Matematikos ir informatikos fakultetas

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

DUOMENŲ MOKSLO STUDIJŲ PROGRAMA

Laboratorinis darbas

χ^2 skirstinio pristatymas

5 grupė

Lukas Janušauskas, Arnas Kazanavičius,
Simonas Lapinskas, Arnas Usonis

Vilnius
2025

1 užduotis

Chi kvadrato skirstinys (žymimas $\chi^2(k)$) yra tikimybinis skirstinys, kuris atsiranda sumuojant k nepriklausomų normaliųjų standartinių kintamųjų kvadratų.

Matematiškai, jei $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ yra nepriklausomi standartiniai normalieji atsitiktiniai dydžiai (tai tokie tokie dydžiai kurių vidurkis 0 ir dispersija 1): $Z_i \sim N(0,1)$ tada jų kvadratų suma seka chi kvadrato skirstinį su k laisvės laipsniais ((Kruopis 1977) 1.7 skyrelis):

$$X = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi^2(k) \tag{1}$$

Taikymas

Chi kvadrato skirstinys yra labai svarbus statistikoje, ypač hipotezių tikrinimui ir dispersijos analizei.

1. χ^2 nepriklausomumo testas

Naudojamas nustatyti, ar duomenų lentelės kintamieji yra nepriklausomi.

Pvz., ar žmonių rūkymo įpročiai priklauso nuo jų lyties?

2. Suderinanumo testas

Tikrina, ar stebėti duomenys atitinka teorinį pasiskirstymą.

Pvz., ar kauliuko metimo rezultatai atitinka tolygų pasiskirstymą?

3. Dispersijos analizė

Naudojamas pasikliautiniams intervalams populiacijos dispersijai įvertinti.

Pvz., ar skirtingose mokyklose mokinių pažymių dispersija yra vienoda?

2 užduotis

Tankio funkcija: ((Kruopis 1977) 3.8 formulė)

$$f(x;\, k) = \begin{cases} \dfrac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & x > 0; \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases} \tag{2}$$

Kur *display* = "$\Gamma(k/2)$ yra Oilerio gama funkcija. Ji turi uždarą formą su natūraliais $\frac{k}{2}$:

$$\Gamma(\frac{k}{2}) = (\frac{k}{2} - 1)!$$

Pasiskirstymo funkcija:

$$F(x;\, k) = \frac{\gamma(\frac{k}{2},\, \frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} = P\left(\frac{k}{2},\, \frac{x}{2}\right) \tag{3}$$

Kur $\gamma(s,t)$ yra apatinė nepilna gamma funkcija, o $P(s,t)$ yra normalizuota nepilna gamma funkcija.

3 užduotis

Skaitinės charakteristikos ((Kruopis 1977) 3.9 apibrėžimas)

$$\text{Vidurkis: } \mu = k \tag{4}$$

$$\text{Dispersija: } \sigma^2 = 2k \tag{5}$$

$$\text{Asimetrijos koeficientas: } \gamma_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \tag{6}$$

$$\text{Eksceso koeficientas: } \gamma_2 = \frac{12}{k} \tag{7}$$

4 užduotis

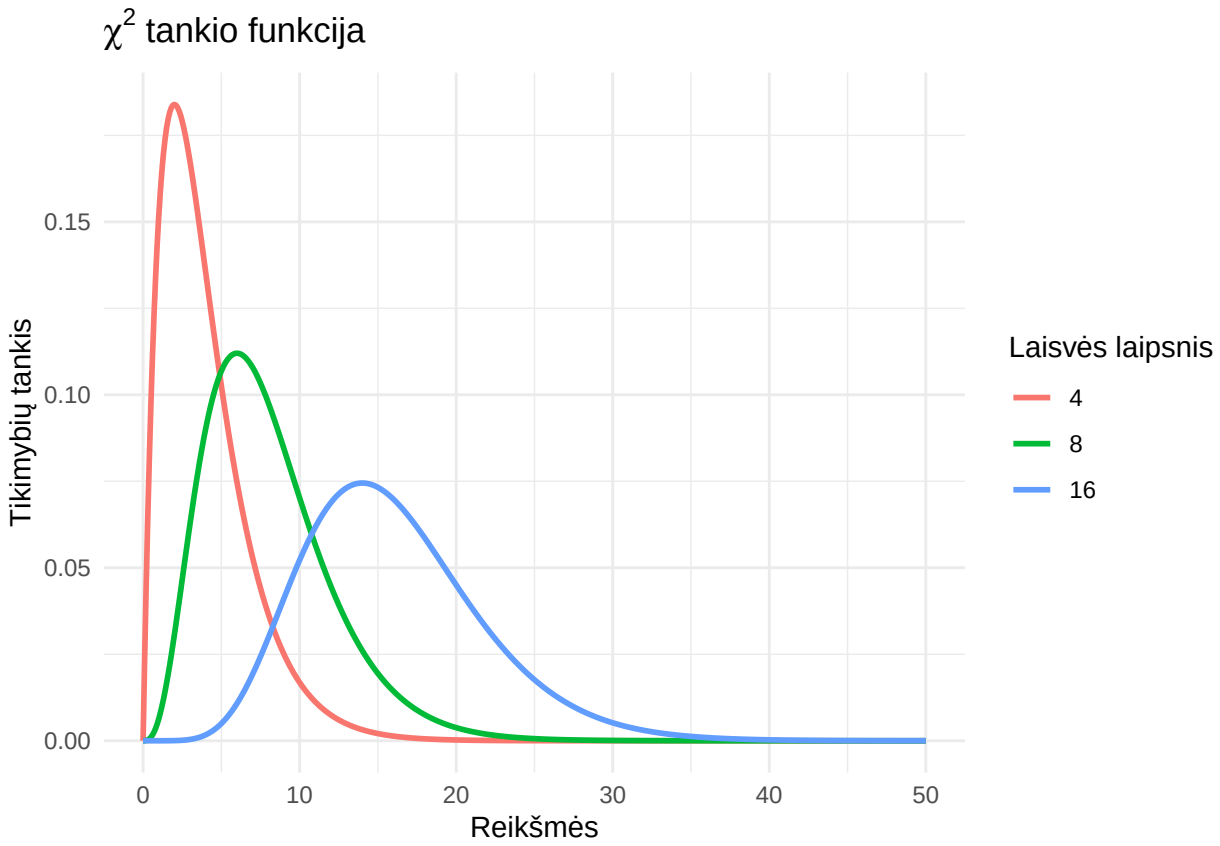
Prieš braižant tankio ir pasiskirstymo funkcijas paminime svarbią teoremą ((Kruopis 1977) 4.16 teorema) apie χ^2 skirstinio konvergavimą į normalųjį, kai $n \to \infty$.

$$\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \to Z \sim N(0,1) \tag{8}$$

Taigi, χ^2 skirstinys konverguoja į normalųjį, kai $n \to \infty$.

