Lösungen zur Probeklausur Numerik und Modellierung, WS 2013/2014, 12.12.13

Aufgabe 1

a) **Bestimmen Sie zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \sqrt[3]{x}$ das Interpolationspolynom p_2 in der Darstellung nach Lagrange zu den Knoten $x_0 := 1, x_1 := 8, x_2 := 64$.**

b) **Wie a), aber in der Darstellung nach Newton.**

c) **Schätzen Sie den möglichen Interpolationsfehler an der Stelle $x = 2$ ab mit Hilfe der Restgliedformel ab.**

Lösung:

a) **Es ist $y_0 = 1, y_2 = 2, y_2 = 4$ und damit nach Lagrange**

$$p_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-8)(x-64)}{(1-8)(1-64)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-64)}{(8-1)(8-64)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-8)}{(64-1)(64-8)}$$

b)

$$\begin{array}{cccc}
x_i & y_i = [x_i] & [x_i, x_{i+1}] & [x_0, .x_1, x_2] \\
1 & 1 & & \\
 & & \frac{2-1}{8-1} = \frac{1}{7} & \\
8 & 2 & & \frac{\frac{1}{28} - \frac{1}{7}}{64-1} = -\frac{1}{21 \cdot 28} = -\frac{1}{588} \\
 & & \frac{4-2}{64-8} = \frac{1}{28} & \\
64 & 4 & &
\end{array}$$

Dies ergibt $p_2 = 1 + \frac{1}{7}(x-1) - \frac{1}{588}(x-1)(x-8)$**.**

c) **Die Restgliedabschätzung ergibt mit**

$$f(x) = \sqrt{3}x = x^{1/3}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$$

$$|p_2(x) - f(x)| \leq \max_{\xi \in [x_0, x_2]} \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$$= \max_{\xi \in [1, 64]} \frac{1}{3!} \frac{10}{27} \xi^{-8/3} |(x-1)(x-4)(x-64)| = \frac{10}{6 \cdot 27} |(x-1)(x-4)(x-64)|$$

Dies ergibt für $x = 2$

$$|p_2(2) - f(2)| \leq \frac{10}{162} |1 \cdot 2 \cdot 62| = \frac{620}{81}$$

Aufgabe 2

a) **Berechnen Sie mit dem Verfahren von Neville-Aitken, für welches c das Interpolationspolynom zu den Knoten $x_0 := 0, x_1 := 2, x_2 := 3$ und den Daten $y_0 := 1, y_1 := 5$ und $y_2 := c$ an der Stelle $\xi = 4$ den Wert 1 hat.**

b) **Bestimmen Sie $b, c, d \in \mathbb{R}$ für die kubische natürliche Splinefunktion**

$$S(x) = \begin{cases} x+4 & \textbf{für} \quad x \le 0 \\ x^3+x+4 & \textbf{für} \quad 0 < x \le 1 \\ -x^3+bx^2+cx+6 & \textbf{für} \quad 1 < x \le 2 \\ dx-2 & \textbf{für} \quad 2 < x \end{cases}$$

c) **Stellen Sie die Splinefunktion von b) in der Form $S(x) = P(x) + \sum_{j=0}^{2} c_j (x-x_j)_+^3$ dar.**

Lösung:

a) **Verfahren von Neville-Aitken:**

$$\begin{array}{ccccc} x_i & \xi - x_i & y_i = f[x_i] & p_{x_i,x_{i+1},x} & p_{x_0,x_1,x_2} \\ 0 & 4 & 1 & & \\ & & & \frac{5\cdot 4 - 1\cdot 2}{2-0} = 9 & \\ 2 & 2 & 5 & & \frac{(2c-5)\cdot 4 - 9\cdot 1}{3-0} = \frac{8c-29}{3} = p_2(4) \\ & & & \frac{c\cdot 2 - 5\cdot 1}{3-2} = 2c-5 & \\ 3 & 1 & c & & \end{array}$$

und damit

$$p_2(4) = 1 \iff \frac{8c-29}{3} = 1 \iff 8c - 29 = 3 \iff c = 4$$

b)

