1 Gradient og retningsafledede

Baseret på opgave 2

$$f(x, y) = 13x^2y^3$$

1.1 Gradienten

1.1.1 Partielle afledede

Den partielle afledede af funktionen f er:

$$f_x(x, y) = 2 * 13xy^3 = 26xy^3$$

1.1.2 Beregning af gradienten

Beregn gradienten af funktionen f.

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), 39x^2y^2)$$

1.1.3 Beregning af gradient i punkt

Gradienten af f i punktet (1,-1)

$$\nabla f(1, -1) = (26y^3, 39x^2)$$

1.2 Retningsafledede

1.2.1 Enhedsvektoren

Enhedsvektoren **u** i retningen givet ved vektoren (6,6)

$$u = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 6^2}}(6, 6) = \frac{1}{\sqrt{72}}(6, 6)$$

Enhedsvektoren **u** i retningen givet ved vinklen $\frac{5\pi}{4}$

$$u = (cos(\frac{5\pi}{4}), sin(\frac{5\pi}{4})) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} * \sqrt{2}}(1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

1.2.2 Retningsafledede i punkt

Den retningsafledede $D_u f(1,-1)$ hvor u er enhedsvektoren.

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) * u$$

$$D_u f(1,-1) = 26y^3 * \frac{6}{\sqrt{72}} + 39y^2 * \frac{6}{\sqrt{72}} = \frac{26y^3 * 6 + 39x^2 * 6}{\sqrt{72}}$$

$$\frac{26y^3 * 6 + 39x^2 * 6}{\sqrt{2} * \sqrt{36}} = \frac{26y^3 * 6 + 39x^2 * 6}{\sqrt{2} * \sqrt{6}}$$

$$\frac{26y^3 + 39x^2}{\sqrt{2}} = \frac{26 * (-1)^3 + 39 * 1^2}{\sqrt{2}} = \frac{13}{\sqrt{2}}$$

1.2.3 Største og mindste retningsafledede i punkt

Den enhedsvektor v, der giver den største retningsafledede (den der vokser hurtigst) er:

$$u = \frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x),y|})$$

Den retning hvor f aftager hurtigst er:

$$u = -\frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$$

Den største retningsafledede i punktet (1,-1) er:

$$v = \frac{(26y^3, 39x^2)}{\sqrt{(26y^3)^2 + (39x^2)^2}}$$

$$v = \frac{(-26, 39)}{\sqrt{(-26)^2 + (39)^2}}$$

$$v = \left(\frac{-26}{\sqrt{(-26)^2 + (39)^2}}, \frac{39}{\sqrt{(-26)^2 + (39)^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)$$

1.2.4 Værdien af den største retningsafledede i punkt

Værdien af den største retningsafledede $D_u f(x)$ er $|\nabla f(x)|$

Værdien af den største retningsafledede af f i punktet (1,-1)

$$D_v f(1,-1) = \sqrt{(26y^3)^2 + (39x^2)^2}$$

$$D_v f(1,-1) = \sqrt{(-26)^2 + 39^2)} = 13 * \sqrt{13}$$

2 Egenværdier og egenvektorer

Baseret på opgave 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1 Egenværdier

2.1.1 Det karakteristiske polynomium

Det karakteristiske polynomium $P(\lambda)$ for A er:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = ((1-\lambda) * (-\lambda) * (1-\lambda)) - (-\lambda)$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2$$

2.1.2 Bestemmelse af egenværdierne

Egenværdierne for A er løsningerne til det karakteristiske polynomium:

$$solve(P(\lambda), \lambda)$$

For A bliver det:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2$$

2.2 Egenvektorer

Egenvektorer findes ved $(A - \lambda I)u = 0$ For vores matrix A med egenværdien λ_2 bliver det:

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 1 \\ 1 & 0-0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-0 \end{pmatrix} u = 0$$

Hvis vi bringer matricen på echelon form får vi:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u = 0$$

Vi kan se at der kun er 1 pivot, altså den første kolonne og der er 2 frie variable.
Derfor får vi 2 egenvektorer.
Den første egenvektor finder vi ved at tage den første frie variable, der er den anden kolonne (eller y-variablerne) og flytter y over på den anden side af lighedstegnet.
Hvis vi gør det for alle den første og den anden række og sætter $u_y = 1$ får vi:

$$u_x = x + z = 0$$

$$u_y = 1$$

$$u_z = 0 = 0$$

Og vi får således den første egenvektor til at være:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det samme gør vi så for den tredje kolonne altså z.

$$v_x = x = -z$$

$$v_y = 0 = 0$$

$$v_z = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det er så de to egenvektorer.

