E4DSA eksamensnoter

January 12, 2015

1 Analyse af digitale signaler med DFT og spektrogram

DFT i eksponential form:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} \tag{1}$$

I rektangulær form:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot [\cos(2\pi nm/N) - j \cdot \sin(2\pi nm/N)] \tag{2}$$

Eulers relation:

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \tag{3}$$

DFT er baseret på at signalet ikke ændrer sig over tid, og det er upraktisk at køre DFT på store signaler.

Derfor spektrogram:

$$X(k,n) = \sum_{m=0}^{L-1} w(m)x(n+m)e^{-j(2\pi k/N)m} \tag{4}$$

Vindue og DFT på forskellige dele af signalet.

2 Spektral forbredning, zero-pedding og window funktioner i relation til DFT

DFT er begrænset til:

$$f_{analysis}(m) = \frac{mf_s}{N}, m = 0, \ldots, N-1 \tag{5}$$

DFT'en er kun præcis hvis alle frekvenserne i signalet passer ind i $\frac{mf_s}{N}$. Hvis der er en sinus med en frekvens der ligger lidt ved siden af, vil der være lækage.

Zero-padding gør at man kan interpolere i DFT-resultatet men det giver ikke bedre frekvensopløsning. N-zeros giver dobbelt så mange bins i DFT'en. Kan bruges til at visualisere vinduers lækage, da $\frac{mf_s}{N*x}$

Vinduer reducerer de sidelobes der kommer af lækage, det rektangulære vindues pludselige skift fra 1 til 0 er grunden til lækagen, et bedre vindue kan reducere lækage.

3 FIR/IIR filter analyse og design vha. pladsering af poler/nuller

Normaliseret frekvens er vinkel af frekvensen:

$$\theta = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_c}{f_s} \tag{6}$$

Så kan man finde filter koefficienterne ved:

$$H(z) = \frac{G \cdot (z - z_0) \cdot (z - z_1)}{(z - p_0) \cdot (z - p_1)}$$

Lavpas: Begge nuller i -1, højpas: begge nuller i 1, bandreject: nuller på periferien med samme vinkel som polerne, højpas: nuller i 1 og -1.

4 Windowmethod til FIR filter design

Design det optimale filter i frekvens-domænet, kør en invers-DFT så får man impulsresponsen for det optimale filter. Dette impulsrespons er dog uendeligt så man skal beslutte sig for en vindues-længde, der bliver én mindre end antallet af koefficienter i filteret.

Herefter skal man påføre et vindue for at forbedre impulsresponsen, da det rektangulære vindue har ripples.

Et all-pass filter er blot det filter hvor center frekvensen (b_0) er 1 og resten 0.
Et high-pass filter designet ved at trække et low-pass filter fra et all-pass filter.
Et band-pass filter kan designes ved at shifte et lav-pas filter (gange med sinus af f_c)

5 Bilinear transformation IIR filter design

2nd-order chebychev lowpass filter:

$$H_c(s) = \frac{c}{s^2 + bs + c}$$

Hvor: $b = 137.945$, $c = 17410.145$.
Så indsætter man: $\frac{2}{t_s} \cdot \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$ i stedet for s, for at mappe fra s- til z-plan:

$$H(z) = \frac{c}{\left(\frac{2}{t_s} \cdot \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right)^2 + b\left(\frac{2}{t_s} \cdot \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right)^2 + c}$$

6 Interpolation og decimation

Decimation:

$$Lavpas \rightarrow Decimer$$

Interpolation:
Udfyld med $L - 1$ 0'er ind imellem samples. Lavpas filtrer for at fylde 0'erne.
Up-sampling med ikke hel-tal:

- Udregn således at $faktor = \frac{L}{M}, L > M$
- Up-sample med faktor L
- Down-sample med faktor M

Down-sampling med ikke hel-tal:

- Udregn således at $faktor = \frac{M}{L}, M > L$
- Up-sample med faktor L
- Down-sample med faktor M

7 Stokastiske signaler, herunder middelværd, varians, sandsynligheds-tæthedsfunktion og histogram

Middelværdi:

$$x_{ave}\frac{x(1,\ldots,N)}{N}$$

Varians:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[x(n) - x_{ave}]^2$$

σ er gennemsnittet af afvigelsen fra middelværdien.
Bessel's correction:

$$\sigma^2_{unbiased} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}[x(n) - x_{ave}]^2$$

Histogram er muligheder ud af x-aksen og antallet af optrædender op af y-aksen.

8 Beregning af SNR i tids- og frekvens-domænet

8.1 Tidsdomæne:

$$SNR = \frac{Signaleffekt}{Noiseeffekt}$$

Da signal og støj er uafhængigt så er:

$$x(n) = x_n(n) + x_s(n)$$

Og da har man at:

$$SNR = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} [x_s(n)]^2}{\sum_{n=0}^{N-1} [x_n(n)]^2}$$

Og vi har også at:

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \sigma_s^2$$

Hvis signalet har 0 ved middelværdi f.eks. sinuskurve der er symmetrisk omkring x-aksen.

$$SNR = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$$

8.2 Frekvensdomæne:

Estimat:

$$SNR = \frac{\sum |X(m)|^2 \text{ iff. } |X(m)| > Threshold}{\sum |X(m)|^2 \text{ iff. } |X(m)| < Threshold}$$

Threshold er en vurderingssag.

9 Midlingsfiltre

Bruges til at fjerne støj,
FIR:

$$y(n) = \frac{1}{N}\left[x(n), \ldots, x(n-N+1)\right]$$

IIR:

$$y(n) = \frac{1}{N}\left[x(n) - x(n-N)\right] + y(n-1)$$

$$H_{ma}(z) = H_{rma}(z)$$

Output noise power:

$$\sigma_{out}^2 = \frac{\sigma_{in}^2}{N}$$

Exponentielt midlingsfilter har hurtigere responstid og kan have et N der ikke er et heltal.

$$y(n) = \alpha x(n) + (1 - \alpha) y(n - 1)$$

$$\alpha = \frac{2}{N - 1}$$

Jo højere α jo skarpere indsvingningstid men mere støj. Skift alpha over tid er tit brugt i praksis.

10 Case 1 - FSK transmission

11 Case 2 - Audio filter

12 Case 3 - Vejecelle