

Theoretische Mechanik

Till Hanke

Letzte Aktualisierung: 19. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Raum und Zeit	2
1.1	Raum	2
1.2	Koordinatensysteme	2
1.3	Zeit	4
1.3.1	Ereignis	4
1.4	Kinematik	5
1.5	Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme	7
1.5.1	Inertialsysteme	8
1.6	Galilei- und Lorenztransformationen	9
2	Newtonsche Mechanik	12
2.1	Newtonsche Bewegungs-Gleichung	13
2.2	Arbeit und Energie	14
2.2.1	Beispiele konservativer Kraftfelder	14
2.2.2	Gegenbeispiel	15
2.2.3	Bemerkung	15
2.3	Systeme mehreren (N) Teilchen	15
2.4	N-Teilchenproblem	16
2.5	Impuls und Drehimpuls	18
2.5.1	Drehimpuls	18
2.6	Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte	20
3	Section 3 – To be composed	22
4	Lagrange-Formalismus	22
4.1	Lagrange I	22
4.2	Lagrange II	22
5	kleine Schwingungen	26
5.1	Lineare Differenzialgleichungen (2.Ordnung)	27
5.1.1	Beispiel	27

6	Hamiltonsche Mechanik	27
6.1	Poisson-Klammer	27
6.2	Kanonische Transformationen	28
6.3	(Form-)Invarianz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unter kanonischen Transformationen	29
6.4	Erzeugende von kanonischen Transformationen	29

1 Raum und Zeit

1.1 Raum

Die Mechanik spielt sich im dreidimensionalen Raum ab. Affiner Raum \mathbb{E}^3 : Menge aller Punkte im Raum. Ein Punkt $P \in \mathbb{E}^3$ wird durch Angabe eines Ortsvektors $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ (3D-Vektorraum) relativ zu einem Ursprung $O \in \mathbb{E}^3$ festgelegt: $\vec{OP} = \vec{P}$.



Abbildung 1:

Ein Skalarprodukt $\vec{r} \cdot \vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ liefert Längen $\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$
und Abstände $d(P, P') = |\vec{a}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r} - \vec{r}'}$
'Euklidischer' Raum \mathbb{E}^3 : affine, 3D Räume mit $d(P, P')$

Bemerkung

- Die Wahl von O ist beliebig; eine andere Wahl O' mag zweckmäßiger sein, „ändert nichts an der Physik“. Insbesondere gilt: $d_O(P, P') = d_{O'}(P, P')$
- Übergang $O \rightarrow O'$: Wechsel des Bezugssystems

1.2 Koordinatensysteme

Für $P \in \mathbb{E}^3$ muss angegeben werden: Ursprung O und Koordinaten (x, y, z) bzgl. einer kartesischen OB (e_1, e_2, e_3) – Da OB: $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ sowie $|e_i| = 1$

Für den Punkt P folgt dann:

$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \sum_i^3 x_i \vec{e}_i$$

Dem Punkt P ordnen wir den Spaltenvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, bezogen auf $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, zu.

Bemerkungen

1. Die Wahl von $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ist beliebig.
Es gilt: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$
 $\vec{e}'_k = \sum_i R_{ki} \vec{e}_i$ mit einer orthogonalen Transformation $R \in O(3)$ Drehungsmatrix $R^{-1} = R^T$; $(\det R = 1)$
2. Transformation der Koordinaten bezogen auf $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Aktive Transformation

→ die Rel. $GL(n)$ definiert bzgl. eines festen Koordinatensystems (O, e, e, e) eine aktive Drehung R des Vektors $\vec{r} = \sum_k x_k \vec{e}_k \rightarrow \vec{r}' = \sum_k x'_k \vec{e}_k = R\vec{r}$

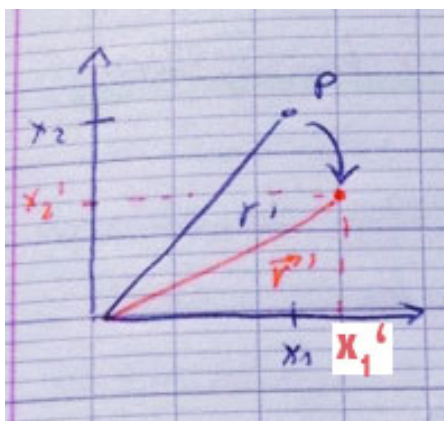


Abbildung 2:

Achtung:

Für die Basisvektoren aus Bemerkung 2 gilt: $\vec{e}'_k = (R^{-1})\vec{e}_k$ (siehe Vorübung).

Transformation Die Trafo $GL(n)$ definiert allgemein das Transformationsverhalten eines Vektors (Tensor 1.Stufe)

Beispiele: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow v'_k = \sum_i R_{ki} v_i$; Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc.

Bedeutung: Physikalische Grundgleichungen müssen das Trafo Verhalten respektieren

Bsp: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. In (O, e, e, e) : $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow$ in (O, e', e', e') : $m\ddot{x}'_i = F'_i$

Krummliniges Koordinatensystem in dem $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), i \in \{1, 2, 3\}$ mag sinnvoll sein.

Beispiele: Zylinder- (r, φ, z) oder Kugelkoordinaten (r, Θ, φ)

Achtung: $\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_i(q_1, q_2, q_3)$

1.3 Zeit

1.3.1 Ereignis

E ist ein Punkt der Raum-Zeit mit Koordinaten (t, x, y, z) bezogen auf (O, e, e, e)

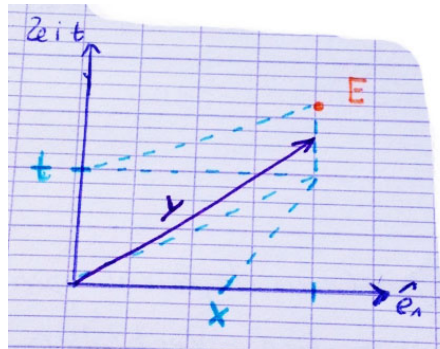


Abbildung 3:

Ort räumliche Koordinaten (x, y, z) werden abgelesen durch Maßstäbe.