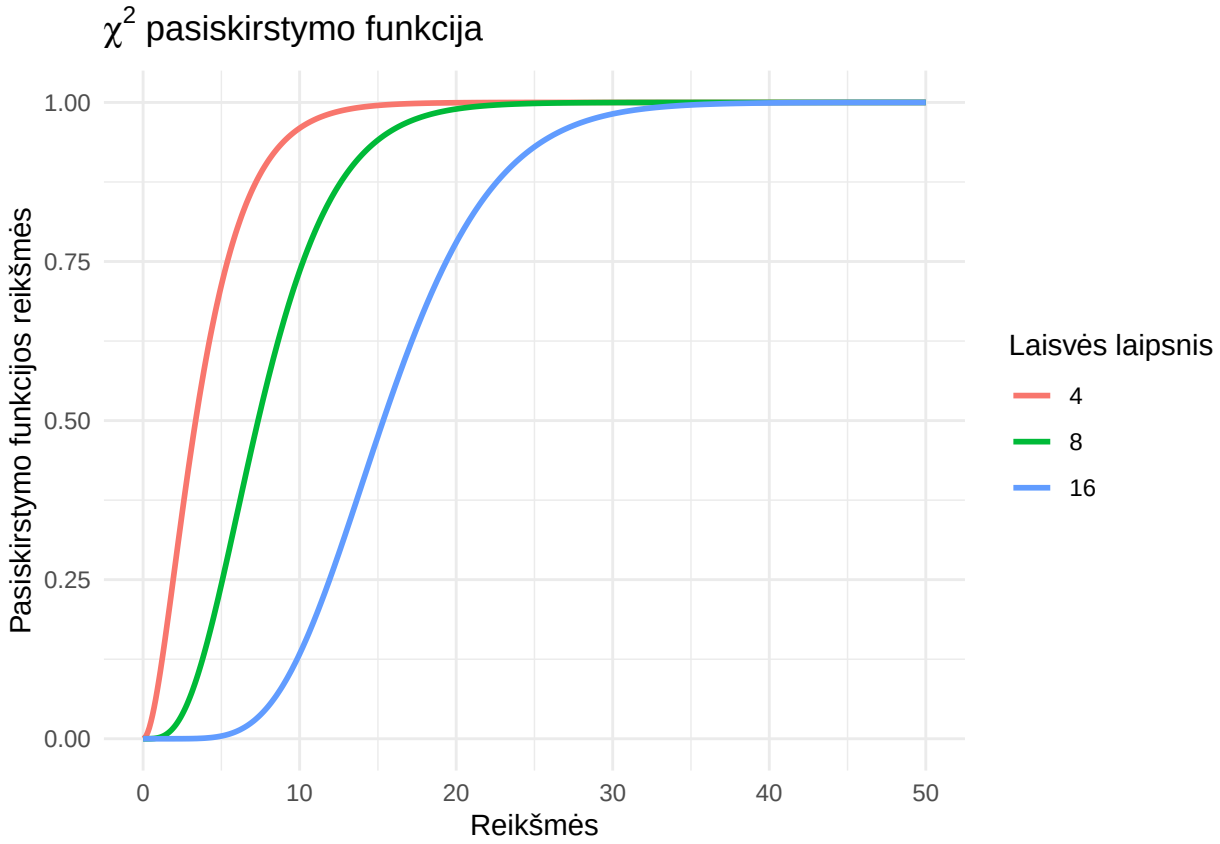
Brėžiame tankio funkcijų grafiką.

```
library(ggplot2)
# install.packages("latex2exp")
library(latex2exp)

x <- seq(0, 50, 0.1)

y1 <- dchisq(x, df = 4)
y2 <- dchisq(x, df = 8)
y3 <- dchisq(x, df = 16)

df1 <- data.frame(x = x, y = y1, df = 4)
df2 <- data.frame(x = x, y = y2, df = 8)
df3 <- data.frame(x = x, y = y3, df = 16)

df <- rbind(df1, df2, df3)

ggplot(data=df, aes(x = x, y = y, color = as.factor(df)))+
  geom_line(linewidth=1)+
  scale_color_discrete(name = "Laisvės laipsnis")+
  labs(y = "Tikimybių tankis",
       x = "Reikšmės")+
  theme_minimal() +
  ggtitle(TeX("$\\chi^2$ tankio funkcija"))
```



Brėžiame pasiskirstymo funkcijų grafiką.

```
y1 <- pchisq(x, df = 4)
y2 <- pchisq(x, df = 8)
y3 <- pchisq(x, df = 16)

df1 <- data.frame(x = x, y = y1, df = 4)
df2 <- data.frame(x = x, y = y2, df = 8)
df3 <- data.frame(x = x, y = y3, df = 16)

df <- rbind(df1, df2, df3)

ggplot(data=df, aes(x = x, y = y, color = as.factor(df)))+
  geom_line(linewidth=1)+
  scale_color_discrete(name = "Laisvės laipsnis")+
  labs(y = "Pasiskirstymo funkcijos reikšmės",
       x = "Reikšmės")+
  theme_minimal() +
  ggtitle(TeX("$\\chi^2$ pasiskirstymo funkcija"))
```



Didėjant laisvės laipsniui, chi kvadrato skirstinys vis labiau primena normaliąjį skirstinį. Esant mažesniam laisvės laipsnių skaičiui, skirstinys yra labiau asimetriškas. Tai byloja tiek pasiskirstymo, tiek tankio funkcijų grafikai.

Tai suprantame kaip pasėkmę (8) teiginio.

