# Theoretische Mechanik

Till Hanke

Today

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Raum und Zeit

## 1.1 Raum

Mechanik spielt im dreidimensionalen Raum. [affiner Raum] $\mathbb{E}^3 = (Mengealler Punkteim Raum)$ Ein Punkt $P \in \mathbb{E}^3$ wird durch Angabe eines Ortsvektors $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ (dreidimensionaler Vektorraum) relativ zu einem Ursprung $O \in \mathbb{E}^3$ Festgelegt: $\vec{OP} = \vec{P}$. Ein Skalarprodukt

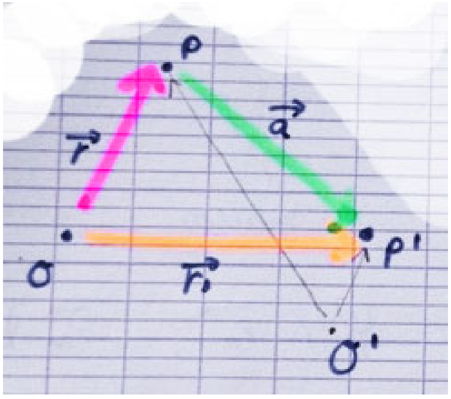


Abbildung 1:

$\vec{r} \cdot \vec{r'} \in \mathbb{R}^3$ liefert Längen
$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$
und abstände $d(P, P') = |\vec{a}| = |\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r'}) \cdot \vec{r} - \vec{r'}}$ 'Euklidischer' Raum $\mathbb{E}^3$: affine, 3d Räume mit $d(P, P')$

### Bemerkung

- $\rightarrow$ Die Wahl von O ist beliebig, eine andere Wahl O' mag zweckmäßiger sein,'ändert nichts an der Physik' insbesondere gilt:$d_O(P, P') = d_{O'}(P, P')$
- $\rightarrow$ Übergang $O \rightarrow O'$: wechsel des Bezugssystems

## 1.2 Koordinatensysteme

für $P \in \mathbb{E}^3$ muss angegeben werden: (Ursprung O) und (Koordinaten (x,y,z) bzgl. einer Karthesischen OB $e_1, e_2, e_3$ $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$
für den Punkt $P$ folgt dann:

$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = \sum_i^3 x_i \vec{e_i}$$

den Punkt $P$ ordnen wir den Spaltenvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zu bezogen auf $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

### Bemerkungen

1. Die Wahl von $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ ist beliebig.
   Es gilt: $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \rightarrow (\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$
   $\vec{e_k} = \sum_i R_{ki}\vec{e_i}$ mit einer orthogonalen Transformation $R \in O(3)$ Drehungsmatrix $R^{-1} = R^T; (\det R = 1)$
2. Transformation der Koordinaten bezogen auf $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

### Aktive Transformation

→ die Rel. GL(") definiert bzgl eines festen Koordinaten- Systems (O,e,e,e) eine aktive Drehung R des Vektors $\vec{r} = \sum_k x_k \vec{e_k} \rightarrow \vec{r'} = \sum_k x'_k \vec{e_k} = R\vec{r}$

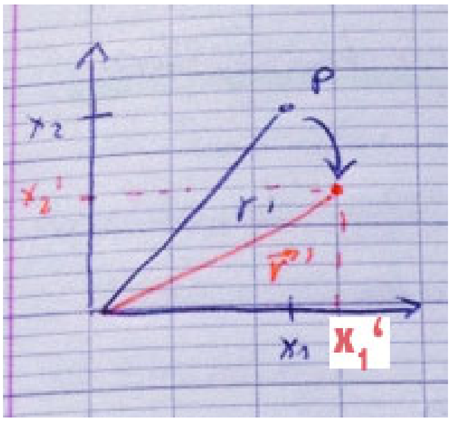


Abbildung 2:

**Achtung**:

für die Basisvektoren aus Bemerkung 2 gilt: $\vec{e'_k} = (R^{-1})\vec{e_k}$ siehe Vorübung

**Transformation** Die Trafo GL(") definiert allgemein das Transformations-verhalten eines Vektors (Tensor 1.Stufe)

Beispiele:
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow v'_k = \sum_i R_{ki} v_i$; Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc.
Bedeutung: Physikalische Grundgleichungen müssen das Trafo Verhalten respektieren

Bsp: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ in (O,e,e,e) $m\ddot{x}_i = F_i \rightarrow$ in (O,e',e',e') $m\ddot{x}'_i = F'_i$

**Krumliniges KO-System** in dem $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3); i = 1, 2, 3$ mag sinnvoll sein.

