

Theoretische Mechanik

Till Hanke

Letzte Aktualisierung: 27. September 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Raum und Zeit	2
1.1	Raum	2
1.2	Koordinatensysteme	3
1.3	Zeit	4
1.3.1	Ereignis	4
1.4	Kinematik	5
1.5	Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme	7
1.5.1	Inertialsysteme	9
1.6	Galilei- und Lorenztransformationen	9
2	Newtonsche Mechanik	12
2.1	Newtonsche Bewegungs-Gleichung	13
2.2	Arbeit und Energie	14
2.2.1	Beispiele konservativer Kraftfelder	14
2.2.2	Gegenbeispiel	15
2.2.3	Bemerkung	15
2.3	Systeme mehreren (N) Teilchen	15
2.4	N-Teilchenproblem	16
2.5	Impuls und Drehimpuls	18
2.5.1	Drehimpuls	18
2.6	Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte	20
3	Section 3 – To be composed	22
4	Lagrange-Formalismus	22
4.1	Lagrange I	22
4.2	Lagrange II	22
4.3	Wirkung und Hamiltonsches Prinzip	27

5	kleine Schwingungen	29
5.1	Lineare Differenzialgleichungen (2.Ordnung)	29
5.1.1	Beispiel	29
6	Hamiltonsche Mechanik	30
6.1	Poisson-Klammer	30
6.2	Kanonische Transformationen	30
6.3	(Form-)Invarianz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unter kanonischen Transformationen	31
6.4	Erzeugende von kanonischen Transformationen	32

1 Raum und Zeit

1.1 Raum

Die Mechanik spielt sich im dreidimensionalen Raum ab. Affiner Raum \mathbb{E}^3 : Menge aller Punkte im Raum. Ein Punkt $P \in \mathbb{E}^3$ wird durch Angabe eines Ortsvektors $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ (3D-Vektorraum) relativ zu einem Ursprung $O \in \mathbb{E}^3$ festgelegt: $\vec{OP} = \vec{P}$.



Abbildung 1:

Ein Skalarprodukt $\vec{r} \cdot \vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ liefert Längen $\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$
und Abstände $d(P, P') = |\vec{a}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r} - \vec{r}'}$
'Euklidischer' Raum \mathbb{E}^3 : affine, 3D Räume mit $d(P, P')$

Bemerkung

- Die Wahl von O ist beliebig; eine andere Wahl O' mag zweckmäßiger sein, „ändert nichts an der Physik“. Insbesondere gilt: $d_O(P, P') = d_{O'}(P, P')$
- Übergang $O \rightarrow O'$: Wechsel des Bezugssystems

1.2 Koordinatensysteme

Für $P \in \mathbb{E}^3$ muss angegeben werden: Ursprung O und Koordinaten (x, y, z) bzgl. einer kartesischen OB (e_1, e_2, e_3) – Da OB: $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ sowie $|e_i| = 1$

Für den Punkt P folgt dann:

$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \sum_i^3 x_i \vec{e}_i$$

Dem Punkt P ordnen wir den Spaltenvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, bezogen auf $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, zu.

Bemerkungen

1. Die Wahl von $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ist beliebig.
Es gilt: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$
 $\vec{e}_k' = \sum_i R_{ki} \vec{e}_i$ mit einer orthogonalen Transformation $R \in O(3)$ Drehungsmatrix $R^{-1} = R^T$; $(\det R = 1)$
2. Transformation der Koordinaten bezogen auf $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Aktive Transformation

→ die Rel. $GL(3)$ definiert bzgl. eines festen Koordinatensystems (O, e, e, e) eine aktive Drehung R des Vektors $\vec{r} = \sum_k x_k \vec{e}_k \rightarrow \vec{r}' = \sum_k x'_k \vec{e}_k = R\vec{r}$

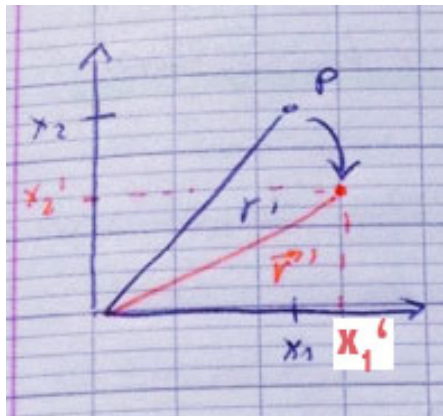


Abbildung 2:

Achtung:

Für die Basisvektoren aus Bemerkung 2 gilt: $\vec{e}_k' = (R^{-1})\vec{e}_k$ (siehe Vorübung).

Transformation Die Trafo $GL(4)$ definiert allgemein das Transformationsverhalten eines Vektors (Tensor 1.Stufe)

Beispiele: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow v'_k = \sum_i R_{ki} v_i$; Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc.

Bedeutung: Physikalische Grundgleichungen müssen das Trafo Verhalten respektieren

Bsp: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. In (O, e, e, e) : $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow$ in (O, e', e', e') : $m\ddot{x}'_i = F'_i$

Krummliniges Koordinatensystem in dem $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), i \in \{1, 2, 3\}$ mag sinnvoll sein.

Beispiele: Zylinder- (r, φ, z) oder Kugelkoordinaten (r, Θ, φ)

Achtung: $\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_i(q_1, q_2, q_3)$

1.3 Zeit

1.3.1 Ereignis

E ist ein Punkt der Raum-Zeit mit Koordinaten (t, x, y, z) bezogen auf (O, e, e, e)

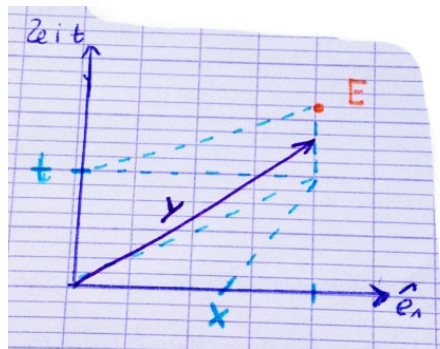


Abbildung 3:

Ort räumliche Koordinaten (x, y, z) werden abgelesen durch Maßstäbe.

Zeit zeitliche Koordinate t (Koordinatenzeit): abgelesen von einer Uhr

→ Festlegung der Zeit t eines Ereignisses durch gleichzeitiges betrachten von E und der Uhr

→ Nur lokal möglich

→ Wir denken uns den gesamten Raum ausgestattet mit Uhren, die alle synchronisiert sind.

Die Koordinatenzeit t des Ereignisses E mit (t, x, y, z) wird von der Uhr mit räumlichen Koordinaten (x, y, z) abgelesen!

