Lösungen zur Probeklausur Numerik und Modellierung, WS 2013/2014, 27.01.14

Aufgabe 1

a) **Bestimmen Sie mit Hilfe des Alternantensatzes die lineare Funktion $p(x) = ax+b$, die die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) := x^5$ im Sinne der Maximumsnorm am besten approximiert. Wie groß ist $||f-p||_\infty$?**

b) **Stellen Sie das Polynom $p(x) := x^4 - x^3$ als Linearkombination der Cebysev-Polynome $T_n(x), n \in \mathbb{N}_0$ dar.**

Lösung:

a) **Sei $p(x) = ax + b$ die nach dem Minimallösung zu $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) := x^5$ Dann gibt es drei Stellen x_0, x_1, x_2, wo $f - p$ extremal wird. Wegen**

$$(f-p)'(x) = 5x^4 - a = 0 \iff x = \sqrt[4]{\frac{a}{5}}$$

besitzt $f - p$ in $]0,2[$ nur eine Extremalstelle. Es muss daher $x_0 = 0, x_1 = \sqrt[4]{\frac{a}{5}}, x_2 = 2$ sein. Nach dem Alternantensatz ist weiter

$$f(x_0) - p(x_0) = -(f(x_1) - p(x_1)) = f(x_2) - p(x_2),$$

also $$-b = -(\sqrt[4]{\frac{a}{5}})^4 + a \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{5}} + b = 32 - 2a - b$$

Aus den beiden äußeren Termen folgt $a = 16$ und $x_1 = \sqrt[4]{3.2}$, dies in die beiden ersten eingesetzt ergibt

$$-b = -(\sqrt[4]{3.2})^5 + 16\sqrt[4]{3.2} + b$$

und damit

$$b = \frac{1}{2}((\sqrt[4]{3.2})^5 - 16\sqrt[4]{3.2}) = \frac{1}{2}(3.2\sqrt[4]{3.2} - 16\sqrt[4]{3.2}) = -6.4\sqrt[4]{3.2} \ (= -8.56)$$

Also ist $p(x) = 16x - 6.4\sqrt[4]{3.2}$ Minimallösung mit der maximalen Abweichung $||f-p||_{\check{C}} = |f(0) - p(0)| = 6.4\sqrt[4]{3.2}$ $(= 8.56)$.

b) **Es ist**

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = \frac{1}{2}(2x^2-1) = x^2-\frac{1}{2}, T_3(x) = \frac{1}{4}(4x^3-3x) = x^3-\frac{3}{4}x, T_4(x) = \frac{1}{8}(8x^4-8x^2+1) = x^4-x^2+\frac{1}{8}$$

Daraus folgt

$$x^4 - x^3 = a_4T_4(x) + a_3T_3(x) + a_2T_2(x) + a_1T_1(x) + a_0$$

$$\iff 1 = a_4, -1 = a_3, 0 = -a_4 + a_2, 0 = -\frac{3}{4}a_3 + a_1, 0 = \frac{1}{8}a_4 - \frac{1}{2} + a_0$$

$$\iff 1 = a_4, -1 = a_3, a_2 = a_4 = 1, a_1 = \frac{3}{4}a_3 - \frac{3}{4}, a_0 = -\frac{1}{8}a_4 + \frac{1}{2}a_2 = \frac{3}{8}$$

Aufgabe 2

a) **Bestimmen Sie näherungsweise** $\int\limits_0^2 f(x)dx$ **für** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x):=x^3$ **mit**

einer zusammengesetzten Trapezregel T_N, wobei N so groß sei, dass der mögliche Fehler, den man aus der Fehlerabschätzung erhält, dem Betrage nach kleiner oder gleich $\frac{2}{9}$ ist.

b) **Berechnen Sie Näherungswerte für die Nullstelle $\overline{x}=0$ von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x):=x^2-x^4$ durch Anwendung zweier Schritte des Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0:=0.2$**

c) **Wie b), aber für $\overline{x}=1$ durch Anwendung zweier Schritte des Sekantenverfahrens zu den Startwerten $x_0:=3, x_1:=2$**

Lösung:

a) **Fehlerabschätzung der zusammengesetzten Trapezregel:**

$$|T_N(f)-\int\limits_a^b f(x)dx| \le \frac{(b-a)h^2}{12}||f^{(2)}||_\infty$$

Mit $f(x)=x^3, f'(x)=3x^3, f''(x)=6x$ **erhält man mit** $a=0, b=2$

$$|T_N(f)-\int\limits_a^b f(x)dx| \le \frac{(2-0)h^2}{12}\cdot 12 = 2h^2 \le \frac{2}{9} \iff h^2 \le \frac{1}{9} \iff h \le \frac{1}{3} \iff N=\frac{b-a}{h} \ge 6$$

und es ist

$$T_6(f)=\frac{h}{2}(f(0)+2f(\frac{1}{3})+2f(\frac{2}{3})+2f(1)+2f(\frac{4}{3})+2f(\frac{5}{3}))+f(2))$$