Beispiele: Zylinder $(r, \varphi, z)$ oder Kugelkoordinaten $(r, \Theta, \varphi)$
**Achtung!**: $\vec{e_i} \rightarrow \vec{e_i}(q_1, q_2, q_3)$

### 1.3 Zeit

#### 1.3.1 Ereignis

E ist ein Punkt der Raum-Zeit mit Koordinaten $(t, x, y, z)$ bezogen auf $(O, e, e, e)$

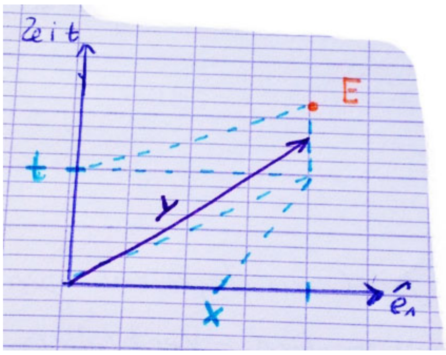


Abbildung 3:

**Ort** räumliche Koordinaten $(x, y, z)$ werden abgelesen durch Maßstäbe.

**Zeit** zeitliche Koordinate $t$ (Koordinatenzeit): abgelesen von einer Uhr

→ Festlegung der Zeit $t$ eines Ereignisses gleichzeitiges betrachten von E und der Uhr

→ nur lokal möglich

→ wir denken uns im gesamten Raum ausgestattet mit Uhren, die alle synchronisiert sind.

Die Koordinatenzeit $t$ des Ereignisses E mit (t,x,y,z) wird von der Uhr mit räumlichen Koordinaten (x,y,z) abgelesen!

**Bemerkung**

1. die absolute Uhrzeit $t$ ist beliebig, eine andere Wahl $t' = t + t_0$ mag zweckmäßiger sein. 'ändert nichts an der Physik'
2. Uhrensynchronisation kann durch Lichtpulse realisiert werden ('Einstein-Synchronisation'), etwa vom Mittelpunkt zwischen zwei Uhren.
   es zeigt sich: äquivalent dazu (sehr langsamer) Uhrentransport
3. Vorsicht ist geboten beim vergleich von Uhren in relativ zueinander bewegten Bezugssystemen

## 1.4 Kinematik

Der klassischen Mechanik
Kin= 'Beschreibung der Bewegung' (ohne auf Ursachen einzugehen)

**Bahnkurve** $\vec{r}(t)$

**Ortsvektor**

**Geschwindigkeit** $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
$\vec{v}(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{T}(t)$ mit $|\vec{T}| = 1; v(t) = |\vec{v}(t)|$

**Beschleunigung** $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{t}\vec{T} + v(t)\dot{\vec{T}}(t)$

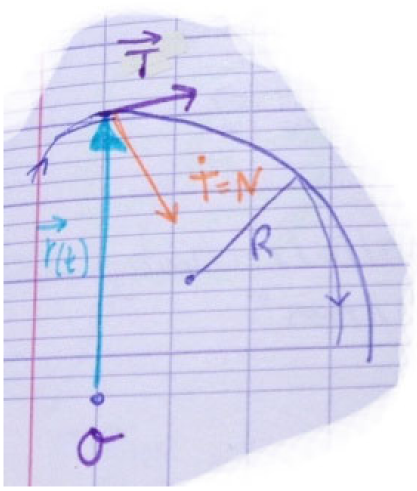


Abbildung 4:

$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|}$ steht senkrecht auf $\vec{T}$ und $|\vec{N}| = 1$ ('Normalenvektor')
$(T, N)$ definieren 'Schmiegeebene', in der lokal die Bahnkurve durch einen Kreis mit Kümmungsradius $R = \frac{v}{|\dot{\vec{T}}|}$ beschrieben werden kann (siehe Übung)
es folgt $\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$
als summe von zwei orthogonalen Beiträgen wobei
der erste: eine Tangentialbeschleunigung und
der Zweite: eine Normal- oder Zentripetalbeschleunigung ist.

### Beispiel

1. geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r_0} + \vec{v_0}t \\ &\Rightarrow \vec{a} = 0 \\ (\dot{v} = 0, R &= \infty) \end{aligned}$$

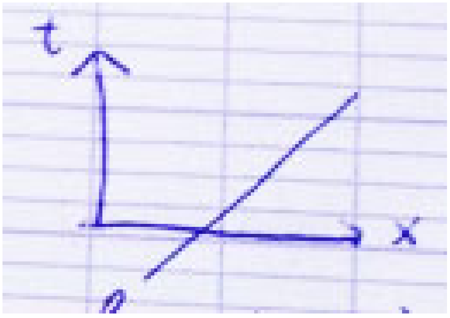


Abbildung 5:

2. geradlinig (allgemein)

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + l(t)\vec{T_0} \\ \vec{v} = \dot{l}\vec{T_0} \\ v = \dot{l} \\ \vec{T} = \vec{T_0} \\ (\dot{v} = \ddot{l}; R = \infty) \end{aligned}$$

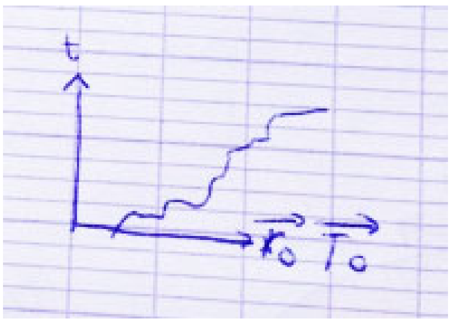


Abbildung 6:

3. gleichförmige Kreisbewegung

$$v = const. = \frac{2\pi R}{\tau}$$
$$\dot{v} = 0$$
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = 4\pi^2 \frac{R}{\tau^2} \vec{N}$$