Bemerkung

1. Die absolute Uhrzeit t ist beliebig, eine andere Wahl $t' = t + t_0$ mag zweckmäßiger sein. „Ändert nichts an der Physik“
2. Uhrensynchronisation kann durch Lichtpulse realisiert werden („Einstein-Synchronisation“), etwa vom Mittelpunkt zwischen zwei Uhren.
es zeigt sich: Äquivalent dazu (sehr langsamer) Uhrentransport
3. Vorsicht ist geboten beim Vergleich von Uhren in relativ zueinander bewegten Bezugssystemen

1.4 Kinematik

Hier betrachtet: Kinematik der klassischen Mechanik

Kinematik ist die „Beschreibung der Bewegung“ – zunächst ohne auf Ursachen einzugehen.

Bahnkurve $\vec{r}(t)$

Ortsvektor

Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t) = \text{diff} \vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{T}(t) \text{ mit } |\vec{T}| = 1; v(t) = |\vec{v}(t)|$$

Beschleunigung $\vec{a}(t) = \text{diff} \vec{v}(t) = \dot{\vec{T}} + v(t)\dot{\vec{T}}(t)$

$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|}$ steht senkrecht auf \vec{T} und $|\vec{N}| = 1$ („Normalenvektor“)

(\vec{T}, \vec{N}) definieren „Schmiegeebene“, in der lokal die Bahnkurve durch einen Kreis mit Krümmungsradius $R = \frac{v}{|\dot{\vec{T}}|}$ beschrieben werden kann (siehe Übung).

Es folgt $\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$ als Summe von zwei orthogonalen Beiträgen – wobei

→ Der erste: Eine *Tangentialbeschleunigung* und

→ Der zweite: Eine *Normal- oder Zentripetalbeschleunigung*

ist.

Beispiel

1. Geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad (\dot{v} = 0, R = \infty)$$

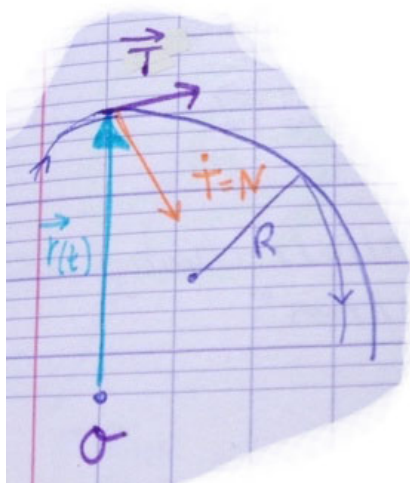


Abbildung 4:

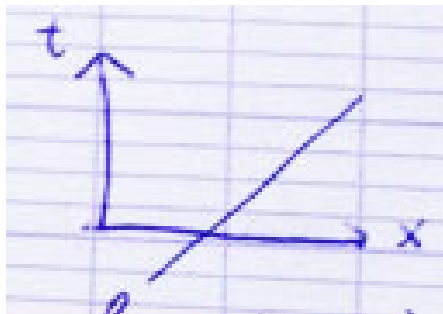


Abbildung 5:

2. Geradlinige Bewegung (allgemein)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + l(t)\vec{T}_0, \quad \vec{v} = \dot{l}\vec{T}_0 \Rightarrow v = \dot{l}, \quad \vec{T} = \vec{T}_0 \quad (\dot{v} = \ddot{l}; R = \infty)$$

3. Gleichförmige Kreisbewegung

$$v = \frac{2\pi R}{\tau} = \text{const.}$$

$$\dot{v} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = 4\pi^2 \frac{R}{\tau^2} \vec{N}$$

Mit τ Umlaufzeit

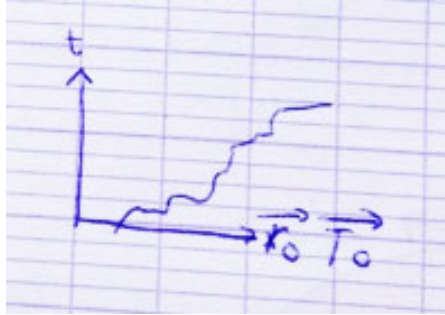


Abbildung 6:

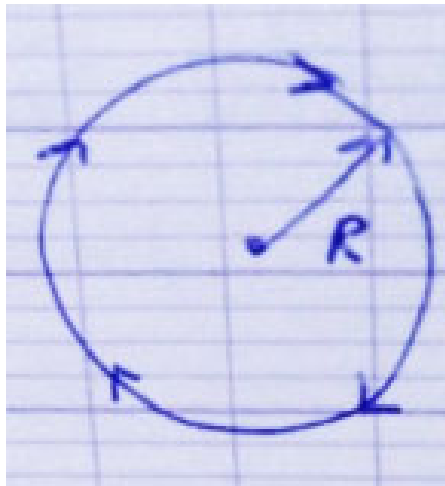


Abbildung 7:

Anwendung auf Kepler-Bahnen für Planeten $\tau^2 \sim R^3$ (3.Keplergesetz):
 $\Rightarrow \vec{a} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$ ($\vec{F} = m\vec{a}$) \Rightarrow Planetenbewegung $\vec{F} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$

1.5 Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme

- Bezeichne RS das Ruhesystem
- Wie wählen wir (O, e_1, e_2, e_3) geeignet? \Rightarrow Nahe liegend: *Laborsystem* (Labortisch ruht im LS)
- *Beispiel* elastischer Stoß im LS (m ruht)

Wechsle ins Ruhesystem der Masse M

Die Betrachtung wird eindeutig und trivial bei $M \gg m$

Übergang von System Labortisch $(O, e, e, e, \text{Uhren})$ in RS der großen Masse M $(O', e', e', e',$

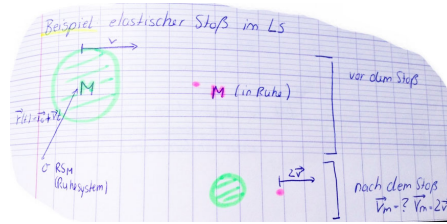


Abbildung 8:

Uhren') gilt:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$t' = t$$

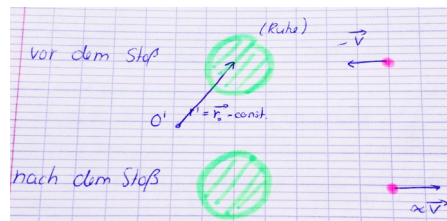


Abbildung 9:

Die **Galilei-Transformation** beschreibt Transformationsgesetz von BS zu BS', das sich mit Geschwindigkeit v relativ zu BS bewegt. Zur Beschreibung sind $BS = RS_m$ und $BS' = RS_M$ völlig gleichwertig (hier BS' transparenter).

