06 - ENAČBE HODA (INITIAL VALUE PROBLEM)

Matematično-fizikalni praktikum, avgust 2024
Luka Skeledžija, 28201079

---

1. Uvod

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je na primer enačba za časovno odvisnost temperature v stanovanju, ki je obdano s stenami z neko toplotno prevodnostjo in določeno zunanjo temperaturo. V najpreprostejšem primeru ima enačba obliko

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_{\mathrm{zun}}\right) \tag{1}$$

z analitično rešitvijo

$$T(t) = T_{\mathrm{zun}} + \mathrm{e}^{-kt}\left(T(0) - T_{\mathrm{zun}}\right)\ .$$

Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x, pravimo {\sl enačbe hoda/}. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $dy/dx = f(x,y)$. Najbolj groba prva inačica, tako imenovana osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h\left.\frac{dy}{dx}\right|_x\ . \tag{2}$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h. Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za red boljša ($\mathcal{O}\left(h^3\right)$, t.j. lokalna natančnost drugega reda) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h\left.\frac{dy}{dx}\right|_x\ , \tag{3}$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\left[\left.\frac{dy}{dx}\right|_x + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x+h}\right]\ , \tag{4}$$

le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala (shema je implicitna). Pomagamo si lahko z iteracijo. Zapišimo odvod kot:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_x = f(x,y) \tag{5}$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n) \tag{6}$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}\left(h^3\right)$ lokalno) je pribli\v zek idealne formule z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right]$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ lokalno):

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\, h\, k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\, k_2$$

Le-to lahko potem izbolj\v samo kot modificirano Midpoint metodo itd

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

$$k_1 = f\left(x,\, y(x)\right)\ ,$$

$$k_2 = f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\, y(x) + \tfrac{h}{2}k_1\right)\ ,$$

$$k_3 = f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\, y(x) + \tfrac{h}{2}k_2\right)\ ,$$

$$k_4 = f\left(x + h,\, y(x) + hk_3\right)\ ,$$

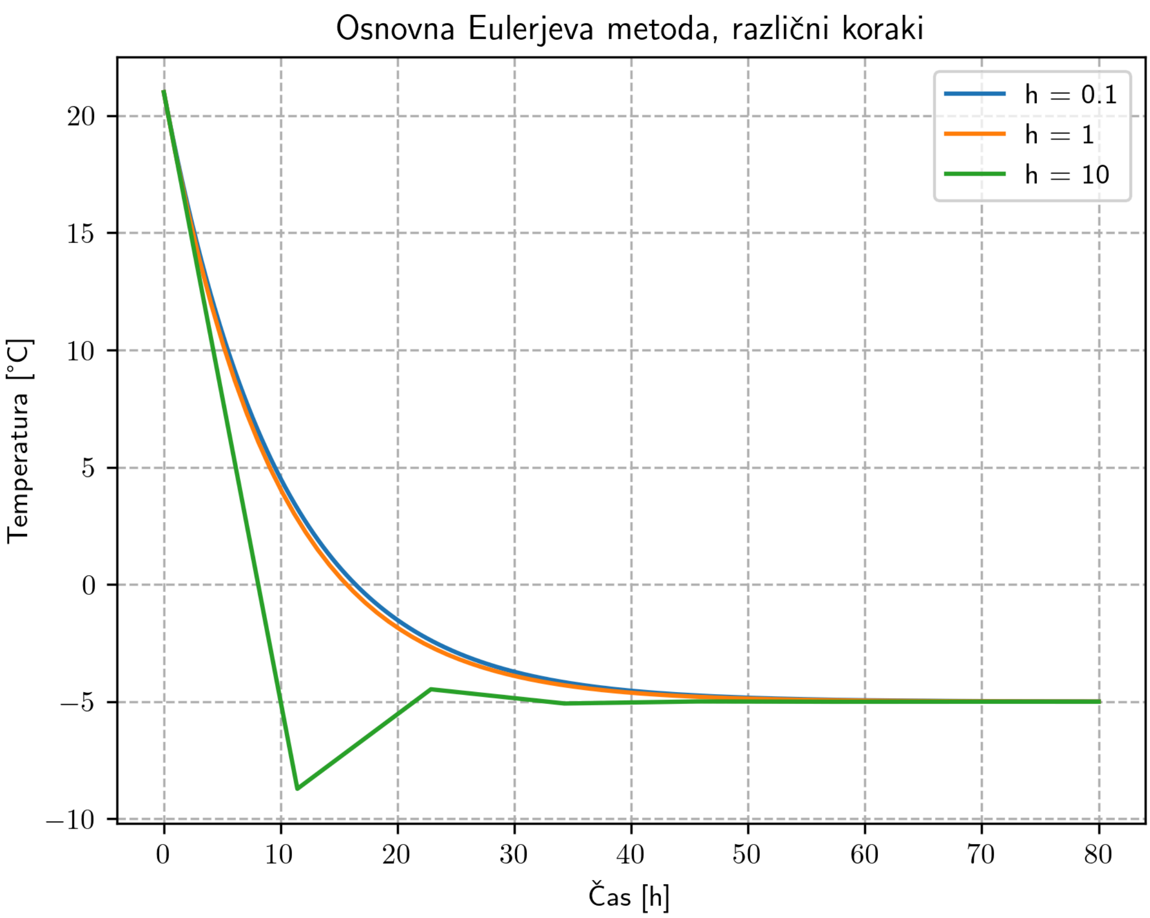
$$y(x+h) = y(x) + \tfrac{h}{6}\,\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) + \mathcal{O}(h^5)\ .$$

