Lineær algebra noter - Ortogonalt komplement og projektion

Lukas Peter Jørgensen, 201206057, DA4

24. juni 2014

Indhold

1 Disposition

1. TBD

2 Noter

2.1 Ortogonalt komplement

Det ortogonale komplement $W^\perp$ til underrummet W af $\mathbb{R}^n$ er mængden af alle de vektorer der er ortogonale på alle vektorer i W.

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | v^T u = 0 \forall u \in W\}$$

Dette medfører:

1. $W^\perp$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.
2. $dim(W^\perp) = n - dim(W)$.
3. $(W^\perp)^\perp$ - hvilket betyder det ortogonale komplement af $W^\perp$ er W.
4. Enhver vektor b i $\mathbb{R}^n$ kan blive udtrykt $b = b_w + b_{w^\perp}$ for $b_w \in W$ og $b_{w^\perp} \in W$

2.2 Theorem 5.2.4

Hvis S er et underrum af $\mathbb{R}^n$, så er $(S^\perp)^\perp = S$.

Hvis $x \in S$ så er x ortogonal til enhver y i $S^\perp$. Derved er $S \subseteq (S^\perp)^\perp$.

Omvendt, hvis $z \in (S^\perp)^\perp$ kan z skrives som $z = u + v, \quad u \in S, v \in S^\perp$ fordi at $\mathbb{R}^n = S \bigoplus S^\perp$. Da $v \in S^\perp$ er ortogonal til både u og z. Så følger det at:
($x^T y = \langle x, y \rangle$ for $\mathbb{R}$)

$$0 = v^T z = v^T u + v^T v = v^T v$$

Derved må $v = 0$. Vi får så at $z = u \in S$ derved er $S = (S^\perp)^\perp$

2.3 Korollar 5.5.9

$\{u_1, \ldots, u_m\}$ er en ortonormal basis for $S \in \mathbb{R}^m$ og $b \in \mathbb{R}^m$. $U = (u_1, \ldots, u_m)$

Theorem 5.5.8 siger at projektionen p af b på S er:

$$p = c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = Uc$$

Hvor

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} = U^T b$$

Derved får vi:

$$p = UU^T b$$

2.4 Projektionsmatrix

Hvis $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ er en ortonormal basis for $S \in \mathbb{R}^m$
0 og $U = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ så er projektionen p af $b \in \mathbb{R}^m$ på S givet ved:

$$p = UU^T b$$

Matricen UU^T er en projektionsmatrix til underrummet S, denne projektionsmatrix er unik.

2.5 Bevis for unikhed

Hvis P er en projektionsmatrix tilhørende et underrum S af R^m, så er projektionen p af b på S unik.
Hvis Q også er en projektionsmatrix tilhørende S så er:

$$Qb = p = Pb$$

Det følger heraf at:

$$q_j = Qc_j = Pc_j p_j$$