

# Theoretische Mechanik

Till Hanke

Letzte Aktualisierung: 1. Juli 2015

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Raum und Zeit</b>	<b>2</b>
1.1	Raum . . . . .	2
1.2	Koordinatensysteme . . . . .	2
1.3	Zeit . . . . .	4
1.3.1	Ereignis . . . . .	4
1.4	Kinematik . . . . .	5
1.5	Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme . . . . .	7
1.5.1	Inertialsysteme . . . . .	8
1.6	Galilei- und Lorentztransformationen . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Newtonsche Mechanik</b>	<b>12</b>
2.1	Newtonsche Bewegungs-Gleichung . . . . .	13
2.2	Arbeit und Energie . . . . .	14
2.2.1	Beispiele konservativer Kraftfelder . . . . .	14
2.2.2	Gegenbeispiel . . . . .	15
2.2.3	Bemerkung . . . . .	15
2.3	Systeme mehreren (N) Teilchen . . . . .	15
2.4	N-Teilchenproblem . . . . .	16
2.5	Impuls und Drehimpuls . . . . .	18
2.5.1	Drehimpuls . . . . .	18
2.6	Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte . . . . .	20
<b>3</b>	<b>kleine Schwingungen</b>	<b>22</b>
3.1	Lineare Differenzialgleichungen (2.Ordnung) . . . . .	23
3.1.1	Beispiel . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Sektion 4</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Sektion 5</b>	<b>23</b>

<b>6</b>	<b>Hamiltonsche Mechanik</b>	<b>23</b>
6.1	Poisson-Klammer . . . . .	23
6.2	Kanonische Transformationen . . . . .	24
6.3	(Form-)Invarianz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unter kanonischen Transformationen . . . . .	24
6.4	Erzeugend von kanonischen Transformationen . . . . .	25

# 1 Raum und Zeit

## 1.1 Raum

Die Mechanik spielt sich im dreidimensionalen Raum ab. Affiner Raum  $\mathbb{E}^3$ : Menge aller Punkte im Raum. Ein Punkt  $P \in \mathbb{E}^3$  wird durch Angabe eines Ortsvektors  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  (3D-Vektorraum) relativ zu einem Ursprung  $O \in \mathbb{E}^3$  festgelegt:  $\vec{OP} = \vec{P}$ .



Abbildung 1:

Ein Skalarprodukt  $\vec{r} \cdot \vec{r}' \in \mathbb{R}^3$  liefert Längen  $\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$   
und Abstände  $d(P, P') = |\vec{a}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r} - \vec{r}'}$   
'Euklidischer' Raum  $\mathbb{E}^3$ : affine, 3D Räume mit  $d(P, P')$

### Bemerkung

- Die Wahl von O ist beliebig; eine andere Wahl O' mag zweckmäßiger sein, „ändert nichts an der Physik“. Insbesondere gilt:  $d_O(P, P') = d_{O'}(P, P')$
- Übergang  $O \rightarrow O'$ : Wechsel des Bezugssystems

## 1.2 Koordinatensysteme

Für  $P \in \mathbb{E}^3$  muss angegeben werden: Ursprung O und Koordinaten  $(x, y, z)$  bzgl. einer kartesischen OB  $(e_1, e_2, e_3)$  – Da OB:  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$  sowie  $|e_i| = 1$

Für den Punkt  $P$  folgt dann:

$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \sum_i^3 x_i \vec{e}_i$$

Dem Punkt  $P$  ordnen wir den Spaltenvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , bezogen auf  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , zu.

### Bemerkungen

1. Die Wahl von  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ist beliebig.  
Es gilt:  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$   
 $\vec{e}'_k = \sum_i R_{ki} \vec{e}_i$  mit einer orthogonalen Transformation  $R \in O(3)$  Drehungsmatrix  $R^{-1} = R^T$ ;  $(\det R = 1)$
2. Transformation der Koordinaten bezogen auf  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

### Aktive Transformation

→ die Rel.  $GL(n)$  definiert bzgl. eines festen Koordinatensystems  $(O, e, e, e)$  eine aktive Drehung  $R$  des Vektors  $\vec{r} = \sum_k x_k \vec{e}_k \rightarrow \vec{r}' = \sum_k x'_k \vec{e}_k = R\vec{r}$

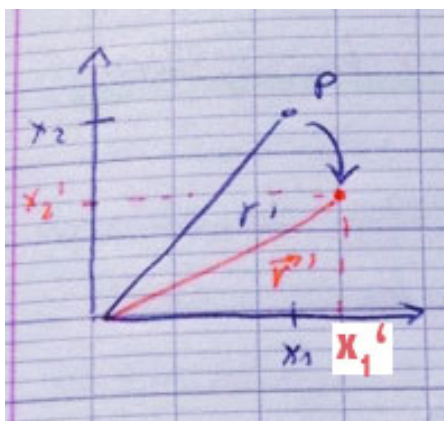


Abbildung 2:

### Achtung:

Für die Basisvektoren aus Bemerkung 2 gilt:  $\vec{e}'_k = (R^{-1})\vec{e}_k$  (siehe Vorübung).

**Transformation** Die Trafo  $GL(n)$  definiert allgemein das Transformationsverhalten eines Vektors (Tensor 1.Stufe)

Beispiele:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow v'_k = \sum_i R_{ki} v_i$ ; Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc.

Bedeutung: Physikalische Grundgleichungen müssen das Trafo Verhalten respektieren

Bsp:  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ . In  $(O, e, e, e)$ :  $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow$  in  $(O, e', e', e')$ :  $m\ddot{x}'_i = F'_i$

**Krummliniges Koordinatensystem** in dem  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), i \in \{1, 2, 3\}$  mag sinnvoll sein.