Zeit zeitliche Koordinate t (Koordinatenzeit): abgelesen von einer Uhr

- Festlegung der Zeit t eines Ereignisses durch gleichzeitiges betrachten von E und der Uhr
- Nur lokal möglich
- Wir denken uns den gesamten Raum ausgestattet mit Uhren, die alle synchronisiert sind.

Die Koordinatenzeit t des Ereignisses E mit (t, x, y, z) wird von der Uhr mit räumlichen Koordinaten (x, y, z) abgelesen!

Bemerkung

1. Die absolute Uhrzeit t ist beliebig, eine andere Wahl $t' = t + t_0$ mag zweckmäßiger sein. „Ändert nichts an der Physik“

- Uhrensynchronisation kann durch Lichtpulse realisiert werden („Einstein-Synchronisation“), etwa vom Mittelpunkt zwischen zwei Uhren.
es zeigt sich: Äquivalent dazu (sehr langsamer) Uhrentransport
- Vorsicht ist geboten beim Vergleich von Uhren in relativ zueinander bewegten Bezugssystemen

1.4 Kinematik

Hier betrachtet: Kinematik der klassischen Mechanik

Kinematik ist die „Beschreibung der Bewegung“ – zunächst ohne auf Ursachen einzugehen.

Bahnkurve $\vec{r}(t)$

Ortsvektor

Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{T}(t) \text{ mit } |\vec{T}| = 1; v(t) = |\vec{v}(t)|$$

Beschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \dot{v}\vec{T} + v(t)\dot{\vec{T}}(t)$

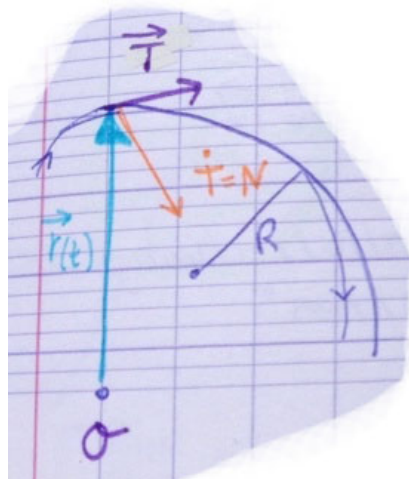


Abbildung 4:

$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|}$ steht senkrecht auf \vec{T} und $|\vec{N}| = 1$ („Normalenvektor“)

(\vec{T}, \vec{N}) definieren „Schmiegeebene“, in der lokal die Bahnkurve durch einen Kreis mit Krümmungsradius $R = \frac{v}{|\dot{\vec{T}}|}$ beschrieben werden kann (siehe Übung).

Es folgt $\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$ als Summe von zwei orthogonalen Beiträgen – wobei

→ Der erste: Eine *Tangentialbeschleunigung* und
 → Der zweite: Eine *Normal- oder Zentripetalbeschleunigung*
 ist.

Beispiel

1. Geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad (\dot{v} = 0, R = \infty)$$

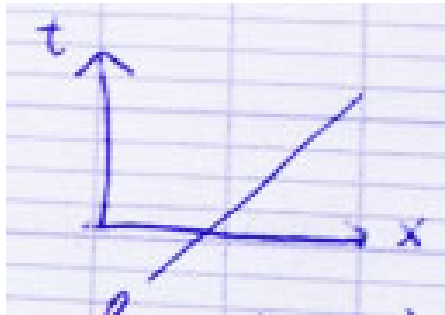


Abbildung 5:

2. Geradlinige Bewegung (allgemein)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + l(t)\vec{T}_0, \quad \vec{v} = \dot{l}\vec{T}_0 \Rightarrow v = \dot{l}, \quad \vec{T} = \vec{T}_0 \quad (\dot{v} = \ddot{l}; R = \infty)$$

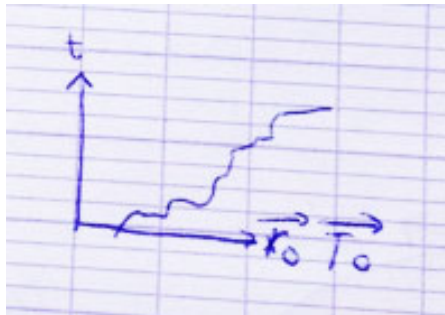


Abbildung 6:

3. Gleichförmige Kreisbewegung

$$v = \frac{2\pi R}{\tau} = \text{const.}$$

$$\dot{v} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = 4\pi^2 \frac{R}{\tau^2} \vec{N}$$

Mit τ Umlaufzeit

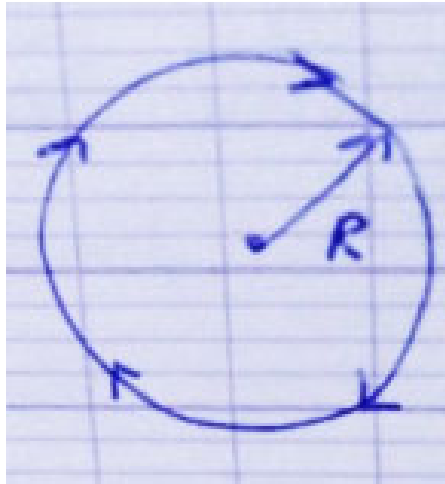


Abbildung 7:

Anwendung auf Kepler-Bahnen für Planeten $\tau^2 \sim R^3$ (3.Keplergesetz):
 $\Rightarrow \vec{a} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$ ($\vec{F} = m\vec{a}$) \Rightarrow Planetenbewegung $\vec{F} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$

1.5 Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme

→ Bezeichne RS das Ruhesystem

→ Wie wählen wir (O, e_1, e_2, e_3) geeignet? \Rightarrow Nahe liegend: *Laborsystem* (Labortisch ruht im LS)

→ *Beispiel* elastischer Stoß im LS (m ruht)

Wechsle ins Ruhesystem der Masse M

Die Betrachtung wird eindeutig und trivial bei $M \gg m$

Übergang von System Labortisch (O, e, e, e , Uhren) in RS der großen Masse M (O', e', e', e' , Uhren') gilt:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$t' = t$$

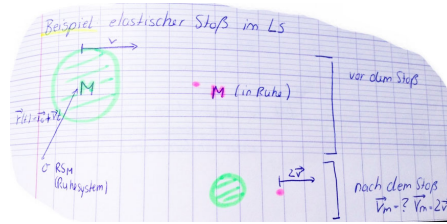


Abbildung 8:

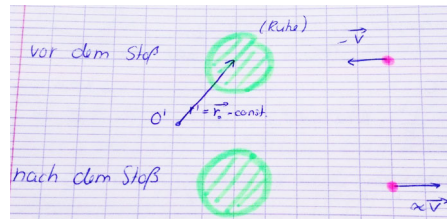


Abbildung 9:

Die **Galilei-Transformation** beschreibt Transformationsgesetz von BS zu BS' , das sich mit Geschwindigkeit v relativ zu BS bewegt. Zur Beschreibung sind $BS = RS_m$ und $BS' = RS_M$ völlig gleichwertig (hier BS' transparenter).

