Lineær algebra noter - Matricer og lineære transformationer

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

24. juni 2014

Indhold

1 Disposition

1. TBD

2 Noter

2.1 Lineær transformation

En afbildning L fra et vektorrum V til W kaldes en lineær transformation hvis den respekterer lineær struktur, dvs.:

$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$$

$\forall v_1, v_2 \in V \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

Lineære transformationer fra V til W skrives som:

$$L : V \to W$$

Af definitionen for lineære transformation følger:

$$L(0_v) = 0_w$$

$$L(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i L(v_i)$$
$$L(-v) = -L(v)$$

2.2 Kernen

Kernen $ker(L)$ er alle de vektorer v hvor $L(v)$ giver nulvektoren. Skrevet formelt som:

Lad $L : V \to W$. Da er kernen af L:

$$ker(L) = \{v \in V | L(v) = 0_w\}$$

2.3 Billedet/Range

$L : V \to W$ er en lineær tranformation og lad S være et underrum af V. Billedet af S, skrevet $L(S)$ er defineret som:

$$L(S) = \{w \in W | w = L(v), v \in S\}$$

Billedet af et komplet vektorrum, $L(V)$, kaldes for range L.

2.4 Theorem 4.1.1

Hvis $L : V \to W$ er en lineær transformation og S er et underrum af V, så gælder der:

i $ker(L)$ er et underrum af V.

ii $L(s)$ er et underrum af W.

Det er trivielt at $ker(L)$ ikke er tom, da nulvektoren 0_v er i $ker(L)$.
For at bevise (i) skal $ker(L)$ være lukket under skalarmultiplikation og addition af vektorer. Hvis $v \in ker(L)$ og α er en skalar, så gælder der:

$$L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha 0_w = 0_w$$

Derfor er $\alpha v \in ker(L)$. Altså er $ker(L)$ lukket under skalarmultiplikation.

$v_1, v_2 \in ker(L)$ så gælder der:

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w$$

Derfor lukket under vektoraddition.

Beviset for (ii) minder om det foregående. $L(S)$ er ikke-tom da $0_w = L(0_v) \in L(S)$. Hvis $w \in L(S)$, så er $w = L(v)$ for nogle $v \in S$
For $\alpha in \mathbb{F}$ gælder der:

$$\alpha w = \alpha L(v) = L(\alpha v)$$

Siden $\alpha v \in S$ så følger det at $\alpha w \in L(S)$ - lukket under skalar.
Hvis $w_1, w_2 \in L(S)$, så eksisterer $v_1, v_2 \in S$ således at $L(v_1) = w_1$ og $L(v_2) = w_2$. Altså gælder der:

$$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2)$$

Derfor lukket under addition.

2.5 Theorem 4.2.1

Hvis $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så eksisterer $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ således at:

$$L(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Faktisk er den j'te søjlevektor for A givet ved:

$$a_j = L(e_j) \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n$$

For $j = 1, \ldots, n$ defineres:

$$a_j = L(e_j)$$

matricen A dannes ved:

$$A = (a_{ij}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

En arbitrær vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kan skrives som koefficienter ganget med elementær vektorer:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Hvor e_i er:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ i'te indgang}$$

Så gælder der:

$$\begin{aligned} L(x) &= x_1 L(e_1) + x_2 L(e_2) + \cdots + x_n L(e_n) \\ &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n \\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= Ax \end{aligned}$$