Lineær algebra noter - Lineære differentialligninger

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

24. juni 2014

Indhold

1 Disposition

1. TBD

2 Noter

2.1 Lineært differentialligningssystem

Der er forskel på et differentialligningssystem og et lineært ligningssystem.
Et lineært differentialligningssystem er et system af m ligninger med n ubekendte, hvor disse kan skrives som:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\quad\cdots \\ y_m' &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{aligned}$$

$$y_i : I \to \mathbb{K}^n$$

Kan også skrives på matrix form som:

$$Y' = AY \tag{1}$$

2.2 Løsningsform

For $n = 1$ kender vi løsningen som:

$$y' = ay \implies y(t) = ce^{at}$$

En generel løsning for $n > 1$ er:

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ x_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} x$$

2.3 Bevis for løsningsform

Hvis man differentiere $e^{\lambda t} x$ får vi:

$$Y' = \lambda e^{\lambda t} x = \lambda Y$$

Vi vil nu vise $AY = \lambda Y = Y'$, hvilket vi kan gøre hvis vi vælger λ til at være en egenværdi for A og x den tilhørende egenvektor. Så får vi:

$$AY = Ae^{\lambda t} x = \lambda e^{\lambda t} x = \lambda Y = Y'$$

$Ae^{\lambda t} x$ svarer til at gange a på en skaleret egenvektor derfor kan A erstattes med λ.

2.4 Lineærkombination er også en løsning

Hvis Y_1 og Y_2 begge er løsninger til $Y' = AY$, så er lineærkombinationen af disse også en løsning.

2.5 Bevis for lineærkombination

Vi skal vise at $Y' = A(\alpha Y_1 + \beta Y_2)$

$$\begin{aligned} (\alpha Y_1 + \beta Y_2)' &= \alpha Y_1' + \beta Y_2' \\ &= \alpha A Y_1 + \beta A Y_2 \\ &= A(\alpha Y_1 + \beta Y_2) \end{aligned}$$

Nu er du fucked.