5 užduotis

Kvantilių funkcija

$$Q(p) = F^{-1}(p) \tag{9}$$

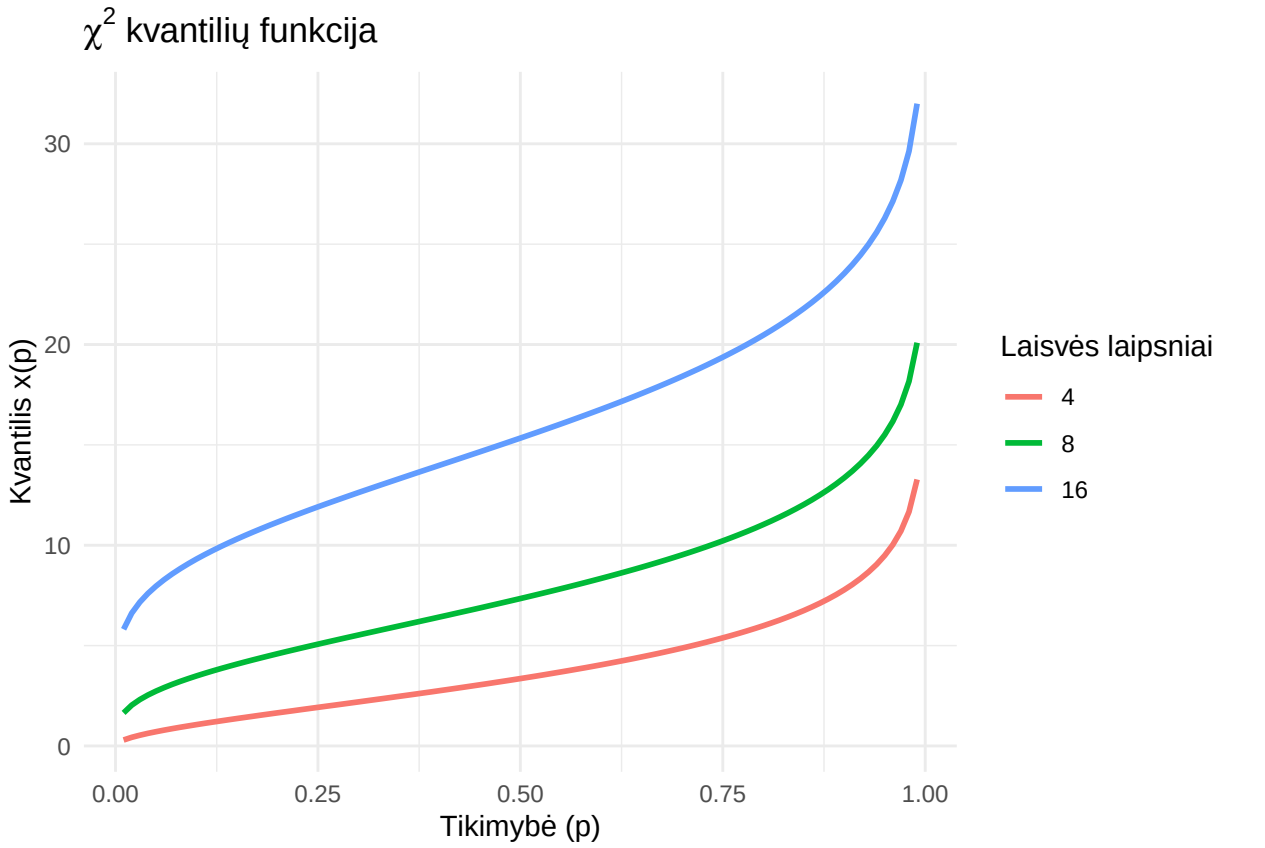
čia:

$x(p)$ – kvantilis tam tikram tikimybės lygiui p, $F^{-1}(p)$ – atvirkštinė chi kvadrato pasiskirstymo funkcija.

Grafikas

```
p_values <- seq(0.01, 0.99, 0.01)

df_values <- c(4, 8, 16)

df_list <- lapply(df_values, function(df) {
  data.frame(p = p_values, q = qchisq(p_values, df), df = as.factor(df))
})

df <- do.call(rbind, df_list)

ggplot(df, aes(x = p, y = q, color = df)) +
```

```
  geom_line(linewidth = 1) +
  scale_color_discrete(name = "Laisvės laipsniai") +
  labs(title = TeX("$\\chi^2$ kvantilių funkcija "),
       x = "Tikimybė (p)",
       y = "Kvantilis x(p)") +
  theme_minimal()
```



Chi kvadrato pasiskirstymas su didesniu laisvės laipsniu tampa vis panašesnis į normalųjį pasiskirstymą, kuo didesnis laisvės laipsnis, tuo kvantiliai lėčiau auga ir įgauna vis simetriškesnę formą.

Tai suprantame kaip pasėkmę (8) teiginio.