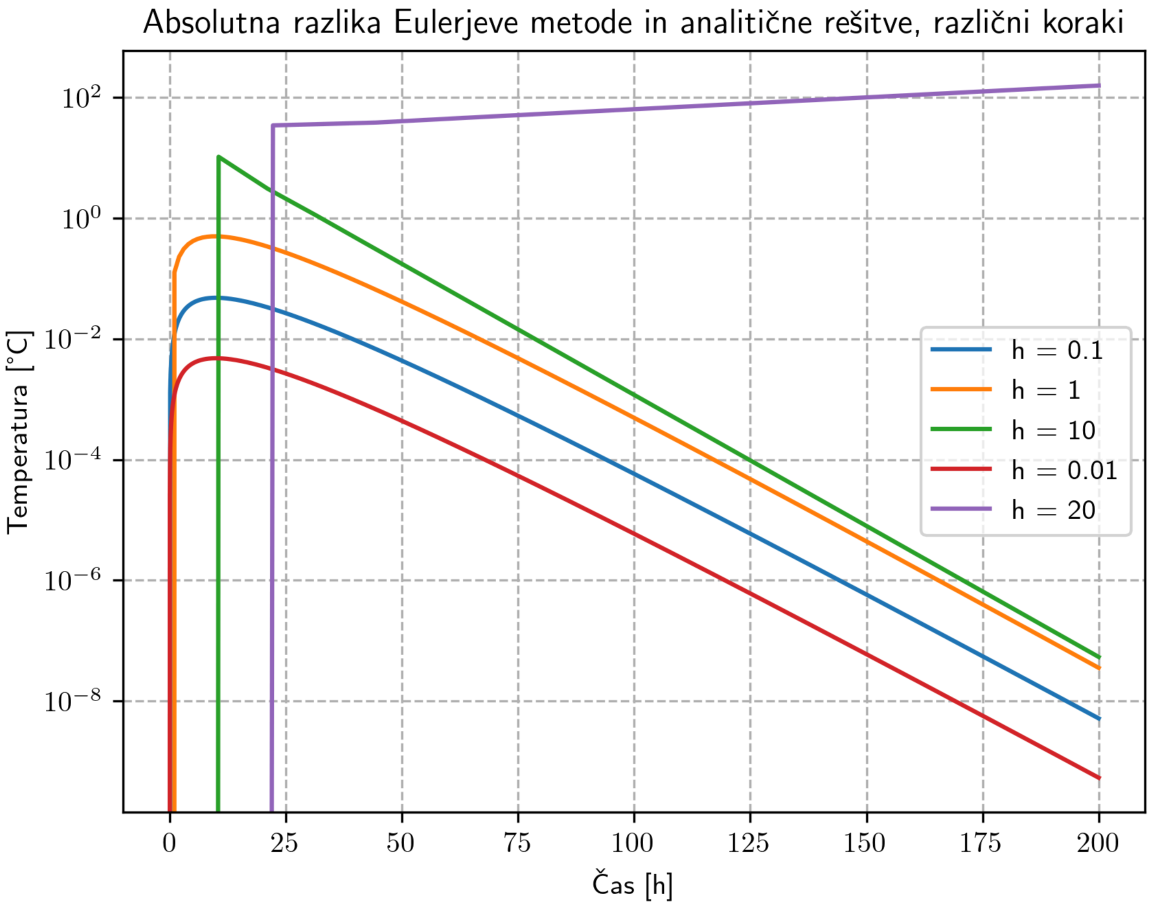
2. Naloga

1. Preizkusi preprosto Eulerjevo metodo ter nato še čim več naprednejših metod(Midpoint, Runge-Kutto 4. reda, Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor) na primeru z začetnima temperaturama $y(0) = 21$ ali $y(0) = -15$, zunanjo temperaturo $y_{\text{zun}} = -5$ in parametrom $k = 0.1$. Kako velik (ali majhen) korak h je potreben? Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri različnih vrednostih parametra k.
2. Dodatno: temperatura prostora se lahko še dodatno spreminja zaradi denimo sončevega segrevanja skozi okna, s 24-urno periodo in nekim faznim zamikom δ, kar opišemo z dva- ali triparametrično enačbo $\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_{\text{zun}}) + A\sin\left(\frac{2\pi}{24}(t-\delta)\right)$. Poišči