Spaltenvektoren, die b ergibt, existiert.

Dieses ist genau dann möglich, wenn:

Maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A ist identisch mit der max. Anzahl linear unabhängiger Spalten von $(s_1, \dots s_n, b)$

$\Leftrightarrow \quad r(A) = r(A, b)$

Zusatz

$A \cdot x = b$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$

Wenn das Gleichungssystem lösbar ist und

$r(A) = n \Leftrightarrow r(A) = r(A, b) = n$

$A \cdot x = 0$ Die Gesamtheit der Lösung eines homogenen Gleichungssystems bildet einen Unterraum vom $\mathbb{R}^n$.

$A \cdot x = b$, $b \neq 0$

Die Lösungsgesamtheit ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, da der Nullvektor nicht dazu gehört.

Verbindung zur Lösungsgesamtheit des homogenen Systems:

- Sind x und $y \in \mathbb{R}^n$ Lösungen von $A \cdot x = b = A \cdot y$, so ist $x - y$ Lösung des homogenen Systems $A(x-y) = Ax - Ay = b - b = 0$.
- Ist x Lösung von $A \cdot x = b$ und $\tilde{x}$ Lösung des homogenen Systems, so ist $x + \tilde{x}$ eine Lösung des inhomogenen Systems $A \cdot x = b$, denn $A(x+\tilde{x}) = Ax + A\tilde{x} = b + 0 = 0$

Die Gesamtheit der Lösungen eines (lösbaren) linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$, $b \neq 0$ ergibt sich $L = \left\{ \hat{x} + \tilde{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} \hat{x} \text{ spez. Lsg. von } A \cdot x = b \\ \tilde{x} \text{ Lsg. des hom. Systems} \end{array} \right\}$

$L = \hat{x} + U$. U der Unterraum der Lösungen des homogenen Systems. ⇒ Mannigfaltigkeit

Das Gleichungssystem heißt unterbestimmt, wenn es weniger Gleichungen, als Unbekannte gibt. $(m < n)$

Hieraus resultiert ein unterbestimmtes lin. GS kann lösbar, aber nicht eindeutig lösbar sein.

Das GS heißt überbestimmt, wenn mehr Gleichungen als Unbekannt da sind. $(m > n)$

Bei einem überbestimmten GS ist alles möglich. Ebenso bei quadratischen Gleichungssystemen. $(m = n)$

Bei $m=n$ gilt: $A \cdot x = b$ eindeutig lösbar $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Gauß - Jordan Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 5 \\ -4 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -16 & -14 & -13 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -13 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow \quad x_4 = -3{,}7, \quad x_3 = 4{,}6, \quad x_2 = -2{,}9, \quad x_1 = 2{,}2$

Anmerkung

Man muss das erweiterte Gleichungssystem nicht auf eine Diagonalmatrix transformieren, dort ist die Lösbarkeit besonders einfach abzulesen, sondern es reicht eine obere Dreiecksmatrix. In diesem Fall wäre dies:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -4{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7{,}4 \end{pmatrix}$$

Rückwärts einsetzen

Man kann diesen Algorithmus sofort anwenden, ohne das Lösbarkeitskriterium vorher zu überprüfen. Während der Rechnung ergibt sich dann die eindeutige Lösbarkeit, die Lösbarkeit oder ggf. auch die nicht Lösbarkeit.