$\tau$ Umlaufzeit
Anwendung auf Kepler-Bahnen für Planeten $\tau^2 \sim R^3$ (3.Keplergesetz)
$\Rightarrow \vec{a} \sim \frac{1}{R^2}\vec{N}$ ($\vec{F} = m\vec{a}$) $\Rightarrow$ Planetenbewegung $\vec{F} \sim \frac{1}{R^2}\vec{N}$

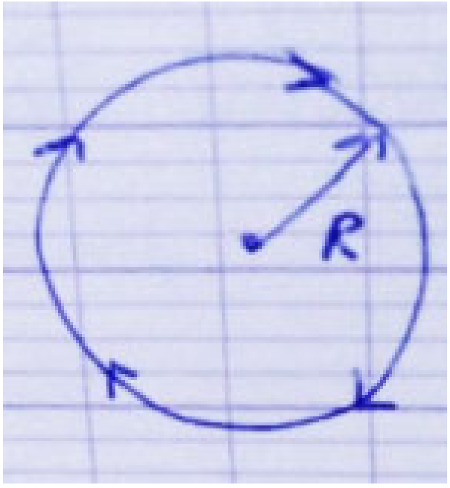


Abbildung 7:

## 1.5 Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme

RS=Ruhesystem
Wie wählen wir (o,e,e,e) geeignet?

→ nahe liegend Laborsystem (Labortisch ruht im LS)
Beispiel elastischer Stoß im LS (m ruht)

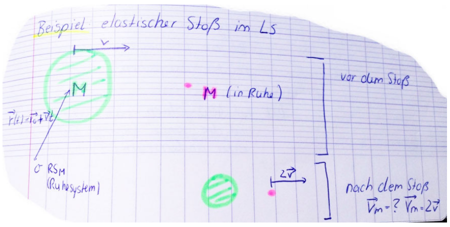


Abbildung 8:

wechsle ins Ruhesystem der Masse M
die betrachtung wird eindeutig und trivial bei $M \gg m$
Übergang von System Labortisch (O,e,e,e, Uhren) in RS der großen Masse M (O',e',e',e',Uhren') gilt:

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$$
$$t' = t$$

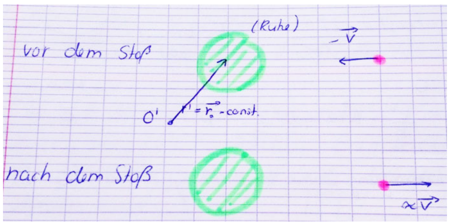


Abbildung 9:

Die **Galilei-Transformation** beschreibt Transformationsgesetz von BS zu BS', das sich mit Geschwindigkeit $v$ relativ zu BS bewegt. Zur Beschreibung sind $BS = RS_m$ und $BS' = RS_M$ völlig gleichwertig (hier $BS'$ transparenter).

### Bemerkungen

1. Zustand **'in Ruhe'** hat keine Absolute Bedeutung sonder hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. (Bewegung ist <u>relativ</u> zu sehen)

2. vor 400Jahren: ruht die Erde und die Sonne bewegt sich?
   Galilei: Frage ist bedeutungslos, nicht entscheidbar
   $\Rightarrow$ Galilei-Transformationen

3. Relativität kommt zum Ausdruck im 1. Newtonschen Gesetz:('Trägheitssatz')
   Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig-gleichförmigen Bewegung sofern er nicht durch Kräfte zur Änderung gezwungen wird.

### 1.5.1 Inertialsysteme

(IS) sind BS, die durch die Gültigkeit des 1. Newtonschen Gesetzes ausgezeichnet sind. Ausgehend von einem IS findet man weitere IS' durch geradlinig-gleichförmige Bewegung des IS' relativ zu IS.(häufig IS='ruhend bzgl. des Fixsternhimmels'; in der Praxis LS≈IS (gute Näherung)).
in einem relativ zu IS beschleunigten BS treten Scheinkräfte auf, die nicht auf fundamentalen Wechselwirkungen (Coulombkraft, etc) beruhen.
⇒ physikalische Grundgesetze werden bzgl. eines IS formuliert, dabei sind alle IS völlig gleichwertig; IS→IS' durch:

1. 'boost' mit Richtung $\vec{v}$ $t' = r(t - \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2})$
2. gleichförmig-geradlinige Bew: $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$ (3 Parameter)
   (Galilei-Relativität)
3. räumliche Verschiebung: $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{r_0}$ (3 Parameter)
   (Homogenität des Raumes)
4. räumliche Drehung: $\vec{r'} = R\vec{r}$ (3 Parameter)
   (Isotropie des Raumes)
5. zeitleiche Verschiebung: $t' = t + t_0$ (1 Parameter)
   (Homogenität der Zeit)

Die Kombination all dieser Transformationen definieren die *'Galilei-Gruppe'* der klassischen Raum-Zeit mit 10 freien Parametern.

