Universidad de Granada

Cuestionario 3

Visión por computador

Lukas Häring García

1. ¿Cuál es la transformación más fuerte de la geometría de una escena que puede introducir se al tomar una foto de ella? Dar algún ejemplo.

2. Por qué es necesario usar el plano proyectivo para estudiar las transformaciones en las imágenes de fotos de escenas? Dar algún ejemplo.

3. Sabemos que en el plano proyectivo un punto no existe en el sentido del plano afín,sino que se define por una clase de equivalencia de vectores definida por $k(x, y, 1), k \neq 0$. Razone usando las coordenadas proyectivas de los puntos afines de una recta que pase por el $(0, 0)$ del plano afín y verifique que los punto de la recta del infinito del plano proyectivo son necesariamente vectores del tipo $(*, *, 0)$ con *=cualquier número.

4. ¿Qué propiedades de la geometría de un plano quedan invariantes cuando se toma una foto de él? Justificar la respuesta.

5. En coordenadas homogéneas los puntos y rectas del plano se representan por vectores de tres coordenadas(notados x y l respectivamente), de manera que si una recta contiene a un punto se verifica la ecuación $x^T l = 0$, es decir $\begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = 0$. Considere una homografía H que transforma vectores de puntos, $x' = Hx$. Dado que una homografía transforma vectores de tres coordenadas también existen homografías G para transformar vectores de rectas $l' = Gl$.Suponga una recta l y un punto x que verifican $x^T l = 0$ en el plano proyectivo y suponga que conoce una homografía H que transforma vectores de puntos. En estas condiciones ¿cuál es la homografía G que transforma los vectores de las rectas? Deducirla matemáticamente.

6. ¿Cuál es el mínimo número de escalares necesarios para fijar una homografía general? ¿Y si la homografía es afín?Justificar la respuesta

7. Defina una homografía entre planos proyectivos que haga que el punto (3,0,2) del plano proyectivo-1 se transforme en un punto de la recta del infinito del plano proyectivo-2? Justificar la respuesta

8. Una homografía general $H, det(H) \neq 0$ admite una descomposición única en movimiento elementales de la siguiente forma $H = H_S H_A H_P$ donde H_S representa la homografía de una similaridad (escala, giro y traslación), H_A la homografía de un movimiento afín puro y H_P una transformación proyectiva pura.

$$H = H_S \cdot H_A \cdot H_P$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos(\theta) & -s\sin(\theta) & t_x \\ s\sin(\theta) & s\cos(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 & v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as\cos(\theta) & cs\cos(\theta) - bs\sin(\theta) & t_x \\ as\sin(\theta) & cs\sin(\theta) + bs\cos(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 & v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as\cos(\theta) + t_x v_1 & cs\cos(\theta) - bs\sin(\theta) + t_x v_2 & t_x v \\ as\sin(\theta) + t_y v_1 & cs\sin(\theta) + bs\cos(\theta) + t_y v_2 & t_y v \\ v_1 & v_2 & v \end{pmatrix}$$

Vemos que la última fila ya está resuelta y tenemos que $v_1 = g$, $v_2 = h$ y $v = i$. Además, con $v = i$ podemos también resolver la última columna, por lo que $t_x = \frac{c}{i}$ y $t_y = \frac{f}{i}$.
Finalmente resolvemos para θ y s:

$$a = a \cdot s \cdot \cos(\theta) + t_x v_1 \Rightarrow \frac{a - t_x v_1}{a} = \frac{ai - cg}{ai} = s \cdot cos(\theta)$$

$$d = a \cdot s \cdot \sin(\theta) + t_y v_1 \Rightarrow \frac{b - t_y v_1}{a} = \frac{di - fg}{ai} = s \cdot sin(\theta)$$

Dividimos el segundo con el primero y obtenemos:

$$\frac{s \cdot sin(\theta)}{s \cdot cos(\theta)} = tan(\theta) = \frac{\frac{di - fg}{ai}}{\frac{ai - cg}{ai}} = \frac{id - fg}{ia - cg} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{id - fg}{ia - cg}\right)$$