6 užduotis

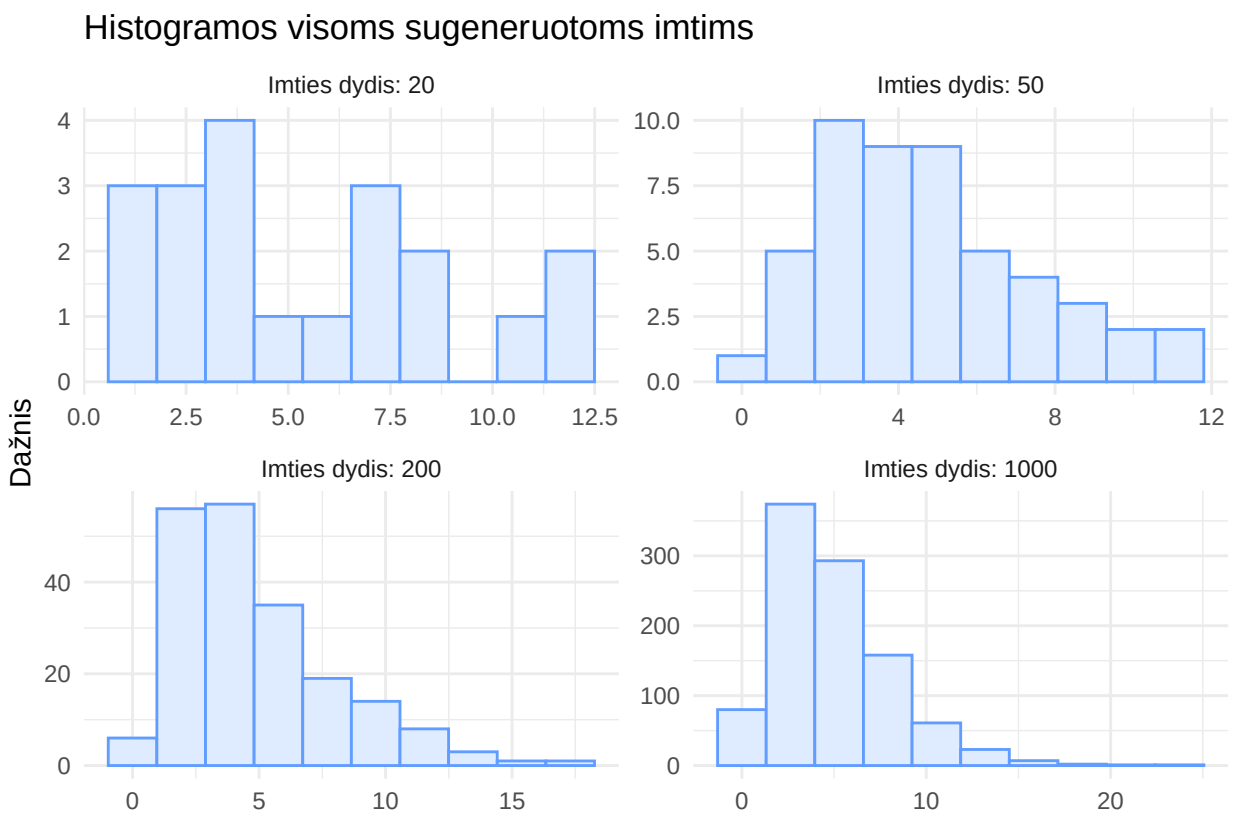
Fiksavome, pasirinktą a.d. parametrų rinkinį (`k=5`). Sugeneravome χ^2_5 duomenų rinkinius su 20, 50, 200, 1000 imčių dydžiais.

```
k <- 5
n <- c(20, 50, 200, 1000)

set.seed(42)
imtis1 <- rchisq(n[1], df=k)

set.seed(42)
imtis2 <- rchisq(n[2], df=k)

set.seed(42)
imtis3 <- rchisq(n[3], df=k)
```

```r
set.seed(42)
imtis4 <- rchisq(n[4], df=k)

imtys <- list(imtis1, imtis2, imtis3, imtis4)
```

Nubrėžėme histogramas

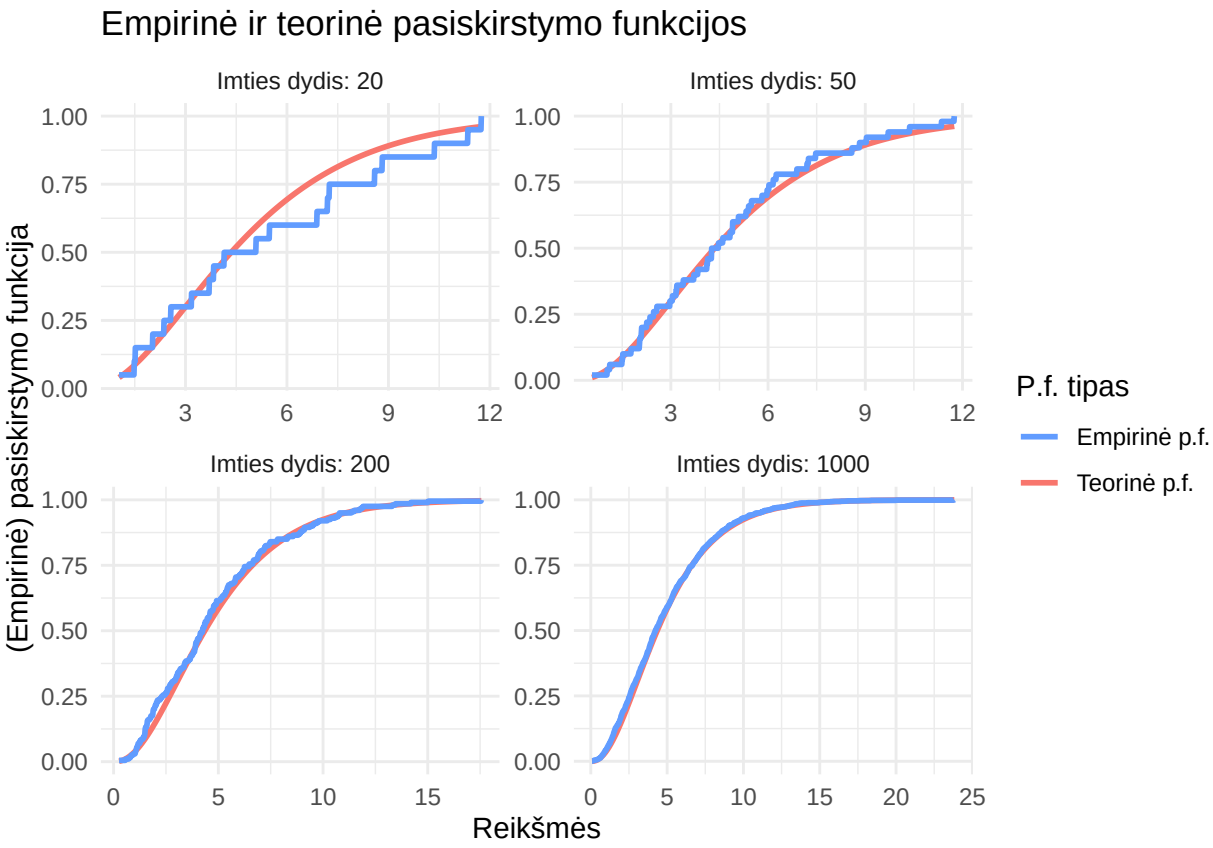
```r
# Apibrėžiame pagalbinę funkciją, kadangi grafikai labai panašūs
library(tidyr)
library(dplyr)

plot_chisq_sample <- function(samples) {
  # samples - imčių vektorius

  # Imtis paverčiame duomenų lentelėmis ir jas sujungiame
  dt <- lapply(samples, function(x) {
    data.frame.out <- data.frame(x)
    data.frame.with.lengths <- data.frame.out %>%
      mutate("Imties.dydis" = length(x))
    return(data.frame.with.lengths)
  })

  df <- do.call(rbind, dt)

  # Dėl įskaitomumo pervardiname imties dydžio stuleplį
  labels.dydziu <- sapply(n, function(x) paste("Imties dydis:", x))
  df <- df %>%
    mutate("Imties.dydis" = factor(Imties.dydis, labels=labels.dydziu))

  # Nubrėžiame histogramas
  df %>%
    ggplot(aes(x=x)) +
      geom_histogram(bins = 10, color = "#619CFF", fill="#dfebff") +
      facet_wrap(~Imties.dydis, scales = "free") +
      theme_minimal() +
      xlab("") +
      ylab("Dažnis") +
      ggtitle("Histogramos visoms sugeneruotoms imtims")
}

plot_chisq_sample(imtys)
```