še družino rešitev te enačbe pri $k = 0.1$ in $\delta = 10$! Začni z $A = 1$, kasneje spreminjaj tudi to vrednost. V premislek: kakšno metodo bi uporabil, če bi posebej natančno želel določiti maksimalne temperature in trenutke, ko nastopijo?

3. Eulerjeva metoda

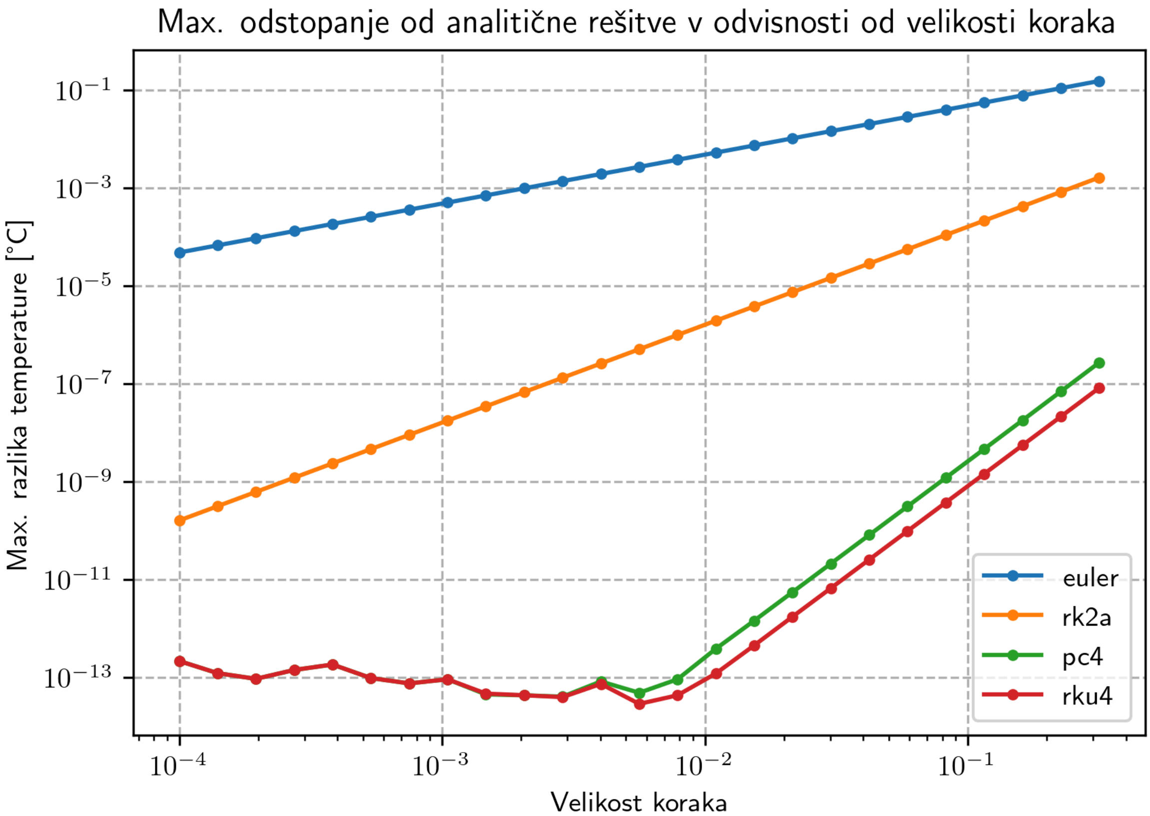
V nadaljevanju bomo primerjali numerično dobljeno rešitev diferencialne enačbe iz uvoda (izračunano po Eulerjevi metodi) z analitično rešitvijo. Opazimo, da morajo biti velikosti koraka relativno majhne (< 1), da se numerične rešitve "na oko" ustrezno prilegajo analitični. Višje vrednosti koraka okoli analitične rešitve skačejo. Če pa korak še povečujemo pa začne metoda divergirati, kar lahko opazimo kot naraščanje krivulje absolutne razlike numerične in analitične rešitve v odvisnosti od časa t.