Bemerkungen

1. Zustand „in Ruhe“ hat keine Absolute Bedeutung sondern hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. (Bewegung ist *relativ* zu sehen)
2. Frage vor 400 Jahren: Ruht die Erde und die Sonne bewegt sich?
Galilei: Frage ist bedeutungslos, nicht entscheidbar
 \Rightarrow Galilei-Transformationen
3. Relativität kommt zum Ausdruck im 1. Newtonschen Gesetz: („Trägheitssatz“)
Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig-gleichförmigen Bewegung sofern er nicht durch Kräfte zur Änderung gezwungen wird.

1.5.1 Inertialsysteme

(IS) sind BS , die durch die Gültigkeit des 1. Newtonschen Gesetzes ausgezeichnet sind. Ausgehend von einem IS findet man weitere IS' durch geradlinig-gleichförmige Bewegung des IS' relativ zu IS. (häufig IS='ruhend bzgl. des Fixsternhimmels'; in der Praxis $LS \approx IS$ (gute Näherung)).

in einem relativ zu IS beschleunigten BS treten Scheinkräfte auf, die nicht auf fundamentalen Wechselwirkungen (Coulombkraft, etc) beruhen.

⇒ physikalische Grundgesetze werden bzgl. eines IS formuliert, dabei sind alle IS völlig gleichwertig; IS→IS' durch:

1. „Boost“ mit Richtung \vec{v} $t' = t - \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2}$
2. Gleichförmig-geradlinige Bewegung: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ (3 Parameter)
(Galilei-Relativität)
3. Räumliche Verschiebung: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$ (3 Parameter)
(Homogenität des Raumes)
4. Räumliche Drehung: $\vec{r}' = R\vec{r}$ (3 Parameter)
(Isotropie des Raumes)
5. Zeitgleiche Verschiebung: $t' = t + t_0$ (1 Parameter)
(Homogenität der Zeit)

Die Kombination all dieser Transformationen definieren die 'Galilei-Gruppe' der klassischen Raum-Zeit mit 10 freien Parametern.

1.6 Galilei- und Lorentztransformationen

Die Naturgesetze müssen von einer Art sein, die (Form-)invariant sind unter Transformation zwischen IS

Bsp.: IS→IS', dann gilt für Newton:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}'$$

→ *Relativitätsprinzip!* Insbesondere gilt:

geradlinig-gleichförmige Bewegung in IS mit Koordinaten(t,x,y,z) ist auch eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in einem anderen IS' mit (t',x',y',z').

Bsp: Galilei-Transformaiton : mit \vec{v} rel. zu IS bew. IS' gilt $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$, $t' = t + t_0$

in IS: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}t$

⇒ IS' : $\vec{r}'(t') = \vec{r}_0 + (\vec{u} - \vec{v})t'$

Umkehrung? folgt aus der Forderung (s.o.) dass $t, \vec{r} \rightarrow t', \vec{r}'$ eine Galilei-Trafo?

Frage: 'wie sieht allgemein eine Trafo $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$ aus, die die Forderung (s.o.) erfüllt für IS→IS', das sich mit \vec{v} (vorgegeben) relativ zu IS bewegt?

$$\rightarrow \text{lineare Trafo der Raum-Zeit!} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & & & \\ . & 4 & \times & 4 \\ . & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

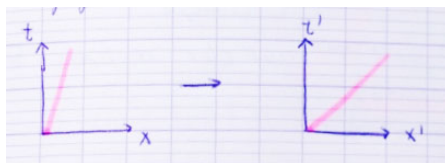


Abbildung 10:

→ bzgl. räumlicher Anteile \vec{r} Vektorcharakter muss erhalten bleiben: $\vec{r}' \sim \vec{r}, \vec{v}$

→ Ansatz:

$$t' = a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{r}' = c(v)\vec{r} + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + e(v)\vec{v}t$$

mit beliebigen Funktionen $a(v), \dots, e(v)$, die bestimmen weitere Forderungen:

1. für $\vec{r} = \vec{v}t \Rightarrow \vec{r}' = 0 \Rightarrow c + d + e = 0$
2. Relativität (I) Vertausche Rolle IS \leftrightarrow IS' ($\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$)

$$\Rightarrow t = a(v)t' - b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r}')$$

$$\vec{r} = c(v)\vec{r}' + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r}')\vec{v} + e(v)\vec{v}t'$$

ersetze t' und \vec{r}' auf der rechten Seite durch Ansatz

$$\Rightarrow t = a(v)(a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})) - \dots$$

$$\vec{r} = c(v)(c(v)\vec{r} + \dots) + \dots \vec{v} \dots$$

$$\Rightarrow c^2 = 1; a = c + d; a^2 = 1 + ebv^2; e = -a$$

$$\Rightarrow c = 1; e = -a; d = a - 1; b = \frac{1 - a^2}{av^2}$$

Wähle Koordinatensystem so, dass x in Richtung \vec{v} zeigt. $\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$t' = a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x$$

$$x' = a(v)(x - vt); y' = y; z' = z$$

3. Relativitätsprinzip:

$IS \rightarrow^v IS' \rightarrow^u IS''$

$$t'' = a(u)t' + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}x' = a(u)(a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x) + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}(a(v)(x - vt))$$

$$x'' = a(u)(x' - ut') = a(u)(a(v)x - u\frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x) + \dots t$$

außerdem muss gelten $IS \rightarrow^w IS''$

woraus folgt, dass

$$t'' = a(w)t + (w)x$$

$$x'' = a(w)(x - wt)$$

woraus dann folgt:

$$[a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u))]t + \dots x$$

$$a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u)) = a(w)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(u) - 1}{u^2 a^2(u)} = \frac{a^2(v) - 1}{v^2 a^2(v)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(v) - 1}{v^2 a^2(v)} = \text{const.} = K$$

$$\Rightarrow a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}$$

$$k = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{ist Galilei Trafo}$$

$$k \neq 0? [k] = \frac{1}{\text{Geschwindigkeit}^2} = \frac{1}{c^2} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow t' = a(v)(t - \frac{vx}{c^2})$$

$$x' = a(v)(x - vt)$$

Die Lorentz-Transformation mit $a(v) \rightarrow \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Bedeutung von c ?

