

# Theoretische Mechanik

Till Hanke

Today

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Raum und Zeit</b>	<b>2</b>
1.1	Raum . . . . .	2
1.2	Koordinatensysteme . . . . .	2
1.3	Zeit . . . . .	4
1.3.1	Ereignis . . . . .	4
1.4	Kinematik . . . . .	5
1.5	Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme . . . . .	7
1.5.1	Inertialsysteme . . . . .	9
1.6	Galilei- und Lorenztransformationen . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Newtonsche Mechanik</b>	<b>12</b>
2.1	Newtonsche Bewegungs-Gleichung . . . . .	13
2.2	Arbeit und Energie . . . . .	13
2.2.1	Beispiele konservativer Kraftfelder . . . . .	15
2.2.2	Gegenbeispiel . . . . .	15
2.2.3	Bemerkung . . . . .	15
2.3	Systeme mehreren (N) Teilchen . . . . .	16
2.4	N-Teilchenproblem . . . . .	17
2.5	Impuls und Drehimpuls . . . . .	18
2.5.1	Drehimpuls . . . . .	19
2.6	Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte . . . . .	20

# 1 Raum und Zeit

## 1.1 Raum

Mechanik spielt im dreidimensionalen Raum. [affiner Raum]  $\mathbb{E}^3 = (\text{Menge aller Punkte im Raum})$   
 Ein Punkt  $P \in \mathbb{E}^3$  wird durch Angabe eines Ortsvektors  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  (dreidimensionaler Vektorraum) relativ zu einem Ursprung  $O \in \mathbb{E}^3$  festgelegt:  $\vec{OP} = \vec{P}$ . Ein Skalarprodukt

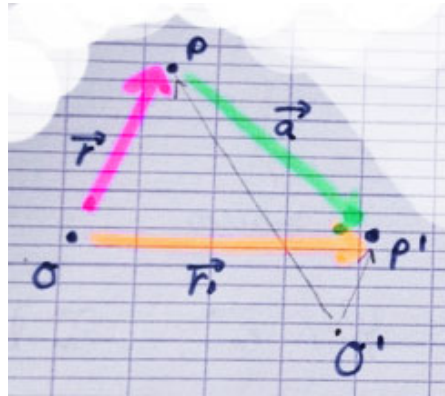


Abbildung 1:

$\vec{r} \cdot \vec{r}' \in \mathbb{R}^3$  liefert Längen

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$$

und abstände  $d(P, P') = |\vec{a}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r} - \vec{r}'}$  'Euklidischer' Raum  $\mathbb{E}^3$ : affine, 3d Räume mit  $d(P, P')$

### Bemerkung

- Die Wahl von O ist beliebig, eine andere Wahl O' mag zweckmäßiger sein, 'ändert nichts an der Physik' insbesondere gilt:  $d_O(P, P') = d_{O'}(P, P')$
- Übergang  $O \rightarrow O'$ : wechsel des Bezugssystems

## 1.2 Koordinatensysteme

für  $P \in \mathbb{E}^3$  muss angegeben werden: (Ursprung O) und (Koordinaten (x,y,z) bzgl. einer Karthesischen OB  $e_1, e_2, e_3$   $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ )

für den Punkt P folgt dann:

$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \sum_i^3 x_i \vec{e}_i$$

den Punkt P ordnen wir den Spaltenvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  zu bezogen auf  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

## Bemerkungen

1. Die Wahl von  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ist beliebig.  
Es gilt:  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$   
 $\vec{e}'_k = \sum_i R_{ki} \vec{e}_i$  mit einer orthogonalen Transformation  $R \in O(3)$  Drehungsmatrix  $R^{-1} = R^T$ ;  $(\det R = 1)$
2. Transformation der Koordinaten bezogen auf  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

## Aktive Transformation

→ die Rel.  $GL(3)$  definiert bzgl eines festen Koordinaten- Systems  $(O, \vec{e}, \vec{e}, \vec{e})$  eine aktive Drehung  $R$  des Vektors  $\vec{r} = \sum_k x_k \vec{e}_k \rightarrow \vec{r}' = \sum_k x'_k \vec{e}_k = R\vec{r}$

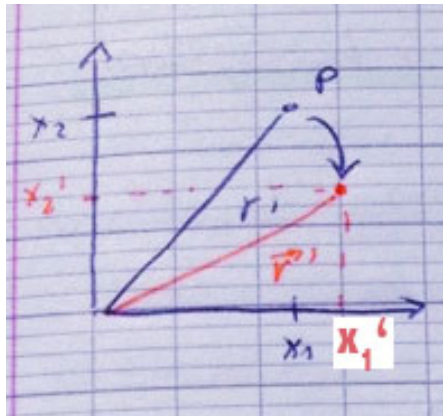


Abbildung 2:

### Achtung:

für die Basisvektoren aus Bemerkung 2 gilt:  $\vec{e}'_k = (R^{-1})\vec{e}_k$  siehe Vorübung

**Transformation** Die Trafo  $GL(3)$  definiert allgemein das Transformationsverhalten eines Vektors (Tensor 1.Stufe)

Beispiele:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow v'_k = \sum_i R_{ki} v_i$ ; Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc.

