Lineær algebra noter - Determinanter

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

24. juni 2014

Indhold

1 Disposition

1. TBD

2 Noter

2.1 Determinant

Determinanten for en $n \times n$ matrix A er:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Hvor A_{ij} for $1 \leq i, j \leq n$ siges at være den (i, k)'te cofaktor af A givet som:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M(A)_{ij})$$

OBS: hvis $n = 1$ så er determinanten blot a_{11}
En matrix A er invertibel såfremt $det(A) \neq 0$, dette hedder også at A ikke er singulær.

2.2 Egenskaber ved determinanter

- For enhver $n \times n$ matrix A har vi $det(A) = det(A^T)$
- Hvis en matrix er triangulær, kan determinanten findes ved blot at finde produktet af diagonalelementerne.
- Hvor to rækker el. søjler af en $n \times n$ matrix er ens, så er $det(A) = 0$.
- Hvis to rækker af en $n \times n$ matrix byttes om, så er $det(A') = -det(A)$.
- Hvis en række ganges med en skalar r bliver determinanten $r \cdot det(A)$
- Hvis et multiplum af en række bliver adderet til en anden række, så forbliver determinanten den samme.

De sidste 3 = ERO'er.

2.3 Theorem 2.1.2

Hvis A er en $n \times n$ matrix så er $det(A^T) = det(A)$.

Vha. induktion.
Basistilfældet er nemt da vi har en 1×1 matrix som er symmetrisk hvorved $A^T = A \implies det(A^T) = det(A)$.
I induktionshypotesen antager vi nu at det gælder for $k \times k$, så skal vi i induktionsskridtet se om det holder for $k + 1 \times k + 1$.
Vi starter med at lave cofaktor-ekspansion på første række af den nye A:

$$det(A) = a_{1,1}det(M_{1,1}) - a_{1,2}det(M_{1,2}) + \cdots \pm a_{1,k+1}det(M_{1,k+1})$$

M_{ij}'erne må være $k \times k$ matricer fordi de er er A med en række og en søjle fjernet. $(k + 1 - 1)$. Så følger det af induktionshypotesen at (da det gælder for $k \times k$ matricer):

$$det(A) = a_{1,1}det(M_{1,1}^T) - a_{1,2}det(M_{1,2}^T) + \cdots \pm a_{1,k+1}det(M_{1,k+1}^T)$$

Nu er cofaktor-ekspansion af første række af A nu blot lig med cofaktor-ekspansion af første søjle af A^T. Derved må der gælde:

$$det(A^T) = det(A)$$

Det er første søjle fordi at man først tager minoren og derefter transponerer.

2.4 Theorem 2.2.2

En $n \times n$ matrix A er singulær hvis og kun hvis:

$$det(A) = 0$$

A kan blive reduceret til REF vha. et endeligt antal ERO'er:

$$U = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$$

hvor U er i REF og E_i'erne er elementærmatricer. Det ses så:

$$\begin{aligned} det(U) &= det(E_k E_{k-1} \dots E_1 A) \\ &= det(E_k) det(E_{k-1}) \dots det(E_1) det(A) \end{aligned}$$

Siden determinanterne af E_i'erne alle er ikke-nul, så følger det at $det(A) = 0$ hvis og kun hvis $det(U) = 0$. Hvis A ikke er singulær, så er U triangulær med 1'er ned langs diagonalen og derved er $det(U) = 1$.
Altså er A singulær hvis og kun hvis $det(A) = 0$.

Uddyb elementær matricer.. Hvad kaldes e_i?

2.5 Note. Adjungerede matrix

Note: $For 1 \leq i, j \leq n$ er den (i, j)'te kofaktor A_{ij} af A givet som:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M(A)_{ij})$$

Den adjungerede til $A \in \mathbb{F}^{n,n}$ er en matrix hvor hver indgang a_{ij} er erstattet med dets kofaktor A_{ij} og matricen er transponeret.

Det følger at:

$$A(adj(A)) = det(A)I$$

Og hvis A ikke er singulær kan det skrives om til:

$$I = A(\frac{1}{det(A)} adj(A)) \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

2.6 Theorem 2.3.1

(Cramers regel) Lad A være en $n \times n$ invertibel matrix og lad $b \in \mathbb{R}^n$. Lad A_i være matrixen der fås ved at erstatte den i'te søjle i A med b. Den entydige løsning til systemet $Ax = b$ er givet ved;

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \; i = 1, \dots, n$$

A^{-b} er den entydige løsning til $Ax = b$. Så vi har

$$x = A^{-1} b = \frac{1}{det(A)} adj(A) b$$

Og for $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} x = A^{-1} b &= \frac{1}{det(A)} (\text{i'te række i } adj(A)) b \\ &= \frac{1}{det(A)} (A_{1i} b_1 + \dots + A_{ni} b_n) \\ &= \frac{det(A_i)}{det(A)} \end{aligned}$$

$det(A_i) = (A_{1i} b_1 + \dots + A_{ni} b_n)$ fordi at A_i er A med den i'te søjle byttet ud med b og $adj(A)_{ji} = A_{ji} = (-1)^{i+j} det(M(A)_{ij})$

2.7 Eks. Cramers regel 2×2 matrix

Vi antage vi har følgende lineære ligningssystem:

$$ax + by = e \, cx + dy = f$$

Som kan skrives som:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Så kan x og y findes vha. Cramers regel:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

Og..

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$