Man betrachte die 'Addition' von Geschwindigkeiten: $w = u + v$?

$$\begin{aligned}
 a(w) &= a(v)a(u)(1 + kuv) \\
 1 - kw^2 &= \frac{(1 - kv^2)(1 - ku^2) + (1 + kuv)^2 - (1 + kuv)^2}{(1 + kuv)^2} \\
 &= 1 - k \frac{(u + v)^2}{(1 + kuv)^2} \\
 \Rightarrow w &= \frac{u + v}{1 + kuv} \Leftrightarrow \left(\frac{w}{c}\right)^2 \\
 &= \frac{\left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2} \\
 &= 1 - \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Folgerungen:

- a) für $u = c \Rightarrow w = c$
- b) für $v = c \Rightarrow w = c$
- c) für $u < c; v < c \Rightarrow w < c$
- d) für $u \ll c; v \ll c \Rightarrow w \approx u + v$

c ist Lichtgeschwindigkeit

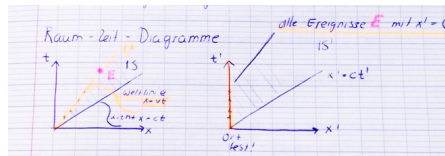


Abbildung 11:

2 Newtonsche Mechanik

→ basiert auf Galilei-Raum-Zeit (gültig für $v \ll c$) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$ 'Fernwirkung' der Kraft
 \Leftrightarrow Widerspruch zur Vorstellung einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wirkungen.

→ relativistische Mechanik folgt in Kap.7

2.1 Newtonsche Bewegungs-Gleichung

zunächst phänomenologisch; Erfahrung: durch Angabe des Anfangsortes $\vec{r}(t_0) = \vec{r}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ festgelegt ist \Rightarrow wir erwarten eine Relation $\ddot{\vec{r}}(t) \sim \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zur Bestimmung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ (Dynamik)

\rightarrow Newton (2. Newton-Gesetz); Impuls $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$, bei konstanter (träger) Masse $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ wobei \vec{F} die Kraft ist, die auf den Körper wirkt.

Beispiel:

1. ggLf. Bew.
 $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0)$
2. $\vec{F} = \vec{F}_0$ konstant (Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche)
 $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + 0,5 \frac{\vec{F}_0(t - t_0)^2}{m}$ (Wurfparabel)
3. Federkraft (1Dim)
 $m\ddot{x} = -kx, F(x) = -kx, w^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{v_0}{w} \sin w(t - t_0)$
4. Lorentzkraft geschwindigkeits-abhängig
 $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$
5. Reibungskräfte (phänomenologisch)
 $\vec{F}_R = -\alpha \dot{\vec{r}}; \alpha > 0$ Reibungskoeffizient.
6. Coulombkraft
 $\vec{F} = c q Q \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$

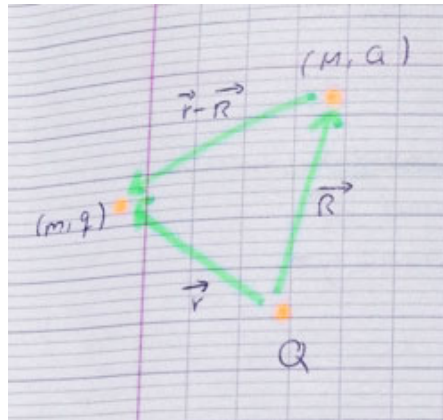


Abbildung 12:

$qQ < 0$: anziehend

$qQ > 0$: abstoßend

c : Konstante, abhängig von der Einheit Ladung

2.2 Arbeit und Energie

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} &= \vec{F}\dot{\vec{r}} \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}\dot{\vec{r}} \\
 &\Rightarrow T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r}(t)
 \end{aligned}$$

Entlang der Kurve L $\vec{r}(t)$ mit $r(t_1) = r_1 \dots$ Wir definieren die am Teilchen geleistete

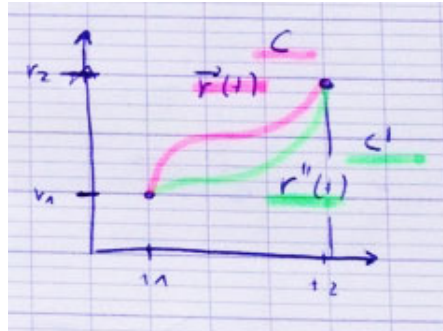


Abbildung 13:

Arbeit entlang L durch $W_e(r_1 \rightarrow r_2) = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \dot{\vec{r}} dt$

Wir nennen ein Kraftfeld \vec{F} *konservativ*, wenn W_e nur von r_1 und r_2 , aber nicht vom Weg $r(t)$ abhängt.

Theorem $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ \Leftrightarrow es existiert ein skalar Potential $U(\vec{r})$ mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$$

, Kraftfeld ist Wirbelfrei.