Bedeutung: Physikalische Grundgleichungen müssen das Trafo Verhalten respektieren

Bsp:  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$  in  $(O, \vec{e}, \vec{e}, \vec{e})$   $m\ddot{x}_i = F_i \rightarrow$  in  $(O, \vec{e}', \vec{e}', \vec{e}')$   $m\ddot{x}'_i = F'_i$

**Krumliniges KO-System** in dem  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3); i = 1, 2, 3$  mag sinnvoll sein.

Beispiele: Zylinder  $(r, \varphi, z)$  oder Kugelkoordinaten  $(r, \Theta, \varphi)$

**Achtung!:**  $\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_i(q_1, q_2, q_3)$

## 1.3 Zeit

### 1.3.1 Ereignis

E ist ein Punkt der Raum-Zeit mit Koordinaten  $(t, x, y, z)$  bezogen auf  $(O, e, e, e)$

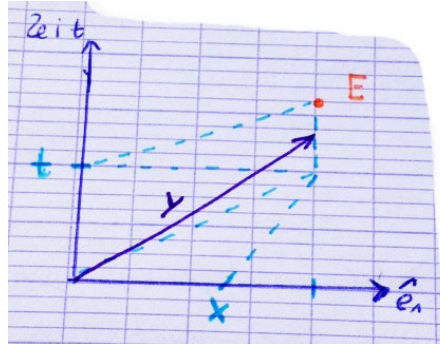


Abbildung 3:

**Ort** räumliche Koordinaten  $(x, y, z)$  werden abgelesen durch Maßstäbe.

**Zeit** zeitliche Koordinate  $t$  (Koordinatenzeit): abgelesen von einer Uhr

- Festlegung der Zeit  $t$  eines Ereignisses gleichzeitiges betrachten von E und der Uhr
- nur lokal möglich
- wir denken uns im gesamten Raum ausgestattet mit Uhren, die alle synchronisiert sind.

Die Koordinatenzeit  $t$  des Ereignisses E mit  $(t, x, y, z)$  wird von der Uhr mit räumlichen Koordinaten  $(x, y, z)$  abgelesen!

#### Bemerkung

1. die absolute Uhrzeit  $t$  ist beliebig, eine andere Wahl  $t' = t + t_0$  mag zweckmäßiger sein. 'ändert nichts an der Physik'
2. Uhrensynchronisation kann durch Lichtpulse realisiert werden ('Einstein-Synchronisation'), etwa vom Mittelpunkt zwischen zwei Uhren.  
es zeigt sich: äquivalent dazu (sehr langsamer) Uhrentransport
3. Vorsicht ist geboten beim Vergleich von Uhren in relativ zueinander bewegten Bezugssystemen

## 1.4 Kinematik

Der klassischen Mechanik

Kin= 'Beschreibung der Bewegung' (ohne auf Ursachen einzugehen)

**Bahnkurve**  $\vec{r}(t)$

**Ortsvektor**

**Geschwindigkeit**  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{T}(t) \text{ mit } |\vec{T}| = 1; v(t) = |\vec{v}(t)|$$

**Beschleunigung**  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{v}\vec{T} + v(t)\dot{\vec{T}}(t)$

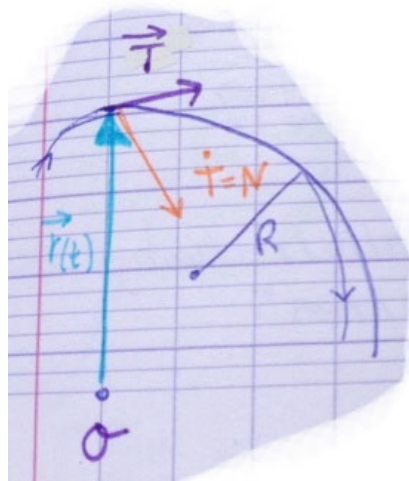


Abbildung 4:

$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|}$  steht senkrecht auf  $\vec{T}$  und  $|\vec{N}| = 1$  ('Normalenvektor')

$(\vec{T}, \vec{N})$  definieren 'Schmiegeebene', in der lokal die Bahnkurve durch einen Kreis mit Krümmungsradius  $R = \frac{v}{|\dot{\vec{T}}|}$  beschrieben werden kann (siehe Übung)

es folgt  $\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$

als summe von zwei orthogonalen Beiträgen wobei

der erste: eine Tangentialbeschleunigung und

der Zweite: eine Normal- oder Zentripetalbeschleunigung ist.