Beispiele: Zylinder-  $(r, \varphi, z)$  oder Kugelkoordinaten  $(r, \Theta, \varphi)$

**Achtung:**  $\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_i(q_1, q_2, q_3)$

## 1.3 Zeit

### 1.3.1 Ereignis

$E$  ist ein Punkt der Raum-Zeit mit Koordinaten  $(t, x, y, z)$  bezogen auf  $(O, e, e, e)$

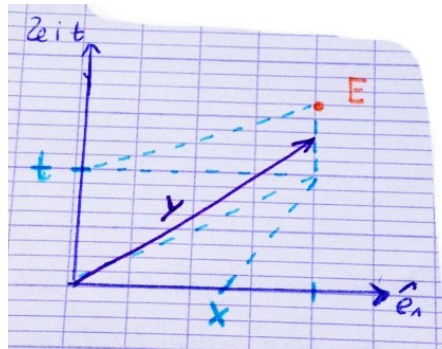


Abbildung 3:

**Ort** räumliche Koordinaten  $(x, y, z)$  werden abgelesen durch Maßstäbe.

**Zeit** zeitliche Koordinate  $t$  (Koordinatenzeit): abgelesen von einer Uhr

- Festlegung der Zeit  $t$  eines Ereignisses durch gleichzeitiges betrachten von E und der Uhr
- Nur lokal möglich
- Wir denken uns den gesamten Raum ausgestattet mit Uhren, die alle synchronisiert sind.

Die Koordinatenzeit  $t$  des Ereignisses E mit  $(t, x, y, z)$  wird von der Uhr mit räumlichen Koordinaten  $(x, y, z)$  abgelesen!

### Bemerkung

1. Die absolute Uhrzeit  $t$  ist beliebig, eine andere Wahl  $t' = t + t_0$  mag zweckmäßiger sein. „Ändert nichts an der Physik“

- Uhrensynchronisation kann durch Lichtpulse realisiert werden („Einstein-Synchronisation“), etwa vom Mittelpunkt zwischen zwei Uhren.  
es zeigt sich: Äquivalent dazu (sehr langsamer) Uhrentransport
- Vorsicht ist geboten beim Vergleich von Uhren in relativ zueinander bewegten Bezugssystemen

## 1.4 Kinematik

Hier betrachtet: Kinematik der klassischen Mechanik

Kinematik ist die „Beschreibung der Bewegung“ – zunächst ohne auf Ursachen einzugehen.

**Bahnkurve**  $\vec{r}(t)$

**Ortsvektor**

**Geschwindigkeit**  $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$   
 $\vec{v}(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{T}(t)$  mit  $|\vec{T}| = 1$ ;  $v(t) = |\vec{v}(t)|$

**Beschleunigung**  $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \dot{v}\vec{T} + v(t)\dot{\vec{T}}(t)$

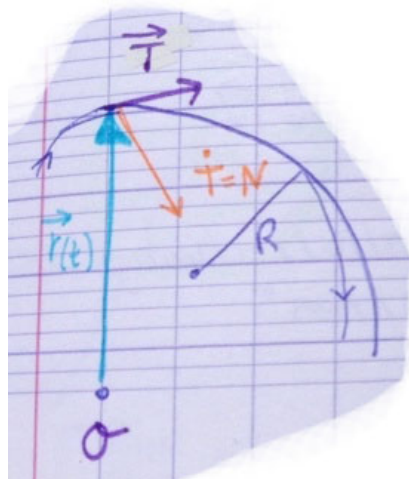


Abbildung 4:

$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|}$  steht senkrecht auf  $\vec{T}$  und  $|\vec{N}| = 1$  („Normalenvektor“)

$(\vec{T}, \vec{N})$  definieren „Schmiegeebene“, in der lokal die Bahnkurve durch einen Kreis mit Krümmungsradius  $R = \frac{v}{|\dot{\vec{T}}|}$  beschrieben werden kann (siehe Übung).

Es folgt  $\vec{a} = \dot{v}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$  als Summe von zwei orthogonalen Beiträgen – wobei

→ Der erste: Eine *Tangentialbeschleunigung* und  
 → Der zweite: Eine *Normal- oder Zentripetalbeschleunigung*  
 ist.

### Beispiel

1. Geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad (\dot{v} = 0, R = \infty)$$

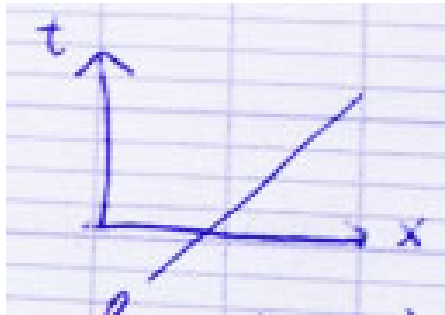


Abbildung 5:

2. Geradlinige Bewegung (allgemein)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + l(t)\vec{T}_0, \quad \vec{v} = \dot{l}\vec{T}_0 \Rightarrow v = \dot{l}, \quad \vec{T} = \vec{T}_0 \quad (\dot{v} = \ddot{l}; R = \infty)$$

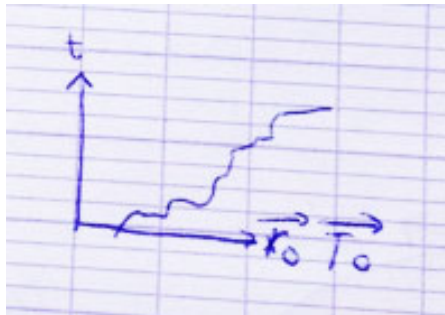


Abbildung 6:

### 3. Gleichförmige Kreisbewegung

$$v = \frac{2\pi R}{\tau} = \text{const.}$$

$$\dot{v} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N} = 4\pi^2 \frac{R}{\tau^2} \vec{N}$$