2.2.1 Egenrum

Egenrummet udspændes af alle vektorer af formen $t * u$ hvor u er egenvektoren. For vores matrix bliver det $t(0,1,0)$ og $t(-1,0,1)$ Og vi får så vores egenrum til at blive:

$$span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

2.2.2 Beregning af vektor når u er en egenvektor for matricen A

u er en egenvektor for matricen A hørende til egenværdien $\lambda_1 = 0$. Så kan vi beregne følgende vektor:

$$100A^2u + 50u = ?u$$

$$Au = \lambda u$$

$$100\lambda^2 u + 50 = ?u$$

$$100 * 0^2 u + 50u = ?u$$

$$50u = 50u$$

3 Dobbeltintegraler

Baseret på opgave 2

3.1 Partiel integration

For at beregne værdien af det partielle integral

$$\int_{min}^{max} f(x)dx$$

Integrerer vi udtrykket og trækker den nedre grænse fra den øvre grænse.

$$\int_{min}^{max} f(x)dx = [F(x)]_{min}^{max} = F(max) - F(min)$$

$$\int_{0}^{\sqrt[4]{16-x^4}} 4y^3dy = [x^4]_0^{\sqrt[4]{16-x^4}} = \sqrt[4]{16-x^4}^4 - 0^4 = 16 - x^4$$

4 Overbestemte ligningssystemer

Baseret på opgave 2

x	-2	0	2	4
y	1	2	4	5

4.1 Opstilling af overbestemt ligningssystem

For at opstille et ligningssystem på formen Ac=y til bestemmelse af vektoren $c = (c_0, c_1)^T$ laver vi følgende matricer:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ ... & \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

For den givne tabel bliver det:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.2 Normalligningerne

For at udregne normalligningerne $A^T Ac = A^T y$ er det lettest først at finde A^T og gange det ind på A og y og til sidst få en ligning på formen:

$$A^T A \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = A^T y$$

A^T for den givne tabel er:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Så kan vi finde $A^T AogA^T y$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Vi får så normalligningen til:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \end{pmatrix}$$

For at finde c_0 og c_1 ved hjælp af normalligningerne løser vi de to ligninger:

$$4c_0 + 4c_1 = 12$$

$$4c_0 + 24c_1 = 26$$

$$c_0 = \frac{23}{10}, \qquad c_1 = \frac{7}{10}$$

4.3 Afvigelsesvektoren

Afvigelsesvektoren findes ved $Ac - y$ For vores tabel bliver det:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 23 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5 Second derivatives test

Baseret på opgave 2

$$f(x, y) = 1 + 3x - 2y - x^3 + y^2$$

5.1 Kritiske punkter

For at finde de kritiske punkter finder vi de partielle afledte og sætter dem begge lig med 0.

$$f_x = 0$$
$$f_y = 0$$

Og finder så alle løsninger til ligningssystemet.
For funktionen f bliver det:

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 3$$
$$f_y(x, y) = 2y - 2$$
$$-3x^2 + 3 = 0$$
$$2y - 2 = 0$$

Så får vi:

$$(-1, 1), \quad (1, 1)$$

5.2 Den kritiske værdi

Den kritiske værdi kan findes ved at sætte det kritiske punkt ind i funktionen.
For funktionen f bliver det:

$$f(-1, 1) = 1 - 3 - 2 + 1 + 1 = -2$$

5.3 Second derivatives test

Man kan udregne teststørrelsen D i andenordenskriteriet ved at finde de dobbelt afledte og sætte dem ind i følgende ligning:

$$D = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

For funktionen f bliver det:

$$f_{xx} = -6x$$
$$f_{yy} = 2$$
$$f_{xy} = 0$$
$$D = -6x * 2 - 0 = -12x$$

5.4 Arten af det kritiske punkt

For at finde arten af det kritiske punkt kigger man på differential kvotienten og f_{xx}.