## Beispiel

1. geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 0$$

$$(\dot{v} = 0, R = \infty)$$

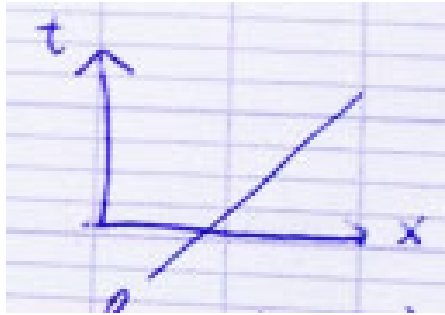


Abbildung 5:

2. geradlinig (allgemein)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + l(t)\vec{T}_0$$

$$\vec{v} = \dot{l}\vec{T}_0$$

$$v = \dot{l}$$

$$\vec{T} = \vec{T}_0$$

$$(\dot{v} = \ddot{l}; R = \infty)$$

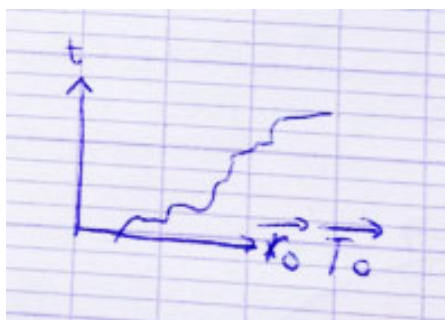


Abbildung 6:

### 3. gleichförmige Kreisbewegung

$$v = \text{const.} = \frac{2\pi R}{\tau}$$
$$\dot{v} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = 4\pi^2 \frac{R}{\tau^2} \vec{N}$$

$\tau$  Umlaufzeit

Anwendung auf Kepler-Bahnen für Planeten  $\tau^2 \sim R^3$  (3.Keplergesetz)

$\Rightarrow \vec{a} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$  ( $\vec{F} = m\vec{a}$ )  $\Rightarrow$  Planetenbewegung  $\vec{F} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$

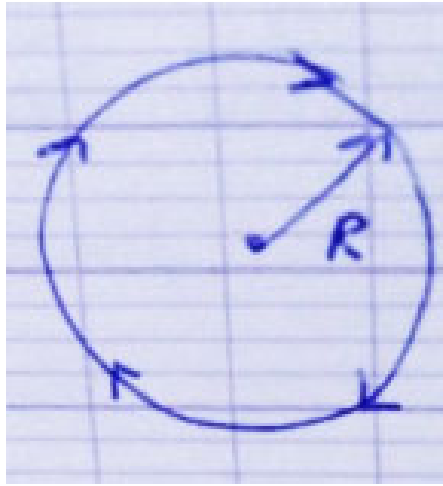


Abbildung 7:

## 1.5 Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme

RS=Ruhesystem

Wie wählen wir (o,e,e,e) geeignet?

→ nahe liegend Laborsystem (Labortisch ruht im LS)  
Beispiel elastischer Stoß im LS (m ruht)

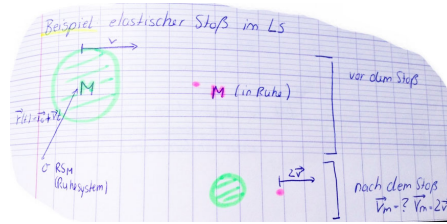


Abbildung 8:

wechsle ins Ruhesystem der Masse M  
 die betrachtung wird eindeutig und trivial bei  $M \gg m$   
 Übergang von System Labortisch (O,e,e,e, Uhren) in RS der großen Masse M (O',e',e',e',Uhren')  
 gilt:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t \\ t' &= t\end{aligned}$$

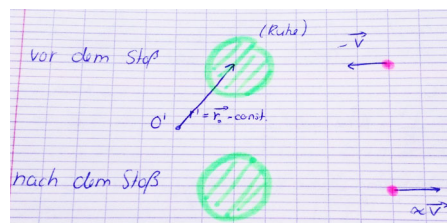


Abbildung 9:

Die **Galilei-Transformation** beschreibt Transformationsgesetz von BS zu BS', das sich mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zu BS bewegt. Zur Beschreibung sind  $BS = RS_m$  und  $BS' = RS_M$  völlig gleichwertig (hier  $BS'$  transparenter).