Mit  $\tau$  Umlaufzeit

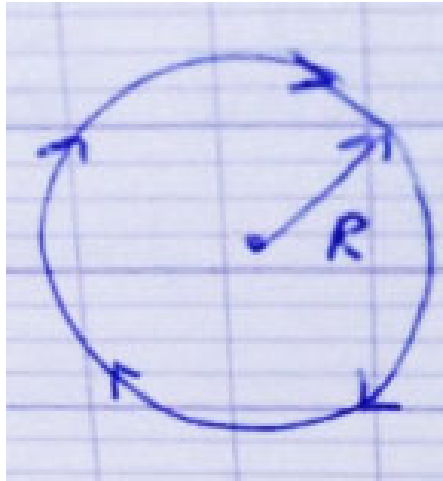


Abbildung 7:

Anwendung auf Kepler-Bahnen für Planeten  $\tau^2 \sim R^3$  (3.Keplergesetz):  
 $\Rightarrow \vec{a} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$  ( $\vec{F} = m\vec{a}$ )  $\Rightarrow$  Planetenbewegung  $\vec{F} \sim \frac{1}{R^2} \vec{N}$

## 1.5 Bewegte Bezugssysteme und Inertialsysteme

→ Bezeichne RS das Ruhesystem

→ Wie wählen wir  $(O, e_1, e_2, e_3)$  geeignet?  $\Rightarrow$  Nahe liegend: *Laborsystem* (Labortisch ruht im LS)

→ *Beispiel* elastischer Stoß im LS ( $m$  ruht)

Wechsle ins Ruhesystem der Masse  $M$

Die Betrachtung wird eindeutig und trivial bei  $M \gg m$

Übergang von System Labortisch ( $O, e, e, e$ , Uhren) in RS der großen Masse  $M$  ( $O', e', e', e'$ , Uhren') gilt:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$t' = t$$

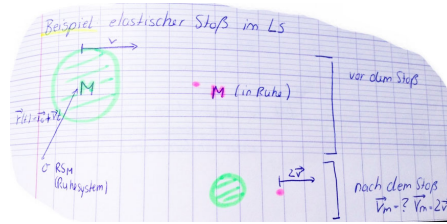


Abbildung 8:

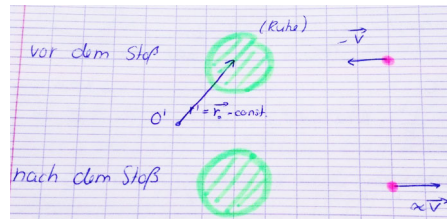


Abbildung 9:

Die **Galilei-Transformation** beschreibt Transformationsgesetz von BS zu BS', das sich mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zu BS bewegt. Zur Beschreibung sind  $BS = RS_m$  und  $BS' = RS_M$  völlig gleichwertig (hier  $BS'$  transparenter).

### Bemerkungen

1. Zustand „in Ruhe“ hat keine Absolute Bedeutung sondern hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. (Bewegung ist *relativ* zu sehen)
2. Frage vor 400 Jahren: Ruht die Erde und die Sonne bewegt sich?  
Galilei: Frage ist bedeutungslos, nicht entscheidbar  
⇒ Galilei-Transformationen
3. Relativität kommt zum Ausdruck im 1. Newtonschen Gesetz: („Trägheitssatz“)  
Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig-gleichförmigen Bewegung sofern er nicht durch Kräfte zur Änderung gezwungen wird.

#### 1.5.1 Inertialsysteme

(IS) sind BS, die durch die Gültigkeit des 1. Newtonschen Gesetzes ausgezeichnet sind. Ausgehend von einem IS findet man weitere IS' durch geradlinig-gleichförmige Bewegung des IS' relativ zu IS. (häufig IS='ruhend bzgl. des Fixsternhimmels'; in der Praxis  $LS \approx IS$  (gute Näherung)).



in einem relativ zu IS beschleunigten BS treten Scheinkräfte auf, die nicht auf fundamentalen Wechselwirkungen (Coulombkraft, etc) beruhen.

⇒ physikalische Grundgesetze werden bzgl. eines IS formuliert, dabei sind alle IS völlig gleichwertig; IS→IS' durch:

1. „Boost“ mit Richtung  $\vec{v}$   $t' = t - \frac{\vec{v}\vec{r}}{c^2}$
2. Gleichförmig-geradlinige Bewegung:  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$  (3 Parameter)  
(Galilei-Relativität)
3. Räumliche Verschiebung:  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$  (3 Parameter)  
(Homogenität des Raumes)
4. Räumliche Drehung:  $\vec{r}' = R\vec{r}$  (3 Parameter)  
(Isotropie des Raumes)
5. Zeitgleiche Verschiebung:  $t' = t + t_0$  (1 Parameter)  
(Homogenität der Zeit)

Die Kombination all dieser Transformationen definieren die 'Galilei-Gruppe' der klassischen Raum-Zeit mit 10 freien Parametern.

## 1.6 Galilei- und Lorentztransformationen

Die Naturgesetze müssen von einer Art sein, die (Form-)invariant sind unter Transformation zwischen IS

Bsp.: IS→IS', dann gilt für Newton:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}'$$

→ *Relativitätsprinzip!* Insbesondere gilt:

geradlinig-gleichförmige Bewegung in IS mit Koordinaten(t,x,y,z) ist auch eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in einem anderen IS' mit (t',x',y',z').