Empirinės pasiskirstymo funkcijos mūsų darbe imčių pasiskistymo funkcijos pateikiamos su teorine pasiskirstymo funkcija.

```
nubrezti_chisq_empirini <- function(samples, k=5) {
  # samples - imtiys.
  # df - chi kvadratu parametras

  # samples - imčių vektorius

  # Imtis paverčiame duomenų lentelėmis ir jas sujungiame
  dt <- lapply(samples, function(x) {
    seq.x <- seq(min(x), max(x), length.out=1000)

    data.frame.out <- data.frame(seq.x,              # Įdedame seką
                                 ecdf(x)(seq.x),     # Įdedame emp. p.f.
                                 pchisq(seq.x, k))   # Įdedame p.f.

    data.frame.with.lengths <- data.frame.out %>%
      mutate("Imties.dydis" = length(x))

    return(data.frame.with.lengths)
  })

  df <- do.call(rbind, dt)

  # Dėl įskaitomumo pervardiname imties dydžio stuleplį
  labels.dydziu <- sapply(n, function(x) paste("Imties dydis:", x))
```

```r
  df <- df %>%
    mutate("Imties.dydis" = factor(Imties.dydis, labels=labels.dydziu))

  # Nubrėžiame teorinę pasiskirstymo funkciją
  df %>%
    ggplot(aes(x = seq.x)) +
      geom_line(aes(y = pchisq.seq.x..k., color="Teorinė p.f."),
                linewidth = 1) +
      geom_line(aes(y = ecdf.x..seq.x., color="Empirinė p.f."),
                linewidth = 1) +
    facet_wrap(~Imties.dydis, scales = "free") +
    theme_minimal() +
    labs(x = "Reikšmės",
         y = "(Empirinė) pasiskirstymo funkcija",
         title = "Empirinė ir teorinė pasiskirstymo funkcijos") +
    scale_color_manual("P.f. tipas",
                       breaks = c("Empirinė p.f.", "Teorinė p.f."),
                       values = c("#619CFF", "#F8766D"))

}

nubrezti_chisq_empirini(imtys)
```



Nubrėžę empirines pasiskirstymo funkcijas pastebime, kad didesnių imčių empirinės pasiskirstymo funkcijos geriau aproksimuoja tikrąją p.f.

7 užduotis

Remiantis 3. punktu prisimename, kad $EX = k$. Pirmasis žingsnis, sudarant įverčius momentų metodu yra momentų prilyginimas empiriniams momentams. Taigi EX prilyginame $\overline{X}$. Gauname parametro k įvertinį $\widetilde{k}$:

$$\widetilde{k} = \overline{X} \tag{10}$$

```
imtys <- list(imtis1, imtis2, imtis3, imtis4)

sapply(imtys, function(x)
  paste(length(x), "dydžio imties parametro įvertinys", mean(x)))
```

```
## [1] "20 dydžio imties parametro įvertinys 5.42851954560543"
## [2] "50 dydžio imties parametro įvertinys 4.77809785556632"
## [3] "200 dydžio imties parametro įvertinys 4.83744392677588"
## [4] "1000 dydžio imties parametro įvertinys 4.90701265387103"
```

Vėl, kuo didesnė imtis, tuo geriau aproksimuojame skirstinio parametrą k.

8 užduotis

```
# install.packages('likelihoodExplore')
library(likelihoodExplore)

pakoreguota_tiketinumo <- function(x, par) {
  # Pakoreguojame tikėtinumo funkciją, kad tiktų optim funkcijai
  return( -1 * likchisq(x=x, df=par) )
}

mle_chisq_ivertis <- function(imtis) {
  res <- optim(par=c(1),                  # Pradedame nuo 1
               fn=pakoreguota_tiketinumo, # Pakoreguojame tikėtinumo funkciją
               method="L-BFGS-B",         # Naudojame L-BFGS optimizatorių
               x=imtis)
  return ( res$par )
}


sapply(imtys, function(x)
  paste(length(x), "dydžio imties parametro įvertinys", mle_chisq_ivertis(x)))
```

```
## [1] "20 dydžio imties parametro įvertinys 5.30031169143056"
## [2] "50 dydžio imties parametro įvertinys 4.92064761863795"
## [3] "200 dydžio imties parametro įvertinys 4.80092615216356"
## [4] "1000 dydžio imties parametro įvertinys 4.86620238891593"
```

9 užduotis

Nors, davus mažą imtį, gauti geresni rezultatai, panaudojus didžiausio tikėtinumo metodą, tačiau momentų metodo įverčiai, iš rezultatų atrodo, greičiau konverguoja link tikrojo parametro(5). Be abejo, abejais atvejais kuo didesnė imtis, tuo geresnė parametro aproksimacija.

10 užduotis

Parametrų patikimumo intervalai

Pasikliautiniams intervalams nustatyti naudojome procentinį bootstrap metodą.

```
library(boot)

mean_mod <- function(data, idx) {
  # Modifikuojame vidurkio funkciją, kad galėtume gauti bootstrap imtis
  return(mean(data[idx]))
}

bootstrap_ci <- function(sample) {
  bootstrap <- boot(sample, mean_mod, R = 100)
  boot_ci_output <- boot.ci(boot.out=bootstrap, type="perc")

  print(paste("Imties ", length(sample), " pasikliautiniai intervalai"))
  print(boot_ci_output$perc[c(4 ,5)] )
}

bootstrap_ci(imtis1)
```

```
## [1] "Imties  20  pasikliautiniai intervalai"
## [1] 4.007542 7.014174
```

```
bootstrap_ci(imtis2)
```

```
## [1] "Imties  50  pasikliautiniai intervalai"
## [1] 3.952414 5.544095
```

```
bootstrap_ci(imtis3)
```

```
## [1] "Imties  200  pasikliautiniai intervalai"
## [1] 4.370672 5.336238
```

```
bootstrap_ci(imtis4)
```

```
## [1] "Imties  1000  pasikliautiniai intervalai"
## [1] 4.708274 5.143900
```

Pastebime, kad patikimumo intervalas vis arčiau prilimpa tikrojo parametro - 5. Matome, kad 50 objektų imtyje patikimumo intervalas pasislinko į kairę(palyginus su 20). Nors didesnės imties patikimumo intervalo apatinis rėžis yra toliau, turime turėti omenyje, kad vidurkis tiesiog gavosi mažesnis.