Für konservative Kraftfelder gilt: $\int_L F(r) dr = -U(r_2) + U(r_1) = W(r_1 \rightarrow r_2)$

$$\Rightarrow T(t_2) + U(r_2) = T(t_1) + U(r_1)$$

wir sehen für konservative Kräfte $F = -\nabla U(r)$ folgt:

Energieerhaltung $E = T + U = \text{const!}$, $5m\dot{r} + U(r(t)) = \text{const!}$

denn $\frac{d}{dt} E = m\dot{r}\ddot{r} + \nabla U(r(t))\dot{r}(t) = \dot{r}(t)(m\ddot{r} + \nabla U) = 0$ (Newton-Gleichung)

2.2.1 Beispiele konservativer Kraftfelder

$$F = -\nabla U$$

1. $F = F_0 \Rightarrow U(r) = -F_0 r$
2. Federkraft $F = -kr \Rightarrow U(r) = 0,5kr^2$ (harmonischer Oszillator)
3. Coulombkraft, $U(r) = cqQ \frac{1}{|r-R|}$

2.2.2 Gegenbeispiel

4. Reibungskraft $F = -\alpha \dot{r}$ konservativ?
 berechne Arbeit entlang einer geschlossenen Bahn: $\oint F dr = -\alpha \oint \dot{r} dr = -\alpha \oint \dot{r}^2 dt \neq 0, > 0$ (außer $\dot{r} = 0$)

2.2.3 Bemerkung

1. $E = T + U$; $T = 0,5m\dot{r}^2$ Kinetische Energie;
 $U = U(r)$ potentielle Energie, nur bis auf additive Konstante festgelegt (definiert das Energie-Nullniveau)

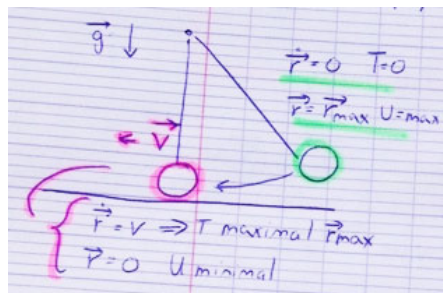


Abbildung 14:

2. $E = const$ wichtiger Energieerhaltungssatz. (hängt zusammen mit Symmetrien!)

2.3 Systeme mehreren (N) Teilchen

Dynamik: N Punktteilchen mit Ortsvektoren r ; $i = 1, N$ und tragen Massen m ; es gelten Newtons Gleichungen

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t)$$

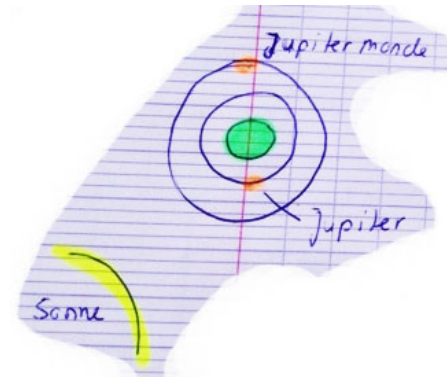


Abbildung 15:

N gekoppelte Diff.-Gl. für die $r_i(t)$; Anfangsbed. $r(0); \dot{r}(0)$ müssen gegeben sein.
Häufig: konservative Kräfte: $F_i = -\nabla_i U(r_1, \dots, r_N)$ es folgt Energieerhaltung (Gesamtenergie).

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2(t) + U(r_1(t), \dots, r_N(t)) = \text{const}$$

$$\nabla_i = \frac{\delta}{\delta r_i}$$

häufig setzt sich die Kraft F_i zusammen aus 'äußeren' Kräften $F_i^{(a)}$ und paarweise auftretenden 'inneren' Kräften F_{ij} zwischen den N Teilchen.

$$F_i = F_i^{(a)}(r_i) + \sum_{j=1; j \neq i}^N F_{ij}(r_i, r_j)$$

konservative Kräfte: $F_i^{(a)}(r_i) = -\nabla_i U^{(a)}(r_1, \dots, r_N)$
und $F_{ij} = -\nabla_i \sum_{j=1; i \neq j}^N V_{ji}(|r_i - r_j|)$ für abstandsabh. Zweiwechselwirkung ($F_{ij} = -F_{ji}$)
es folgt Energieerhaltung in der Form:

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2 + U^{(a)}(r_1, \dots, r_N) + 0,5 \sum_{i,j=1; i \neq j}^N V_{ij}(|r_i - r_j|)$$

kin Energie + äußere Pot. Energie + innere Energie

2.4 N-Teilchenproblem

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = F_i^{(a)}(\vec{r}_i) + \sum_{i=1, j \neq i}^N F_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Error 404 Skizze not found

Abbildung 16: innere und äußere Kräfte

für konservative Kräfte

$$F_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i U_i(\vec{r}_i)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Gesamtenergieerhaltung: $E = T + U^{(a)} + v^{WW}$

Bemerkungen:

1. *Abgeschlossene Systeme* sind solche ohne äußere Kräfte, also

$$F_i^{(a)} = 0, U^{(a)} = \text{const.}$$

2. *Schwerpunkt* des Systems:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, M = \sum_i m_i$$

Gesamtmasse

3. *Trennung der Energie in Schwerpunkt und Relativteil:*

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i \quad \text{Definition von } \vec{\rho}_i$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \underbrace{\dot{\vec{R}}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{\rho}_i) = M \vec{R}_{CM} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i}_{=0}$$

$$T = \underbrace{T_{CM}}_{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2} + T_{rel}$$

für abgeschlossene Systeme

$$E = E_{CM} + E_{rel}$$

$$= T_{CM} + (T_{rel} + v^{WW})$$

2.5 Impuls und Drehimpuls

Gesamtimpuls:

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}_{CM}$$

Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}_{CM} &= \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} + \underbrace{\sum_{i,j=1; i \neq j}^N \vec{F}_{ji}}_{=0 \text{ (alle Kräfte und ihre Gegenkräfte)}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. für abgeschlossene Systeme gilt Gesamtimpulserhaltung:

$$\vec{P}_{CM}(t) = \vec{P}_{CM}(0) = \text{const.} \\ \text{falls: } \vec{F}_i^{(a)} = 0$$

2. für \vec{R}_{CM} folgt für abgeschlossene Systeme: 'Schwerpunktsatz'

$$\vec{R}_{cm}(t) = \vec{R}_{CM}(t_0) + \frac{\vec{P}_{CM}(t_0)}{M}(t - t_0)$$

Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig (für abgeschlossene Systeme)