Resolvemos para $scos(\theta)$, conociendo la siguiente igualdad $cos(arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$s \cdot cos\left(\arctan\left(\frac{id - fg}{ia - cg}\right)\right) = \frac{s}{\sqrt{\left(\frac{id - fg}{ia - cg}\right)^2 + 1}}$$

Finalmente,

$$s = \left(\frac{ai - cg}{ai}\right)\sqrt{\left(\frac{id - fg}{ia - cg}\right)^2 + 1}$$

Vamos ahora aplicar las ecuaciones obtenidas para resolver el siguiente ejemplo.

$$H = \begin{pmatrix} 1.707 & 0.586 & 1.0 \\ 2.707 & 8.242 & 2.0 \\ 1.0 & 2.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 = g = 1.0 \\ v_2 = h = 2.0 \\ v = i = 1.0 \\ t_x = \frac{c}{i} = \frac{1.0}{1.0} = 1.0 \\ t_y = \frac{f}{i} = \frac{2.0}{1.0} = 2.0 \\ \theta = \arctan\left(\frac{id - fg}{ia - cg}\right) = \arctan\left(\frac{2.707 \cdot 1.0 - 2.0 \cdot 1.0}{1.0 \cdot 1.707 - 1.0 \cdot 1.0}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\ s = \left(\frac{ai - cg}{ai}\right)\sqrt{\left(\frac{ib - fg}{ia - cg}\right)^2 + 1} = \left(1 - \frac{1.0 \cdot 1.0}{1.707 \cdot 1.0}\right)\sqrt{1^2 + 1} = \frac{707}{1707} \cdot \sqrt{2} \end{cases}$$

Nota: Si implementáramos estas equivalencias en un computador, tendremos pequeños errores de precisión.

$$\begin{pmatrix} 1.707 & 0.586 & 1.0 \\ 2.707 & 8.242 & 2.0 \\ 1.0 & 2.0 & 1.0 \end{pmatrix} = H_S \cdot H_A \cdot H_P$$

Calculamos el seno y el coseno con los datos anteriores,

$$s \cdot \sin(\theta) = \frac{707}{1707} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{707}{1707} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{707}{1707} = s \cdot \cos(\theta)$$

$$H_S = \begin{pmatrix} \frac{707}{1707} & -\frac{707}{1707} & 1.0 \\ \frac{707}{1707} & \frac{707}{1707} & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_A = \begin{pmatrix} 1.707 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0.586 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$H_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.0 & 2.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

9. ¿Cuáles son las propiedades necesarias y suficientes para que una matriz defina un movimiento geométrico no degenerado entre planos? Justificar la respuesta

10. ¿Qué información de la imagen usa el detector de Harris para seleccionar puntos? ¿El detector de Harris detecta patrones geométricos o fotométricos? Justificar la contestación.

11. ¿Sería adecuado usar como descriptor de un punto Harris los valores de los píxeles de su región de soporte? Identifique ventajas, inconvenientes y mecanismos de superación de estos últimos.

12. Describa un par de criterios que sirvan para seleccionar parejas de puntos en correspondencias ("matching") a partir de descriptores de regiones extraídos de dos imágenes. ¿Por qué no es posible garantizar que todas las parejas son correctas?

13. Cual es el objetivo principal del uso de la técnica RANSAC en el cálculo de una homografía. Justificar la respuesta

14. Si tengo 4 imágenes de una escena de manera que se solapan la 1-2, 2-3 y 3-4. ¿Cuál es el número mínimo de parejas de puntos en correspondencias necesarios para montar un mosaico? Justificar la respuesta

15. ¿En la confección de un mosaico con proyección rectangular es esperable que aparezcan deformaciones geométricas de la escena real?¿Cuáles y por qué? ¿Bajo qué condiciones esas deformaciones podrían no estar presentes? Justificar la respuesta.