Lineær algebra noter - Lineære uafhængighed

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

14. august 2014

Indhold

1 Disposition

1. TBD

2 Noter

2.1 Lineær uafhængighed

Et sæt $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at linear kombinationen imellem dem kun giver 0 når alle c_i'erne er 0.

Hvis der eksisterer et $c_i \neq 0$ så vil mindst en af vektorerne kunne skrives som en linear kombination af de andre.

2.2 Spanning set

$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ hvis:

$$\forall x \in V, \exists c_1, c_2, \ldots, c_n : x = c_1 v_1, c_2 v_2, \ldots, c_n v_n$$

Altså x er en lineær kombination af vektorerne i spanning sættet.

2.3 Basis

Et spanning sæt er en basis hvis disse er lineært uafhængige.

2.4 Theorem 3.3.1

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ lin. afh. iff } X \text{ singulær}$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$$
$$Xc = 0$$

Xc har ikke-trivielle løsninger hvis og kun hvis X er singulær. Hvis X ikke er singulær, er den invertibel. Hvis X er invertibel findes der en invers matrix X^{-1} som man kan gange på ligningen:

$$X^{-1}Xc = 0X^{-1}$$

$$c = 0 \implies lin.uafh.$$

2.5 Theorem 3.4.1

Hvis $V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ så for ethvert sæt af vektorer i V $(u_1, u_2, \ldots, u_m), m > n$ så er u_i'erne indbyrdes lineært afhængige.

Da $V = span(v_1, v_2, \ldots, \vDash_n)$ kan u_i'erne skrives som en linearkombination af v_j'erne.

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{F}$$

For at finde ud af om u_i'erne er uafhængige må der ikke være en ikke-triviel løsning til:

$$\sum_{i=1}^{m} c_iu_i = 0$$

Hvis vi erstatter u_i med en linearkombination af v_j'erne får vi:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}c_i)v_j$$

Hvis vi nu nøjes med at kigge på produktet af $a_{ij}c_i$ får vi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i = 0, \text{ for } j = 1, \ldots, n$$

Her er der flere ubekendte end der er ligninger da $m > n$, det er desuden et homogent system ($b = 0$) derfor gælder teorem 1.2.1 der siger at der må være en ikke-triviel løsning.

Vi skal nu vise at løsninger til:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i = 0, \text{ for } j = 1, \ldots, n$$

også er løsninger til:

$$\hat{c_1} u_1 + \hat{c_2} u_2 + \cdots + \hat{c_m} u_m = 0$$

Hvor $\{\hat{c_1}, \ldots, \hat{c_m}\}, c_i \neq 0$ for flere c_i'er.
Hvilket løsningerne er, da vi kan indsætte 0:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} 0 v_j = 0$$