$$=\frac{1}{6}(0+\frac{2}{27}+\frac{16}{27}+2+\frac{128}{27}+\frac{250}{27}+8)=\frac{1}{6}(10+\frac{396}{27})==\frac{1}{6}(10+\frac{44}{3})=\frac{74}{18}=\frac{37}{9}$$

b) $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-x_n^4}{2x_n-4x_n^3}=\frac{x_n^2-3x_n^4}{2x_n-4x_n^3}=\frac{x_n-3x_n^3}{2-4x_n^2}$ **ergibt**

$$x_0=0.2, x_1=\frac{0.2-0.024}{2-0.16}=\frac{0.176}{1.84}=0.0957, x_2=\frac{0.0957-0.0026}{2-0.0366}=\frac{0.0931}{1.9634}=0,0474$$

c) $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ **ergibt mit** $x_0:=3, x_1:=2$

$$x_2=\frac{x_0f(x_1)-x_1f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{3\cdot(-12)-2\cdot(-72)}{-12-(-72)}=\frac{108}{60}=1.8$$

$$x_3=\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{2\cdot(-7.2576)-1.8\cdot(-12)}{-7.2576-(-12)}=\frac{7.0848}{4.9152}=1.4414$$

Aufgabe 3

a) **Beweisen Sie, dass die Iterationsfolge** $x_{n+1} := \phi(x_n), n \in \mathbb{N}$ **mit** $\phi(x) := \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$ **für alle Startwerte** $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ **gegen einen Fixpunkt** $\overline{x}$ **von** ϕ **konvergiert.**

b) **Führen Sie für die Folge in a) einen Schritt mit dem Startwert** $x_0 := 0$ **aus und schätzen Sie dann ab, wie weit** x_3 **von** $\overline{x}$ **höchstebns noch entfernt ist.**

c) **Bestimmen Sie ein abgeschlossenes Intervall, welches alle reellen Nullstellen des Polynoms** $p(x) := x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ **enthält.**

Lösung:

a) **Wir zeigen, dass die Vorausetzungen des** Banach**schen Fixpunktsatz (BFPS) erfüllt sind:**

(1) $G := [0, \frac{\pi}{2}] \subseteq \mathbb{R}$ **ist abgeschlossen und nichtleer**

(2) $\phi(G) \subseteq G$**, denn für alle** $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ **gilt** $\quad 0 \leq \frac{1}{4}(\sin x + \cos x) \leq \frac{1}{4}(1+1)\frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

(3) $|\phi'(x)| = |\frac{1}{4}(\cos x - \sin x)|$ **für alle** $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$**. Da** $\phi''(x) = \frac{1}{4}(-\sin x - \cos x) < 0$ **für alle** $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ **ist, nimmt** $|\phi'|$ **sein Maximum in einem der Randpunkte an. Es ist daher**

$$|\phi'(x)| \leq \max\{|\phi'(0)|, |\phi'(\frac{\pi}{2}|\} = \max\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\} = \frac{1}{4}$$

für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$**.** ϕ **ist daher kontrahierend mit Kontraktionskonstante** $\alpha = \frac{1}{4}$**.**

b) $x_0 := 0$ **ergibt** $x_1 = \frac{1}{4}$ **und mit** $\alpha = \frac{1}{4}$

$$|x_3 - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^3}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = \frac{(\frac{1}{4})^3}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{192}$$

c) **Z.B.** $[-M, M]$ **mit** $M := \max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |\frac{a_i}{a_n}|\} = \max\{1, 2+4+1\} = 7$**.**

Aufgabe 4

Erstellen Sie einen Scriptfile Bisektion.m, in welchem eine Nullstelle der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := e^x - 5\sin x$ mit Hilfe des Bisektionsverfahrens berechnet wird.

Dazu sollen zu Beginn mit Hilfe von input-Anweisungen die maximale Anzahl M der Näherungen, eine Fehlerschranke eps und die Randpunkte a und b eines Intervalles $[a, b]$ eingegeben werden.
Sofern $a \geq b$ oder $f(a)f(b) \geq 0$ ist, soll die Eingabe von a und b so lange wiederholt werden, bis $a < b$ und $f(a)f(b) < 0$ ist (`while`-Schleife verwenden !).
Initialisieren Sie den Vektor x der Intervallmitten als Nullvektor mit M Komponenten.
Berechnen Sie dann weitere Intervallmitten x_n mit Hilfe einer `while`-Schleife, solange $n \leq M$ und $|f(x_n)| > eps$ ist.

Lösung:

```
M = input('M = ');
eps = input('eps = ');
a = input('a = ');
b =input('b = ');
fa = exp(a)- 5*sin(a);
fb = exp(b)- 5*sin(b);

while(a>=b || fa*fb>0)
  a = input('a = ');
  b = input('b = ');
  fa = exp(a)- 5*sin(a);
  fb = exp(b)- 5*sin(b);
end;

x = zeros(1,M); n = 1 x(1) = (a+b)/2; fx = exp(b)- 5*sin(b);

while(n<M && abs(fx)>eps )
    if (fx*fa<=0)
       b = x
       fb = fx
    else
       a = x
       fa = fx
    end;
       n = n+1;
end;
```