D	f_{xx}	art
$D > 0$	$f_{xx}(x, y) > 0$	$f(x, y)$ er et lokalt minimum
$D > 0$	$f_{xx}(x, y) < 0$	$f(x.y)$ er et lokalt maksimum
$D < 0$	Irrelevant	$f(x, y)$ er et saddelpunkt
$D = 0$	Irrelevant	Det er ikke til at sige ud fra denne test

6 Taylorrækker

Baseret på opgave 8923

6.1 Taylorrækker

En taylor serie er defineret som:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + ...$$

6.2 Maclaurinrækken

En Maclaurin række er en taylor række hvor man tager $f(0)$
En Maclaurinrække er defineret som:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ...$$

For $cos(x)$ er en Maclaurin række defineret som:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}...$$

For $sin(x)$ er en Maclaurin række defineret som:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}...$$

6.3 Potensrækker

En potensrækker er defineret som:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ...$$

7 Lagrange ligninger

Baseret på opgavesæt 7543

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy, \qquad g(x, y) = e^{x+y}$$

7.1 Opstilling af Lagrange ligningen

For at opstille en Lagrange ligning med bibetingelsen $g(x, y) = k$ i et punkt (x_0, y_0) udnytter man at:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

og

$$g(x, y) = k$$

Så får man 3 ligninger:

$$f_x = \lambda g_x, \qquad f_y = \lambda g_y, \qquad g(x, y) = k$$

Hvis vi gør det for funktionen f får vi:

$$\nabla f = (2x - y, 2y - x), \qquad \nabla g = (e^{x+y}, e^{x+y})$$

$$2x - y = \lambda e^{x+y}$$

$$2y - x = \lambda e^{x+y}$$

$$e^{x+y} = k$$

Og det er så vores tre Lagrange ligninger

7.2 Ekstemumspunkter

I de tre Lagrange ligninger er der 3 ubekendte, derfor kan man finde ekstremumspunkterne ved at finde alle løsninger til de 3 ligninger. Hvis vi gør dette for f under bibetingelsen $g(x, y) = e^2$ får vi:

$$2x - y = \lambda e^{x+y}$$

$$2y - x = \lambda e^{x+y}$$

$$e^{x+y} = e^2$$

Når vi løser dette ligningssystem får vi punktet $(1, 1)$ som er et muligt ekstremumspunkt

Vi kan se at det er et minimumspunkt da funktionen er uendeligt voksende og derfor kun vil have et enkelt ekstremumspunkt som er et minimums punkt

8 Ortogonale projektioner

Baseret på opgavesæt 4111

Følgende vektorer er i rummet $\Re^3$

$$u = (1, 2, 2), \qquad x = (1, 3, 1)$$

8.1 Længden af vektoren

Her bruger man blot Pythagoras sætning:

$$||v|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

For vektoren x bliver det:

$$||x|| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

8.2 Afstand mellem vektorer

Afstanden mellem to vektorer, givet to vektorer i rummet $\Re^3$ u og v er defineret som $||u - v||$:

$$||u - v|| = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2 + (u_z - v_z)^2}$$

For de givne vektorer x og u bliver det:

$$||u - x|| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 3)^2 + (2 - 1)^2}$$

8.3 Skalarprodukt

Skalarproduktet eller prikproduktet mellem to vektorer, givet to vektorer i rummet $\Re^3$ u og v er defineret som:

$$u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

For de givne vektorer x og u bliver det:

$$u \cdot x = 1 * 1 + 2 * 3 + 2 * 1 = 9$$

8.4 Den ortogonale projektion

Den ortogonale projektion af p af vektoren ω på underrummet U kan skrives som den linearkombination hvor koefficienterne er løsningen på ligningssystemet. Hvis underrummet har dimensionen 3 kan det skrives som:

$$p = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

Hvilket kan skrives som formlen:

$$p = A(A^T A)^- 1 A^T \omega$$

Hvor $A = (v_1, v_2, v_3)$ og v_n er basisvektorer for underrummet.
Den ortogonale projektion v af vektoren x på underrummet U udspændt af vektoren u kan da findes ved:

$$u(u^T u)^{-1} u^t x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da $A = U = span(u) = u$