Bemerkungen

1. Zustand „**in Ruhe**“ hat keine Absolute Bedeutung sondern hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. (Bewegung ist *relativ* zu sehen)
2. Frage vor 400 Jahren: Ruht die Erde und die Sonne bewegt sich?
Galilei: Frage ist bedeutungslos, nicht entscheidbar
⇒ Galilei-Transformationen
3. Relativität kommt zum Ausdruck im 1. Newtonschen Gesetz: („Trägheitssatz“)
Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig-gleichförmigen Bewegung sofern er nicht durch Kräfte zur Änderung gezwungen wird.

1.5.1 Inertialsysteme

(IS) sind BS, die durch die Gültigkeit des 1. Newtonschen Gesetzes ausgezeichnet sind. Ausgehend von einem IS findet man weitere IS' durch geradlinig-gleichförmige Bewegung des IS' relativ zu IS. (häufig IS='ruhend bzgl. des Fixsternhimmels'; in der Praxis LS \approx IS (gute Näherung)).

in einem relativ zu IS beschleunigten BS treten Scheinkräfte auf, die nicht auf fundamentalen Wechselwirkungen (Coulombkraft, etc) beruhen.

\Rightarrow physikalische Grundgesetze werden bzgl. eines IS formuliert, dabei sind alle IS völlig gleichwertig; IS \rightarrow IS' durch:

1. „Boost“ mit Richtung \vec{v} $t' = t - \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2}$
2. Gleichförmig-geradlinige Bewegung: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ (3 Parameter)
(Galilei-Relativität)
3. Räumliche Verschiebung: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$ (3 Parameter)
(Homogenität des Raumes)
4. Räumliche Drehung: $\vec{r}' = R\vec{r}$ (3 Parameter)
(Isotropie des Raumes)
5. Zeitgleiche Verschiebung: $t' = t + t_0$ (1 Parameter)
(Homogenität der Zeit)

Die Kombination all dieser Transformationen definieren die 'Galilei-Gruppe' der klassischen Raum-Zeit mit 10 freien Parametern.

1.6 Galilei- und Lorenztransformationen

Die Naturgesetze müssen von einer Art sein, die (Form-)invariant sind unter Transformation zwischen IS

Bsp.: IS \rightarrow IS', dann gilt für Newton:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}'$$

\rightarrow *Relativitätsprinzip!* Insbesondere gilt:

geradlinig-gleichförmige Bewegung in IS mit Koordinaten(t,x,y,z) ist auch eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in einem anderen IS' mit (t',x',y',z').

Bsp: Galilei-Transformaiton : mit \vec{v} rel. zu IS bew. IS' gilt $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$, $t' = t + t_0$

in IS: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}t$

\Rightarrow IS' : $\vec{r}'(t') = \vec{r}_0 + (\vec{u} - \vec{v})t'$

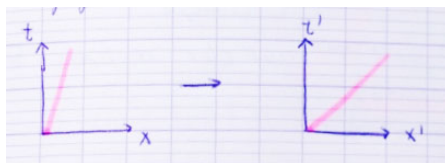


Abbildung 10:

Umkehrung? folgt aus der Forderung (s.o.) dass $t, \vec{r} \rightarrow t', \vec{r}'$ eine Galilei-Trafo?

Frage: 'wie sieht allgemein eine Trafo $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$ aus, die die Forderung (s.o.) erfüllt für $IS \rightarrow IS'$, das sich mit \vec{v} (vorgegeben) relativ zu IS bewegt?

$$\rightarrow \text{lineare Trafo der Raum-Zeit!} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ \cdot & 4 & \times & 4 \\ \cdot & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

\rightarrow bzgl. räumlicher Anteile \vec{r} Vektorcharakter muss erhalten bleiben: $\vec{r}' \sim \vec{r}, \vec{v}$

\rightarrow Ansatz:

$$t' = a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{r}' = c(v)\vec{r} + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + e(v)\vec{v}t$$

mit beliebigen Funktionen $a(v), \dots, e(v)$, die bestimmen weitere Forderungen:

1. für $\vec{r} = \vec{v}t \Rightarrow \vec{r}' = 0 \Rightarrow c + d + e = 0$
2. Relativität (I) Vertausche Rolle $IS \leftrightarrow IS'$ ($\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$)

$$\Rightarrow t = a(v)t' - b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r}')$$

$$\vec{r} = c(v)\vec{r}' + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r}')\vec{v} + e(v)\vec{v}t'$$

ersetze t' und \vec{r}' auf der rechten Seite durch Ansatz

$$\Rightarrow t = a(v)(a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})) - \dots$$

$$\vec{r} = c(v)(c(v)\vec{r} + \dots) + \dots \vec{v} \dots$$

$$\Rightarrow c^2 = 1; a = c + d; a^2 = 1 + ebv^2; e = -a$$

$$\Rightarrow c = 1; e = -a; d = a - 1; b = \frac{1 - a^2}{av^2}$$

Wähle Koordinatensystem so, dass x in Richtung \vec{v} zeigt. $\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$t' = a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x$$

$$x' = a(v)(x - vt); y' = y; z' = z$$

3. Relativitätsprinzip:
 $IS \xrightarrow{v} IS' \xrightarrow{u} IS''$

$$t'' = a(u)t' + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}x' = a(u)(a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x) + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}(a(v)(x - vt))$$

$$x'' = a(u)(x' - ut') = a(u)(a(v)x - u\frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x) - \dots t$$

außerdem muss gelten $IS \xrightarrow{w} IS''$
woraus folgt, dass

$$t'' = a(w)t + (w)x$$

$$x'' = a(w)(x - wt)$$

woraus dann folgt:

$$[a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u))]t + \dots x$$

$$a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u)) = a(w)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(u) - 1}{u^2 a^2(u)} = \frac{a^2(v) - 1}{v^2 a^2(v)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(v) - 1}{v^2 a^2(v)} = \text{const.} = K$$

$$\Rightarrow a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}$$

$$K = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{ist Galilei Trafo}$$

$$K \neq 0? [K] = \frac{1}{\text{Geschwindigkeit}^2} = \frac{1}{c^2} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow t' = a(v)(t - \frac{vx}{c^2})$$

$$x' = a(v)(x - vt)$$

Die Lorentz-Transformation mit $a(v) \rightarrow \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Bedeutung von c ?

