

04 - DISKRETNNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

Matematično-fizikalni praktikum, november 2023
Luka Skeledžija, 28201079

1. Uvod

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) dt \quad (1)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t) df \quad (2)$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto (frekvenco) $f = 1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. Če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije, kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* oz. *aliasing*, ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n / N), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}, \quad (4)$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija in je povezana s funkcijo takole:

$$H\left(\frac{n}{N\Delta}\right) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko pustimo indeks n v enačbi za DFT teči tudi od 0 do N . Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \leq N - 1$) pa

negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$.

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih.

V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + df$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (one-sided power spectral density, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2.$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2 |H_n|^2$.

Z obratno transformacijo lahko tudi rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i k n / N) \quad (5)$$

(razlika glede na zgornjo enačbo je le predznak v argumentu eksponenta in utež $1/N$).

2. Naloga

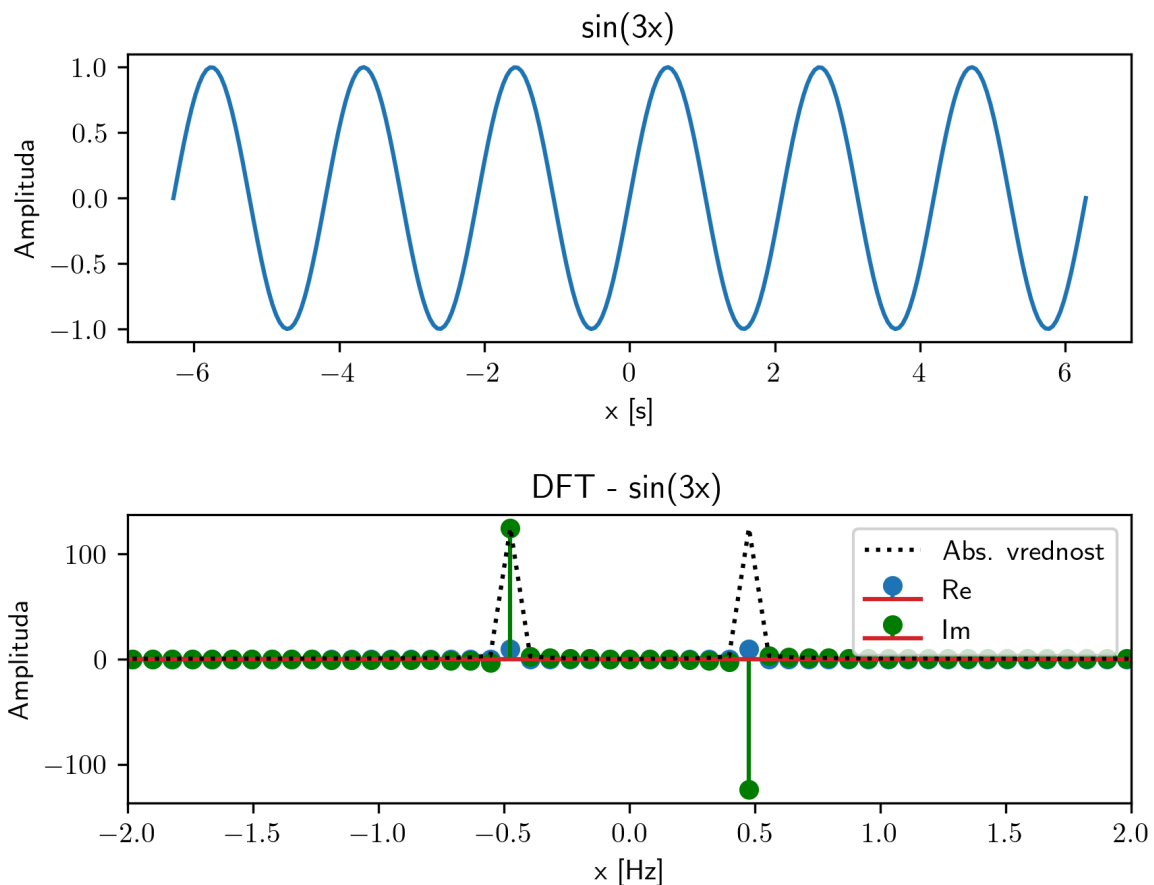
1. Izračunaj Fourierov obrat Gaussove porazdelitve in nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc. Za slednje primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen (kako naredimo Gaussovo porazdelitev 'periodično' za FT?). Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo in preveri natančnost metode. Poglej, kaj se dogaja z časom računanja - kako je odvisen od števila vzorčenj?
2. Po Fourieru analiziraj 2.3s dolge zapise začetka Bachove partite za violino solo, ki jih najdeš na spletni strani Matematičnofizikalnega praktikuma. Signal iz začetnih taktov partite je bil vzorčen pri 44100 Hz, 11025 Hz, 5512 Hz, 2756 Hz, 1378 Hz in 882 Hz. S poslušanjem zapisov v formatu `.mp3` ugotovi, kaj se dogaja, ko se znižuje frekvenca vzorčenja, nato pa s Fourierovo analizo zapisov v formatu `.txt` to tudi prikaži.
3. Dodatno: Napravi Fourierovo analizo signalov, ki jih dobiš pri vaji Akustični resonator pri Fizikalnem praktikumu II.

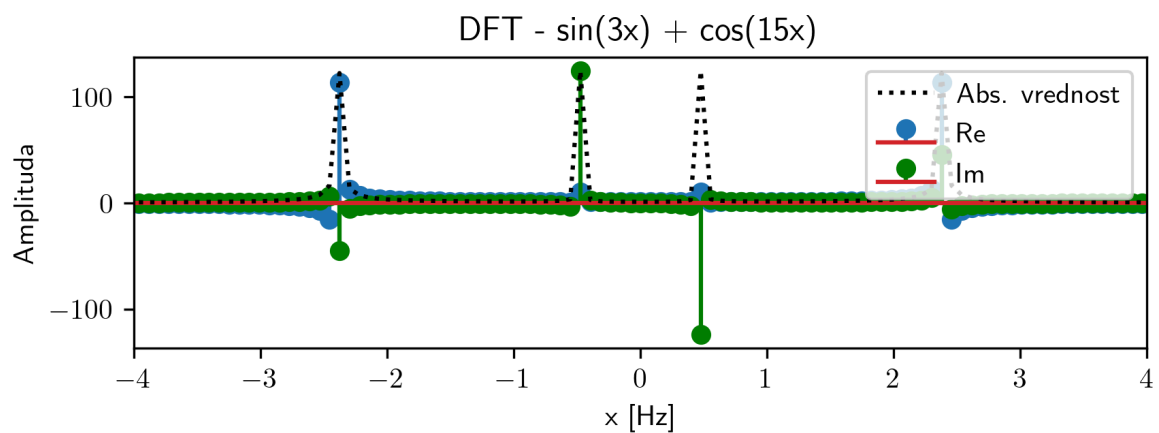
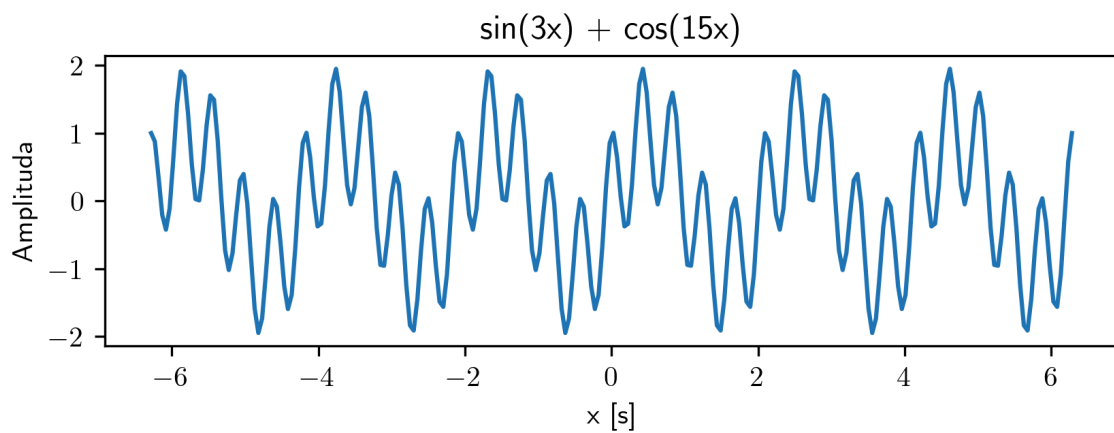
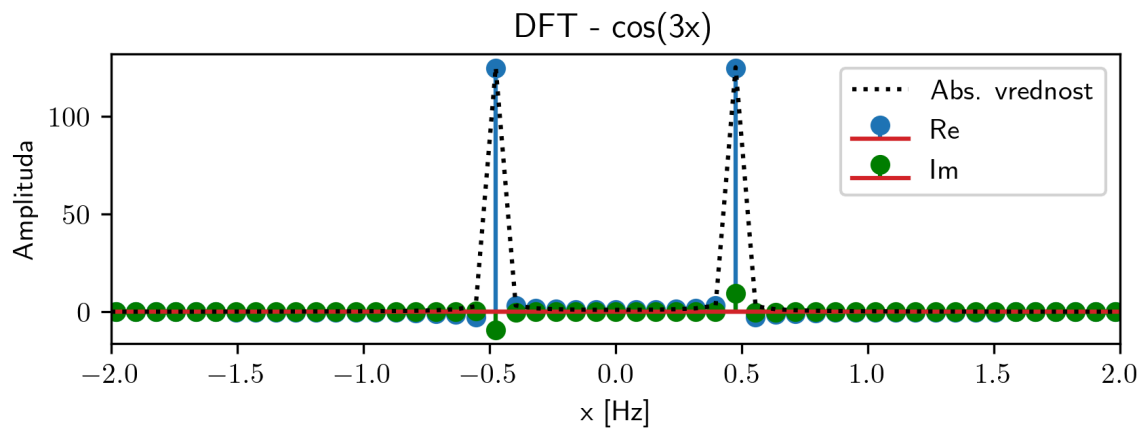
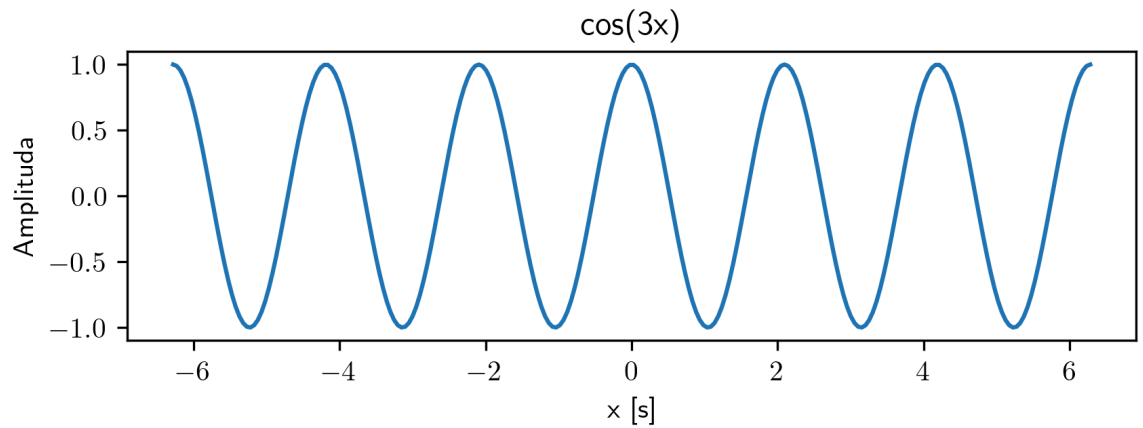
3. Diskretna Fourierova transformacija

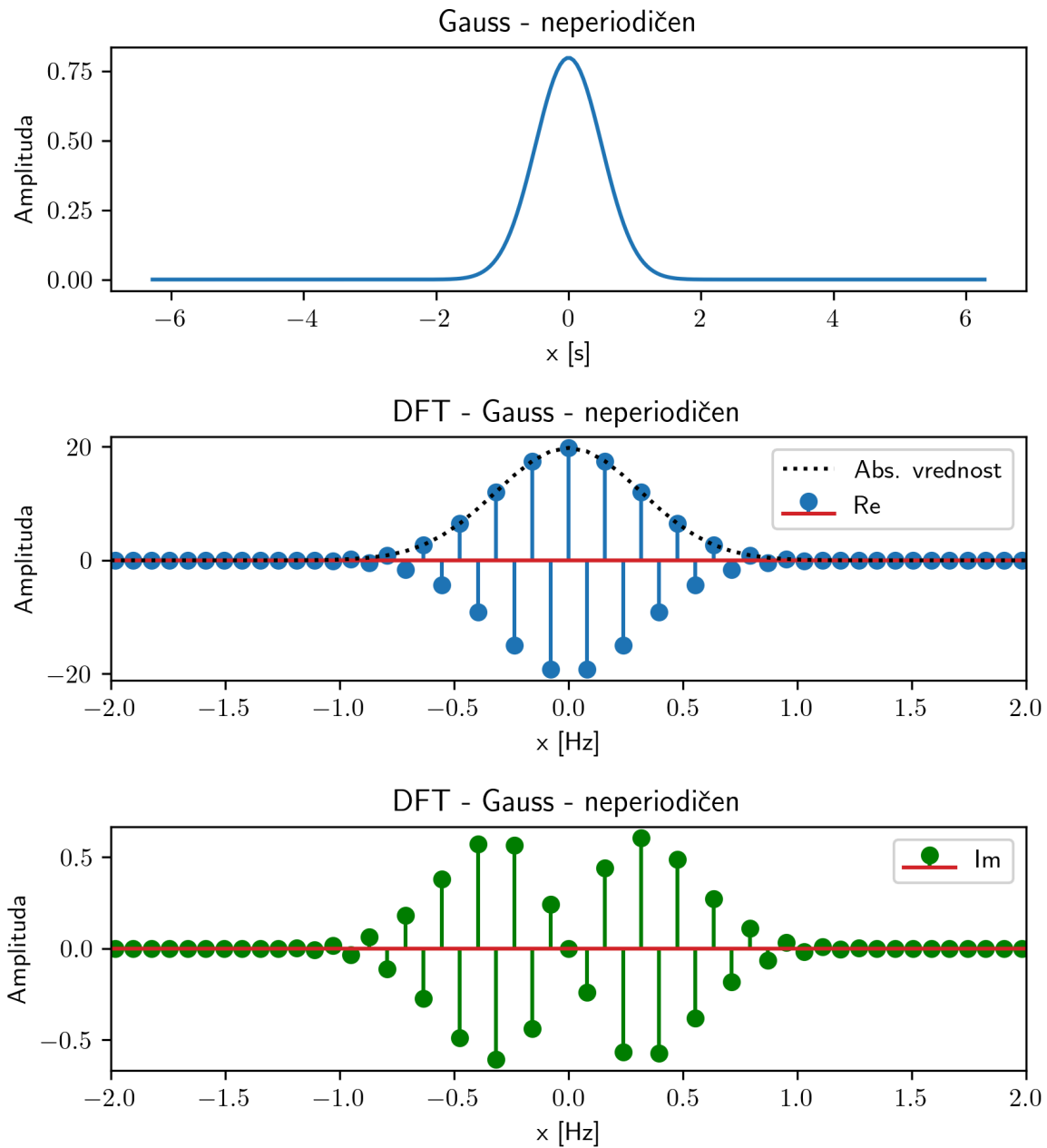
3.1. Prikaz nekaterih funkcij

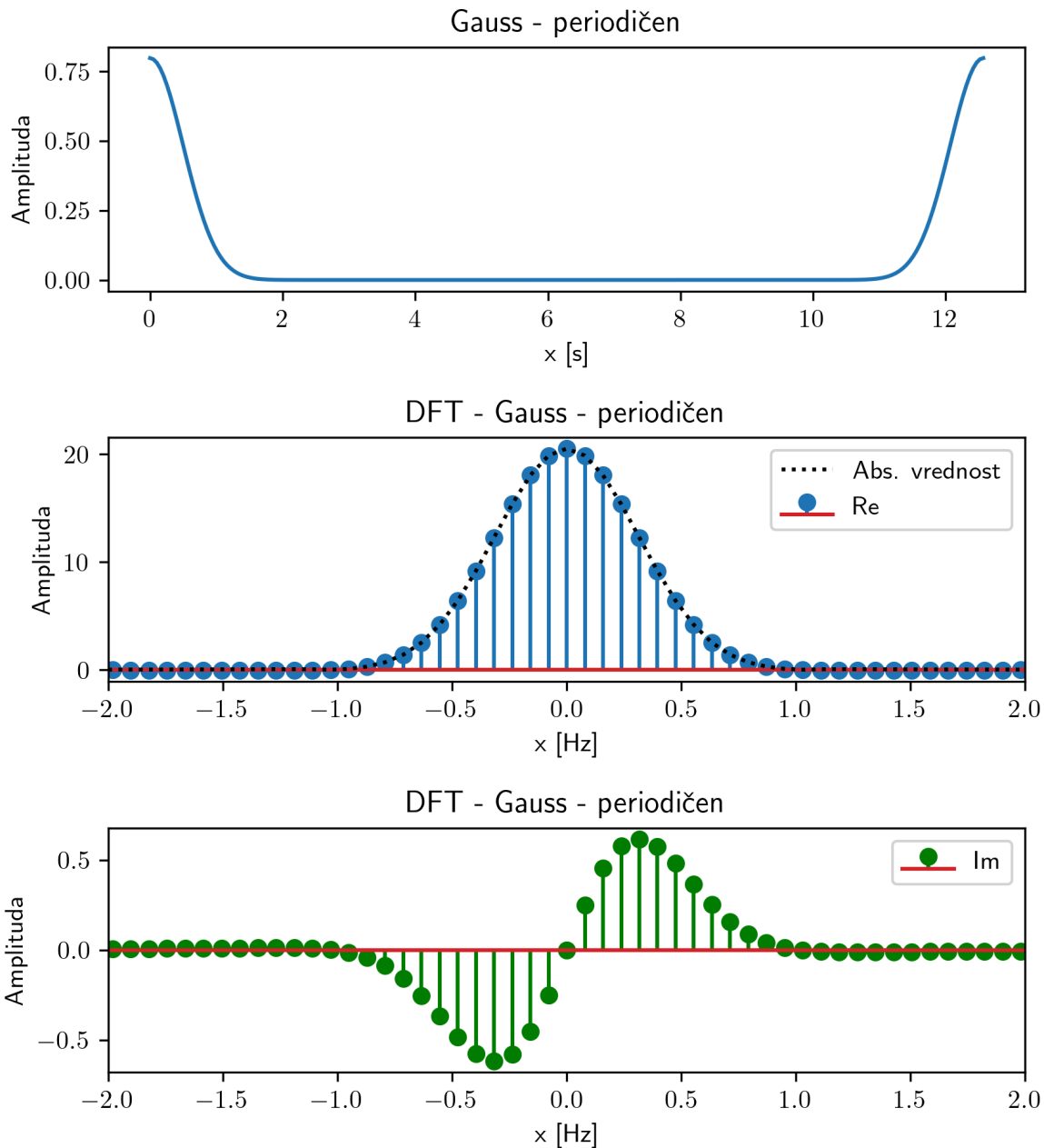
V nadaljevanju si pogledamo diskretne Fourierove transformacije nekaterih zanimivih funkcij na intervalu $[-a, a]$ za $a = 2\pi$. Izberemo sledeče funkcije (vzorčene vsaka z 250 točkami na interval):

1. $\cos(3x)$
2. $\sin(3x)$
3. $\cos(3x) + \sin(15x)$
4. Gaussova funkcija neperiodične oblike
5. Gaussova funkcija, ki jo vzorčimo na $[0, a]$ in ta del še enkrat prezrcalimo čez točko a - dobimo "periodično" obliko



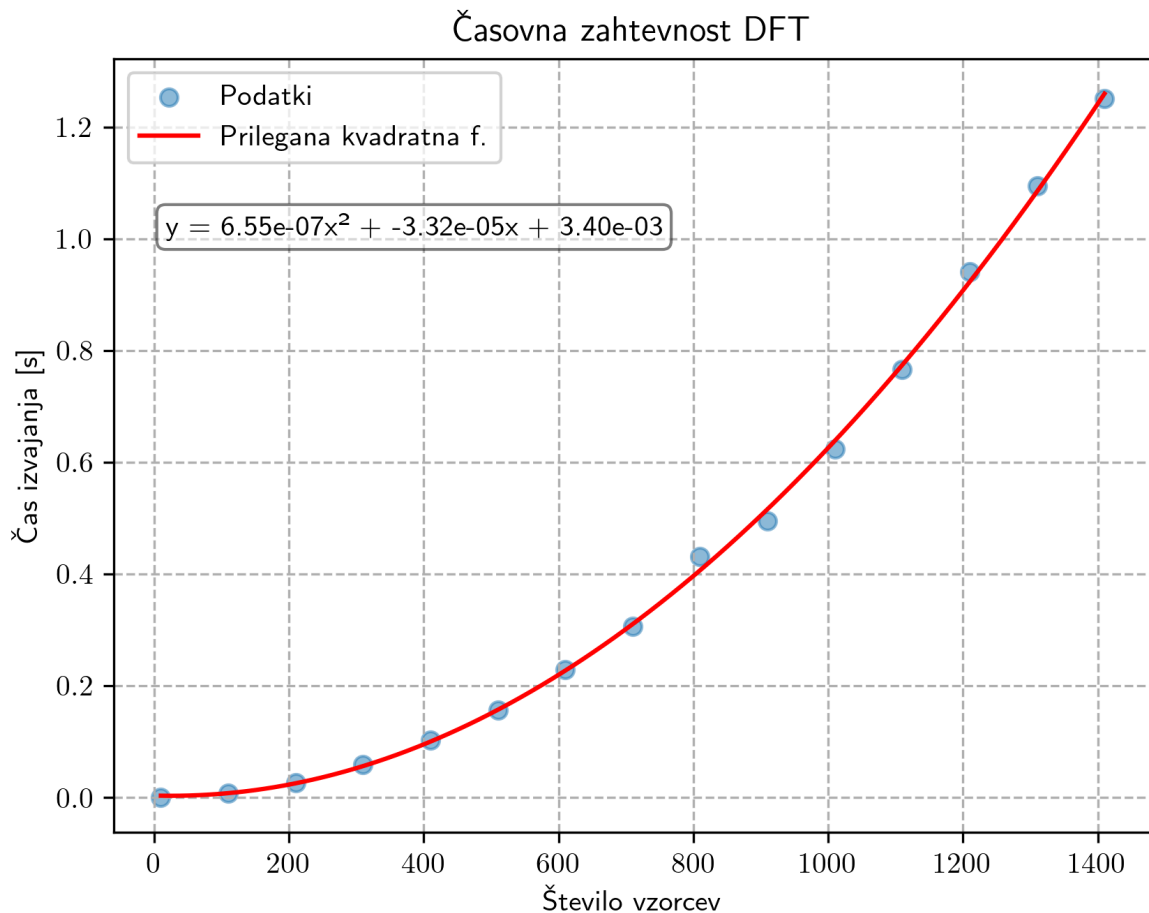






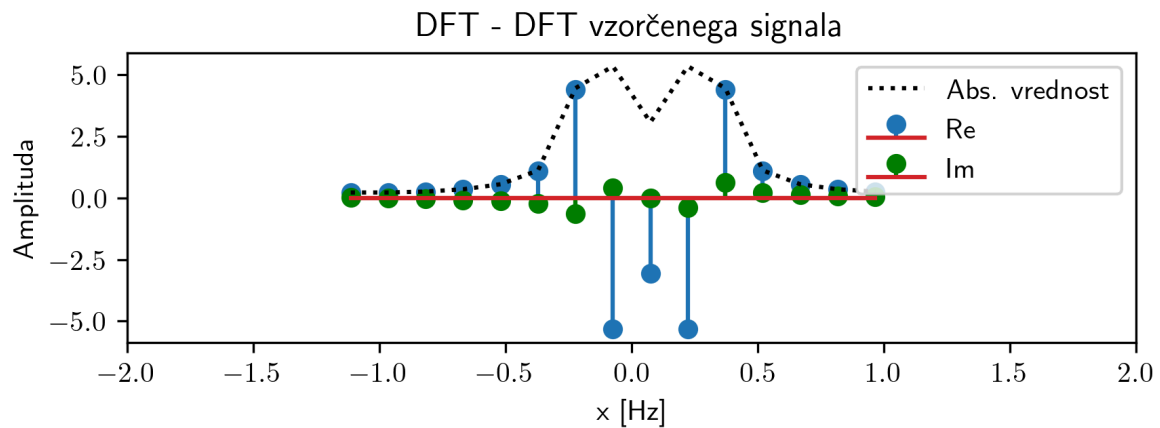
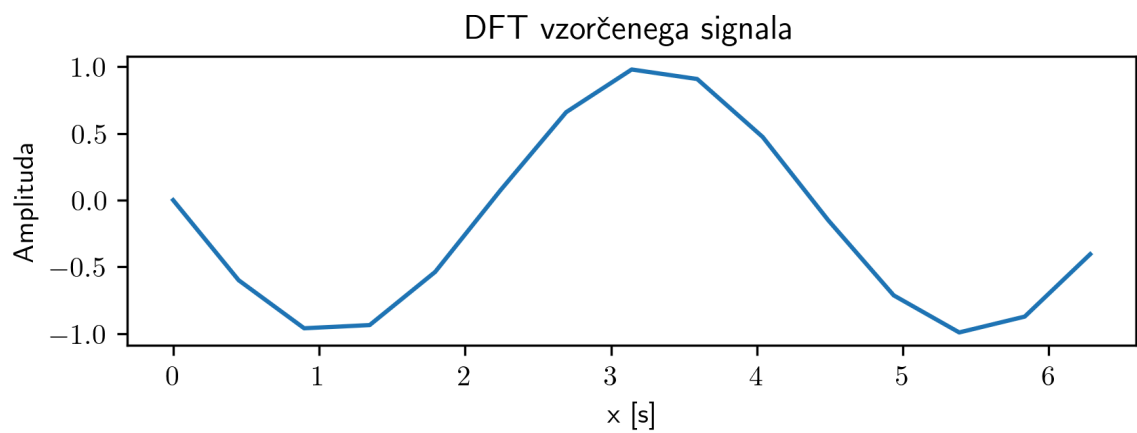
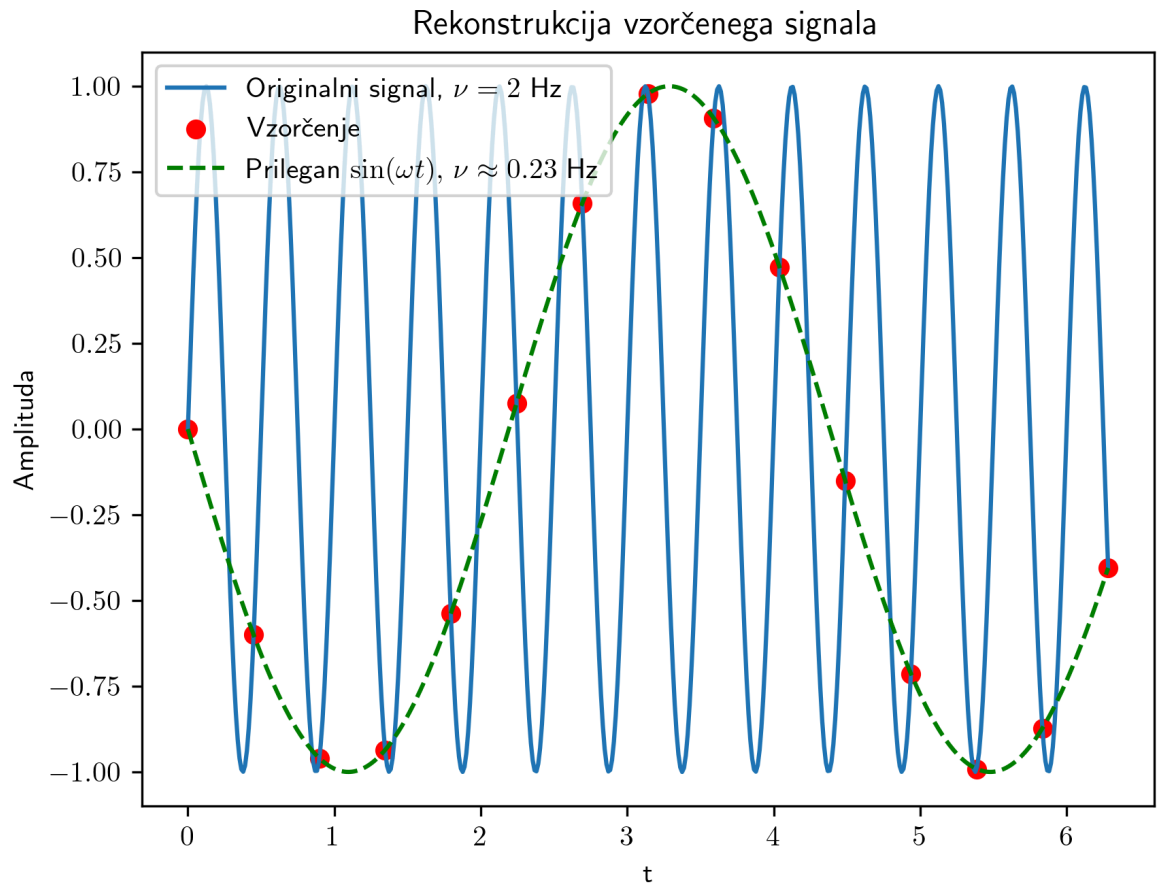
3.1. Časovna zahtevnost pri izračunu DFT

Preverimo še časovno zahtevnost za izračun DFT v odvisnosti od števila vzorcev. V teoriji je časovna odvisnost DFT kvadratična, kar potrdimo s prileganjem kvadratne funkcije.



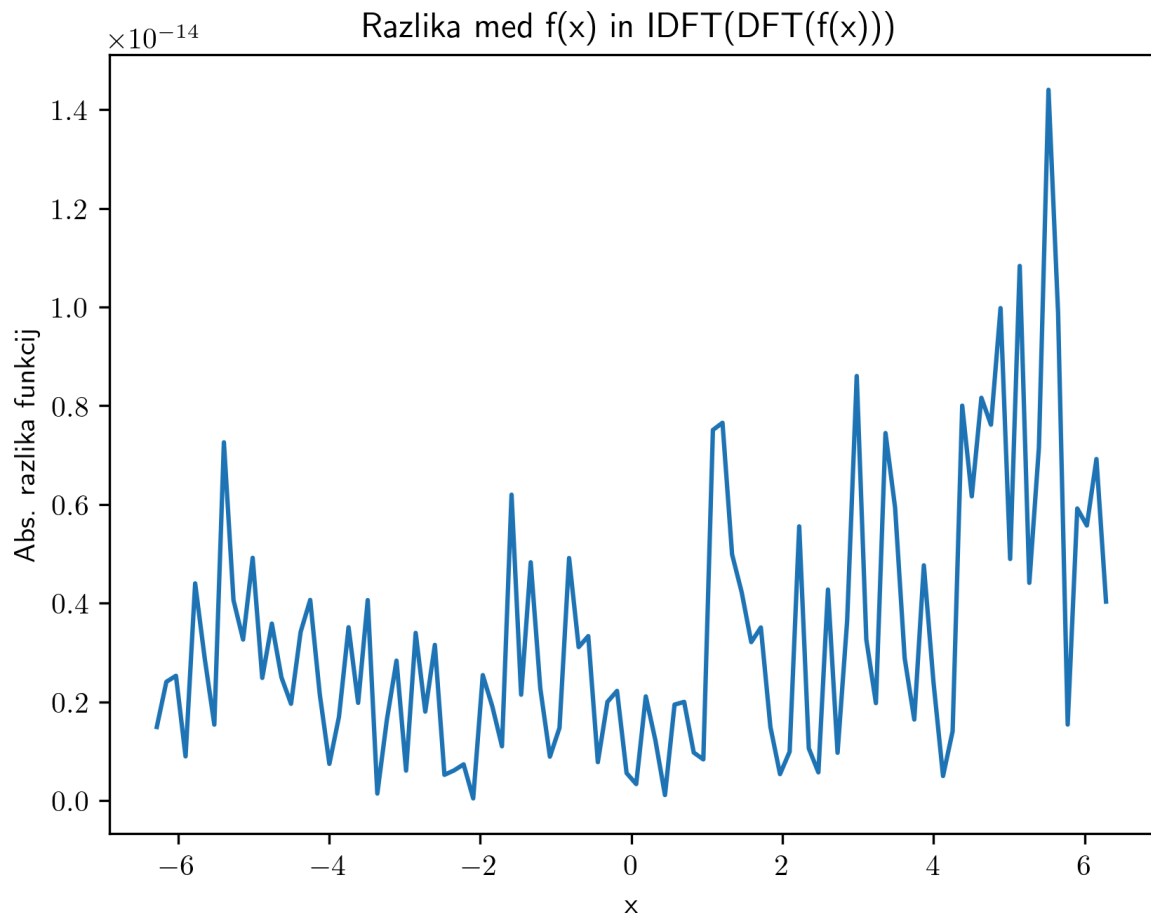
3.1. Pojav potujitve

Če vzorčimo signal višje frekvence kot je frekvenca vzorčenja pride pri DFT do t.i. potujitve oz. "aliasinga". Generiramo signal s frekvenco 2 Hz in ga vzorčimo s primerljivo frekvenco 2.38 Hz. Ker je to manjše od Nyquistove frekvence (dvakratnih največjega signala), je frekvenca rekonstruiranega signala drugačna od originalne. V nadaljevanju frekvenco rekonstruiranega signala dobimo enkrat s prileganjen sinusa in drugič z DFT. V obeh primerih se rekonstruirana frekvenca (0.23 Hz) ne ujema z originalno (2 Hz).



3.1. Inverzna DFT (IDFT)

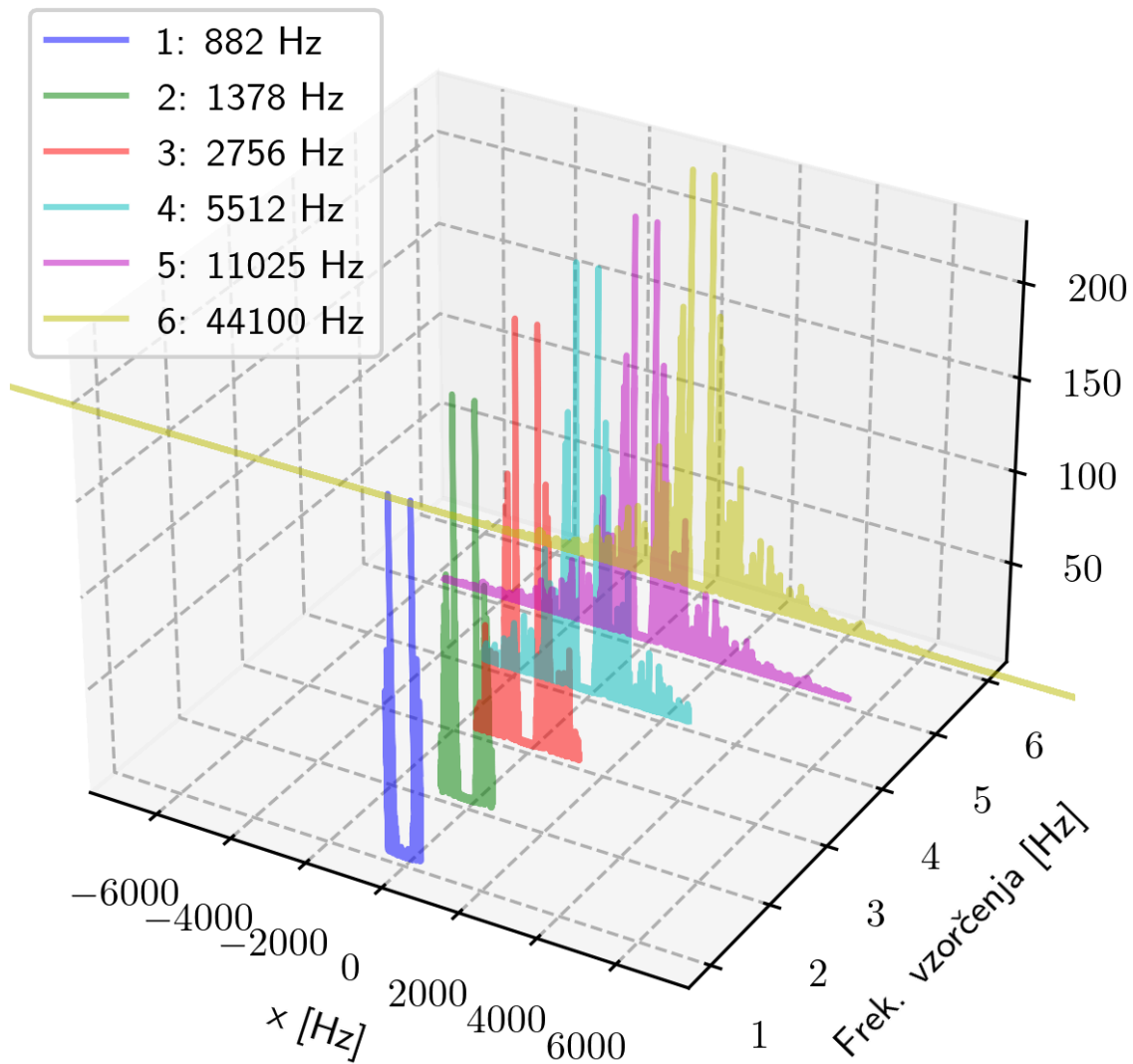
V nadaljevanju primerjamo še razliko vrednosti (oz. v našem primeru kar vrednosti same) funkcije $f(x)$ in $f'(x) \approx f(x)$, na katero najprej deluje DFT in nato še IDFT. Ugotovimo, da so razlike za Gaussovo funkcijo velikosti 10^{-14} , kar ocenimo kot dobro.



4. Bachova partia

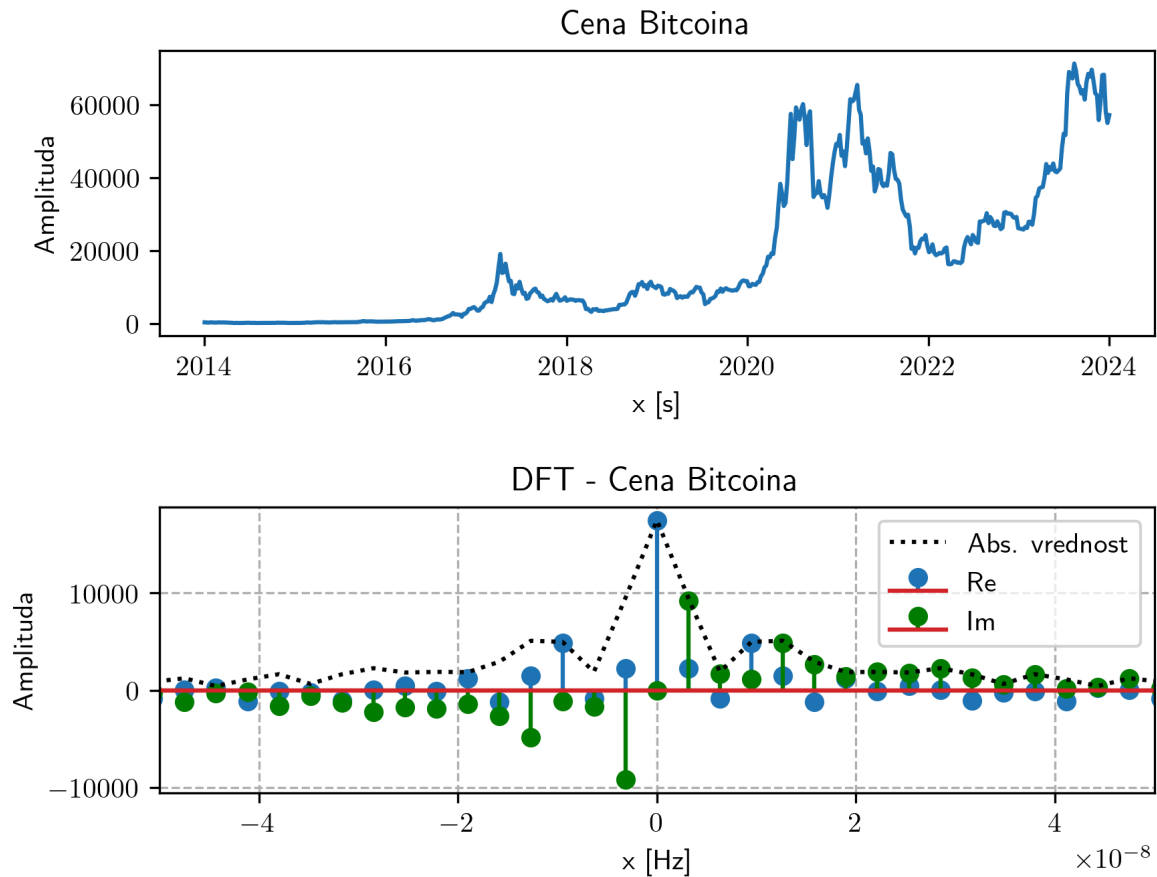
V nadaljevanju analiziramo še izseke iz Bachove partie vzorčene z različnimi frekvencami in sicer; 44 100 Hz, 11 025 Hz, 5512 Hz, 2756 Hz, 1378 Hz in 882 Hz. Pri poslušanju zapisov v .mp3 formatu lahko opazimo, da zvok s padanjem vzorčne frekvence postaja manj jasen in bogat. Kajti z nižanjem frekvence vzorčenja ožamo frekvenčni spekter, ki ga lahko tako zajamemo. Da se v to prepričamo, analiziramo vsak posnetek s pomočjo DFT (oz. ker se nam mudi napisati poročilo z uporabo FFT).

DFT Bachove partie, različne frekvence vzorčenja



5. Dodatek: Bitcoin - finančni podatki

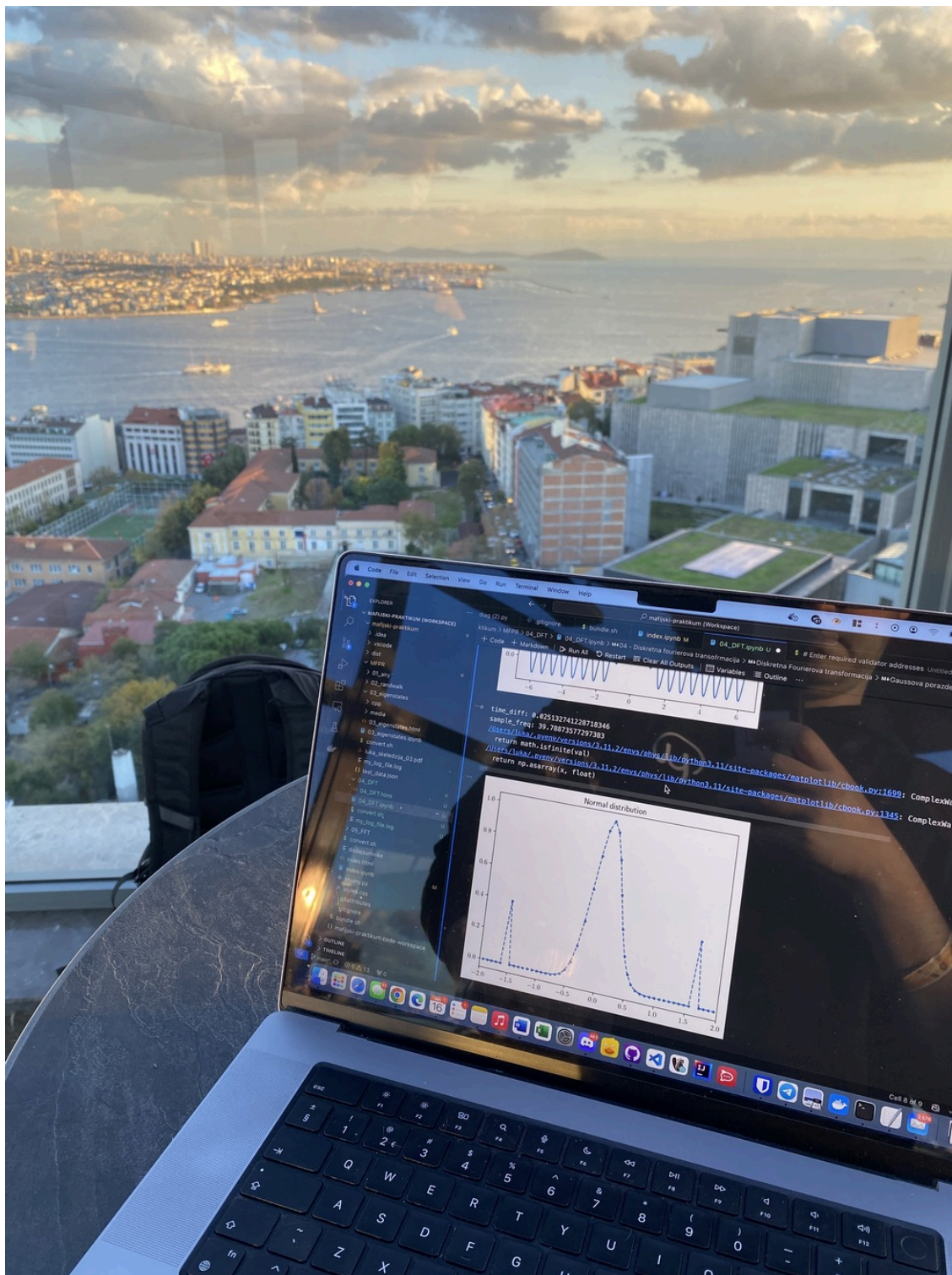
Za dodatek poizkusimo analizirati še popularen trend v spreminjanju cene Bitcoina. Količina novo izdanega Bitcoina se [prepolovi](#) vsakih 210,000 blokov (1 blok ~ 10 minut). Iz tega lahko izračunamo, da se prepolavljanje zgodi na približno 4 leta. Tipično ima to tudi vpliv na samo ceno. S Fourierovo transformacijo analiziramo zgodovinske podatke cene Bitcoina za zadnjih 10 let. Iz Fourierovega spektra lahko vidimo dva šibka vrha v neposredni bližini frekvence 0. Iz vrednosti lahko ocenimo, da vrh nahaja nekje med frekvencama $6.32971523e-09$ (perioda ~ 5.01 let) in $1.58242881e-08$ (perioda ~ 2.0 leti). Če vzamemo preprosto aritmetično povprečje teh vrednosti, dobimo periodo spreminjanja cene ~ 3.5 let. Kar približno ustreza periodi prepolavljanja. Ocena je groba, ker tudi sklopitev teh dveh dogodkov ni zares močna oz. verjetno ni niti nujno, da je ta zveza vzročno-posledična.



6. Zaključek

Tekom naloge smo ugotovili, da je DFT zelo uporabno orodje za analizo podatkov. Računanje DFT po definiciji je zaradi kvadratne časovne zahtevnosti za računalnike relativno naporno. Zato smo se za zadnje kompleksnejše izračune raje zatekli k hitrejši implementaciji FFT. Vendar je tudi delo po definiciji zelo počuno. Spoznali smo se z nekaterimi ključnimi pojavi pri delu s periodičnimi signali npr. leakage (opažen, vendar ne povsem direktno komentiran), aliasing itd.

7. Bonus



Slika 1: Mafijski praktikum in pogled na Bospor, november 2023

Luka Skeledžija, [Github source](#) , 2023-24