Übungen zur Numerik und Modellierung, Wintersemester 2013/14

9. Serie, 15.01.14

Aufgaben für die Übungsstunde

Aufgabe 33

$f:]0, \infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \ln x + x$ besitzt in $I := [0.54, 0.6]$ genau eine Nullstelle x^*.

a) Zeigen Sie, dass die Nullstelle von f ein Fixpunkt von ϕ ist für die Funktionen
(i) $\phi(x) := e^{-x}$ (ii) $\phi(x) := -\ln x$ (iii) $\phi(x) := \dfrac{x(1-\ln x)}{1+x}$

b) Für welche der in a) angegebenen Funktionen ϕ ist auf I der Banasche Fixpunktsatz (BFPS) erfüllt ?

c) Führen Sie für die Funktionen, die den BFPS auf I erfüllen, einen Schritt des Iterationsverfahrens $x_{n+1} := \phi(x_n), n \in \mathbb{N}$ mit $x_0 := 0.6$ aus und schätzen Sie danach ab, wie viele Schritte n höchstens nötig sind, um x^* bis auf einen Fehler, der betragsmäßig kleiner als 10^{-3} ist, zu berechnen.

d) Führen Sie so viele Schritte aus, wie sie in c) berechnet haben.

e) Berechnen Sie für die Funktionen, die den BFPS auf I erfüllen, die Konvergenzordnung, mit der die Iterationsfolgen konvergieren.

Aufgabe 34

a) Beweisen Sie für die Iterationsabbildung ϕ des Newtonverfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle einer zweimal differenzierbaren Funktion f

$$\phi''(x) = \frac{f(x)f'''(x)}{(f'(x))^2} + \frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{2f(x)(f''(x))^2}{(f'(x))^3}$$

b) Untersuchen Sie, ob die Newtonsche Iterationsfolge gegen die Nullstellen $\overline{x} = 0$ sowie $\overline{x} = 1$ von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^4 - x^2$ linear, quaddratisch oder mindestens kubisch konvergieren.

Hausaufgaben

Aufgabe 35

Beweisen Sie, dass die Iterationsfolge $(x_n), x_{n+1} := \phi(x_n), n \in \mathbb{N}_0$ für $\phi : [1, \frac{5}{4}] \to \mathbb{R}, \phi(x) := \dfrac{1}{4x^2} + 1$ und jeden Startwert $x_0 \in [1, \frac{5}{4}]$ gegen eine Lösung $\overline{x}$ der kubischen Gleichung $4x^3 - 4x^2 - 1 = 0$ konvergiert. Von welcher Ordnung ist die Konvergenz ?

Aufgabe 36

Zeigen Sie, dass die Iterationsfolge (x_n), definiert durch

$$x_{n+1} := \phi(x_n) := 2x_n - ax_n^2 \qquad (a > 0, n \in \mathbb{N}_0)$$

für alle $x_0 \in [\frac{2}{3a}, \frac{4}{3a}]$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge. Von welcher Ordnung ist die Konvergenz ?

Aufgabe 37

Bestimmen Sie die Konvergenzordnung (linear, quadratisch, mindestens kubisch) der Newtonschen Iterationsfolge gegen die Nullstelle $\overline{x}$ für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^5 - 4x^3, \overline{x} = 0$ und $\overline{x} = 2.$ und führen Sie zur Veranschaulichung jeweils drei Schritte mit den Startwerten $x_0 := \overline{x} + 0.1$ aus.