## 1.6 Galilei- und Lorenztransformationen

Die Naturgesetze müssen von einer Art sein, die (form-)invariant sind unter Transformation zwischen IS
Bsp.: IS→IS', dann:
Newton:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \Leftrightarrow m\frac{d^2\vec{r'}}{dt'^2} = \vec{F'}$$

→ *Relativitätsprinzip!* insbesondere gilt:
geradlinig-gleichförmige Bewegung in IS mit Koordinaten(t,x,y,z) ist auch eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in einem anderen IS' mit (t',x',y',z').

**Bsp: Galilei-Transformaiton** : mit $\vec{v}$ rel. zu IS bew. IS' gilt $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$, $t' = t + t_0$
in IS: $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{u}t$
$\Rightarrow IS' : \vec{r'}(t') = \vec{r_0} + (\vec{u} - \vec{v})t'$

**Umkehrung?** folgt aus der Forderung (s.o.) dass $t, \vec{r} \to t', \vec{r'}$ eine Galilei-Trafo?
Frage: 'wie sieht allgemein eine Trafo $(t, x, y, z) \to (t', x', y', z')$ aus, die die Forderung (s.o.) erfüllt f+r IS→IS', das sich mit $\vec{v}$(vorgegeben) relativ zu IS bewegt?

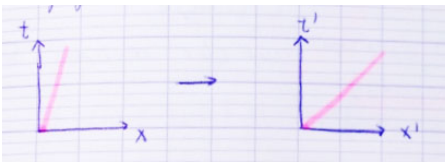


Abbildung 10:

→ lineare Trafo der Raum-Zeit! $\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & & & \\ . & 4 & \times & 4 \\ . & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

→ bzgl. räumlicher Anteile $\vec{r}$ Vektorcharakter muss erhalten bleiben: $\vec{r'} \sim \vec{r}, \vec{v}$

→ Ansatz:

$$t' = a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})$$
$$\vec{r'} = c(v)\vec{r} + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + e(v)\vec{v}t$$

mit beliebigen Funktionen $a(v), ..., e(v)$, die bestimmen weitere Forderungen:

1. für $\vec{r} = \vec{v}t \Rightarrow \vec{r'} = 0 \Rightarrow c + d + e = 0$
2. Relativität (I) Vertausche Rolle IS↔IS' ($\vec{v} \to -\vec{v}$)

$$\Rightarrow t = a(v)t' - b(v)(\vec{v}\vec{r'})$$
$$\vec{r} = c(v)\vec{r'} + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r'})\vec{v} + e(v)\vec{v}t'$$

ersetze $t'$ und $\vec{r'}$ auf der rechten Seite durch Ansatz

$$\Rightarrow t = a(v)(a(v)t + b(v)(\vec{v}\vec{r}) - ...$$
$$\vec{r} = c(v)(c(v)\vec{r} + ...) + ...\vec{v}...$$
$$\Rightarrow c^2 = 1; a = c + d; a^2 = 1 + ebv^2; e = -a$$
$$\Rightarrow c = 1; e = -a; d = a - 1; b = \frac{1-a^2}{av^2}$$

Wähle Koordinatensystem so, dass x in Richtung $\vec{v}$ zeigt. $\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$t' = a(v)t + \frac{1-a^2(v)}{a(v)v}x$$
$$x' = a(v)(x - vt); y' = y; z' = z$$

3. Relativitätsprinzip:
   IS$\rightarrow^v$ IS'$\rightarrow^u$ IS"

$$t'' = a(u)t' + \frac{1-a^2(u)}{a(u)u}x' = a(u)(a(v)t + \frac{1-a^2(v)}{a(v)v}x) + \frac{1-a^2(u)}{a(u)u}(a(v)(x-vt))$$
$$x'' = a(u)(x' - ut') = a(u)(a(v) - u\frac{1-a^2(v)}{a(v)v})x + ...t$$

außerdem muss gelten IS$\rightarrow^w$ IS"
woraus folgt, dass

$$t'' = a(w)t + (w)x$$
$$x'' = a(w)(x - wt)$$

woraus dann folgt:

$$[a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u)]t + ...x$$
$$a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u) = a(w)$$
$$\Rightarrow \frac{a^2(u)-1}{u^2a^2(u)} = \frac{a^2(v)-1}{v^2a^2(v)}$$
$$\Rightarrow \frac{a^2(v)-1}{v^2a^2(v)} = const. = K$$
$$\Rightarrow a(v) = \frac{1}{\sqrt{1-Kv^2}}$$
$$k = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{ist Galilei Trafo}$$
$$k \neq 0?[k] = \frac{1}{\text{Geschwindigkeit}^2} = \frac{1}{c^2} = const.$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow t' &= a(v)(t - \frac{vx}{c^2}) \\
x' &= a(v)(x - vt)
\end{aligned}
$$

Die Lorentz-Transformation mit $a(v) \to \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Bedeutung von $c$?
Man betrachte die 'Addition' von Geschwindigkeiten: $w = u + v$?