$$S(1) = 6 = \lim_{x\to 1}(-x^3 + bx^2 + cx + 6) = -1 + b + c + 6 \iff c = 1 - b$$

$$S'(1) = 4 = \lim_{x\to 1}(-3x^2 + 2bx + c) = -3 + 2b + c \iff 2b + c = 7$$

$c = 1 - b$ **in die Gleichung** $2b + c = 7$ **eingesetzt ergibt** $b + 1 = 7$**, also** $b = 6, c = -5$**. Weiter gilt**

$$S(2) = -8 + 4b + 2c + 6 = -8 + 24 - 10 + 6 = 12 = \lim_{x\to 2}(dx - 2) = 2d - 2$$

und damit $d = 7$**.**

c)

$$S(x) = x + 4 + x_+^3 - 2(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3$$

Aufgabe 3

a) **Bestimmen Sie zu** $(2,3,8) \in \mathbb{R}^2$ **die Menge der Bestapproximationen im Unterraum** $V := \{(c,c,2c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ **für die Norm** $||x||_1$**.**

b) **Berechnen Sie zu** $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) := x^3$ **die Bestapproximierenden in** $V := \Pi_0|_{[0,2]}$ **bezüglich der Norm** $||f||_2 := \sqrt{\int\limits_0^2 (f(x))^2 dx}$**.**

Lösung:

a)

$$||(c,c,2c)-(2,3,8)||_1 = |c-2|+|c-3|+|2c-8| = \begin{cases} 2-c+3-c+8-2c = 13-4c > 5 & \textbf{falls } c < 2 \\ c-2+3-c+8-2c = 9-2c > 3 & \textbf{falls } 2 \le c < 3 \\ c-2+c-3+8-2c = 3 & \textbf{falls } 3 \le c \le 4 \\ c-2+c-3+2c-8 = 4c-13 > 3 & \textbf{falls } c > 4 \end{cases}$$

Offensichtlich wird die Funktion rechts und damit $||(c,c,2c)-(2,3,8)||_1$ **für alle** $c \in [3,4]$ **minimal.**

b) **Statt** $||f-c||_2 = \sqrt{\int\limits_0^2 (f(x))^2 dx}$ **minimiert man zweckmäßigerweise das Quadrat davon, welches wegen der Monotonie der Quadratfunktion auf** $[0,\infty[$ **dasselbe Minimum liefert. Es sei**

$$h(c) := ||f-c||_2^2 = \int\limits_0^2 (x^3-c)^2 dx = \int\limits_0^2 (x^6 - 2cx^3 + c^2)dx = (\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}cx^4 + c^2x)|_0^2 = \frac{128}{7} - 8c + 2c^2$$

Wegen

$$h'(c) = -8 + 4c = 0 \iff c = 2, \qquad h''(c) = 2 > 0$$

wird h **und damit auch** $||f-c||_2$ **für** $c = 2$ **minimal wird.**

Aufgabe 4

a) Geben Sie die Befehle zur Eingabe der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

ins Kommandofenster von FreeMat sowie zur Berechnung des Produktes der Elemente der 2.Spalte von $A^{-1}B$ an.

b) Definieren Sie $f(x) := x^3 \sin x$ als anonyme Funktion in FreeMat und plotten Sie f im Intervall $[-3, 2]$ (Abstand der x-Werte sei 0.1).

c) Erstellen Sie einen Funktionsfile für die abschnittsweise definierte Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} x^2 & \textbf{für } x < -2 \\ 2x + 4 & \textbf{für } -2 \leq x < 1 \\ \ln x & \textbf{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Lösung:

a)

```
A = [2 8 6; -1 3 0; 2 1 2];
B = [1 2; 0 4; 6 1];
C = inv(A)*B;
prod(C(:,2));
```

b)

```
f = @(x) x.^3.*sin(x);
x = -3:0.1:2;
plot(x,f(x));
```

c)

```
function f = Teilc(x);
if x<-2 f = x.^2;
elseif x<1 f = 2*x+4;
else f = log(x);
end;
```