11 užduotis

Apskaičiavome 6 dalyje gautų duomenų rinkinių su 20, 50, 200, 1000 imčių dydžiais kvartillius.

```
imtis1_kvartiliai <- quantile(imtis1, c(0.25, 0.5, 0.75))
imtis2_kvartiliai <- quantile(imtis2, c(0.25, 0.5, 0.75))
imtis3_kvartiliai <- quantile(imtis3, c(0.25, 0.5, 0.75))
imtis4_kvartiliai <- quantile(imtis4, c(0.25, 0.5, 0.75))

print(list(imtis1_kvartiliai, imtis2_kvartiliai, imtis3_kvartiliai, imtis4_kvartiliai))
```

```
## [[1]]
##      25%      50%      75%
## 2.510790 4.607263 7.579767
##
## [[2]]
##      25%      50%      75%
```

```
## 2.487877 4.362066 6.120290
##
## [[3]]
##      25%      50%      75%
## 2.340236 4.250821 6.469480
##
## [[4]]
##      25%      50%      75%
## 2.550964 4.246462 6.650125
```

12 užduotis

Prie 6 punkte gautų duomenų rinkinių pridėjome po 5 išskirtis.

Visų pirma paskaičiuokime apskaičiuokime išskirčių klasifikavimo ribas, remiantis kvartilių metodu:

```
imtis1_ribos <- c(imtis1_kvartiliai[1] - 3 * IQR(imtis1),
                  imtis1_kvartiliai[3] + 3 * IQR(imtis1))

imtis2_ribos <- c(imtis2_kvartiliai[1] - 3 * IQR(imtis2),
                  imtis2_kvartiliai[3] + 3 * IQR(imtis2))

imtis3_ribos <- c(imtis3_kvartiliai[1] - 3 * IQR(imtis3),
                  imtis3_kvartiliai[3] + 3 * IQR(imtis3))

imtis4_ribos <- c(imtis4_kvartiliai[1] - 3 * IQR(imtis4),
                  imtis4_kvartiliai[3] + 3 * IQR(imtis4))

print(list(imtis1_ribos, imtis2_ribos, imtis3_ribos, imtis4_ribos))
```

```
## [[1]]
##       25%       75%
## -12.69614  22.78670
##
## [[2]]
##      25%      75%
## -8.40936 17.01753
##
## [[3]]
##       25%       75%
## -10.04749  18.85721
##
## [[4]]
##       25%       75%
## -9.746521 18.947610
```

Kad galėtume atpažinti vėliau, patikrinkime, duomenų amplitiudes

```
sapply(imtys,
       function(x) paste(length(x),
                         "imties dyio amplitiudė:",
                         min(x), "-", max(x))
       )
```

```
## [1] "20 imties dyio amplitiudė: 1.03617574402698 - 11.7459815259314"
## [2] "50 imties dyio amplitiudė: 0.567393736980694 - 11.7459815259314"
## [3] "200 imties dyio amplitiudė: 0.260054426489983 - 17.5581190135009"
```

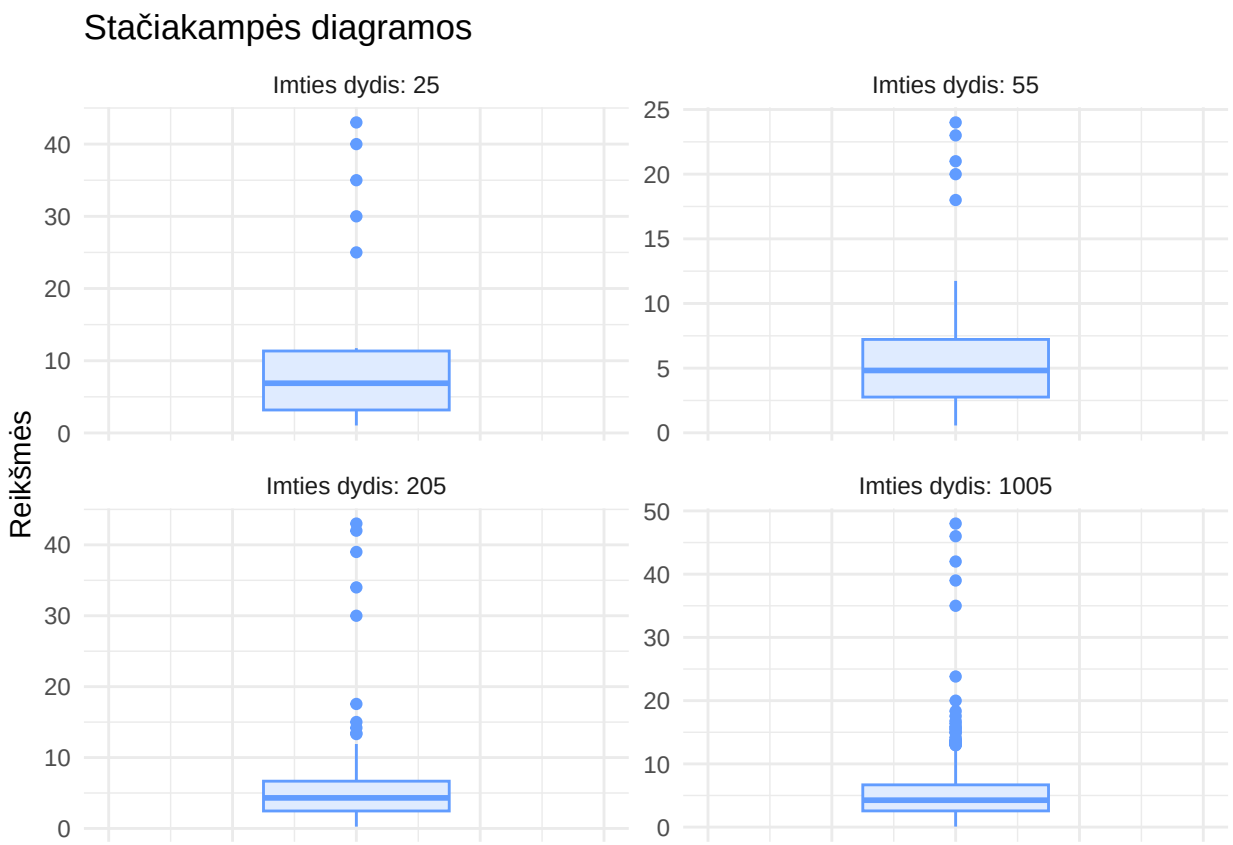
```
## [4] "1000 imties dyio amplitiudė: 0.0798479131768038 - 23.814071833844"
```

```
imtis1_isskirtys <- c(imtis1, 25, 30, 35, 40, 43)
imtis2_isskirtys <- c(imtis2, 18, 20, 21, 23, 24)

# Kadangi jau pačiose imtyse yra išskirčių(matome iš amplitiudžių ir kvartilių testo)
# Paimame didesnes išskirtis, kad lengviau išskirtume, ką pridėjome, o kas jau buvo
imtis3_isskirtys <- c(imtis3, 30, 34, 39, 42, 43)
imtis4_isskirtys <- c(imtis4, 35, 39, 42, 46, 48)

su.iskirtimis <- list(imtis1_isskirtys,
                      imtis2_isskirtys,
                      imtis3_isskirtys,
                      imtis4_isskirtys)
```