$$
\begin{aligned}
a(w) &= a(v)a(u)(1 + kuv) \\
1 - kw^2 &= \frac{(1-kv^2)(1-ku^2) + (1+kuv)^2 - (1+kuv)^2}{(1+kuv)^2} \\
&= 1 - k\frac{(u+v)^2}{(1+kuv)^2} \\
\Rightarrow w &= \frac{u+v}{1+kuv} \Leftrightarrow (\frac{w}{c})^2 \\
&= \frac{(\frac{u}{c} + \frac{v}{c})^2}{(1 + \frac{uv}{c^2})^2} \\
&= 1 - \frac{(1 - \frac{u}{c}^2)(1 - \frac{v}{c}^2)}{(1 + \frac{u}{c}\frac{v}{c})^2}
\end{aligned}
$$

<u>Folgerungen</u>:

a) für $u = c \Rightarrow w = c$

b) für $v = c \Rightarrow w = c$

c) für $u < c; v < c \Rightarrow w < c$

d) für $u \ll c; v \ll v \Rightarrow w \approx u + v$

$c$ ist Lichtgeschwindigkeit

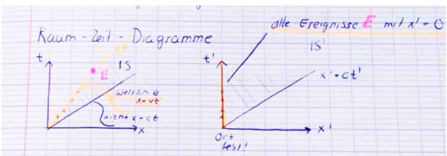


Abbildung 11:

# 2 Newtonsche Mechanik

→ basiert auf Galilei-Raum-Zeit (gültig für $v \ll c$) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$ 'Fernwirkung' der Kraft ↔ Widerspruch zur Vorstellung einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wirkungen.

→ relativistische Mechanik folgt in Kap.7

## 2.1 Newtonsche Bewegungs-Gleichung

zunächst phänomenologisch; Erfahrung: durch angabe des Anfangsortes $\vec{r}(t_0) = \vec{r}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v_0}$ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ festgelegt ist ⇒ wir erwarten eine Relation $\ddot{\vec{r}}(t) \sim \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zur Bestimmung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ (Dynamik)
→ Newton (2. Newton-Gesetz); Impuls $\vec{p} = v\vec{v} = \dot{\vec{r}}$
$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$, bei konstanter (träger) Masse $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ wobei $\vec{F}$ die Kraft ist, die auf den Körper wirkt.

**Beispiel:**

1. gglf. Bew.
   $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0)$
2. $\vec{F} = \vec{F_0}$ konstant (Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche)
   $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + 0,5\frac{\vec{F_0}(t-t_0)}{m}$ (Wurfparabel)
3. Federkraft (1Dim)
   $m\ddot{x} = -kx, F(x) = -kx, w^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow x(t) = x_0 cosw(t - t_0) + \frac{v_0}{w} sinw(t - t_0)$
4. Lorenzkraft geschwindigkeits-abhängig
   $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B}); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$
5. Reibungskräfte (phänomenologisch)
   $\vec{F_R} = -\alpha\dot{\vec{r}}; \alpha > 0$ Reibungskoeffizient.
6. Coulombkraft
   $\vec{F} = cqQ\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|r-R|^3}$
   $qQ < 0$: anziehend
   $qQ > 0$: abstoßende
   $c$: Konstante, abhängig von der Einheit Ladung

## 2.2 Arbeit und Energie

$$m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = \vec{F}\dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}(0,5m\dot{\vec{r}}^2) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt(\frac{d}{dt}(0,5m\dot{\vec{r}}^2)) = \int_{t_1}^{t_2} dt\vec{F}\dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}d\vec{r}(t)$$

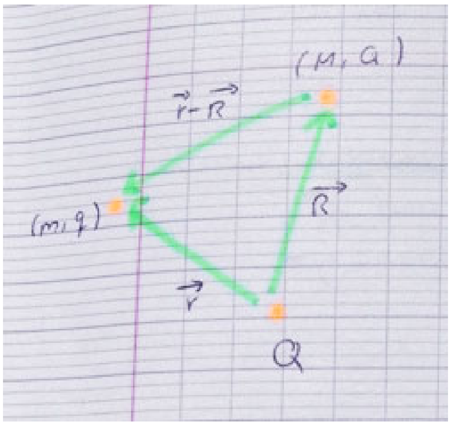


Abbildung 12:

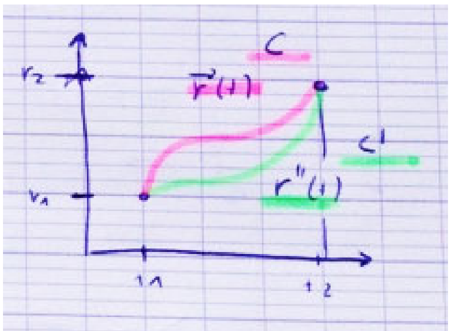


Abbildung 13:

Entlang der Kurve$L$ $\vec{r}(t)$ mit $r(t_1) = r_1$... Wir definieren die am Teilchen geleistete Arbeit entlang $L$ durch $W_e(r_1 \to r_2) = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\dot{\vec{r}} dt$
Wir nennen ein Kraftfeld $\vec{F}$ <u>konservativ</u>, wenn $W_e$ nur von $r_1$ und $r_2$, aber nicht vom Weg $r(t)$ abhängt.

**Theorem** $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ $\Leftrightarrow$ es existiert ein skalares Potential $U(\vec{r})$ mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$$

, Kraftfeld ist Wirbelfrei.

