Lineær algebra noter - Vektorrum og underrum

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

24. juni 2014

Indhold

1 Disposition

1. Vektorrum
2. Underrum
3. Spanning set
4. Basis

2 Noter

2.1 Vektorrum

$$\forall u, v, w \in V, \forall a, b \in \mathbb{F}$$

Vektoraddition:

- Er associativ

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

- Er kommutativ
$$v + w = w + v$$
- Har en additionsidentitet
$$v + 0 = v$$
- Har additive inverser
$$v + (-v) = 0$$

Skalarmultiplikation:

- Er distributiv
$$a(v + w) = av + aw$$
$$(a + b)v = av + bv$$
- Er kompatibel med multiplikation ilegemet af skalarer
$$a(bv) = (ab)v$$
- Har et identitetselement
$$1v = v$$

2.2 Elementære egenskaber ved vektorrum

Følgende egenskaber gælder for vektorrum:

1. Nulvektoren $0 \in V$ er unik
$$0_2 + v = v$$
$$0_1 + v = v$$
$$0_1 = 0_2 = 0$$
2. Skalarmultiplikation med 0 giver nulvektoren 0.
$$0v = 0$$
3. Skalarmultiplikation med nulvektoren giver altid nulvektoren
$$a0 = 0$$
4. Ingen andre skalarmultiplikationer giver nulvektoren
$$av = 0 \text{ iff } a = 0 \vee v = 0$$
5. Den additive invers $-v$ af en vektor v er unik
$$w_1 \text{ og } w_2 \text{ er additive inverser af } v \in V \implies v{+}w_1 = 0 \quad \wedge \quad v{+}w_2 = 0 \implies w_1 = w_2 = -v$$
6. Skalarmultiplikation med -1 giver den additive invers
$$-1v = -v$$
7. Negering flyttes frit
$$(-a)v = a(-v) = -(av)$$

2.3 Underrum

$S \subseteq V$ S er et underrum af V såfremt det er lukket under addition og skalar-multiplikation:

1. Hvis $u, v \in S$ så gælder der: $u + v \in S$
2. Hvis $a \in \mathbb{F}$ og $v \in S$, så gælder der: $av \in S$.

2.4 Spanning set

$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ hvis:

$$\forall x \in V, \exists c_1, c_2, \ldots, c_n : x = c_1v_1, c_2v_2, \ldots, c_nv_n$$

Altså x er en lineær kombination af vektorerne i spanning sættet.

2.5 Basis

Et spanning sæt er en basis hvis disse er lineært uafhængige.

2.6 Lineær uafhængighed

Et sæt $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at linear kombinationen imellem dem kun giver 0 når alle c_i'erne er 0.

Hvis der eksisterer et $c_i \neq 0$ så vil mindst en af vektorerne kunne skrives som en linear kombination af de andre.

2.7 Theorem 3.3.1

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ lin. afh. iff } X \text{ singulær}$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$$
$$Xc = 0$$

Xc har ikke-trivielle løsninger hvis og kun hvis X er singulær. Hvis X ikke er singulær, er den invertibel. Hvis X er invertibel findes der en invers matrix X^{-1} som man kan gange på ligningen:

$$X^{-1}Xc = 0X^{-1}$$

$$c = 0 \implies lin.uafh.$$

2.8 Theorem 3.4.1

Hvis $V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ så for ethvert sæt hvor $V = span(u_1, u_2, \ldots, u_m), m > n$ så er u_i'erne indbyrdes lineært afhængige.

Da $V = span(v_1, v_2, \ldots, \vDash_n)$ og $x \in V$ for $i = 1, \ldots, m$ kan skrives som en linearkombination af både v_j'erne og u_i'erne, må de to linearkombinationer være lig med hinanden da de begge er lig med x.

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j, a_{ji} \in \mathbb{F}$$

For at finde ud af om u_i'erne er uafhængige må der ikke være en ikke-triviel løsning til:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0$$

Hvis vi erstatter u_i med en linearkombination af v_j'erne får vi:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ji} c_i) v_j$$

Hvis vi nu nøjes med at kigge på produktet af $a_{ji} c_i$ får vi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} c_i = 0, \text{ for } j = 1, \ldots, n$$

Her er der flere ubekendte end der er ligninger da $m > n$, det er desuden et homogent system $(b = 0)$ derfor gælder teorem 1.2.1 der siger at der må være en ikke-triviel løsning.

Vi skal nu vise at løsninger til:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} c_i = 0, \text{ for } j = 1, \ldots, n$$

også er løsninger til:

$$\hat{c_1} u_1 + \hat{c_2} u_2 + \cdots + \hat{c_m} u_m = 0$$

Hvor $\{\hat{c_1}, \ldots, \hat{c_m}\}, c_i \neq 0$ for flere c_i'er.
Hvilket løsningerne er, da vi kan indsætte 0:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} 0 v_j = 0$$

2.9 Theorem 3.4.3

V er et vektorrum, $dim(V) = n > 0$. Ethvert spanning set med $m > n$ vektorer kan transformeres til en basis for V.

Tag udgangspunkt i 3.4.1, der vil være en u_m som kan elimineres fra sættet, fordi den kan skrives som en lineærkombination af de andre og de øvrige $m-1$ vil stadig være frembringere for V. Så længe $m-1 > n$ kan denne process gentages, og når $m \leq n$ så vil $u_1, \ldots, u_m$ være en basis for V.