Man betrachte die 'Addition' von Geschwindigkeiten: $w = u + v$?

$$\begin{aligned} a(w) &= a(v)a(u)(1 + kuv) \\ 1 - kw^2 &= \frac{(1 - kv^2)(1 - ku^2) + (1 + kuv)^2 - (1 + kuv)^2}{(1 + kuv)^2} \\ &= 1 - k \frac{(u + v)^2}{(1 + kuv)^2} \\ \Rightarrow w &= \frac{u + v}{1 + kuv} \Leftrightarrow \left(\frac{w}{c}\right)^2 \\ &= \frac{\left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2} \\ &= 1 - \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Folgerungen:

- a) für $u = c \Rightarrow w = c$
- b) für $v = c \Rightarrow w = c$
- c) für $u < c; v < c \Rightarrow w < c$
- d) für $u \ll c; v \ll c \Rightarrow w \approx u + v$

c ist Lichtgeschwindigkeit

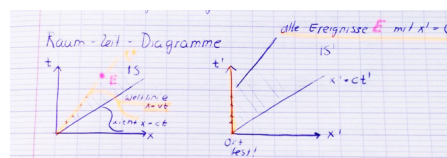


Abbildung 11:

2 Newtonsche Mechanik

→ basiert auf Galilei-Raum-Zeit (gültig für $v \ll c$) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$ 'Fernwirkung' der Kraft
 \Leftrightarrow Widerspruch zur Vorstellung einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wirkungen.

→ relativistische Mechanik folgt in Kap.7

2.1 Newtonsche Bewegungs-Gleichung

zunächst phänomenologisch; Erfahrung: durch Angabe des Anfangsortes $\vec{r}(t_0) = \vec{r}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ festgelegt ist \Rightarrow wir erwarten eine Relation $\ddot{\vec{r}}(t) \sim \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zur Bestimmung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ (Dynamik)

\rightarrow Newton (2. Newton-Gesetz); Impuls $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$, bei konstanter (träger) Masse $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ wobei \vec{F} die Kraft ist, die auf den Körper wirkt.

Beispiel:

1. gglf. Bew.
 $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0)$
2. $\vec{F} = \vec{F}_0$ konstant (Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche)
 $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + 0,5 \frac{\vec{F}_0(t - t_0)^2}{m}$ (Wurfparabel)
3. Federkraft (1Dim)
 $m\ddot{x} = -kx, F(x) = -kx, w^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{v_0}{w} \sin w(t - t_0)$
4. Lorentzkraft geschwindigkeits-abhängig
 $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$
5. Reibungskräfte (phänomenologisch)
 $\vec{F}_R = -\alpha \dot{\vec{r}}; \alpha > 0$ Reibungskoeffizient.
6. Coulombkraft
 $\vec{F} = c q Q \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$

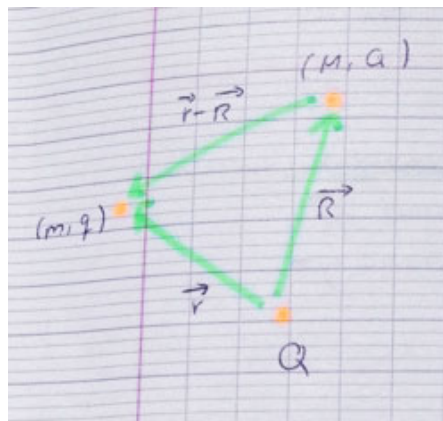


Abbildung 12:

$qQ < 0$: anziehend

$qQ > 0$: abstoßend

c : Konstante, abhängig von der Einheit Ladung

2.2 Arbeit und Energie

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} &= \vec{F}\dot{\vec{r}} \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}\dot{\vec{r}} \\
 &\Rightarrow T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r}(t)
 \end{aligned}$$

Entlang der Kurve L $\vec{r}(t)$ mit $r(t_1) = r_1 \dots$ Wir definieren die am Teilchen geleistete

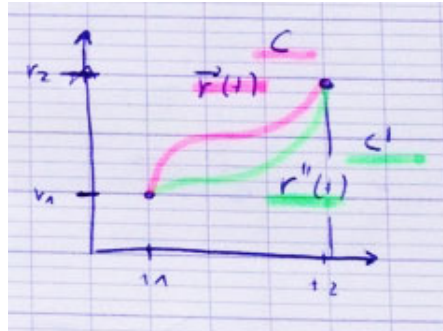


Abbildung 13:

Arbeit entlang L durch $W_e(r_1 \rightarrow r_2) = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \dot{\vec{r}} dt$

Wir nennen ein Kraftfeld \vec{F} *konservativ*, wenn W_e nur von r_1 und r_2 , aber nicht vom Weg $r(t)$ abhängt.

Theorem $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ \Leftrightarrow es existiert ein skalar Potential $U(\vec{r})$ mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$$

, Kraftfeld ist Wirbelfrei.

Für konservative Kraftfelder gilt: $\int_L F(r) dr = -U(r_2) + U(r_1) = W(r_1 \rightarrow r_2)$

$$\Rightarrow T(t_2) + U(r_2) = T(t_1) + U(r_1)$$

wir sehen für konservative Kräfte $F = -\nabla U(r)$ folgt:

Energieerhaltung $E = T + U = \text{const!}$, $5m\dot{r} + U(r(t)) = \text{const!}$

denn $\frac{d}{dt} E = m\dot{r}\ddot{r} + \nabla U(r(t))\dot{r}(t) = \dot{r}(t)(m\ddot{r} + \nabla U) = 0$ (Newton-Gleichung)

2.2.1 Beispiele konservativer Kraftfelder

$$F = -\nabla U$$

1. $F = F_0 \Rightarrow U(r) = -F_0 r$
2. Federkraft $F = -kr \Rightarrow U(r) = 0,5kr^2$ (harmonischer Oszillator)
3. Coulombkraft, $U(r) = cqQ \frac{1}{|r-R|}$

2.2.2 Gegenbeispiel

4. Reibungskraft $F = -\alpha \dot{r}$ konservativ?
 berechne Arbeit entlang einer geschlossenen Bahn: $\oint F dr = -\alpha \oint \dot{r} dr = -\alpha \oint \dot{r}^2 dt \neq 0, > 0$ (außer $\dot{r} = 0$)

2.2.3 Bemerkung

1. $E = T + U$; $T = 0,5m\dot{r}^2$ Kinetische Energie;
 $U = U(r)$ potentielle Energie, nur bis auf additive Konstante festgelegt (definiert das Energie-Nullniveau)

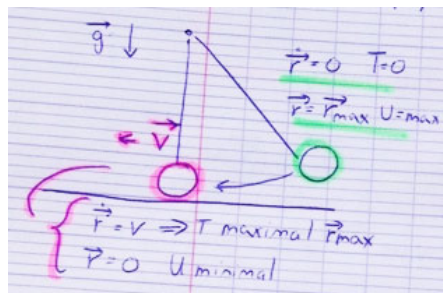


Abbildung 14:

2. $E = \text{const}$ wichtiger Energieerhaltungssatz. (hängt zusammen mit Symmetrien!)