### Bemerkungen

1. Zustand '**in Ruhe**' hat keine Absolute Bedeutung sonder hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. (Bewegung ist relativ zu sehen)
2. vor 400Jahren: ruht die Erde und die Sonne bewegt sich?  
 Galilei: Frage ist bedeutungslos, nicht entscheidbar  
 $\Rightarrow$  Galilei-Transformationen



3. Relativität kommt zum Ausdruck im 1. Newtonschen Gesetz: ('Trägheitssatz')  
Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig-gleichförmigen Bewegung sofern er nicht durch Kräfte zur Änderung gezwungen wird.

### 1.5.1 Inertialsysteme

(IS) sind BS, die durch die Gültigkeit des 1. Newtonschen Gesetzes ausgezeichnet sind. Ausgehend von einem IS findet man weitere IS' durch geradlinig-gleichförmige Bewegung des IS' relativ zu IS. (häufig IS='ruhend bzgl. des Fixsternhimmels'; in der Praxis LS $\approx$ IS (gute Näherung)).

in einem relativ zu IS beschleunigten BS treten Scheinkräfte auf, die nicht auf fundamentalen Wechselwirkungen (Coulombkraft, etc) beruhen.

$\Rightarrow$  physikalische Grundgesetze werden bzgl. eines IS formuliert, dabei sind alle IS völlig gleichwertig; IS $\rightarrow$ IS' durch:

1. 'boost' mit Richtung  $\vec{v}$   $t' = t - \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2}$
2. gleichförmig-geradlinige Bew:  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$  (3 Parameter)  
(Galilei-Relativität)
3. räumliche Verschiebung:  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$  (3 Parameter)  
(Homogenität des Raumes)
4. räumliche Drehung:  $\vec{r}' = R\vec{r}$  (3 Parameter)  
(Isotropie des Raumes)
5. zeitliche Verschiebung:  $t' = t + t_0$  (1 Parameter)  
(Homogenität der Zeit)

Die Kombination all dieser Transformationen definieren die '*Galilei-Gruppe*' der klassischen Raum-Zeit mit 10 freien Parametern.

### 1.6 Galilei- und Lorenztransformationen

Die Naturgesetze müssen von einer Art sein, die (form-)invariant sind unter Transformation zwischen IS

Bsp.: IS $\rightarrow$ IS', dann:

Newton:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}'$$

$\rightarrow$  *Relativitätsprinzip!* insbesondere gilt:

geradlinig-gleichförmige Bewegung in IS mit Koordinaten(t,x,y,z) ist auch eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in einem anderen IS' mit (t',x',y',z').

**Bsp: Galilei-Transformaiton** : mit  $\vec{v}$  rel. zu IS bew. IS' gilt  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ ,  $t' = t + t_0$   
in IS:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}t$   
 $\Rightarrow IS' : \vec{r}'(t') = \vec{r}_0 + (\vec{u} - \vec{v})t'$

**Umkehrung?** folgt aus der Forderung (s.o.) dass  $t, \vec{r} \rightarrow t', \vec{r}'$  eine Galilei-Trafo?

Frage: 'wie sieht allgemein eine Trafo  $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$  aus, die die Forderung (s.o.) erfüllt f+r IS $\rightarrow$ IS', das sich mit  $\vec{v}$ (vorgegeben) relativ zu IS bewegt?

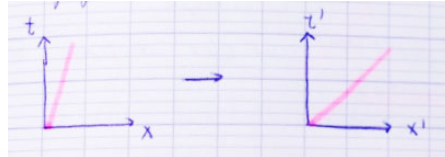


Abbildung 10:

$\rightarrow$  lineare Trafo der Raum-Zeit! 
$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ \cdot & 4 & \times & 4 \\ \cdot & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  bzgl. räumlicher Anteile  $\vec{r}$  Vektorcharakter muss erhalten bleiben:  $\vec{r}' \sim \vec{r}, \vec{v}$

$\rightarrow$  Ansatz:

$$t' = a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{r}' = c(v)\vec{r} + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + e(v)\vec{v}t$$

mit beliebigen Funktionen  $a(v), \dots, e(v)$ , die bestimmen weitere Forderungen:

1. für  $\vec{r} = \vec{v}t \Rightarrow \vec{r}' = 0 \Rightarrow c + d + e = 0$
2. Relativität (I) Vertausche Rolle IS $\leftrightarrow$ IS' ( $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ )

$$\Rightarrow t = a(v)t' - b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r}')$$

$$\vec{r} = c(v)\vec{r}' + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r}')\vec{v} + e(v)\vec{v}t'$$

ersetze  $t'$  und  $\vec{r}'$  auf der rechten Seite durch Ansatz

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow t = a(v)(a(v)t + b(v)(\vec{v}\vec{r}) - \dots \\
&\quad \vec{r} = c(v)(c(v)\vec{r} + \dots) + \dots\vec{v}\dots \\
&\Rightarrow c^2 = 1; a = c + d; a^2 = 1 + ebv^2; e = -a \\
&\Rightarrow c = 1; e = -a; d = a - 1; b = \frac{1 - a^2}{av^2}
\end{aligned}$$