8.5 Den mindste afstand til et underrum

Givet projektionen p af vektorn v på underrummet U er den mindste afstand:

$$||v - p||$$

For den givne vektor x med projektionen p på underrummet U bliver det:

$$||x - p|| \sqrt{(1-1)^2 + (3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(2)}$$

9 Differential ligningssystemer

Baseret på Opgavesæte 7543

$$y_1' = ay_1 + y_2$$

$$y_2' = ay_1 + y_2$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = a + 1, \qquad \lambda_2 = 1$$

9.1 Løsning af systemer på formen $x' = A * x$

Hvis et ligningssystem har form $x' = Ax$ er løsningen:

$$x(t) = Ce^{At}$$

λ_n og v_n er henholdsvist systemets egenværdier og egenvektorer. Vi kan så finde den fuldstændige løsning ved:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + ...$$

Vi kan se at det givne ligningssystem kan skrives som:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Hvilket passer på $y' = A * y$
Vi kan så finde den fuldstændige løsning til ligningssystemet:

$$y(t) = C_1 e^{(1+a)t} u_1 + C_2 e^{1*t} u_2$$

9.2 Linearkombinationer

Opgave 4111 7.5

En vektor der kan skrives på formen $x_1 v_1 + x_2 v_2$ med $x_1, x_2 \in \Re$ kaldes en linearkombination af vektorerne v_1 og v_2.
Mængden af alle linearkombinationerne af v_1 og v_2 betegnes med $span(v_1, v_2)$
Hvis vi har givet i linearkombinationen: $v = C_1 u_1 + C_2 u_2$ har givet vektorerne v, u_1 og u_2 kan vi finde C_1 og C_2 som to ligninger med to ubekendte

10 Polære koordinater

Baseret på opgave 7543

$$D = sin(x^2 + y^2)$$

10.1 Området D i polære koordinater

Når man skal beskrive et område i polærekoordinater bruger man formen:

$$\{(r, \theta)|u \leq \theta \leq v, R_1 \leq r \leq R_2\}$$

Hvor u er den mindste vinkel (i radianer) og v er den største. R_1 er den mindste radius og R_2 er den første.
For D bliver det:

$$\{(r, \theta)|0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 3\}$$

11 Matrix regning

11.1 Matrix multiplikation $(A * B)$

For at gange to matricer sammen skal man gange rækker med søjler. Man tager det første tal i den første række i den første matrix og ganger det ind på det første tal i den første kolonne i den anden matrix og lægger det sammen med det andet tal i den første række i den første matrix og lægger det sammen med det andet tal i den anden kolonne i den anden matrix for at finde det andet tal i anden kolonne i første række.
Altså:

```
1. række * 1. søjle = 1.tal i 1. række.
2. række * 1. søjle = 1.tal i 2. række.
1. række * 2. søjle = 2.tal i 1. række.
3. række * 2. søjle = 2.tal i 3. række.
```

11.2 Transponering (A^T)

Når man transponerer en matrix spejlvender og roterer man den. Dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Note: $A * B = A^T B$

12 Pensum

[**L**] **5** Projektioner og ortogonalitet

[**L**] **6** Egenværdier og egenvektorer

[**S**] **8.5** Potensrækker

[**S**] **8.6** Represæntation af funktioner ved potensrækker

[**S**] **8.7** Taylor- og Maclaurin rækker

[**S**] **11.6** Retningsafledet og gradient vektoren

[**S**] **11.7** Maksimums- og minimumsværdier

[**S**] **12.3** Dobbeltintegraler over generelle områder

[**S**] **12.4** Dobbeltintegraler i polære koordinater