2.3 Systeme mehreren (N) Teilchen

Dynamik: N Punktteilchen mit Ortsvektoren r ; $i = 1, N$ und tragen Massen m ; es gelten Newtons Gleichungen

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t)$$

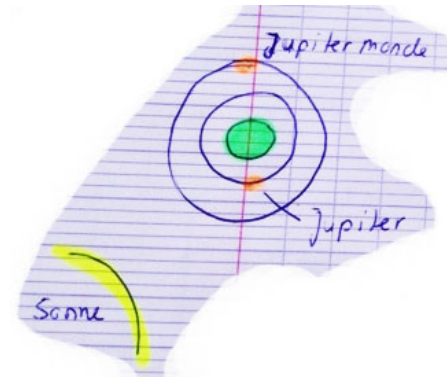


Abbildung 15:

N gekoppelte Diff.-Gl. für die $r_i(t)$; Anfangsbed. $r(0); \dot{r}(0)$ müssen gegeben sein.
Häufig: konservative Kräfte: $F_i = -\nabla_i U(r_1, \dots, r_N)$ es folgt Energieerhaltung (Gesamtenergie).

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2(t) + U(r_1(t), \dots, r_N(t)) = \text{const}$$

$$\nabla_i = \frac{\delta}{\delta r_i}$$

häufig setzt sich die Kraft F_i zusammen aus 'äußeren' Kräften $F_i^{(a)}$ und paarweise auftretenden 'inneren' Kräften F_{ij} zwischen den N Teilchen.

$$F_i = F_i^{(a)}(r_i) + \sum_{j=1; j \neq i}^N F_{ij}(r_i, r_j)$$

konservative Kräfte: $F_i^{(a)}(r_i) = -\nabla_i U^{(a)}(r_1, \dots, r_N)$
und $F_{ij} = -\nabla_i \sum_{j=1; i \neq j}^N V_{ji}(|r_i - r_j|)$ für abstandsabh. Zweiwechselwirkung ($F_{ij} = -F_{ji}$)
es folgt Energieerhaltung in der Form:

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2 + U^{(a)}(r_1, \dots, r_N) + 0,5 \sum_{i,j=1; i \neq j}^N V_{ij}(|r_i - r_j|)$$

kin Energie + äußere Pot. Energie + innere Energie

2.4 N-Teilchenproblem

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(a)}(\vec{r}_i) + \sum_{i=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Error 404 Skizze not found

Abbildung 16: innere und äußere Kräfte

für konservative Kräfte

$$F_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i U_i(\vec{r}_i)$$

$$F_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Gesamtenergieerhaltung: $E = T + U^{(a)} + v^{WW}$

Bemerkungen:

1. *Abgeschlossene Systeme* sind solche ohne äußere Kräfte, also

$$F_i^{(a)} = 0, U^{(a)} = \text{const.}$$

2. *Schwerpunkt* des Systems:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, M = \sum_i m_i$$

Gesamtmasse

3. *Trennung der Energie in Schwerpunkt und Relativteil:*

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i \quad \text{Definition von } \vec{\rho}_i$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \underbrace{\dot{\vec{R}}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{\rho}_i) = M \vec{R}_{CM} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i}_{=0}$$

$$T = \underbrace{T_{CM}}_{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2} + T_{rel}$$

für abgeschlossene Systeme

$$E = E_{CM} + E_{rel}$$

$$= T_{CM} + (T_{rel} + V^{WW})$$

2.5 Impuls und Drehimpuls

Gesamtimpuls:

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}_{CM}$$

Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}_{CM} &= \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} + \underbrace{\sum_{i,j=1; i \neq j}^N \vec{F}_{ji}}_{=0 \text{ (alle Kräfte und ihre Gegenkräfte)}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. für abgeschlossene Systeme gilt Gesamtimpulserhaltung:

$$\vec{P}_{CM}(t) = \vec{P}_{CM}(0) = \text{const.} \\ \text{falls: } \vec{F}_i^{(a)} = 0$$

2. für \vec{R}_{CM} folgt für abgeschlossene Systeme: 'Schwerpunktsatz'

$$\vec{R}_{cm}(t) = \vec{R}_{CM}(t_0) + \frac{\vec{P}_{CM}(t_0)}{M} (t - t_0)$$

Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig (für abgeschlossene Systeme)

3. Beschreibung der Dynamik ausgedehnter Objekte durch Punktteilchen (Schwerpunkt) ist gerechtfertigt

4. $\vec{P}_{CM} = \text{const.}$ sehr wichtig für Stoßprozesse gültig für $\left\{ \begin{array}{ll} \text{elastische Stoßprozesse:} & E_{\text{kin}} \\ \text{inelastischer Stoß:} & \text{ein Teil der Energie} \end{array} \right.$

5. häufig Wahl des Schwerpunktsystems $O \rightarrow \vec{R}_{CM}$ (Ursprung) als Bezugssystem

2.5.1 Drehimpuls

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\text{(hängt von der Wahl des Ursprungs ab)}} ; \vec{p} = m \dot{\vec{r}}$$

zeitliche Änderung:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{p})}_0 + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \underbrace{\vec{M}}_{\text{Drehmoment}}$$

$$\vec{r} \perp \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} \perp$$

für N-Teilchen: Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)$$

Zeitliche Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ij}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)}}_{\text{ueres Drehmoment}} + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)} \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. für geschlossene Systeme ($\vec{M}_i^{(a)} = 0$) gilt *Gesamtdrehimpulserhaltungssatz*:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \text{const.}$$

2. Zerlegung in Schwerpunkt und Relativteil: $\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{\varrho}_i$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \underbrace{\vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{\varrho}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{L}_{rel}}$$

3. diese Erhaltungssätze für abgeschlossene N-Teilchensysteme gelten:

E	Energie	$1 \times$
\vec{P}_{CM}	Gesamtimpuls	$3 \times$
\vec{L}_{ges}	Gesamtdrehimpuls	$3 \times$

$$\vec{R}_{CM}(0) = \vec{R}_{CM}(t) - \frac{\vec{P}t}{M} \quad \text{Schwerpunktsatz} \quad (1)$$

\Rightarrow 10 Erhaltungsgrößen für dynamik eines abgeschlossenen Systems
 \Leftrightarrow verknüpft mit der Homogenität der Zeit ($t \rightarrow t + t_0$), Homogenität des Raumes ($\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$), Isotropie des Raumes ($\vec{r} \rightarrow R\vec{r}$)
 Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &\rightarrow \vec{r} - \vec{v}t \\ t &\rightarrow t \end{aligned}$$

4. für abgeschlossene Systeme gelten die Newtonschen-Gleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad \text{in IS beim Übergang in IS'}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |\vec{r}_i - \vec{r}_j| &= |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j| & \text{mit} & \quad \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{r}_0 - \vec{v}t \\ & & \text{mit} & \quad \vec{r}'_i = R\vec{r}_i \\ & \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} & \text{mit} & \quad t' = t + t_0 \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \vec{r}''}{dt'^2} \end{aligned}$$