Wähle Koordinatensystem so, dass  $x$  in Richtung  $\vec{v}$  zeigt.  $\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
t' &= a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x \\
x' &= a(v)(x - vt); y' = y; z' = z
\end{aligned}$$

3. Relativitätsprinzip:

IS  $\rightarrow^v$  IS'  $\rightarrow^u$  IS''

$$\begin{aligned}
t'' &= a(u)t' + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}x' = a(u)\left(a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x\right) + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}(a(v)(x - vt)) \\
x'' &= a(u)(x' - ut') = a(u)\left(a(v)x - u\frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x + \dots t\right)
\end{aligned}$$

außerdem muss gelten IS  $\rightarrow^w$  IS''

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
t'' &= a(w)t + (w)x \\
x'' &= a(w)(x - wt)
\end{aligned}$$

woraus dann folgt:

$$\begin{aligned}
&[a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u))]t + \dots x \\
&a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u)) = a(w) \\
&\Rightarrow \frac{a^2(u) - 1}{u^2a^2(u)} = \frac{a^2(v) - 1}{v^2a^2(v)} \\
&\Rightarrow \frac{a^2(v) - 1}{v^2a^2(v)} = \text{const.} = K \\
&\Rightarrow a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}} \\
&k = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{ist Galilei Trafo} \\
&k \neq 0? [k] = \frac{1}{\text{Geschwindigkeit}^2} = \frac{1}{c^2} = \text{const.}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow t' = a(v)\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$x' = a(v)(x - vt)$$

Die Lorentz-Transformation mit  $a(v) \rightarrow \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Bedeutung von  $c$ ?

Man betrachte die 'Addition' von Geschwindigkeiten:  $w = u + v$ ?

$$a(w) = a(v)a(u)(1 + kuv)$$

$$1 - kw^2 = \frac{(1 - kv^2)(1 - ku^2) + (1 + kuv)^2 - (1 + kuv)^2}{(1 + kuv)^2}$$

$$= 1 - k \frac{(u + v)^2}{(1 + kuv)^2}$$

$$\Rightarrow w = \frac{u + v}{1 + kuv} \Leftrightarrow \left(\frac{w}{c}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c} \frac{v}{c}\right)^2}$$

Folgerungen:

- a) für  $u = c \Rightarrow w = c$
- b) für  $v = c \Rightarrow w = c$
- c) für  $u < c; v < c \Rightarrow w < c$
- d) für  $u \ll c; v \ll c \Rightarrow w \approx u + v$

$c$  ist Lichtgeschwindigkeit

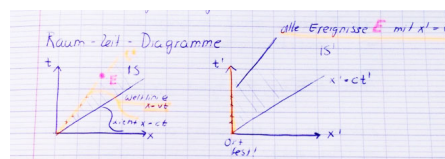


Abbildung 11:

## 2 Newtonsche Mechanik

- basiert auf Galilei-Raum-Zeit (gültig für  $v \ll c$ )  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$  'Fernwirkung' der Kraft  
 $\leftrightarrow$  Widerspruch zur Vorstellung einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wirkungen.
- relativistische Mechanik folgt in Kap.7

## 2.1 Newtonsche Bewegungs-Gleichung

zunächst phänomenologisch; Erfahrung: durch Angabe des Anfangsortes  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$  die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  festgelegt ist  $\Rightarrow$  wir erwarten eine Relation  $\ddot{\vec{r}}(t) \sim \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ , gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zur Bestimmung der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  (Dynamik)

→ Newton (2. Newton-Gesetz); Impuls  $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$   
 $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ , bei konstanter (träger) Masse  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$  wobei  $\vec{F}$  die Kraft ist, die auf den Körper wirkt.

