Lineær algebra noter - Indre produkt

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

24. juni 2014

Indhold

1 Disposition

1. TBD

2 Noter

2.1 Reelt indre produkt

Et indre produkt på vektorrummet V er en operation på V der tildeler et reelt tal til ethvert par af vektorer. Det skrives således: $\langle x, y\rangle$ Der gælder følgende regler:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ med lighed hvis og kun hvis $x = 0$.
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \forall x, y \in V$
3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \forall x, y, z \in V \quad \wedge \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

Et vektorrum med et indre produkt kaldes et indre produktrum. Som eksempel har $\mathbb{R}^n$ det indre produkt defineret som $\langle x, y\rangle = y^T x$.

Det indre produkt for komplekse tal er defineret som:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{u_i} v_i$$

Desuden gælder der for $\mathbb{C}^n$ at: $\langle u, v\rangle = \bar{\langle v, u\rangle}$. $\mathbb{C}^n$ har det indre produkt defineret som $\langle x, y\rangle = y^H x$

2.2 Norm og ortogonalitet

Længden, eller norm, af $v \in V$ hvor V er et indre produktrum er:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

To vektorer v og u er ortogonale såfremt $\langle v, u\rangle = 0$

2.3 Theorem 5.4.1

(Pythagoras) Hvis u og v er ortogonale ($\langle u, v\rangle = 0$) i et inder produktrum V så gælder der:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \qquad &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Altså gælder Pythagoras' lov for et givent indre produktrum.

2.4 Projektion

$V \subseteq \mathbb{C}$ er et indreproduktrum.
Hvis $u, v \in V$, $v \neq 0$ så er skalarprojektionen af u på v:

$$\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|}$$

Vektor projektionen er:

$$p = \alpha \left(\frac{1}{\|v\|} v \right) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

2.5 Theorem 5.4.2

Hvis u og v er tilfældige vektorer i et indre produktrum V, så gælder der:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Lighed iff u og v er lin. afh.

Lemma. Egenskaber for projektionsvektorer

$u, v \in V$ og p er projektionen u på v så gælder der:

1. $u - p$ og p er ortogonale ($\langle u - p, p\rangle = 0$).
2. $u = p$ iff $u = \alpha v$

Bevis for theoremet

Hvis $v = 0$, så er det trivielt at se, at:

$$|\langle u, v\rangle| = 0 = \|u\| \cdot \|v\|$$

Hvis $v \neq 0$, lader vi p være en vektor projektion af u på v.
Siden p er ortogonal til $u - p$ (lemma 1.), så følger det af Pythagoras at:

$$\|p\|^2 + \|u - p\|^2 = \|u - p + p\|^2 = \|u\|^2$$

Derved får vi:

$$\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} = \|p\|^2 = \|u\|^2 - \|u - p\|^2$$

Vi kan gange $\|v\|^2$ ind for at få $\langle u, v\rangle^2$ og får så:

$$\langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u - p\|^2\|v\|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

Da vi ved at $\|u - p\|^2\|v\|^2$ er positivt da det er i anden. Vi får så til sidst:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Hvor lighed kun er gældenden når $u = p$ fordi så bliver $\|u - p\|^2 = 0$. Det følger så af lemmaet at ligheden gælder hvis $v = 0$ eller $u = \alpha v$ altså hvis de er lineært afhængige.