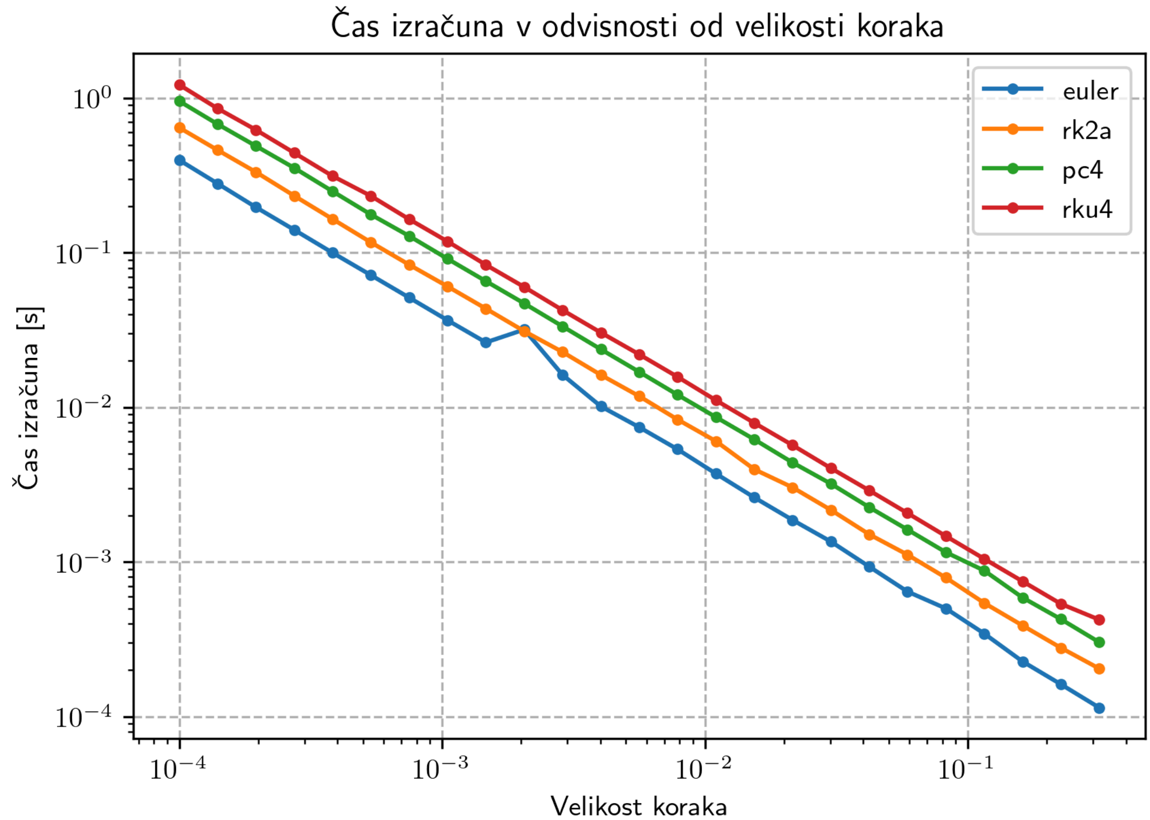




4. Ostale metode

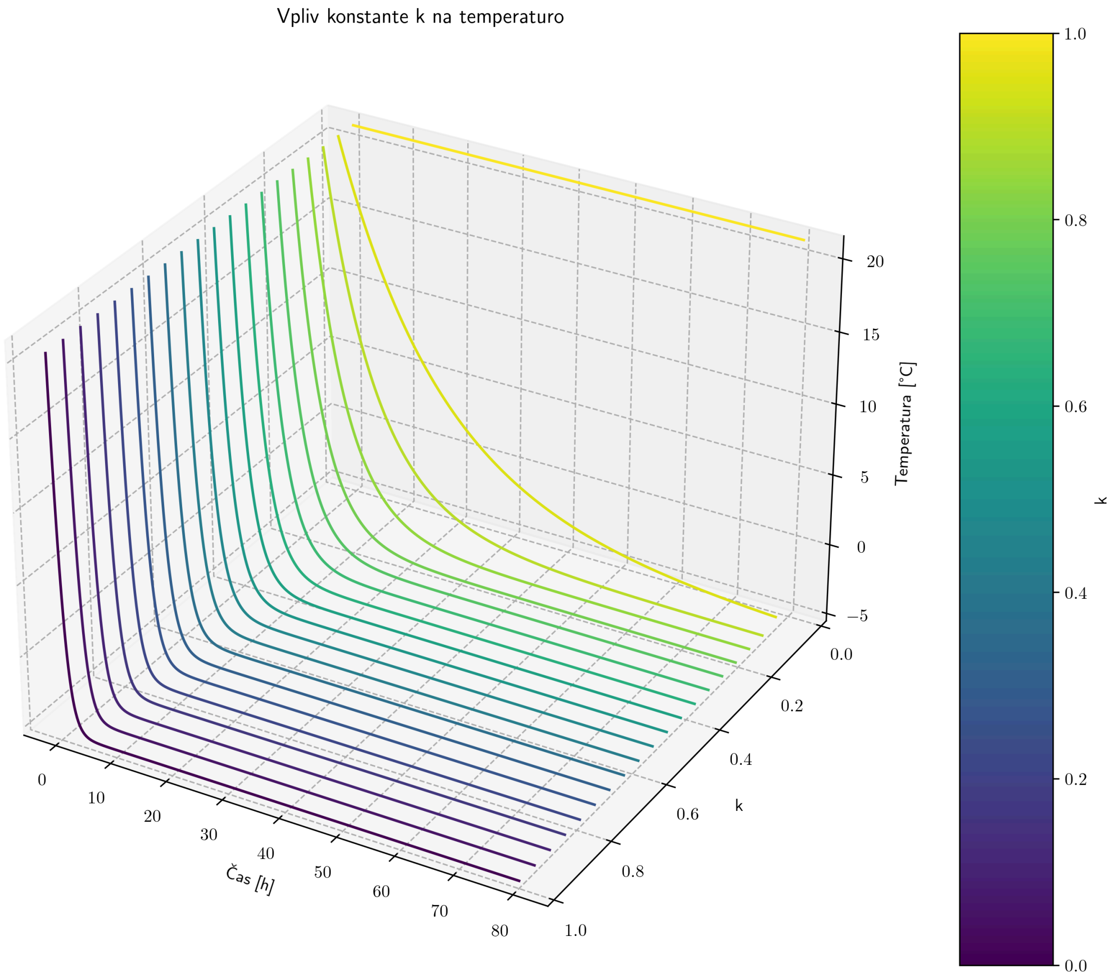
Ker je Eulerjeva metoda razmeroma preprosta, lahko poizkusimo še nekatere nadgradnje. V primerjavo bomo vzeli metode po Eulerju, Midpoint metodo, Adams-Bashforth preditkor/korektor in metodo Runge-Kutta 4. reda. Primerjamo oddaljenost od analitične rešitve v povezavi z velikostjo koraka. Ugotovimo, da nam za enako velikost koraka metodi Runge-Kutta-4 in Preditkor-Korektor-4 ponujata kar nekaj redov večjo natančnost. Če v obzir vzamemo še časovno zahtevnost, ugotovimo, da z naprednejšimi metodami za (relativno) majhno podaljšanje časa dobimo veliko večjo natančnost. Kar v valuti računalniških zmogljivosti pomeni, da so precej bolj ekonomične.





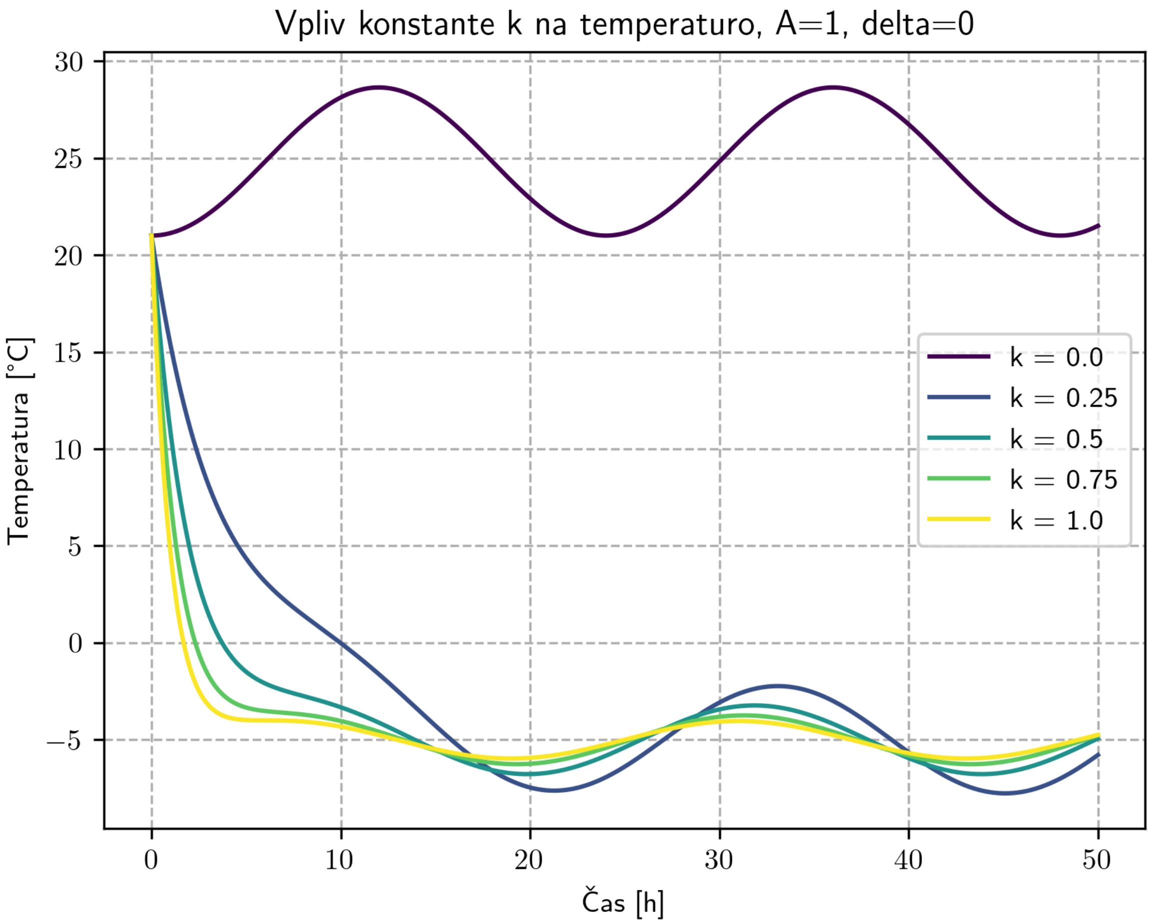
5. Družina rešitev

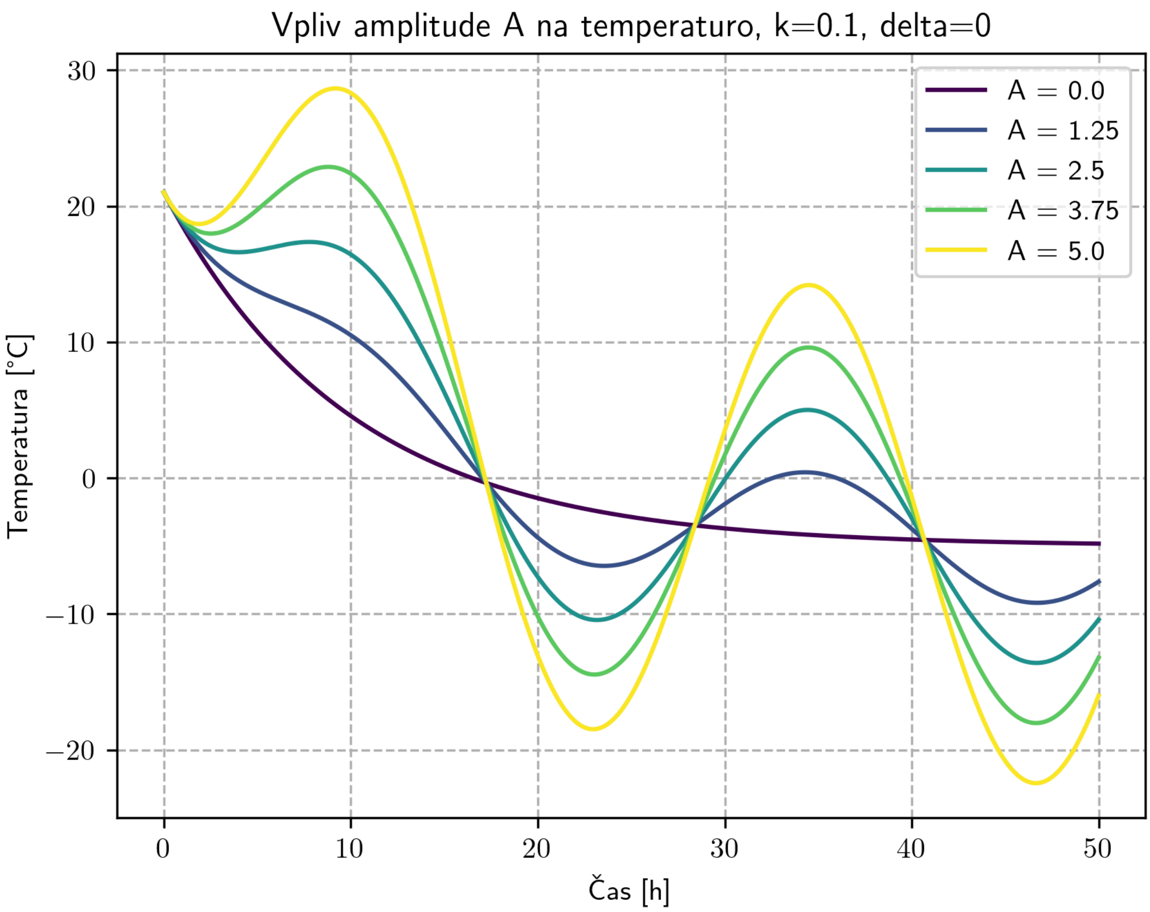
Na podlagi ugotovitev in primerjave iz prejšnjega poglavja lahko zdaj sestavimo optimalen set parametrov za izračun družine funkcij pri spremenljivi vrednosti k. Kot integracijsko metodo izberemo metodo `Runge-Kutta 4`, saj nam ta v zameno za ~1 red počasnejšega računanja ponuja skoraj 10 redov dodatne natančnosti. Pri čemer ostaja tudi velikost koraka povsem zmerna $\approx 10^{-2}$.

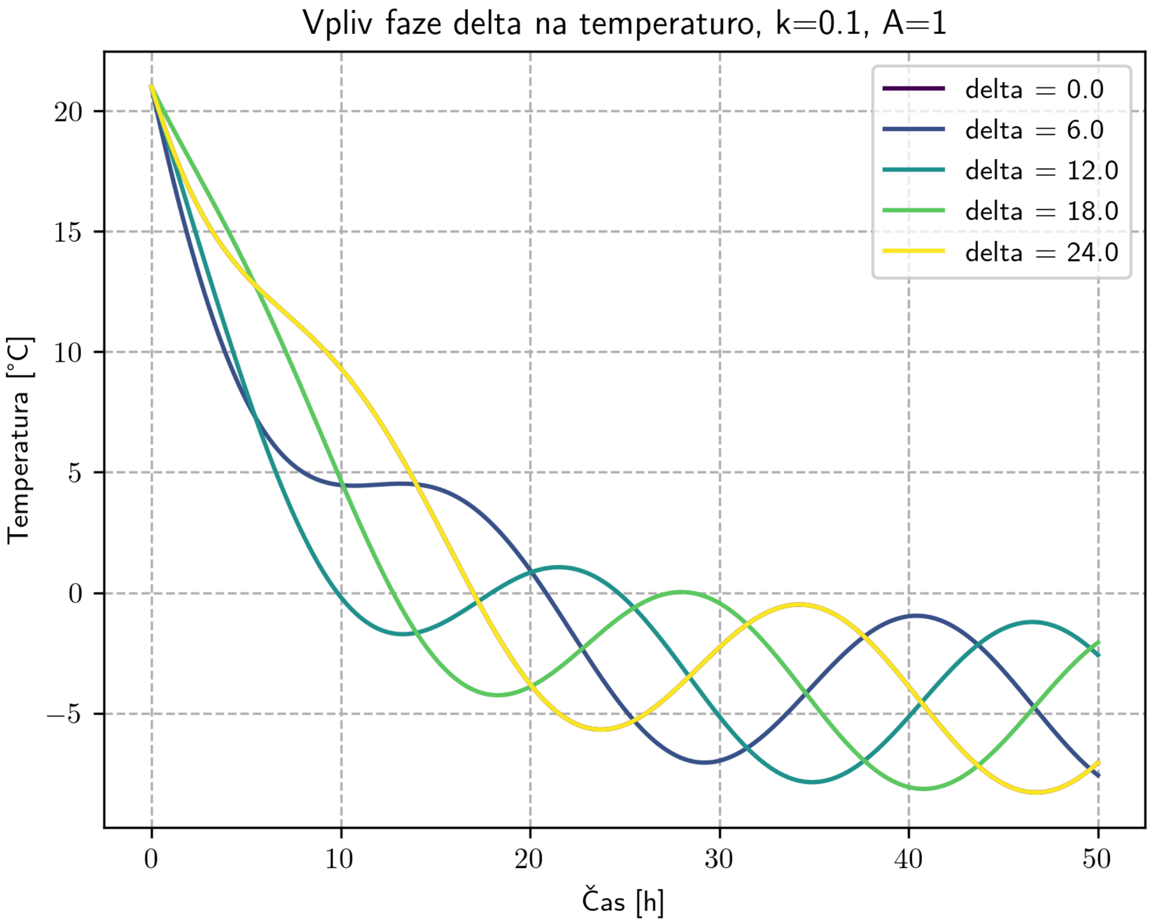


6. Dodatek

V dodatku analiziramo še družine krivulj za spreminjajoče se parametra k, A in δ pri modelu prevajanja s periodičnim ogrevanjem (npr. Sonce). Opazimo, da se rešitve bolj zakomplicirajo. Če nas zanima nas zanimajo ekstremi rešitev, bi bilo verjetno bolje uporabiti katero izmed metod numerične integracije, ki prilagaja vrednost koraka. V bližini točk, ki nas zanimajo (oz. kjer se krivulja bolj prelomi), je tedaj več točk in ima določitev x koordinate manjšo negotovost.


Vpliv konstante k na temperaturo, A=1, delta=0
Temperatura [°C]
Čas [h]
k = 0.0
k = 0.25
k = 0.5
k = 0.75
k = 1.0
30
25
20
15
10
5
0
−5
0
10
20
30
40
50


Vpliv amplitude A na temperaturo, k=0.1, delta=0
Temperatura [°C]
Čas [h]
A = 0.0
A = 1.25
A = 2.5
A = 3.75
A = 5.0
30
20
10
0
−10
−20
0
10
20
30
40
50



7. Zaključek

V okviru te naloge smo analizirali različne metode numerične integracije enačb hoda. Primerjali smo njihovo natančnost in časovno zahtevnost. Na podlagi rezultatov smo izbrali optimalne parametre in izrisali še družino rešitev našega problema za različne vrednosti k. Model smo v dodatku nadgradili še s periodičnim členom in s pomočjo numerične integracije narisali različne rešitve tega nadgrajenega problema.

Luka Skeledžija, Github source 🔗 , 2024