### Beispiel:

- ggf. Bew.  
 $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0)$
- $\vec{F} = \vec{F}_0$  konstant (Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche)  
 $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + 0,5 \frac{\vec{F}_0(t - t_0)^2}{m}$  (Wurfparabel)
- Federkraft (1Dim)  
 $m\ddot{x} = -kx, F(x) = -kx, w^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{v_0}{w} \sin w(t - t_0)$
- Lorenzkraft geschwindigkeits-abhängig  
 $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$
- Reibungskräfte (phänomenologisch)  
 $\vec{F}_R = -\alpha \dot{\vec{r}}; \alpha > 0$  Reibungskoeffizient.
- Coulombkraft  
 $\vec{F} = cqQ \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$   
 $qQ < 0$ : anziehend  
 $qQ > 0$ : abstoßende  
 $c$ : Konstante, abhängig von der Einheit Ladung

## 2.2 Arbeit und Energie

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(0,5m\dot{\vec{r}}^2) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{d}{dt}(0,5m\dot{\vec{r}}^2) \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F} \dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r}(t)$$

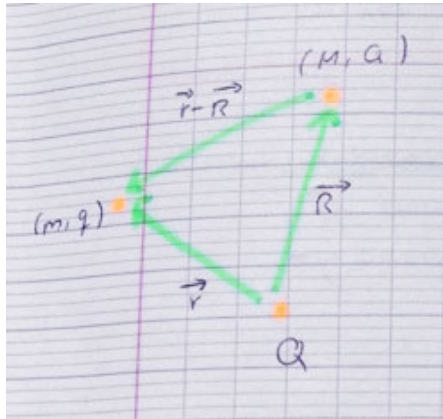


Abbildung 12:

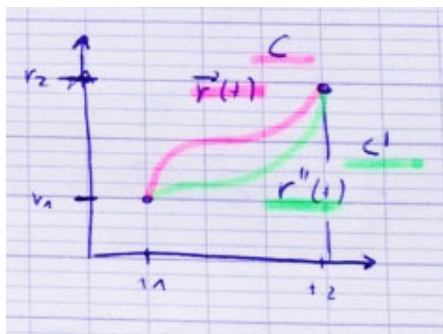


Abbildung 13:

Entlang der Kurve  $L$   $\vec{r}(t)$  mit  $r(t_1) = r_1 \dots$  Wir definieren die am Teilchen geleistete Arbeit entlang  $L$  durch  $W_e(r_1 \rightarrow r_2) = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \dot{\vec{r}} dt$

Wir nennen ein Kraftfeld  $\vec{F}$  konservativ, wenn  $W_e$  nur von  $r_1$  und  $r_2$ , aber nicht vom Weg  $r(t)$  abhängt.

**Theorem**  $\vec{F}(\vec{r})$  konservativ  $\Leftrightarrow$  es existiert ein skalares Potential  $U(\vec{r})$  mit  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$$

, Kraftfeld ist Wirbelfrei.

Für konservative Kraftfelder gilt:  $\int_L F(r) dr = -U(r_2) + U(r_1) = W(r_1 \rightarrow r_2)$

$$\Rightarrow T(t_2) + U(r_2) = T(t_1) + U(r_1)$$

wir sehen für konservative Kräfte  $F = -\nabla U(r)$  folgt:

Energieerhaltung  $E = T + U = 0,5m\dot{r}^2 + U(r(t)) = \text{const!}$

denn  $\frac{d}{dt} E = m\dot{r}\ddot{r} + \nabla U(r(t))\dot{r}(t) = \dot{r}(t)(m\ddot{r} + \nabla U) = 0$  (Newton-Gleichung)

### 2.2.1 Beispiele konservativer Kraftfelder

$$F = -\nabla U$$

1.  $F = F_0 \Rightarrow U(r) = -F_0 r$
2. Federkraft  $F = -kr \Rightarrow U(r) = 0,5 f(r \cdot r) = 0,5 k r^2$  (harmonischer Oszillator)
3. Coulombkraft,  $U(r) = c q Q \frac{1}{|r-R|}$

### 2.2.2 Gegenbeispiel

4. Reibungskraft  $F = -\alpha \dot{r}$  konservativ?  
 berechne Arbeit entlang einer geschlossenen Bahn:  $\oint F dr = -\alpha \oint \dot{r} dr = -\alpha \oint \dot{r}^2 dt \neq 0, > 0$  (außer  $\dot{r} = 0$ )

### 2.2.3 Bemerkung

1.  $E = T + U$ ;  $T = 0,5 m \dot{r}^2$  Kinetische Energie;  
 $U = U(r)$  potentielle Energie, nur bis auf additive Konstante festgelegt (definiert das Energie-Nullniveau)

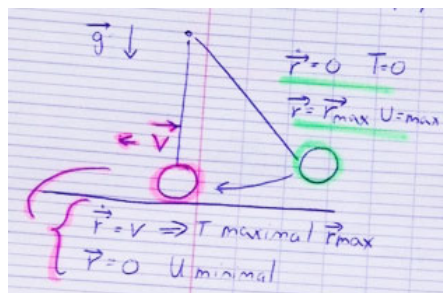


Abbildung 14:

2.  $E = const$  wichtiger Energieerhaltungssatz. (hängt zusammen mit Symmetrien!)