Für konservative Kraftfelder gilt: $\int_L F(r)dr = -U(r_2) + U(r_1) = W(r_1 \to r_2)$
$\Rightarrow T(t_2) + U(r_2) = T(t_1) + U(r_1)$
wir sehen für konservative Kräfte $F = -\nabla U(r)$ folgt:
<u>Energieerhaltung</u> $E = T + U = 0,5m\dot{r} + U(r(t)) = const!$
denn $\frac{d}{dt}E = m\dot{r}\ddot{r} + \nabla U(r(t))\dot{r}(t) = \dot{r}(t)(m\ddot{r} + \nabla U) = 0$ (Newton-Gleichung)

### 2.2.1 Beispiele konservativer Kraftfelder

$F = -\nabla U$

1. $F = F_0 \Rightarrow U(r) = -F_0 r$
2. Federkraft $F = -kr \Rightarrow U(r) = 0,5f(r \cdot r) = 0,5kr^2$ (harmonischer Oszilator)
3. Coulombkraft, $U(r) = cqQ\frac{1}{|r-R|}$

### 2.2.2 Gegenbeispiel

4. Reibungskraft $F = -\alpha\dot{r}$ konservativ?
   berechne Arbeit entlang einer geschlossenen Bahn: $\oint F dr = -\alpha \oint \dot{r} dr = -\alpha \oint \dot{r}^2 dt \neq 0, > 0$ (außer $\dot{r} = 0$)

### 2.2.3 Bemerkung

1. $E = T + U; T = 0,5m\dot{r}^2$ Kinetische Energie;
   $U = U(r)$ potentielle Energie, nur bis auf additive Konstante festgelegt (definiert das Energie-Nullniveau)

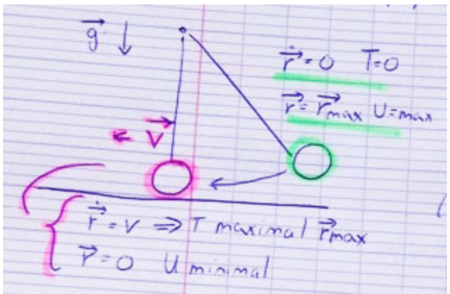


Abbildung 14:

2. $E = const$ wichtiger Energieerhaltungssatz. (hängt zusammen mit Symmetrien!)

## 2.3 Systeme mehreren (N) Teilchen

Dynamik: N Punkteilchen mit Ortsvektoren $r$; $i = 1, N$ und trägen Massen $m$; es gelten Newtons Gleichungen

$$m_i\ddot{r}_i = F_i(r_1, ...r_N, \dot{r}_1, ...\dot{r}_N, t)$$

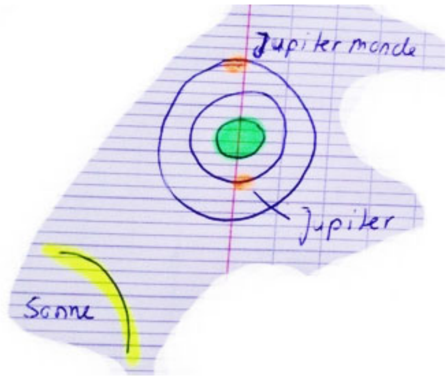


Abbildung 15:

N gekoppelte Diff.-Gl. für die $r_i(t)$; Anfangsbed. $r(0); \dot{r}(0)$ müssen gegeben sein.
Häufig: konservative Kräfte: $F_i = -\nabla_i U(r_1, ..., r_N)$ es folgt Energieerhaltung (Gesamtenergie).

$$E = \sum_{i=1}^{N} 0,5 m_i \dot{r_i}^2(t) + U(r_1(t), ..., r_N(t)) = const$$

$$\nabla_i = \frac{\delta}{\delta r_i}$$

häufig setzt sich die Kraft $F_i$ zusammen aus 'äußeren' Kräften $F_i^{(a)}$ und paarweise auftretenden 'inneren' Kräften $F_{ij}$ zwischen den $N$ Teilchen.

$$F_i = F_i^{(a)}(r_i) + \sum_{j=1;j\neq i}^{N} F_{ij}(r_i, r_j)$$

konservative Kräfte: $F_i^{(a)}(r_i) = -\nabla_i U^{(a)}(r_1, ..., r_N)$
und $F_{ij} = -\nabla_i \sum_{j=1;i\neq j}^{N} V_{ji}(|r_i - r_j|)$ für abstandsabh. Zweiwechselwirkung ($F_{ij} = -F_{ji}$)
es folgt Energieerhaltung in der Form:

$$E = \sum_{i=1}^{N} 0,5 m_i \dot{r_i}^2 + U^{(a)}(r_1, ..., r_N) + 0,5 \sum_{i,j=1;i\neq j}^{N} V_{ij}(|r_i - r_j|)$$

kin Energie + äußere Pot. Energie + innere Energie

## 2.4 N-Teilchenproblem

$$m_i \ddot{\vec{r_i}} = \vec{F_i^{(a)}}(\vec{r_i}) + \sum_{i=1,j\neq i}^{N} \vec{F_{ij}}(\vec{r_i} - \vec{r_j})$$