**Bsp: Galilei-Transformaiton** : mit  $\vec{v}$  rel. zu IS bew. IS' gilt  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ ,  $t' = t + t_0$

in IS:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}t$

⇒ IS' :  $\vec{r}'(t') = \vec{r}_0 + (\vec{u} - \vec{v})t'$

**Umkehrung?** folgt aus der Forderung (s.o.) dass  $t, \vec{r} \rightarrow t', \vec{r}'$  eine Galilei-Trafo?

Frage: 'wie sieht allgemein eine Trafo  $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$  aus, die die Forderung (s.o.) erfüllt für IS→IS', das sich mit  $\vec{v}$  (vorgegeben) relativ zu IS bewegt?

→ lineare Trafo der Raum-Zeit!

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ \cdot & 4 & \times & 4 \\ \cdot & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

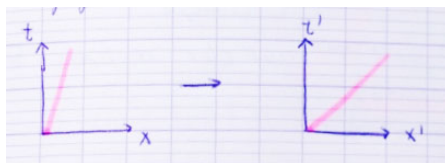


Abbildung 10:

→ bzgl. räumlicher Anteile  $\vec{r}$  Vektorcharakter muss erhalten bleiben:  $\vec{r}' \sim \vec{r}, \vec{v}$

→ Ansatz:

$$t' = a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{r}' = c(v)\vec{r} + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + e(v)\vec{v}t$$

mit beliebigen Funktionen  $a(v), \dots, e(v)$ , die bestimmen weitere Forderungen:

1. für  $\vec{r} = \vec{v}t \Rightarrow \vec{r}' = 0 \Rightarrow c + d + e = 0$
2. Relativität (I) Vertausche Rolle IS  $\leftrightarrow$  IS' ( $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ )

$$\Rightarrow t = a(v)t' - b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r}')$$

$$\vec{r} = c(v)\vec{r}' + \frac{d(v)}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r}')\vec{v} + e(v)\vec{v}t'$$

ersetze  $t'$  und  $\vec{r}'$  auf der rechten Seite durch Ansatz

$$\Rightarrow t = a(v)(a(v)t + b(v)(\vec{v} \cdot \vec{r})) - \dots$$

$$\vec{r} = c(v)(c(v)\vec{r} + \dots) + \dots \vec{v} \dots$$

$$\Rightarrow c^2 = 1; a = c + d; a^2 = 1 + ebv^2; e = -a$$

$$\Rightarrow c = 1; e = -a; d = a - 1; b = \frac{1 - a^2}{av^2}$$

Wähle Koordinatensystem so, dass  $x$  in Richtung  $\vec{v}$  zeigt.  $\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$t' = a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x$$

$$x' = a(v)(x - vt); y' = y; z' = z$$

3. Relativitätsprinzip:

$IS \rightarrow^v IS' \rightarrow^u IS''$

$$t'' = a(u)t' + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}x' = a(u)(a(v)t + \frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x) + \frac{1 - a^2(u)}{a(u)u}(a(v)(x - vt))$$

$$x'' = a(u)(x' - ut') = a(u)(a(v)x - u\frac{1 - a^2(v)}{a(v)v}x) + \dots t$$

außerdem muss gelten  $IS \rightarrow^w IS''$

woraus folgt, dass

$$t'' = a(w)t + (w)x$$

$$x'' = a(w)(x - wt)$$

woraus dann folgt:

$$[a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u))]t + \dots x$$

$$a(u)a(v) - \frac{va(v)}{ua(u)}(1 - a^2(u)) = a(w)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(u) - 1}{u^2 a^2(u)} = \frac{a^2(v) - 1}{v^2 a^2(v)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(v) - 1}{v^2 a^2(v)} = \text{const.} = K$$

$$\Rightarrow a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}$$

$$k = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{ist Galilei Trafo}$$

$$k \neq 0? [k] = \frac{1}{\text{Geschwindigkeit}^2} = \frac{1}{c^2} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow t' = a(v)(t - \frac{vx}{c^2})$$

$$x' = a(v)(x - vt)$$

Die Lorentz-Transformation mit  $a(v) \rightarrow \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Bedeutung von  $c$ ?

Man betrachte die 'Addition' von Geschwindigkeiten:  $w = u + v$ ?

$$\begin{aligned}
 a(w) &= a(v)a(u)(1 + kuv) \\
 1 - kw^2 &= \frac{(1 - kv^2)(1 - ku^2) + (1 + kuv)^2 - (1 + kuv)^2}{(1 + kuv)^2} \\
 &= 1 - k \frac{(u + v)^2}{(1 + kuv)^2} \\
 \Rightarrow w &= \frac{u + v}{1 + kuv} \Leftrightarrow \left(\frac{w}{c}\right)^2 \\
 &= \frac{\left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2} \\
 &= 1 - \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Folgerungen:

- a) für  $u = c \Rightarrow w = c$
- b) für  $v = c \Rightarrow w = c$
- c) für  $u < c; v < c \Rightarrow w < c$
- d) für  $u \ll c; v \ll c \Rightarrow w \approx u + v$

$c$  ist Lichtgeschwindigkeit

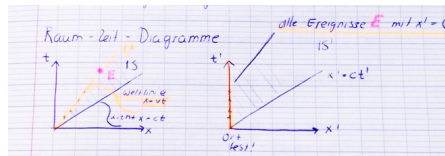


Abbildung 11:

## 2 Newtonsche Mechanik

→ basiert auf Galilei-Raum-Zeit (gültig für  $v \ll c$ )  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$  'Fernwirkung' der Kraft  
 $\Leftrightarrow$  Widerspruch zur Vorstellung einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wirkungen.

→ relativistische Mechanik folgt in Kap.7

## 2.1 Newtonsche Bewegungs-Gleichung

zunächst phänomenologisch; Erfahrung: durch Angabe des Anfangsortes  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$  die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  festgelegt ist  $\Rightarrow$  wir erwarten eine Relation  $\ddot{\vec{r}}(t) \sim \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ , gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zur Bestimmung der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  (Dynamik)

$\rightarrow$  Newton (2. Newton-Gesetz); Impuls  $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ , bei konstanter (träger) Masse  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$  wobei  $\vec{F}$  die Kraft ist, die auf den Körper wirkt.