\Rightarrow in IS' gelten Newtonsche-Bewegungs Gleichungen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt'^2} &= \vec{F}'_{ij}(|\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|) \\ \vec{F}' &= \vec{F} \end{aligned}$$

\Rightarrow Newtonsche Mechanik eines abgeschlossenen Systems ist invariant unter Galilei-Gruppe

2.6 Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte

Sei $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ IS

\rightarrow gehe über zu beschleunigtem (rotierendem) BS

\rightarrow mit $(O(t), \vec{e}'_1(t), \vec{e}'_2(t), \vec{e}'_3(t))$

Einführung einer zeitabhängigen Rotation:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i(t) &= R(t)\vec{e}_i \\ RR^T &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

in BS' $\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t) \vec{e}'_i(t)$
für Geschwindigkeit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r}'(t)) &= \sum_{i=1}^N \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t) + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t)}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'}} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) \\ \dot{\vec{e}}'_i &= \dot{R}(t) \vec{e}_i = \dot{R} R^T \vec{e}'_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}' &= V_{BS} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) (\dot{R} R^T) \vec{e}'_i \end{aligned}$$

$$\overline{(O, \{\vec{e}_i\})IS} \rightarrow \overline{(O'(t), \{\vec{e}'_i(t)\})BS'}$$

Error 404 Skizze not found

Abbildung 17: Karussell mit zeitabhängiger Drehung

Beispiel Änderung der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{e}'_i(t) &= \left(\frac{d}{dt} R \right) \vec{e}_i = \left(\left(\frac{d}{dt} R \right) R^T \right) \vec{e}'_i = M \vec{e}'_i \\ \text{mit } M(t) &= \left(\frac{d}{dt} R \right) R^T = -M^T(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition von $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$

wir sehen $M\vec{b} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$, Bewegung im rotierenden BS'

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x'_i(t) \vec{e}'_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{dx'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t)}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'} =: \dot{\vec{r}}'} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) (\vec{\Omega} \times \vec{e}'_i(t)) \end{aligned}$$

ODER:

$$\frac{d}{dt} \dots = \dot{\dots} + \vec{\Omega} \times \dots \quad (3)$$

Bedeutung von $\vec{\Omega}(t) \left\{ \begin{array}{l} |\vec{\Omega}| \text{ momentane Winkelgeschwindigkeit} \\ \text{Richtung der momentanen Drehachse} \end{array} \right\}$ der Drehung

Bsp.: Karusell $R(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ Drehachse

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ &= \underbrace{\ddot{\vec{r}}'}_{\ddot{\vec{r}} \dots \text{ Beschleunigung}} + 2 \underbrace{\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\dot{\vec{r}} \dots \text{ Geschwindigkeit}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\vec{r} \dots \text{ Ortsvektor}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

Beschleunigter Bezugspunkt $O'(t)$

3 Section 3 – To be composed

4 Lagrange-Formalismus

4.1 Lagrange I

4.2 Lagrange II

Betrachte folgend ein System mit f Freiheitsgraden.

→ (q_1, \dots, q_f) – „Generalisierte real.(?) Koordinaten“

→ $q_L, L = 1, \dots, f$ generalisierte Koordinate (?)

→ $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ „Verallgemeinerte Geschwindigkeiten“

→ Lagrange-Funktion: $L := T - U^1$

$$\rightarrow L = L(\underbrace{q_1, \dots, q_f}_f, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f}_f, t) = L(q_L, \dot{q}_L, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

→ Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathcal{L}}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\mathcal{L}}} = 0 \quad \mathcal{L} \in \{1, \dots, f\}$$

→ Führt zu f gekoppelten DGLs 2. Ordnung

Beispiele:

¹Anm.d.Skr.: im Englischen Wird die Potentielle Energie häufig mit V bezeichnet, weswegen man oft (vor Allem auf Wikipedia) auf $L = T - V$ trifft.

Teilchen in 3D unter Einfluss eines Ortsabhängigen Potentials

→ Keine Zwangsbedingungen $\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}, U = U(\vec{r})$

→ $f = 3$

→ Wir wählen *kartesische Koordinaten*: $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$

→ $\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), U = U(x, y, z)$ mit $\vec{r} = \vec{r}(q) = (x, y, z)^T$

→ \Rightarrow für $\mathcal{L} \in \{1, 2, 3\}$ $L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$

→ Euler-Lagrange-Gleichungen: Sei $\mathcal{L} = 1$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} m\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}\end{aligned}$$

→ Entsprechender Ansatz für y, z führt insgesamt zu $m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U$

→ Wie erwartet: Newton-Ansatz bestätigt!

Mit Zwangsbedingungen: Mehrere Beispiele

1. Rolle

Error 404 Skizze not found

Abbildung 18: skizze

→ Hier: $f = 1$, da (1D+1D)-Bewegung gekoppelt

→ Wähle Höhe $q_1 = h$ (alternativ: Winkel φ) als generalisierte Koordinate

→ $L = L(h, \dot{h}) = T - U = T_{\text{Rolle}} + T_{\text{Masse}} - mgh$

$$\begin{aligned}T_{\text{Masse}} &= \frac{1}{2}m\dot{h}^2 \\ T_{\text{Rolle}} &= \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2, & \varphi = \varphi(h) = 2\pi\frac{h}{2\pi R} = \frac{h}{R}; \quad \dot{\varphi} &= \frac{\dot{h}}{R} \\ \Rightarrow L(h, \dot{h}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2R^2}\theta + m\right)\dot{h}^2 + mgh\end{aligned}$$

Error 404 Skizze not found

Abbildung 19: skizze

2. Gedöns

$f = 2$. z.B. $(q_1, q_2) = (x, y)$. Besser: $(q_1, q_2) = (\rho, \varphi)$ mit

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad \Rightarrow L = L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$$

3. Masse mit Loch auf Stange

Error 404 Skizze not found

Abbildung 20: skizze

Hier $f = 2$ z.B. $(q_1, q_2) = (x, \varphi)$

Zur Erinnerung : In Lagrange I

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{Z}_1$$

$$2 = f = 3n - k = 6 - 4$$

($f = 6$ wenn nicht gekoppelt).