13 užduotis

Nubraižėme po stačiakampę diagramą kiekvienam 12 dalies duomenų rinkiniui

```
dt <- lapply(su.iskirtimis, function(x) {
  data.frame.out <- data.frame(x)
  data.frame.with.lengths <- data.frame.out %>%
    mutate("Imties.dydis" = length(x))
  return(data.frame.with.lengths)
})

df <- do.call(rbind, dt)

labels.dydziu <- sapply(n, function(x) paste("Imties dydis:", x+5))
df <- df %>%
  mutate("Imties.dydis" = factor(Imties.dydis, labels=labels.dydziu))

df %>%
  ggplot(aes(y = x)) +
    geom_boxplot(color = "#619CFF", fill = "#dfebff") +
    xlim(c(-1, 1)) +
    facet_wrap(~ Imties.dydis, scales = "free") +
    theme_minimal() +
    theme(
      axis.text.x = element_blank()) +
    labs(y = "Reikšmės",
         title = "Stačiakampės diagramos")
```



Matome, kad stačiakampės diagramos identifikuoja įrašytas išskirtis.

14 užduotis

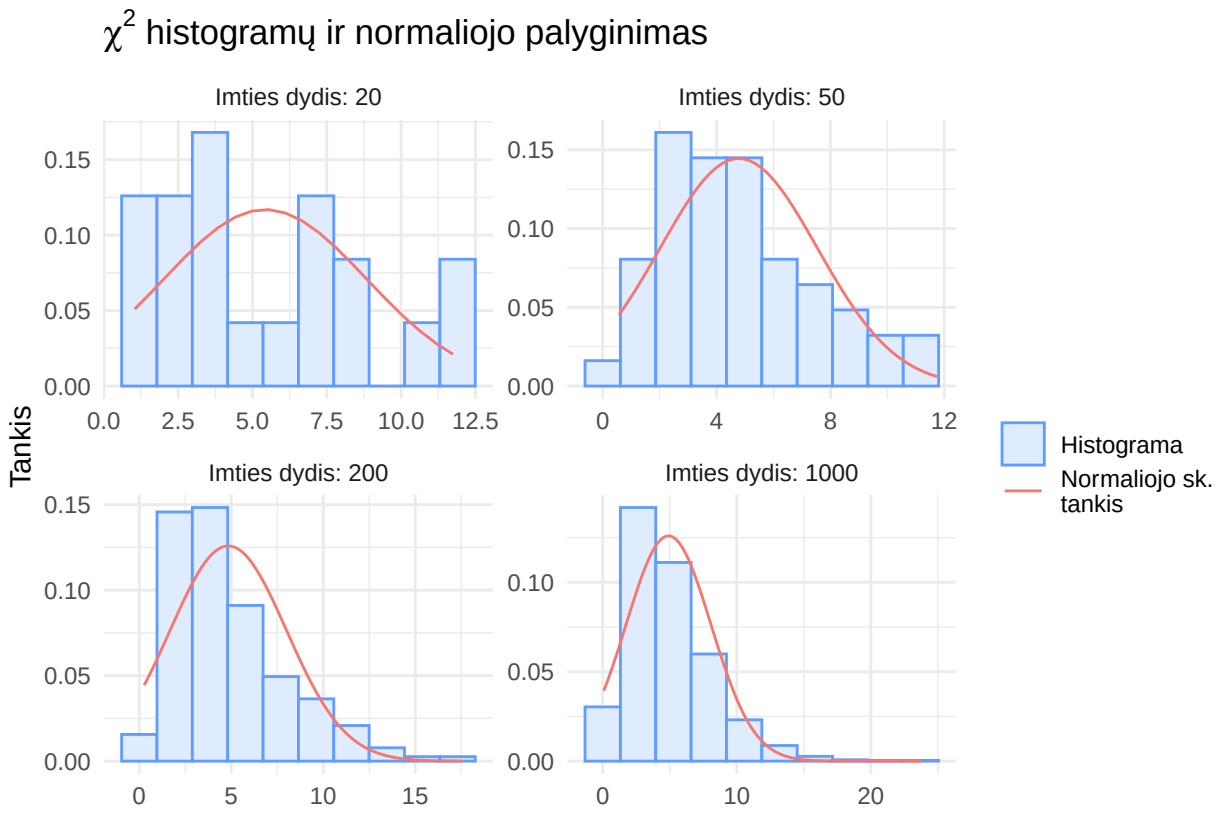
Grafiškai palyginome 6 punkte gautas histogramas su normaliojo skirstinio tankiu.