**Error 404 Skizze not found**

Abbildung 16: innere und äußere Kräfte

*für konservative Kräfte*

$$\vec{F_i^{(a)}} = -\vec{\nabla}_i U_i(\vec{r_i}) \tag{1}$$

$$\vec{F_{ij}} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r_i} - \vec{r_j}|) \tag{2}$$

Gesamtenergieerhaltung: $E = T + U^{(a)} + v^{WW}$

**Bemerkungen:**

1. *Abgeschlossene Systeme* sind solche ohne äußere Kräfte, also $\vec{F_i^{(a)}} = 0, U^{(a)} = \text{const.}$
2. *Schwerpunkt* des Systems:
$$\vec{R_{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}, \underbrace{M = \sum_i m_i}_{\text{Gesamtmasse}}$$
3. *Trennung der Energie in Schwerpunkt und Relativteil*:
$$\dot{\vec{r_i}} = \dot{\vec{R_{CM}}} + \dot{\vec{\rho_i}} \text{ Definition von} \vec{\rho_i}$$
$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r_i}}2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R_{CM}}}^2 + \dot{\vec{R_{CM}}} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho_i}}}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho_i}}^2$$
$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N} m : i(\vec{R_{CM}} + \vec{\rho_i}) = M\vec{R_{CM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\rho_i}}_{=0}$$
$$T = \underbrace{T_{CM}}_{\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{CM}^2} + Trel$$

für abgeschlossene Systeme

$$E = E_{CM} \cdot E_{rel}$$
$$= T_{CM} + (T_{rel} + V^{WW})$$

## 2.5 Impuls und Drehimpuls

### Gesamtimpuls:

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}_{CM} \tag{3}$$

### Änderung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{P_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F_i}^{(a)} + \sum_{j=1;j\neq i}^{N} \vec{F_{ji}}) \tag{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{(a)} + \underbrace{\sum_{i,j=1;i\neq j}^{N} \vec{F_{ji}}}_{=0 \text{ (alle Kräfte und ihre Gegenkräfte)}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{(a)} \tag{5}$$

### Bemerkungen:

1. für abgeschlossene Systeme gilt Gesamtimpulserhaltung:

$$\vec{P_{CM}}(t) = \vec{P_{CM}}(0) = \text{const.} \tag{6}$$

$$\text{falls:} \vec{F_i}^{(a)} = 0 \tag{7}$$

2. für $\vec{R_{CM}}$ folgt für abgeschlossene Systeme: 'Schwerpunktsatz'

$$\vec{R_{cm}}(t) = \vec{R_{CM}}(t_0) + \frac{PCM(t_0)}{M}(t - t_0) \tag{8}$$

   Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig (für abgeschlossene Systeme)

3. Beschreibung der Dynamik ausgedehnter Pbjekte durch Punktteilchen (Schwerpunkt) ist gerechtfertigt

4. $\vec{P_{CM}} = \text{const.}$ sehr wichtig für Stoßprozesse gültig für $\left\{ \begin{array}{ll} \text{elastische Stoßprozesse:} & E = \\ \text{inelastischer Stoß:} & \text{ein Teil der Enerdie} \end{array} \right.$

5. häufig Wahl des Schwerpunktsystems $O \to \vec{R_{CM}}$ (Ursprung) als Bezugssystem

### 2.5.1 Drehimpuls

$$\underbrace{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}_{\text{(hängt von der Wahl des Ursprungs ab)}} \qquad ;\vec{p} = m\dot{\vec{r}} \tag{9}$$

**zeitliche Änderung:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{p})}_{0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \underbrace{\vec{M}}_{\text{Drehmoment}} \tag{10}$$

$$\ulcorner \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \vec{F}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{M} \lrcorner \tag{11}$$

**für N-Teilchen: Gesamtdrehimpuls**

$$\vec{L_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r_i} \times \vec{r_i}) \tag{12}$$

**Zeitliche Änderung:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{r_i} \times \vec{F_i}) = \sum_{i=1}^{N}(\vec{r_i} \times \vec{F_i}^{(a)} + \sum_{i,j=1;j\neq i}^{N} \vec{F_i}j) \tag{13}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L_{\text{ges}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{M_i}^{(a)}}_{ueresDrehmoment} + \sum_{i,j=1;j\neq i}^{N} (\vec{r_i} \times \vec{F_{ij}}) \tag{14}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L_{\text{ges}}} = \vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M_i}^{(a)} \tag{15}$$

**Bemerkung:**

1. für geschlossene Systeme ($\vec{M_i}^{(a)} = 0$) gilt *Gesamtdrehimpulserhaltungssatz*:

$$L_{ges} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L_i} = \text{const.} \tag{16}$$

2. Zerlegung in Schwerpunkt und Relativteil: $\vec{r_i} = \vec{R_{CM}} + \vec{\varrho_i}$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{r_i} \times \vec{p_i}) = \underbrace{\vec{R_{CM}} \times \vec{P_{CM}}}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}(\vec{\varrho_i} \times \vec{p_i})}_{\vec{L}_{rel}} \tag{17}$$