\Rightarrow 4 Zwangsbedingungen:

$$g_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = z_1 = 0$$

$$g_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = y_1 = 0$$

$$g_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = y_2 = 0$$

$$g_4(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}_{\text{Abstand}} - l^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{z}}_1 = \sum_{m=1}^4 \lambda_m(t) \vec{\nabla}_i g_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad i = 1, 2$$

Lagrange II $f = 2$; $(q_1, q_2) = (x, \varphi)$

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x, \varphi) = r_1(x) &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{für } m_1 \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2(x, \varphi) &= \begin{pmatrix} x + l \sin \varphi \\ 0 \\ -l \cos \varphi \end{pmatrix} && \text{für Pendelmasse}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 \vec{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{r}_2^2 && = T(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \\ l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} \\ T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 ((\dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) && = T(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \\ U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= mgz_2 = -mgl \cos \varphi = U(x, \varphi) && L = L(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi})\end{aligned}$$

Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Hier:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi\end{aligned}$$

entsprechend

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \ddot{\varphi} = 0$$

mit $\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{l}{g}$

\Rightarrow für kleinere Auslenkungen $\varphi \ll 1$: $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$

Bemerkungen i) Lagrange II sehr nützlich. Beweis: klar.

ii) Euler-Lagrange-Gleichungen invariant unter Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(q_1, \dots, q_p, t) &\leftrightarrow \vec{r}_i(Q_1, \dots, Q_p, t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\beta} - \frac{\partial L'}{\partial Q_\beta}\end{aligned}$$

Wobei $L(q, \dot{q}, t) f L'(Q, \dot{Q}, t) = L'(Q_\beta(q_1, \dots, q_p), \dot{Q}_\beta(q_1, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p), t)$

Transformation $\{q_L\} \rightarrow \{Q_\beta\}; Q_\beta = Q_\beta(q_1, \dots, q_p), \beta = 1, \dots, f$

Im Gegensatz zu Newton! Es gilt $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ bei Übergang zu Kugelkoordinaten $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ es gilt *nicht* $m\ddot{\varphi} \neq -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ Widersp.

- iii) Bisher $\vec{F}_i = \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ analog für verallgemeinerte Kräfte \vec{K}_i , für die gilt:

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} \tilde{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) + \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}_i} \tilde{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

es folgt wieder $m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_L} = 0, \quad L = T - \tilde{U}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$

Beispiel Loretzkraft:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= e \underbrace{\phi(\mathbf{r}, t)}_{\text{Skalares Pot.}} - e \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \cdot \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}_{\text{Vektorpot.}} \\ \Rightarrow \mathbf{K} &= e \left(E(\mathbf{r}, t) + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens (e) im elektromagnetischen Feld lautet:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e \Phi(\mathbf{r}, t) + e \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

- iv) Man nennt $P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ den „generalisierten Impuls“ ($l = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$)
- v) Eine generalisierte Koordinate q_α heißt *zyklisch*, falls die Lagrange-Funktion unabhängig von q_α ist: $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

Beispiel $q_1 = x$ (im vierten Beispiel)

Es gilt $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \Rightarrow$ Erhaltungssatz ($P_\alpha = \text{const.}$) (Siehe Noether-Theorem)

Problem mit Zylindersymmetrie: $V(\mathbf{r}) = V(\rho, \varphi, z) \stackrel{\text{Sym}}{=} V(\rho, z)$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & L &= \frac{1}{2} m (x^2 + y^2 + z^2) - V(\rho, z) \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

$$L(\rho, (\phi), z, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, z)$$

,
 φ zyklisch: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Generalisierter Impuls $\underbrace{\text{const.} = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}}_{\text{Erhaltungsgr.}} = (\mathbf{L})_3$ (z-Komponente des Drehimpulses)

vi) Diskussion von Kreiselbewegung „Schwerer Kreisel“:

$$\Omega \rightarrow \Omega \left(\underbrace{\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}}_{\substack{\text{Eulerwinkel} \\ E_{pot} \text{ Kreisel}}} \right)$$

$$\Rightarrow L = L(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \Omega^\top \underline{G} \Omega - U(\theta); \quad \underbrace{U(\theta) = m g a \cos \theta}_{\text{Eulerwinkel}}$$

4.3 Wirkung und Hamiltonsches Prinzip

Beispiel Vorlesung, Studenten im Hörsaal. Student A soll Professor B ein Glas Wasser bringen, und dies schnellstmöglich.

Error 404 Skizze not found

Abbildung 21:

Frage Was ist die *schnellste* Verbindung $A \rightarrow B$?

Zeit

$$T_{A \rightarrow B} = T(x) = T_1 + T_2 = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}$$

Länge

$$l_1(x) = \sqrt{x^2 + (a-d)^2} \quad l_2(x) = \sqrt{(b-x)^2 + d^2}$$

$$l'_1(x) = \frac{x}{l_1(x)} \quad l'_2(x) = \frac{b-x}{l_2(x)}$$

Error 404 Skizze not found

Abbildung 22:

Aus $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = 0$ folgt:

$$T'(x) = \frac{v_2 l_1'(x) + v_1 l_2'(x)}{v_1 v_2}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow v_2 \frac{x}{l_1(x)} = v_1 \frac{b-x}{l_2(x)} = 0$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}} = \frac{n_2}{n_1} \left(v_i = \frac{c}{n_i} \right) \text{ Brechungsgesetz}$$

Ähnliche Fragen der Mechanik:

Frage Welche Kurve $z(t)$ führt zur schnellsten Dynamik von $A \rightarrow B$?

Error 404 Skizze not found

Abbildung 23:

Vorgehensweise wie zuvor: Berechne die Laufzeit $T = T[z] - z(x)$ ist *Funktion*

Error 404 Skizze not found

Abbildung 24:

→ Suche *Minimum* des *Funktional*s $T[z]$ ($T(z(x))$) im Raum der Kurven $z(x)$.

Bei Diskretisierung $z_i = z(x_i)$: $T[z] \rightarrow T(z_1, \dots, z_n)$ gewöhnliche Funktion.

Bestimme jene $\{z_i \mid i \in \{1, \dots, N\}\}$, für die

$$dF = \sum_i \frac{\partial T}{\partial z_i} dz_i = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial z_i} = 0$$

($i \in \{1, \dots, N\}$)

Hier: Funktional $T[z]$ mit $z(x)$ Funktion, bilde $\sum_i \rightarrow \int dx$, $\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial z_i} \rightarrow \int dx \frac{\delta T}{\delta z(x)} \delta z(x)$

Sodass das Minimum derer $0 \stackrel{!}{=} \delta T = \int dx \left(\frac{\delta T}{\delta z(x)} \delta z(x) \right) \Leftrightarrow$

5 kleine Schwingungen

→ Resonanzphänomene:

Resonanz: bei einer bestimmten Frequenz schwingt ein gekoppeltes Vielteilchensystem besonders stark. *Beispiele:*

1. mechanische Konstruktionen (Fahrzeugbau) sollten keine Resonanzen aufweisen (→ Hubschrauber-Boden-Resonanz²)
2. Brücke
3. Wolf (Streichinstrumente)

Problem: Es gibt kollektive Schwingungen einer Frequenz bei Kopplung einzelner schwingungsfähiger Freiheitsgrade

→ 'Eigenfrequenzen' des gekoppelten Systems

→ Eigenmoden –

Error 404 Skizze not found

Abbildung 25: Schwingungen gleich und gegenphasig

5.1 Lineare Differenzialgleichungen (2.Ordnung)

5.1.1 Beispiel

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad (4)$$

linear

x tritt nur linear auf

2.Ordnung

$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x$ zweite Ableitung

homogen

$$f(t) = 0$$

inhomogen

$$f(t) \neq 0$$

²<https://www.youtube.com/watch?v=bs2rNBj6D3A>

wichtig

für lineare, homogene Differentialgleichungen gilt ein Superpositionsprinzip mit $x_1(t), x_2(t)$ auch $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

6 Hamiltonsche Mechanik

$$q(t) \rightarrow (q(t), p(t)) \dot{q}$$

6.1 Poisson-Klammer

→ Zwei Phasenraumfunktionen $f(q, p), g(q_\alpha, p_\alpha)$ wird eine neue Phasenraumfunktion $\{f, g\}(q_\alpha, p_\alpha) := \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)$ zugeordnet

→ Diese hat zuvorkommende Eigenschaften:

- Zeitabhängigkeit: $A(q, p, t)$ entlang einer Trajektorie bzw. Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung $A(q(t), p(t), t)$

$$\frac{d}{dt} A = \{A, H\} + \frac{\partial}{\partial t} A$$

- Insbesondere: $A(q, p)$ Erhaltungsgröße $\Rightarrow \{A, H\} = 0$. Sehr praktisch, um zu prüfen, ob etwas eine Erhaltungsgröße ist.
- $(H(q, p))$ Erhaltungsgröße, da $\forall f : \{f, f\} = 0$

→ Eigenschaften der Poisson-Klammer:

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$
3. $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$
4. $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ Bemerkung.: Ist f und g Erhaltungsgröße $\Rightarrow \{f, g\}$ Erhaltungsgröße
5. Elementare Poisson-Klammern: $\{q, p\} = 1, \{q, q\} = \{p, p\} = 0$.
6. Anwendung: $\{q^2, p\} q = q\{q, p\} + \{q, p\} q = 2q$

6.2 Kanonische Transformationen

→ Bislang (Lagrange): $\{q_\alpha\} \rightarrow \{Q_\alpha(q_1, \dots, q_f, t)\}$ Koordinatentransformationen

→ Jetzt (Hamilton): $\{q_\alpha, p_\alpha\} \rightarrow \{Q_\alpha(q, p, t), P_\alpha(q, p, t)\}$ Phasenraumtransformationen

→ Falls $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Rightarrow \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}$.

Ein solches K existiert \Leftrightarrow Transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ Kanonisch

Error 404 Skizze not found

Abbildung 26: skizze

→ Betrachte Phasenraumvolumina:

$$F_S = \int dQ \int dP = \int dq \int dp \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \end{array} \right|$$

→ Phasenraumvolumen bleibt erhalten: $F_R = F_S \Leftrightarrow |\cdot| = 1 = \dots = \{Q, P\}$

→ Definition: Eine Phasenraumtransformation $T : (q_\alpha, p_\alpha \rightarrow (Q_\alpha(q, p, t), P_\alpha(q, p, t))$ heißt *kanonisch* \Leftrightarrow das Phasenraumvolumen bleibt erhalten ($\Leftrightarrow V_R = V_S$).

→ Es gilt: – kanonisch $\Leftrightarrow \{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \left(f - 1 : \{Q, P\}_{(q,p)} = 1 \right) \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0$
 $\{P_\alpha, P_\beta\} = 0$

→ Alles dreis: für $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, f \rightarrow$ (Hier kommt irgendwas hin, keine Ahnung was)

→ Bemerkung zur Poisson-Klammer: es gilt auch $\{Q, P\}_{(Q,P)} = 1$; dahinter steckt die *Invarianz der Poisson-Klammer* unter kanonischen Transformationen

$$T : d\{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)} \quad (f(q, p) \rightarrow f(q(Q, P), p(Q, P)))$$

6.3 (Form-)Invarianz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unter kanonischen Transformationen

→ Ausgangspunkt: $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_\alpha}$; $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

→ Betrachte die kanonische Transformation

$$T : (q, p) \mapsto (Q, P) = (Q_\alpha(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f), P_\alpha(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f))$$

→ Für Zeitabhängigkeit der (Q_α, P_α) gilt

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\alpha &= \{Q_\alpha, H\}_{(q,p)} \stackrel{\text{kanT}}{=} \{Q_\alpha, H\}_{(Q,P)} \\ &= \frac{\partial Q_\alpha}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\alpha} \frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial P_\alpha} \\ &= \frac{\partial K(Q, P)}{\partial P_\alpha} \end{aligned}$$

→ Mit $K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$ ist genauso:

$$\dot{P}_\alpha = \{P_\alpha, H\}_{(q,p)} = \{P_\alpha, H\}_{(Q,P)} = -\frac{\partial K(Q, P)}{\partial Q_\alpha}$$

→ Wie erwartet und erwünscht: Die klassischen Bewegungsgleichungen greifen!

6.4 Erzeugende von kanonischen Transformationen

→ Ausgangspunkt: Hamiltonsches Prinzip $\delta S \stackrel{!}{=} 0$

$$\rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt \{ \dot{q}p - H(q, p) \} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{Q}P - K(Q, P) \right)$$

$$\rightarrow \text{Linke Seite } pdq - Hdt = \underbrace{PdQ - K(Q, P)dt}_{\text{Rechte Seite}} + \underbrace{dF}_{\text{Freiheit}}$$

→ Bei Variation liefern Beiträge des Randes keinen Beitrag!

$$\rightarrow \text{Hier ist } F = F(q, p, \underbrace{Q}_{Q(q,p), P(q,p)}, P, t) \stackrel{?}{=} F(q, Q, t)$$

→ Fasse $F = F_1(q, Q, t)$ als Funktion der alten und neuen Koordinaten auf:

$$\begin{aligned} dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \\ \Rightarrow pdq - Fdt &= PdQ - Kdt + \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

→ Jede Funktion $F_1(q, Q, t)$ erzeugt durch (*) (TODO label) eine kanonische Transformation.

→ Entsprechend lassen sich kanonische Transformationen erzeugen durch Erzeugende vom Typ

$$\begin{aligned} F_2 = F_2(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_2}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ F_3 = F_3(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_3}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_3}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ F_4 = F_4(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_4}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}$$