3. Beschreibung der Dynamik ausgedehnter Objekte durch Punktteilchen (Schwerpunkt) ist gerechtfertigt

4. $\vec{P}_{CM} = \text{const.}$ sehr wichtig für Stoßprozesse gültig für $\left\{ \begin{array}{ll} \text{elastische Stoßprozesse:} & E_{\text{kin}} \\ \text{inelastischer Stoß:} & \text{ein Teil der Energie} \end{array} \right.$

5. häufig Wahl des Schwerpunktsystems $O \rightarrow \vec{R}_{CM}$ (Ursprung) als Bezugssystem

2.5.1 Drehimpuls

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\text{(hängt von der Wahl des Ursprungs ab)}}; \vec{p} = m \dot{\vec{r}}$$

zeitliche Änderung:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{p})}_0 + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \underbrace{\vec{M}}_{\text{Drehmoment}}$$

$$\vec{r} \perp \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} \perp$$

für N-Teilchen: Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)$$

Zeitliche Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ij}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)}}_{\text{u. a. u. Drehmoment}} + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)} \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. für geschlossene Systeme ($\vec{M}_i^{(a)} = 0$) gilt *Gesamtdrehimpulserhaltungssatz*:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \text{const.}$$

2. Zerlegung in Schwerpunkt und Relativteil: $\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{\varrho}_i$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \underbrace{\vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{\varrho}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{L}_{rel}}$$

3. diese Erhaltungssätze für abgeschlossene N-Teilchensysteme gelten:

E	Energie	$1 \times$
\vec{P}_{CM}	Gesamtimpuls	$3 \times$
\vec{L}_{ges}	Gesamtdrehimpuls	$3 \times$

$$\vec{R}_{CM}(0) = \vec{R}_{CM}(t) - \frac{\vec{P}t}{M} \quad \text{Schwerpunktsatz} \quad (1)$$

\Rightarrow 10 Erhaltungsgrößen für dynamik eines abgeschlossenen Systems
 \Leftrightarrow verknüpft mit der Homogenität der Zeit ($t \rightarrow t + t_0$), Homogenität des Raumes ($\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$), Isotropie des Raumes ($\vec{r} \rightarrow R\vec{r}$)
 Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &\rightarrow \vec{r} - \vec{v}t \\ t &\rightarrow t \end{aligned}$$

4. für abgeschlossene Systeme gelten die Newtonschen-Gleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad \text{in IS beim Übergang in IS'}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |\vec{r}_i - \vec{r}_j| &= |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j| & \text{mit} & \quad \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{r}_0 - \vec{v}t \\ & & \text{mit} & \quad \vec{r}'_i = R\vec{r}_i \\ & \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} & \text{mit} & \quad t' = t + t_0 \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \vec{r}''}{dt'^2} \end{aligned}$$

\Rightarrow in IS' gelten Newtonsche-Bewegungs Gleichungen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt'^2} &= \vec{F}'_{ij}(|\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|) \\ \vec{F}' &= \vec{F} \end{aligned}$$

\Rightarrow Newtonsche Mechanik eines abgeschlossenen Systems ist invariant unter Galilei-Gruppe

2.6 Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte

Sei $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ IS

\rightarrow gehe über zu beschleunigtem (rotierendem) BS

\rightarrow mit $(O(t), \vec{e}'_1(t), \vec{e}'_2(t), \vec{e}'_3(t))$

Einführung einer zeitabhängigen Rotation:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i(t) &= R(t)\vec{e}_i \\ RR^T &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

in BS' $\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t) \vec{e}'_i(t)$
für Geschwindigkeit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r}'(t)) &= \sum_{i=1}^N \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t) + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t)}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'}} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) \\ \dot{\vec{e}}'_i &= \dot{R}(t) \vec{e}_i = \dot{R} R^T \vec{e}'_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}' &= V_{BS} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) (\dot{R} R^T) \vec{e}'_i \end{aligned}$$

$$\overline{(O, \{\vec{e}_i\})IS} \rightarrow \overline{(O'(t), \{\vec{e}'_i(t)\})BS'}$$

Error 404 Skizze not found

Abbildung 17: Karussell mit zeitabhängiger Drehung

Beispiel Änderung der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{e}'_i(t) &= \left(\frac{d}{dt} R \right) \vec{e}_i = \left(\left(\frac{d}{dt} R \right) R^T \right) \vec{e}'_i = M \vec{e}'_i \\ \text{mit } M(t) &= \left(\frac{d}{dt} R \right) R^T = -M^T(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition von $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$

wir sehen $M\vec{b} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$, Bewegung im rotierenden BS'

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x'_i(t) \vec{e}'_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{dx'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t)}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'} =: \dot{\vec{r}}'} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) (\vec{\Omega} \times \vec{e}'_i(t)) \end{aligned}$$

ODER:

$$\frac{d}{dt} \dots = \dot{\dots} + \vec{\Omega} \times \dots \quad (3)$$

Bedeutung von $\vec{\Omega}(t) \left\{ \begin{array}{l} |\vec{\Omega}| \text{ momentane Winkelgeschwindigkeit} \\ \text{Richtung der momentanen Drehachse} \end{array} \right\}$ der Drehung

Bsp.: Karusell $R(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ Drehachse

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ &= \underbrace{\ddot{\vec{r}}'}_{\ddot{\vec{r}} \dots \text{Beschleunigung}} + 2 \underbrace{\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\dot{\vec{r}} \dots \text{Geschwindigkeit}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\vec{r} \dots \text{Ortsvektor}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

Beschleunigter Bezugspunkt $O'(t)$

3 Section 3 – To be composed

4 Lagrange-Formalismus

4.1 Lagrange I

4.2 Lagrange II

Betrachte folgend ein System mit f Freiheitsgraden.

→ (q_1, \dots, q_f) – „Generalisierte real.(?) Koordinaten“

→ $q_L, L = 1, \dots, f$ generalisierte Koordinate (?)