### Beispiel:

1. ggLf. Bew.  
 $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0)$
2.  $\vec{F} = \vec{F}_0$  konstant (Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche)  
 $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + 0,5 \frac{\vec{F}_0(t - t_0)^2}{m}$  (Wurfparabel)
3. Federkraft (1Dim)  
 $m\ddot{x} = -kx, F(x) = -kx, w^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{v_0}{w} \sin w(t - t_0)$
4. Lorentzkraft geschwindigkeits-abhängig  
 $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$
5. Reibungskräfte (phänomenologisch)  
 $\vec{F}_R = -\alpha \dot{\vec{r}}; \alpha > 0$  Reibungskoeffizient.
6. Coulombkraft  
 $\vec{F} = c q Q \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$

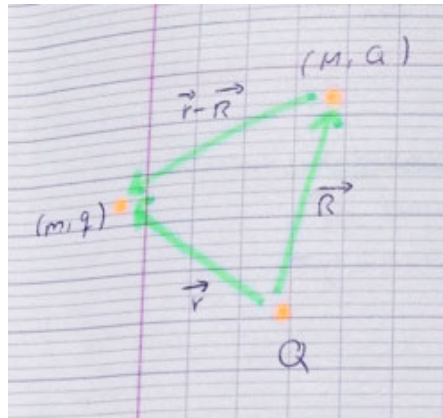


Abbildung 12:

$qQ < 0$ : anziehend

$qQ > 0$ : abstoßend

$c$ : Konstante, abhängig von der Einheit Ladung

## 2.2 Arbeit und Energie

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} &= \vec{F}\dot{\vec{r}} \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}\dot{\vec{r}} \\
 &\Rightarrow T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r}(t)
 \end{aligned}$$

Entlang der Kurve  $L$   $\vec{r}(t)$  mit  $r(t_1) = r_1 \dots$  Wir definieren die am Teilchen geleistete

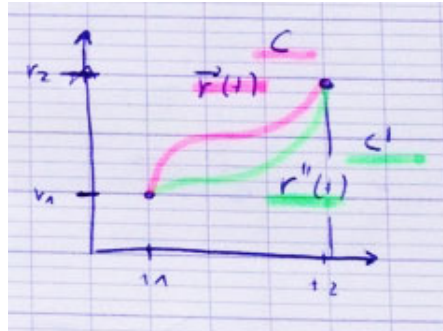


Abbildung 13:

Arbeit entlang  $L$  durch  $W_e(r_1 \rightarrow r_2) = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \dot{\vec{r}} dt$

Wir nennen ein Kraftfeld  $\vec{F}$  *konservativ*, wenn  $W_e$  nur von  $r_1$  und  $r_2$ , aber nicht vom Weg  $r(t)$  abhängt.

**Theorem**  $\vec{F}(\vec{r})$  konservativ  $\Leftrightarrow$  es existiert ein skalares Potential  $U(\vec{r})$  mit  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$$

, Kraftfeld ist Wirbelfrei.

Für konservative Kraftfelder gilt:  $\int_L F(r) dr = -U(r_2) + U(r_1) = W(r_1 \rightarrow r_2)$

$$\Rightarrow T(t_2) + U(r_2) = T(t_1) + U(r_1)$$

wir sehen für konservative Kräfte  $F = -\nabla U(r)$  folgt:

Energieerhaltung  $E = T + U = \text{const!}$

denn  $\frac{d}{dt} E = m\dot{r}\ddot{r} + \nabla U(r(t))\dot{r}(t) = \dot{r}(t)(m\ddot{r} + \nabla U) = 0$  (Newton-Gleichung)

### 2.2.1 Beispiele konservativer Kraftfelder

$$F = -\nabla U$$

1.  $F = F_0 \Rightarrow U(r) = -F_0 r$
2. Federkraft  $F = -kr \Rightarrow U(r) = 0,5kr^2$  (harmonischer Oszillator)
3. Coulombkraft,  $U(r) = cqQ \frac{1}{|r-R|}$

### 2.2.2 Gegenbeispiel

4. Reibungskraft  $F = -\alpha \dot{r}$  konservativ?  
 berechne Arbeit entlang einer geschlossenen Bahn:  $\oint F dr = -\alpha \oint \dot{r} dr = -\alpha \oint \dot{r}^2 dt \neq 0, > 0$  (außer  $\dot{r} = 0$ )

### 2.2.3 Bemerkung

1.  $E = T + U$ ;  $T = 0,5m\dot{r}^2$  Kinetische Energie;  
 $U = U(r)$  potentielle Energie, nur bis auf additive Konstante festgelegt (definiert das Energie-Nullniveau)

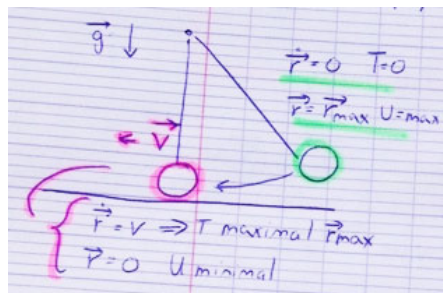


Abbildung 14:

2.  $E = const$  wichtiger Energieerhaltungssatz. (hängt zusammen mit Symmetrien!)