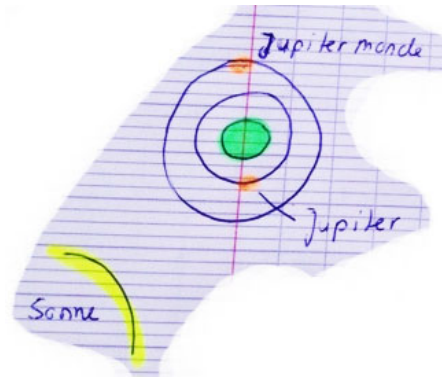


Abbildung 15:

## 2.3 Systeme mehreren (N) Teilchen

Dynamik: N Punktteilchen mit Ortsvektoren  $r_i$ ;  $i = 1, N$  und trägen Massen  $m_i$ ; es gelten Newtons Gleichungen

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t)$$

N gekoppelte Diff.-Gl. für die  $r_i(t)$ ; Anfangsbed.  $r(0); \dot{r}(0)$  müssen gegeben sein.

Häufig: konservative Kräfte:  $F_i = -\nabla_i U(r_1, \dots, r_N)$  es folgt Energieerhaltung (Gesamtenergie).

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2(t) + U(r_1(t), \dots, r_N(t)) = \text{const}$$

$$\nabla_i = \frac{\delta}{\delta r_i}$$

häufig setzt sich die Kraft  $F_i$  zusammen aus 'äußeren' Kräften  $F_i^{(a)}$  und paarweise auftretenden 'inneren' Kräften  $F_{ij}$  zwischen den  $N$  Teilchen.

$$F_i = F_i^{(a)}(r_i) + \sum_{j=1; j \neq i}^N F_{ij}(r_i, r_j)$$

konservative Kräfte:  $F_i^{(a)}(r_i) = -\nabla_i U^{(a)}(r_1, \dots, r_N)$

und  $F_{ij} = -\nabla_i \sum_{j=1; i \neq j}^N V_{ji}(|r_i - r_j|)$  für abstandsabh. Zweiwechselwirkung ( $F_{ij} = -F_{ji}$ ) es folgt Energieerhaltung in der Form:

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2 + U^{(a)}(r_1, \dots, r_N) + 0,5 \sum_{i,j=1; i \neq j}^N V_{ij}(|r_i - r_j|)$$

kin Energie + äußere Pot. Energie + innere Energie



## 2.4 N-Teilchenproblem

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = F_i^{(a)}(\vec{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

für konservative Kräfte

**Error 404 Skizze not found**

Abbildung 16: innere und äußere Kräfte

$$F_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i U_i(\vec{r}_i) \quad (1)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (2)$$

Gesamtenergieerhaltung:  $E = T + U^{(a)} + v^{WW}$

### Bemerkungen:

1. *Abgeschlossene Systeme* sind solche ohne äußere Kräfte, also

$$F_i^{(a)} = 0, U^{(a)} = \text{const.}$$

2. *Schwerpunkt* des Systems:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, M = \sum_i m_i$$

Gesamtmasse

3. *Trennung der Energie in Schwerpunkt und Relativteil:*

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i \quad \text{Definition von } \vec{\rho}_i \\ T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \underbrace{\dot{\vec{R}}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2 \\ \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{\rho}_i) = M \vec{R}_{CM} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i}_{=0} \\ T &= \underbrace{T_{CM}}_{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2} + T_{rel} \end{aligned}$$

für abgeschlossene Systeme

$$\begin{aligned} E &= E_{CM} \cdot E_{rel} \\ &= T_{CM} + (T_{rel} + V^{WW}) \end{aligned}$$

## 2.5 Impuls und Drehimpuls

**Gesamtimpuls:**

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}_{CM} \quad (3)$$

**Änderung:**

$$\frac{d}{dt} P_{CM} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ji}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} + \underbrace{\sum_{i,j=1; i \neq j}^N \vec{F}_{ji}}_{=0 \text{ (alle Kräfte und ihre Gegenkräfte)}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \end{aligned} \quad (5)$$

**Bemerkungen:**

1. für abgeschlossene Systeme gilt Gesamtimpulserhaltung:

$$\vec{P}_{CM}(t) = \vec{P}_{CM}(0) = \text{const.} \quad (6)$$

$$\text{falls: } \vec{F}_i^{(a)} = 0 \quad (7)$$

2. für  $\vec{R}_{CM}$  folgt für abgeschlossene Systeme: 'Schwerpunktsatz'

$$\vec{R}_{cm}(t) = \vec{R}_{CM}(t_0) + \frac{\vec{P}_{CM}(t_0)}{M} (t - t_0) \quad (8)$$

Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig (für abgeschlossene Systeme)

3. Beschreibung der Dynamik ausgedehnter Objekte durch Punktteilchen (Schwerpunkt) ist gerechtfertigt

4.  $\vec{P}_{CM} = \text{const.}$  sehr wichtig für Stoßprozesse gültig für  $\left\{ \begin{array}{ll} \text{elastische Stoßprozesse:} & E = \text{const.} \\ \text{inelastischer Stoß:} & \text{ein Teil der Energie wird in Wärme umgewandelt} \end{array} \right.$

5. häufig Wahl des Schwerpunktsystems  $O \rightarrow \vec{R}_{CM}$  (Ursprung) als Bezugssystem

### 2.5.1 Drehimpuls

$$\underbrace{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}_{\text{(hängt von der Wahl des Ursprungs ab)}}; \vec{p} = m\vec{\dot{r}} \quad (9)$$

zeitliche Änderung:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \underbrace{(\vec{\dot{r}} \times \vec{p})}_0 + \vec{r} \times \vec{\dot{p}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \underbrace{\vec{M}}_{\text{Drehmoment}} \quad (10)$$

$$\text{r} \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}, \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}_{\perp} \quad (11)$$

für N-Teilchen: Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{\dot{r}}_i) \quad (12)$$

Zeitliche Änderung:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)}) + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)}}_{\text{ueres Drehmoment}} + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)} \quad (15)$$

Bemerkung:

1. für geschlossene Systeme ( $\vec{M}_i^{(a)} = 0$ ) gilt *Gesamtdrehimpulserhaltungssatz*:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \text{const.} \quad (16)$$

2. Zerlegung in Schwerpunkt und Relativteil:  $\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{\varrho}_i$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \underbrace{\vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{\varrho}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{L}_{rel}} \quad (17)$$

3. diese Erhaltungssätze für abgeschlossene N-Teilchensysteme gelten:

$E$	Energie	$1 \times$
$\vec{P}_{CM}$	Gesamtimpuls	$3 \times$
$\vec{L}_{ges}$	Gesamtdrehimpuls	$3 \times$

$$\vec{R}_{CM}(0) = \vec{R}_{CM}(t) - \frac{\vec{P}t}{M} \quad \text{Schwerpunktsatz} \quad (18)$$

$\Rightarrow$  10 Erhaltungsgrößen für dynamik eines abgeschlossenen Systems

$\Leftrightarrow$  verknüpft mit der Homogenität der Zeit ( $t \rightarrow t + t_0$ ), Homogenität des Raumes ( $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$ ), Isotropie des Raumes ( $\vec{r} \rightarrow R\vec{r}$ )

Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &\rightarrow \vec{r} - \vec{v}t \\ t &\rightarrow t \end{aligned}$$

4. für abgeschlossene Systeme gelten die Newtonschen-Gleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad \text{in IS beim Übergang in IS'}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |\vec{r}_i - \vec{r}_j| &= |\vec{r}_i' - \vec{r}_j'| & \text{mit} & \quad \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{r}_0 - \vec{v}t \\ & & \text{mit} & \quad \vec{r}_i' = R\vec{r}_i \\ & \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} & \text{mit} & \quad t' = t + t_0 \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \vec{r}''}{dt'^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  in IS' gelten Newtonsche-Bewegungs Gleichungen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_i \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt'^2} &= \vec{F}_{ij}'(|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|) \\ \vec{F}' &= \vec{F} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Newtonsche Mechanik eines abgeschlossenen Systems ist invariant unter Galilei-Gruppe

## 2.6 Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte

Sei  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  IS

$\rightarrow$  gehe über zu beschleunigtem (rotierendem) BS

$\rightarrow$  mit  $(O(t), \vec{e}_1'(t), \vec{e}_2'(t), \vec{e}_3'(t))$

1. Einführung einer zeitabhängigen Rotation:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_i(t) &= R(t)\vec{e}_i \\ RR^T &= \mathbb{1}\end{aligned}$$

in BS'  $\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t)\vec{e}'_i(t)$   
für Geschwindigkeit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r}'(t)) &= \sum_{i=1}^N \dot{x}'_i(t)\vec{e}'_i(t) + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) = \underbrace{\dot{\vec{r}}'}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'}} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) \\ \dot{\vec{e}}'_i &= \dot{R}(t)\vec{e}_i = \dot{R}R^T \vec{e}'_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{r}' &= \vec{V}_{BS} + \sum_{i=1}^N x'_i(t)(\dot{R}R^T)\vec{e}'_i\end{aligned}$$