Kad galėtume grafiškai palyginti, mums reikia x ašių. Jas gauti pasitelkėme funkciją `seq`.

```
imtis1_seq <- seq(min(imtis1), max(imtis1))
imtis2_seq <- seq(min(imtis2), max(imtis2))
imtis3_seq <- seq(min(imtis3), max(imtis3))
imtis4_seq <- seq(min(imtis4), max(imtis4))
```

```
append.normal <- function(sample) {
   seq.x <- seq(min(sample), max(sample),
                length.out=length(sample))

   norm.equiv <- dnorm(seq.x,
                       mean=mean(sample),
                       sd=sd(sample))

   return(
     data.frame(list(imtis = sample,
                     Imtis.dydis = rep(length(sample), length(sample)),
                     seq.x = seq.x,
                     norm.equiv = norm.equiv))
   )
}
```

```r
dt <- lapply(imtys, append.normal)
df <- do.call(rbind, dt)

labels.dydziu <- sapply(n, function(x) paste("Imties dydis:", x))
df <- df %>%
  mutate("Imtis.dydis" = factor(Imtis.dydis, labels=labels.dydziu))

df %>%
  ggplot(aes(x = imtis)) +
    geom_histogram(aes(y = after_stat(density), color = "Histograma"),
                   bins=10, fill="#dfebff") +
    geom_line(aes(x = seq.x, y = norm.equiv,
              color = "Normaliojo sk.\ntankis")) +
    facet_wrap(~ Imtis.dydis, scales="free") +
    scale_color_manual("",
                       breaks = c("Histograma", "Normaliojo sk.\ntankis"),
                       values = c("#619CFF", "#F8766D")) +
    theme_minimal() +
    labs(x="", y="Tankis",
         title=TeX("$\\chi^2$ histogramų ir normaliojo palyginimas"))
```



Matome, kad didėjant imties dydžiui, historigrama vis tiksliau atitinka normaliojo skirstinio tankį.

14 užduotis

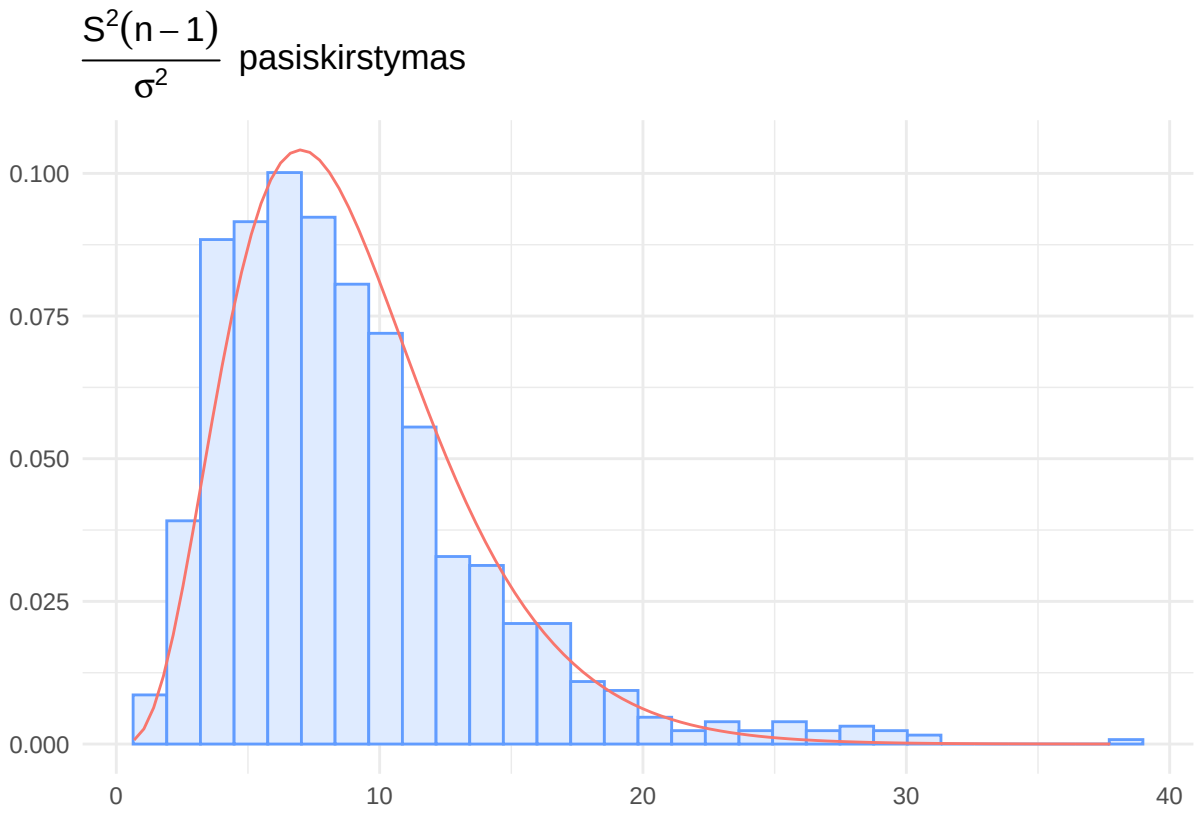
Paprastai, χ^2 skistinys yra naudojamas χ^2 testui, tačiau taip pat normaliojo skirstinio imties dispersiją galime modeliuoti pagal χ^2 skirsinį:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{11}$$

Pavyzdžiui paimkime žinomą duomenų rinkinį: vyno kokybės.

```
library(boot)
library(latex2exp)

wine.quality <- read.csv('WineQT.csv')

var_pop <- var(wine.quality$pH)
n <- 10
var_sample <- sapply(1:1000, function(x) var(sample(wine.quality$pH, n)))

chi_sq_example <- data.frame(var_sample / var_pop * (n-1))
colnames(chi_sq_example) <- c("Sample variance")

chi_sq_example %>%
  ggplot(aes(x = `Sample variance`)) +
  geom_histogram(aes(y=after_stat(density)),
                 color='#619CFF', fill='#dfebff') +
  stat_function(fun = dchisq, args = c(n-1), color="#F8766D") +
  theme_minimal() +
  labs(y = "", x = "",
       title = TeX("$\\frac{S^{2} (n-1)}{\\sigma^{2}}$ pasiskirstymas"))
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



Bibliografija

Kruopis, J. 1977. *Matematinė Statistika*. 2nd ed. Mokslo ir enciklopedijų leidykla.