## 2.3 Systeme mehreren (N) Teilchen

Dynamik: N Punktteilchen mit Ortsvektoren  $r$ ;  $i = 1, N$  und tragen Massen  $m$ ; es gelten Newtons Gleichungen

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t)$$

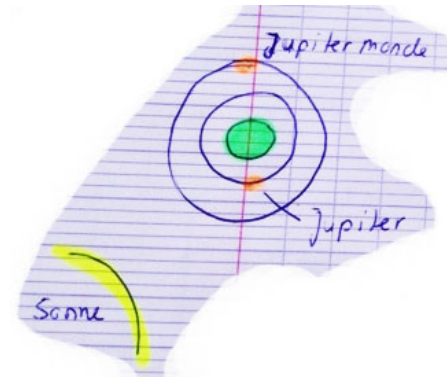


Abbildung 15:

$N$  gekoppelte Diff.-Gl. für die  $r_i(t)$ ; Anfangsbed.  $r(0); \dot{r}(0)$  müssen gegeben sein.  
Häufig: konservative Kräfte:  $F_i = -\nabla_i U(r_1, \dots, r_N)$  es folgt Energieerhaltung (Gesamtenergie).

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2(t) + U(r_1(t), \dots, r_N(t)) = \text{const}$$

$$\nabla_i = \frac{\delta}{\delta r_i}$$

häufig setzt sich die Kraft  $F_i$  zusammen aus 'äußeren' Kräften  $F_i^{(a)}$  und paarweise auftretenden 'inneren' Kräften  $F_{ij}$  zwischen den  $N$  Teilchen.

$$F_i = F_i^{(a)}(r_i) + \sum_{j=1; j \neq i}^N F_{ij}(r_i, r_j)$$

konservative Kräfte:  $F_i^{(a)}(r_i) = -\nabla_i U^{(a)}(r_1, \dots, r_N)$   
und  $F_{ij} = -\nabla_i \sum_{j=1; i \neq j}^N V_{ji}(|r_i - r_j|)$  für abstandsabh. Zweiwechselwirkung ( $F_{ij} = -F_{ji}$ )  
es folgt Energieerhaltung in der Form:

$$E = \sum_{i=1}^N 0,5 m_i \dot{r}_i^2 + U^{(a)}(r_1, \dots, r_N) + 0,5 \sum_{i,j=1; i \neq j}^N V_{ij}(|r_i - r_j|)$$

kin Energie + äußere Pot. Energie + innere Energie

## 2.4 N-Teilchenproblem

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = F_i^{(a)}(\vec{r}_i) + \sum_{i=1, j \neq i}^N F_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$



**Error 404 Skizze not found**

Abbildung 16: innere und äußere Kräfte

für konservative Kräfte

$$F_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i U_i(\vec{r}_i)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Gesamtenergieerhaltung:  $E = T + U^{(a)} + v^{WW}$

**Bemerkungen:**

1. *Abgeschlossene Systeme* sind solche ohne äußere Kräfte, also

$$F_i^{(a)} = 0, U^{(a)} = \text{const.}$$

2. *Schwerpunkt* des Systems:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, M = \sum_i m_i$$

Gesamtmasse

3. *Trennung der Energie in Schwerpunkt und Relativteil:*

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i \quad \text{Definition von } \vec{\rho}_i$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \underbrace{\dot{\vec{R}}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{\rho}_i) = M \vec{R}_{CM} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i}_{=0}$$

$$T = \underbrace{T_{CM}}_{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2} + T_{rel}$$

für abgeschlossene Systeme

$$E = E_{CM} + E_{rel}$$

$$= T_{CM} + (T_{rel} + v^{WW})$$

## 2.5 Impuls und Drehimpuls

Gesamtimpuls:

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}_{CM}$$

Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}_{CM} &= \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} + \underbrace{\sum_{i,j=1; i \neq j}^N \vec{F}_{ji}}_{=0 \text{ (alle Kräfte und ihre Gegenkräfte)}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. für abgeschlossene Systeme gilt Gesamtimpulserhaltung:

$$\vec{P}_{CM}(t) = \vec{P}_{CM}(0) = \text{const.} \\ \text{falls: } \vec{F}_i^{(a)} = 0$$

2. für  $\vec{R}_{CM}$  folgt für abgeschlossene Systeme: 'Schwerpunktsatz'

$$\vec{R}_{cm}(t) = \vec{R}_{CM}(t_0) + \frac{\vec{P}_{CM}(t_0)}{M} (t - t_0)$$

Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig (für abgeschlossene Systeme)

3. Beschreibung der Dynamik ausgedehnter Objekte durch Punktteilchen (Schwerpunkt) ist gerechtfertigt

4.  $\vec{P}_{CM} = \text{const.}$  sehr wichtig für Stoßprozesse gültig für  $\left\{ \begin{array}{ll} \text{elastische Stoßprozesse:} & E_{\text{kin}} \\ \text{inelastischer Stoß:} & \text{ein Teil der Energie} \end{array} \right.$

5. häufig Wahl des Schwerpunktsystems  $O \rightarrow \vec{R}_{CM}$  (Ursprung) als Bezugssystem

### 2.5.1 Drehimpuls

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\text{(hängt von der Wahl des Ursprungs ab)}}; \vec{p} = m \dot{\vec{r}}$$

zeitliche Änderung:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{p})}_0 + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \underbrace{\vec{M}}_{\text{Drehmoment}}$$

$$\vec{r} \perp \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} \perp$$

für N-Teilchen: Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)$$

Zeitliche Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ij}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)}}_{\text{u. a. u. Drehmoment}} + \sum_{i,j=1; j \neq i}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(a)} \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. für geschlossene Systeme ( $\vec{M}_i^{(a)} = 0$ ) gilt *Gesamtdrehimpulserhaltungssatz*:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \text{const.}$$

2. Zerlegung in Schwerpunkt und Relativteil:  $\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{\varrho}_i$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \underbrace{\vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{\varrho}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{L}_{rel}}$$

3. diese Erhaltungssätze für abgeschlossene N-Teilchensysteme gelten:

$E$	Energie	$1 \times$
$\vec{P}_{CM}$	Gesamtimpuls	$3 \times$
$\vec{L}_{\text{ges}}$	Gesamtdrehimpuls	$3 \times$

$$\vec{R}_{CM}(0) = \vec{R}_{CM}(t) - \frac{\vec{P}t}{M} \quad \text{Schwerpunktsatz} \quad (1)$$

$\Rightarrow$  10 Erhaltungsgrößen für dynamik eines abgeschlossenen Systems  
 $\Leftrightarrow$  verknüpft mit der Homogenität der Zeit ( $t \rightarrow t + t_0$ ), Homogenität des Raumes ( $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$ ), Isotropie des Raumes ( $\vec{r} \rightarrow R\vec{r}$ )  
 Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &\rightarrow \vec{r} - \vec{v}t \\ t &\rightarrow t \end{aligned}$$

4. für abgeschlossene Systeme gelten die Newtonschen-Gleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad \text{in IS beim Übergang in IS'}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |\vec{r}_i - \vec{r}_j| &= |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j| & \text{mit} & \quad \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{r}_0 - \vec{v}t \\ & & \text{mit} & \quad \vec{r}'_i = R\vec{r}_i \\ & \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} & \text{mit} & \quad t' = t + t_0 \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \vec{r}''}{dt'^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  in IS' gelten Newtonsche-Bewegungs Gleichungen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt'^2} &= \vec{F}'_{ij}(|\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|) \\ \vec{F}' &= \vec{F} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Newtonsche Mechanik eines abgeschlossenen Systems ist invariant unter Galilei-Gruppe

## 2.6 Nicht-Inertialsysteme und Scheinkräfte

Sei  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  IS

$\rightarrow$  gehe über zu beschleunigtem (rotierendem) BS

$\rightarrow$  mit  $(O(t), \vec{e}'_1(t), \vec{e}'_2(t), \vec{e}'_3(t))$

**Einführung einer zeitabhängigen Rotation:**

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i(t) &= R(t)\vec{e}_i \\ RR^T &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

in BS'  $\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t) \vec{e}'_i(t)$   
für Geschwindigkeit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r}'(t)) &= \sum_{i=1}^N \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t) + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t)}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'}} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) \dot{\vec{e}}'_i(t) \\ \dot{\vec{e}}'_i &= \dot{R}(t) \vec{e}_i = \dot{R} R^T \vec{e}'_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}' &= V_{BS} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) (\dot{R} R^T) \vec{e}'_i \end{aligned}$$

$$\overline{(O, \{\vec{e}_i\})IS} \rightarrow \overline{(O'(t), \{\vec{e}'_i(t)\})BS'}$$

**Error 404 Skizze not found**

Abbildung 17: Karussell mit zeitabhängiger Drehung

**Beispiel** Änderung der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{e}'_i(t) &= \left( \frac{d}{dt} R \right) \vec{e}_i = \left( \left( \frac{d}{dt} R \right) R^T \right) \vec{e}'_i = M \vec{e}'_i \\ \text{mit } M(t) &= \left( \frac{d}{dt} R \right) R^T = -M^T(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition von  $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$

wir sehen  $M\vec{b} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$ , Bewegung im rotierenden BS'

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x'_i(t) \vec{e}'_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{dx'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t)}_{\text{Geschwindigkeit gemessen in BS'} =: \dot{\vec{r}}'} + \sum_{i=1}^N x'_i(t) (\vec{\Omega} \times \vec{e}'_i(t)) \end{aligned}$$

ODER:

$$\frac{d}{dt} \dots = \dot{\dots} + \vec{\Omega} \times \dots \quad (3)$$

Bedeutung von  $\vec{\Omega}(t) \left\{ \begin{array}{l} |\vec{\Omega}| \text{ momentane Winkelgeschwindigkeit} \\ \text{Richtung der momentanen Drehachse} \end{array} \right\}$  der Drehung

Bsp.: Karusell  $R(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$  Drehachse

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ &= \underbrace{\ddot{\vec{r}}'}_{\ddot{\vec{r}} \dots \text{Beschleunigung}} + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\dot{\vec{r}} \dots \text{Geschwindigkeit}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\vec{r} \dots \text{Ortsvektor}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \end{aligned}$$

**Beschleunigter Bezugspunkt**  $O'(t)$

### 3 kleine Schwingungen

→ Resonanzphänomene:

*Resonanz:* bei einer bestimmten Frequenz schwingt ein gekoppeltes Vielteilchensystem besonders stark. *Beispiele:*

1. mechanische Konstruktionen (Fahrzeugbau) sollten keine Resonanzen aufweisen (→ Hubschrauber-Boden-Resonanz<sup>1</sup>)
2. Brücke
3. Wolf (Streichinstrumente)

*Problem:* Es gibt kollektive Schwingungen einer Frequenz bei Kopplung einzelner schwingungsfähiger Freiheitsgrade

→ 'Eigenfrequenzen' des gekoppelten Systems

→ Eigenmoden –

**Error 404 Skizze not found**

Abbildung 18: Schwingungen gleich und gegenphasig

<sup>1</sup><https://www.youtube.com/watch?v=bs2rNBj6D3A>

### 3.1 Lineare Differenzialgleichungen (2.Ordnung)

#### 3.1.1 Beispiel

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad (4)$$

**linear**

$x$  tritt nur linear auf

**2.Ordnung**

$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x$  zweite Ableitung

**homogen**

$$f(t) = 0$$

**inhomogen**

$$f(t) \neq 0$$

**wichtig**

für lineare, homogene Differentialgleichungen gilt ein Superpositionsprinzip mit  $x_1(t), x_2(t)$  auch  $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung

## 4 Sektion 4

## 5 Sektion 5

## 6 Hamiltonsche Mechanik

$$q(t) \rightarrow (q(t), p(t)) \dot{q}$$

### 6.1 Poisson-Klammer

→ Zwei Phasenraumfunktionen  $f(q, p), g(q_\alpha, p_\alpha)$  wird zugeordnet eine neue Phasenraumfunktion  $\{f, g\}(q_\alpha, p_\alpha) := \sum_\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)$

→ Diese hat zuvorkommende Eigenschaften:

- Zeitabhängigkeit:  $A(q, p, t)$  entlang einer Trajektorie bzw. Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung  $A(q(t), p(t), t)$

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H\} + \frac{\partial}{\partial t}A$$

- Insbesondere:  $A(q, p)$  Erhaltungsgröße  $\{A, H\} = 0$  Sehr praktisch, um zu prüfen, ob etwas eine Erhaltungsgröße ist.
- $(H(q, p))$  Erhaltungsgröße, da  $\forall f : \{f, f\} = 0$

→ Eigenschaften der Poisson-Klammer:

1.  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2.  $\{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$
3.  $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$
4.  $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$  Bemerkung.: Ist  $f$  und  $g$  Erhaltungsgröße  $\Rightarrow \{f, g\}$  Erhaltungsgröße
5. Elementare Poisson-Klammern:  $\{q, p\} = 1, \{q, q\} = \{p, p\} = 0$ .
6. Anwendung:  $\{q^2, p\} q = q\{q, p\} + \{q, p\} q = 2q$

## 6.2 Kanonische Transformationen

→ Bislang (Lagrange):  $\{q_\alpha\} \rightarrow \{Q_\alpha(q_1, \dots, q_f, t)\}$  Koordinatentransformationen

→ Jetzt (Hamilton):  $\{q_\alpha, p_\alpha\} \rightarrow \{Q_\alpha(q, p, t), P_\alpha(q, p, t)\}$  Phasenraumtransformationen

→ Falls  $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Rightarrow \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}$ . Ein solches  $K$  existiert  $\Leftrightarrow$  Transformation  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  Kanonisch

→ Betrachte Phasenraumvolumina:

$$F_S = \int dQ \int dP = \int dq \int dp$$

Phasenraumvolumen bleibt erhalten:  $F_R = F_S \Leftrightarrow |\cdot| = 1 = \dots = \{Q, P\}$

Definition: Eine Phasenraumtransformation  $T : (q_\alpha, p_\alpha \rightarrow (Q_\alpha(q, p, t), P_\alpha(q, p, t)))$  heißt *kanonisch*  $\Leftrightarrow$  das Phasenraumvolumen bleibt erhalten ( $\Leftrightarrow V_R = V_S$ ).

Es gilt: – kanonisch  $\Leftrightarrow \{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \left( f - 1 : \{Q, P\}_{(q,p)} = 1 \right) \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0$   
 $\{P_\alpha, P_\beta\} = 0$

Alles dreis: für  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, f \rightarrow$

Bemerkung zur Poisson-Klammer: es gilt auch  $\{Q, P\}_{(Q,P)} = 1$ ; dahinter steckt die *Invarianz der Poisson-Klammer* unter kanonischen  $T : \{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)} \quad (f(q, p) \rightarrow f(q(Q, P), p(Q, P)))$

## 6.3 (Form-)Invarianz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unter kanonischen Transformationen

→ Ausgangspunkt:  $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_\alpha}; \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

→ Betrachte kanonische.  $T : (q, p) \mapsto (Q, P) = (Q_\alpha(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f), P_\alpha(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f))$

→ Für Zeitabhängigkeit der  $(Q_\alpha, P_\alpha)$  gilt

$$\dot{Q}_\alpha = \{Q_\alpha, H\}_{(q,p)} \stackrel{kanT}{=} \{Q_\alpha, H\}_{(Q,P)} = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\alpha} \frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial K(Q, P)}{\partial P_\alpha}$$



mit  $K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$  genau(?)  $\dot{P}_\alpha = \{P_\alpha, H\}_{(q,p)} = \{P_\alpha, H\}_{(Q,P)} = -\frac{\partial K(Q,P)}{\partial Q_\alpha}$

→ Wie erwartet und erwünscht: Die klassischen Bewegungsgleichungen greifen!

## 6.4 Erzeugend von kanonischen Transformationen

→ Ausgangspunkt: Hamiltonsches Prinzip  $\delta S \stackrel{!}{=} 0$

→  $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \{ \dot{q}p - H(q, p) \} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \dot{Q}P - K(Q, P) \right)$

→ Linke Seite  $p dq - H dt = \underbrace{P dQ - K(Q, P) dt}_{\text{RechteSeite}} + \underbrace{dF}_{\text{Freiheit}}$

→ Bei Variation liefern Beiträge des Randes keinen Beitrag!

→ Hier ist  $F = F \left( q, p, \underbrace{Q}_{Q(q,p), P(q,p)}, P, t \right) \stackrel{?}{=} F(q, Q, t)$

→ Fasse  $F = F_1(q, Q, t)$  als Funktion der alten und neuen Koordinaten auf:

$$\begin{aligned} dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \\ \Rightarrow p dq - F dt &= P dQ - K dt + \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}$$

→ Jede Funktion  $F_1(q, Q, t)$  erzeugt durch (\*) (TODO label) eine kanonische Trafo.

→ Entsprechend lassen sich kanonische Transformationen erzeugen durch Erzeugende vom Typ

$$\begin{aligned} F_2 = F_2(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_2}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ F_3 = F_3(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_3}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_3}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ F_4 = F_4(q, P, t) &\Rightarrow p = -\frac{\partial F_4}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}, k = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}$$