→ $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ „Verallgemeinerte Geschwindigkeiten“

→ Lagrange-Funktion: $L := T - U^1$

→ $L = L(\underbrace{q_1, \dots, q_f}_f, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f}_f, t) = L(q_L, \dot{q}_L, t) = L(q, \dot{q}, t)$

→ Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathcal{L}}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\mathcal{L}}} = 0 \quad \mathcal{L} \in \{1, \dots, f\}$$

→ Führt zu f gekoppelten DGLs 2. Ordnung

Beispiele:

¹Anm.d.Skr.: im Englischen wird die Potentielle Energie häufig mit V bezeichnet, weswegen man oft (vor Allem auf Wikipedia) auf $L = T - V$ trifft.

Teilchen in 3D unter Einfluss eines Ortsabhängigen Potentials

→ Keine Zwangsbedingungen $\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}, U = U(\vec{r})$

→ $f = 3$

→ Wir wählen *kartesische Koordinaten*: $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$

→ $\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), U = U(x, y, z)$ mit $\vec{r} = \vec{r}(q) = (x, y, z)^T$

→ \Rightarrow für $\mathcal{L} \in \{1, 2, 3\}$ $L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$

→ Euler-Lagrange-Gleichungen: Sei $\mathcal{L} = 1$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} m\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}\end{aligned}$$

→ Entsprechender Ansatz für y, z führt insgesamt zu $m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U$

→ Wie erwartet: Newton-Ansatz bestätigt!

Mit Zwangsbedingungen: Mehrere Beispiele

1. Rolle

Error 404 Skizze not found

Abbildung 18: skizze

→ Hier: $f = 1$, da (1D+1D)-Bewegung gekoppelt

→ Wähle Höhe $q_1 = h$ (alternativ: Winkel φ) als generalisierte Koordinate

→ $L = L(h, \dot{h}) = T - U = T_{\text{Rolle}} + T_{\text{Masse}} - mgh$

$$\begin{aligned}T_{\text{Masse}} &= \frac{1}{2}m\dot{h}^2 \\ T_{\text{Rolle}} &= \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2, & \varphi = \varphi(h) = 2\pi\frac{h}{2\pi R} = \frac{h}{R}; \quad \dot{\varphi} &= \frac{\dot{h}}{R} \\ \Rightarrow L(h, \dot{h}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2R^2}\theta + m\right)\dot{h}^2 + mgh\end{aligned}$$

Error 404 Skizze not found

Abbildung 19: skizze

2. Gedöns

$f = 2$. z.B. $(q_1, q_2) = (x, y)$. Besser: $(q_1, q_2) = (\rho, \varphi)$ mit

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad \Rightarrow L = L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$$

3. Masse mit Loch auf Stange

Error 404 Skizze not found

Abbildung 20: skizze

Hier $f = 2$ z.B. $(q_1, q_2) = (x, \varphi)$

Zur Erinnerung : In Lagrange I

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{Z}_1$$

$$2 = f = 3n - k = 6 - 4$$

($f = 6$ wenn nicht gekoppelt).

\Rightarrow 4 Zwangsbedingungen:

$$g_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = z_1 = 0$$

$$g_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = y_1 = 0$$

$$g_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = y_2 = 0$$

$$g_4(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}_{\text{Abstand}} - l^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{z}}_1 = \sum_{m=1}^4 \lambda_m(t) \vec{\nabla}_i g_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad i = 1, 2$$

Lagrange II $f = 2; (q_1, q_2) = (x, \varphi)$

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x, \varphi) = r_1(x) &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{für } m_1 \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2(x, \varphi) &= \begin{pmatrix} x + l \sin \varphi \\ 0 \\ -l \cos \varphi \end{pmatrix} && \text{für Pendelmasse}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 \vec{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{r}_2^2 && = T(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \\ l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} \\ T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 ((\dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) && = T(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \\ U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= mgz_2 = -mgl \cos \varphi = U(x, \varphi) && L = L(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi})\end{aligned}$$

Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Hier:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi\end{aligned}$$

entsprechend

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \ddot{\varphi} = 0$$

mit $\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{l}{g}$

\Rightarrow für kleinere Auslenkungen $\varphi \ll 1$: $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$

Bemerkungen \rightarrow Lagrange II sehr nützlich. Beweis: klar.

\rightarrow Euler-Lagrange-Gleichungen invariant unter Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(q_1, \dots, q_p, t) &\leftrightarrow \vec{r}_i(Q_1, \dots, Q_p, t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\beta} - \frac{\partial L'}{\partial Q_\beta}\end{aligned}$$

Wobei $L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(Q, \dot{Q}, t) = L'(Q_\beta(q_1, \dots, q_p), \dot{Q}_\beta(q_1, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p), t)$

Transformation $\{q_L\} \rightarrow \{Q_\beta\}; Q_\beta = Q_\beta(q_1, \dots, q_p), \beta = 1, \dots, f$

Im Gegensatz zu Newton! Es gilt $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ bei Übergang zu Kugelkoordinaten $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ es gilt *nicht* $m\ddot{\varphi} \neq -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ Widersp.

→ Bisher $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ analog für verallgemeinerte Kräfte \vec{K}_i , für die gilt:

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} \tilde{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) + \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_i} \tilde{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

es folgt wieder $m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_L} = 0, \quad L = T - \tilde{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$

Beispiel Loretzkraft:

$$\tilde{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = e \underbrace{\phi(\vec{r}, t)}_{\text{Skalares Pot.}} - e \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \cdot \underbrace{\vec{A}(\vec{r}, t)}_{\text{Vektorpot.}}$$

5 kleine Schwingungen

→ Resonanzphänomene:

Resonanz: bei einer bestimmten Frequenz schwingt ein gekoppeltes Vielteilchensystem besonders stark. *Beispiele:*

1. mechanische konstruktionen (Fahrzeugbau) sollten keine Resonanzen aufweisen (→ Hubschrauber-Boden-Resonanz²)
2. Brücke
3. Wolf (Streichinstrumente)

Problem: Es gibt kollektive Schwingungen einer Frequenz bei kopplung einzelner schwingungsfähiger Freiheitsgrade