3. diese Erhaltungssätze für abgeschlossene N-Teilchensysteme gelten:

| | | |
|---|---|---|
| $E$ | Energie | $1\times$ |
| $\vec{P_{CM}}$ | Gesamtimpuls | $3\times$ |
| $\vec{L_{\text{ges}}}$ | Gesamtdrehimpuls | $3\times$ |

$$\vec{R_{CM}}(0) = \vec{R_{CM}}(t) - \frac{\vec{P}t}{M} \qquad \text{Schwerpunktsatz} \tag{18}$$

$\Rightarrow$ 10 Erhaltungsgrößen für dynamik eines abgeschlossenen Systems
$\leftrightarrow$ verknüpft mit der Homogenität der Zeit ($t \to t + t_0$), Homogenität des Raumes ($\vec{r} \to \vec{r} + \vec{r_0}$), Isotopie des Raumes ($\vec{r} \to R\vec{r}$)
Galilei-Transformation:

$$r' \to \vec{r} - \vec{v}t$$
$$t \to t$$

4. für abgeschlossene Systeme gelten die Newtonschen-Gleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r_i}} = \sum_{i,j=1;j\neq i}^{N} \vec{F_{ij}}(|r_i - r_j|) \qquad \text{in IS beim Übergang in IS'}$$

$$\to |\vec{r_i} - \vec{r_j}| = |\vec{r_i}' - \vec{r_j}'| \qquad \text{mit} \qquad \vec{r_i}' = \vec{_i} + \vec{r_0} - \vec{v}t$$
$$\text{mit} \qquad \vec{r_i}' = R\vec{r_i}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \qquad \text{mit} \qquad t' = t + t_0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}'\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'^2}$$

$\Rightarrow$ in IS' gelten Newtonsche-Bewegungs Gleichungen.

$$\Rightarrow m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r_i}'}{\mathrm{d}t'^2} = \vec{F_{ij}}'(|\vec{r_i}' - \vec{r_j}'|)$$
$$\vec{F}' = \vec{F}$$

$\Rightarrow$ Newtonsche Mechanik eines abgeschlossenen Systems ist invariant unter Galilei-Gruppe

## 2.6 Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte

Sei $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ IS
$\to$ gehe über zu beschleunigtem (rotierendem) BS
$\to$ mit $(O(t), \vec{e_1}'(t), \vec{e_2}'(t), \vec{e_3}'(t))$

1. Einführung einer zeitabhängigen Rotation:

$$\vec{e_i}'(t) = R(t)\vec{e_i}$$
$$RR^T = \mathbb{1}$$

in BS' $\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i'(t)\vec{e_i}'(t)$
für Geschwindigkeit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}'(t)) = \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_i'(t)\vec{e_i}'(t) + \sum_{i=1}^{N} x_i'(t)\,\dot{\vec{e}}_i'(t) = \underbrace{\dot{\vec{r}}'}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'}} + \sum_{i=1}^{N} x_i'(t)\,\dot{\vec{e}}_i'(t)$$

$$\ulcorner\, \dot{\vec{e}}_i' = \dot{R}(t)\vec{e_i} = \dot{R}R^T\vec{e_i}' \,\lrcorner$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}' = \vec{V_{BS}} + \sum_{i=1}^{N} x_i'(t)(\dot{R}R^T)\vec{e_i}'$$

---

$$(O, \{\vec{e_i}\})IS \to (O'(t), \{\vec{e_i}'(t)\})BS'$$

**Error 404 Skizze not found**

Abbildung 17: Karusselmit zeitabhängiger Drehung

**Beispiel** Änderung der Basisvektoren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e_i}'(t) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R)\vec{r_i} = ((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R)R^T)\vec{e_i}' = M\vec{e_i}'$$

$$\text{mit } M(t) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R)R^T = -M^T(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition von $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$
wir sehen $M\vec{b} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$, Bewegung im rotierenden BS'

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \tag{19}$$

# 3 kleine Schwingungen

→ Resonantphänomene:
*Resonanz:*bei einer bestimmten Frequenz schwingt ein gekoppeltes Vielteilchensystem besonders stark. *Beispiele:*

1. mechanische konstruktionen (Fahrzeugbau) sollten keine Resonanzen aufweisen (→ Hubschrauber-Boden-Resonanz[1])
2. Brücke
3. Wolf (Streichinstrumente)

*Problem:* Es gibt kollektive Schwingungen einer Frequenz bei kopplung einzelner schwingungsfähiger Freiheitsgrade

→ 'Eigenfrequenzen' des gekoppelten Systems

→ Eigenmoden – -


Abbildung 18: schwingungen gleich und gegenphasig

## 3.1 Lineare Differenzialgleichungen (2.Ordnung)

### 3.1.1 Beispiel

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \tag{20}$$

**linear**

$x$ tritt nur linear auf

**2.Ordnung**

$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2} x$ zweite Ableitung

**homogen**

$f(t) = 0$

**inhomogen**

$f(t) \neq 0$

[1] https://www.youtube.com/watch?v=bs2rNBJ6D3A

**wichtig**

für lineare, homogene Differentialgleichungen gilt ein Superpositionsprinzip mit $x_1(t), x_2(t)$ auch $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung