Lineær algebra noter - Diagonalisering

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

24. juni 2014

Indhold

1 Disposition

1. TBD

2 Noter

2.1 Egenværdi og egenvektor

$$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F}), \lambda \in \mathbb{F}$$

λ er en egenværdi (eller karakteristisk værdi) for matricen A hvis den opfylder:

$$Ax = \lambda x$$

Hvor x egenvektoren ikke er nulvektoren 0 og kaldes egenvektoren tilhørende egenværdien λ.

En egenværdi har adskillige tilknyttede egenvektorer (man kan f.eks. blot gange en skalar på), men en egenvektor har altid kun én egenværdi.

Komplekse egenværdier har den egenskab at hvis $\lambda = a + bi$ er en egenværdi for A, vil den konjungerede også være en egenværdi for A.

2.2 Similaritet

$A, B \in \mathbb{F}^{n,n}$ B er similær til A hvis der eksisterer en ikke-singulær matrix S således at $B = S^-1AS$.

Similaritet betyder medfører at matricerne har samme rank, determinant, karakteristisk polynomium, geometrisk multiplicitet.

2.3 Theorem 6.1.1

Lad A og B være $n \times n$ matricer. Hvis A og B er similære, så har de to matricer samme karakteristiske polynomium og derved også samme egenværdier.

Lad $p_A(x)$, $p_B(x)$ være de karakteristiske polynomier for A og B. Hvis B er similær til A så eksisterer der en invertibel matrix S sådan at $B = S^{-1}AS$. Derved gælder der:

$$\begin{aligned} p_B(x) &= det(B - \lambda I) \\ &= det(S^{-1}AS - \lambda I) \\ &= det(S^{-1})(A - \lambda I)det(S) \\ &= p_A(x) \end{aligned}$$

Egenværdierne af en matrix er rødderne af det karakteristiske polynomium, da de har samme polynomium har de samme egenværdier. Egenværdierne

2.4 Diagonalmatrix

En diagonalmatrix er en matrix $A \in \mathbb{F}^{n,n}$ hvor:

$$A = \begin{cases} a_{ij} & \text{for i=j,} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Diagonalmatricer er lette at arbejde med, da man f.eks. kan udregne A^2 ved blot at tage diagonalindgangene i anden, og $det(A)$ kan findes ved at gange alle elementerne i diagonalen sammen. Det er dog ikke alle matricer der er diagonaliserbare.

2.5 Diagonaliserbar

$A \in \mathbb{F}^{n,n}$, A er diagonaliserbar hvis der findes en ikke- singulær matrix X således at:

$$X^-1AX = D$$

Hvor D er en diagonalmatrix bestående af A's egenværdier og X diagonaliserer A og har A's egenvektorer som søjlevektorer.

2.6 Theorem 6.3.2

Først antager vi at A har n lineært uafhængige egenvektorer $(x_1, \ldots, x_n)$ med egenværdier $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Lad så $X = [x_1, \ldots, x_n]$. Det følger så heraf at $Ax_j = \lambda_j x_j$ er den j'te søjlevektor for AX, derved får vi:

$$AX = (Ax_1, \ldots, Ax_n) \quad = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= XD$$

Siden X har n lineært uafhængige søjlevektorer, så følger det at X er invertibel hvorved der gælder:

$$D = X^{-1}XD = X^{-1}AX$$

Nu antager vi at A er diagonaliserbar. Og vil så vise at dette betyder at den har n lineært uafh. egenvek.
Da A er diagonaliserbar, eksisterer der en invertibel matrix X sådan at $AX = XD$. Hvis $x_1, \ldots, x_n$ er søjlevektorer af X, så følger der:

$$Ax_j = \lambda_j x_j, \quad (\lambda_j = d_{jj} \,(\text{den jj'te indgang i } D))$$

for ethvert j. Da er λ_j en egenværdi for A og søjlerne i X, x_j, er egenvektorer. Siden søjlevektorerne af X er lineært uafhængige, så følger det at A har n lineært uafh. egenvek.