→ 'Eigenfrequenzen' des gekoppelten Systems

→ Eigenmoden – -

Error 404 Skizze not found

Abbildung 21: schwingungen gleich und gegenphasig

²<https://www.youtube.com/watch?v=bs2rNBj6D3A>

5.1 Lineare Differenzialgleichungen (2.Ordnung)

5.1.1 Beispiel

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad (4)$$

linear

x tritt nur linear auf

2.Ordnung

$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x$ zweite Ableitung

homogen

$$f(t) = 0$$

inhomogen

$$f(t) \neq 0$$

wichtig

für lineare, homogene Differentialgleichungen gilt ein Superpositionsprinzip mit $x_1(t), x_2(t)$ auch $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

6 Hamiltonsche Mechanik

$$q(t) \rightarrow (q(t), p(t))q\dot{q}$$

6.1 Poisson-Klammer

→ Zwei Phasenraumfunktionen $f(q, p), g(q_\alpha, p_\alpha)$ wird eine neue Phasenraumfunktion $\{f, g\}(q_\alpha, p_\alpha) := \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)$ zugeordnet

→ Diese hat zuvorkommende Eigenschaften:

- Zeitabhängigkeit: $A(q, p, t)$ entlang einer Trajektorie bzw. Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung $A(q(t), p(t), t)$

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H\} + \frac{\partial}{\partial t}A$$

- Insbesondere: $A(q, p)$ Erhaltungsgröße $\Rightarrow \{A, H\} = 0$. Sehr praktisch, um zu prüfen, ob etwas eine Erhaltungsgröße ist.
- $(H(q, p)$ Erhaltungsgröße, da $\forall f : \{f, f\} = 0$)

→ Eigenschaften der Poisson-Klammer:

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$
3. $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$
4. $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ Bemerkung.: Ist f und g Erhaltungsgröße $\Rightarrow \{f, g\}$ Erhaltungsgröße
5. Elementare Poisson-Klammern: $\{q, p\} = 1, \{q, q\} = \{p, p\} = 0$.
6. Anwendung: $\{q^2, p\} q = q\{q, p\} + \{q, p\} q = 2q$

6.2 Kanonische Transformationen

- Bislang (Lagrange): $\{q_\alpha\} \rightarrow \{Q_\alpha(q_1, \dots, q_f, t)\}$ Koordinatentransformationen
- Jetzt (Hamilton): $\{q_\alpha, p_\alpha\} \rightarrow \{Q_\alpha(q, p, t), P_\alpha(q, p, t)\}$ Phasenraumtransformationen
- Falls $q_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Rightarrow \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}$.
Ein solches K existiert \Leftrightarrow Transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ Kanonisch
- Betrachte Phasenraumvolumina:

Error 404 Skizze not found

Abbildung 22: skizze

$$F_S = \int dQ \int dP = \int dq \int dp \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \end{array} \right|$$

- Phasenraumvolumen bleibt erhalten: $F_R = F_S \Leftrightarrow |\cdot| = 1 = \dots = \{Q, P\}$
- Definition: Eine Phasenraumtransformation $T : (q_\alpha, p_\alpha) \rightarrow (Q_\alpha(q, p, t), P_\alpha(q, p, t))$ heißt *kanonisch* \Leftrightarrow das Phasenraumvolumen bleibt erhalten ($\Leftrightarrow V_R = V_S$).
- Es gilt: – kanonisch $\Leftrightarrow \{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \left(f - 1 : \{Q, P\}_{(q,p)} = 1 \right) \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0$
 $\{P_\alpha, P_\beta\} = 0$
- Alles dreis: für $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, f \rightarrow$ (Hier kommt irgendwas hin, keine Ahnung was)
- Bemerkung zur Poisson-Klammer: es gilt auch $\{Q, P\}_{(Q,P)} = 1$; dahinter steckt die *Invarianz der Poisson-Klammer* unter kanonischen Transformationen

$$T : d\{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)} \quad (f(q, p) \rightarrow f(q(Q, P), p(Q, P)))$$

6.3 (Form-)Invarianz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unter kanonischen Transformationen

→ Ausgangspunkt: $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_\alpha}$; $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

→ Betrachte die kanonische Transformation

$$T: (q, p) \mapsto (Q, P) = (Q_\alpha(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f), P_\alpha(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f))$$

→ Für Zeitabhängigkeit der (Q_α, P_α) gilt

$$\begin{aligned}\dot{Q}_\alpha &= \{Q_\alpha, H\}_{(q,p)} \stackrel{\text{kanT}}{=} \{Q_\alpha, H\}_{(Q,P)} \\ &= \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial P_\alpha} \\ &= \frac{\partial K(Q,P)}{\partial P_\alpha}\end{aligned}$$

→ Mit $K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$ ist genauso:

$$\dot{P}_\alpha = \{P_\alpha, H\}_{(q,p)} = \{P_\alpha, H\}_{(Q,P)} = -\frac{\partial K(Q,P)}{\partial Q_\alpha}$$

→ Wie erwartet und erwünscht: Die klassischen Bewegungsgleichungen greifen!

6.4 Erzeugende von kanonischen Transformationen

→ Ausgangspunkt: Hamiltonsches Prinzip $\delta S \stackrel{!}{=} 0$

$$\rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt \{ \dot{q}p - H(q, p) \} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{Q}P - K(Q, P) \right)$$

$$\rightarrow \text{Linke Seite } pdq - Hdt = \underbrace{PdQ - K(Q, P)dt}_{\text{Rechte Seite}} + \underbrace{dF}_{\text{Freiheit}}$$

→ Bei Variation liefern Beiträge des Randes keinen Beitrag!

$$\rightarrow \text{Hier ist } F = F(q, p, \underbrace{Q}_{Q(q,p), P(q,p)}, t) \stackrel{?}{=} F(q, Q, t)$$

→ Fasse $F = F_1(q, Q, t)$ als Funktion der alten und neuen Koordinaten auf:

$$\begin{aligned}dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \\ \Rightarrow pdq - Fdt &= PdQ - Kdt + \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} \\
P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \\
K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t}
\end{aligned}$$

→ Jede Funktion $F_1(q, Q, t)$ erzeugt durch (*) (TODO label) eine kanonische Transformation.

→ Entsprechend lassen sich kanonische Transformationen erzeugen durch Erzeugende vom Typ

$$\begin{aligned}
F_2 = F_2(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_2}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\
F_3 = F_3(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_3}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_3}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\
F_4 = F_4(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_4}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}
\end{aligned}$$