

Keplera Likumi

1 Ievads

Jau kopš sengrieķu laikiem ir zināms, ka debess ķermeņus iespējams iedalīt vairākās grupās. Lielākā daļa redzamo objektu ir zvaigznes, kas atrodas pārāk tālu, lai cilvēka mūža laikā to izvietojums ievērojami mainītos, bet iespējams identificēt arī klejojošās zvaigznes (jeb planētas), kuru novietojums attiecībā pret stacionāro zvaigznāju fonu laika gaitā mainās. Līdz 15. gs. populārajam ģeocentriskajam modelim šo kustību izskaidrot bija grūtības¹, taču, pielietojot heliocentrisko sistēmu un Tiho Brahes precīzos planētu pozīciju mērījumus, Johanness Keplers atklāja 3 empīriskus likumus, kas apraksta visu tajā laikā zināmo planētu kustību. Vēl 100 gadus vēlāk Īzaks Ņūtons parādīja, ka visi 3 Keplera likumi loģiski seko no viņa postulētā universālā gravitācijas likuma, kas deva Ņūtona teorijām spēcīgu eksperimentālu pamatojumu. Mūsdienās divu gravitacionāli saistītu ķermeņu problēma (kas ir Keplera likumu pamatā) tiek plaši izmantota gan astrofizikā, gan inženierzinātnēs, piemēram, satelītu orbītu aprēķināšanai.

2 Matemātiska prelūdijs

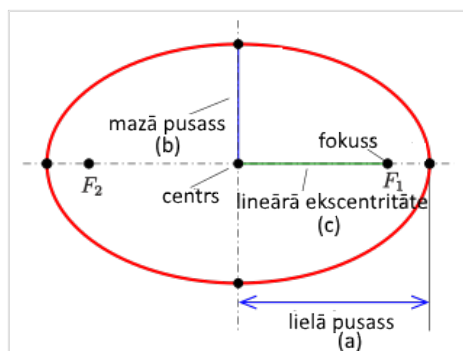
Keplers savus likumus formulēja, izmantojot ģeometriju, tāpēc nedaudz atkārtosim galvenās idejas, ar ko saskarsimies. Ķermeņu orbītas gravitācijas potenciālā ir konusa šķēlumi², no kuriem svarīgākās ir elipses, kas apraksta gravitacionāli saistītas sistēmas.

Definīcija 2.1 *Izvēlies plaknē divus punktus F_1 un F_2 , kurus no šī brīža sauksim par elipses fokusa punktiem. Pati elipse ir visu to punktu kopa, kuru fokālo attālumu summa ir konstanta.*

Definīcija 2.2 *Elipses centrs ir punkts, kas atrodas uz līnijas, kas savieno abus fokusa punktus, turklāt tas ir vienādā attālumā no abiem fokusiem. Elipses lielā pusass (a) ir maksimālā garuma nogrieznis starp tās centru un pašu elipsi. Elipses īsā pusass (b) ir minimālā garuma nogrieznis starp tās centru un pašu elipsi.*

¹Piemēram, Ptolemaja izveidotā epiciklu un deferentu sistēma bija ārkārtīgi ģeometriski sarežģīta un ilgākos laika posmos neprecīza. Lielākās problēmas sagādā ārejo planētu kustības virziena maiņa to opozīcijas laikā, kas piespieda viduslaiku astronomus ieviest apmēram 80 dažādus riņķus to orbītu izskaidrošanai!

²Konusa šķēlumus iegūst apskatot šķēlumu starp plakni un konusu. Tie ir riņķa līnija, elipse, parabola un hiperbola. Interesanti, ka jebkura kvadrātiska līkne ietilpst vienā no šīm grupām.



Varam ievērot, ka elipses var būt ļoti dažādas, un, atšķirībā no riņķiem un parabolām, ne visas elipses ir līdzīgas viena otrai. Piemēram, gadījumā, kad $F_1 = F_2$, iegūstam riņķa līniju. Lai klasificētu visas līdzīgās elipses, var ieviest ideju par ekscentritāti - visas elipses ar vienādu ekscentritāti ir līdzīgas viena otrai.

Definīcija 2.3 *Elipses lineārā ekscentritāte (c) ir attālums no tās centra līdz fokusa punktam. Elipses ekscentritāte (e) ir attiecība $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.*

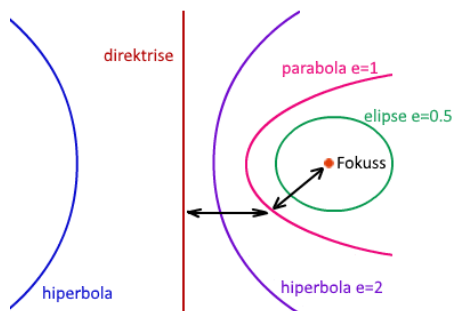
Ideju par ekscentritāti iespējams vispārināt uz visiem koniskajiem šķēlumiem. Tabula 1 parāda šo saistību.

Ekscentritāte	Figūra
$e=0$	riņķa līnija
$0 < e < 1$	elipse
$e=1$	parabola
$e > 1$	hiperbola

Tabula 1: Katru $e \geq 0$ var asociēt ar konisku šķēlumu.

Šajā gadījumā ir izdevīgi ieviest ideju par direktrisi - līniju, kas nosaka figūru formu attiecībā pret fokusa punktu. Precīzu definīciju varat apskatīties, piemēram, Wikipedia rakstā *Conic Section*.

Att. 1: Konstrukcija un salīdzinājums starp dažādiem koniskajiem šķēlumiem.



3 Keplera likumi

Kā jau iepriekš minēju, Keplera likumi tika atklāti empīriski un to teorētiskais pamatojums tika izveidots vēlāk. Pirms mēs iedziļināties likumu būtībā, ir vērts apskatīt to ierobežojumus:

- Planētu kustība neietekmē Sauli (t.i. $M_{\odot} \gg M_{plan}$)
- Ir iespējams ignorēt korekcijas no vispārīgās relativitātes (parasti $e \ll 1$).

Šie pieņēmumi ar diezgan lielu precizitāti piepildās visām Saules sistēmas planētām³ un arī citiem Saules vai citu smagu objektu satelītiem. Tad nu ķersimies vēršam pie rāgiem un formulēsim pašus likumus!

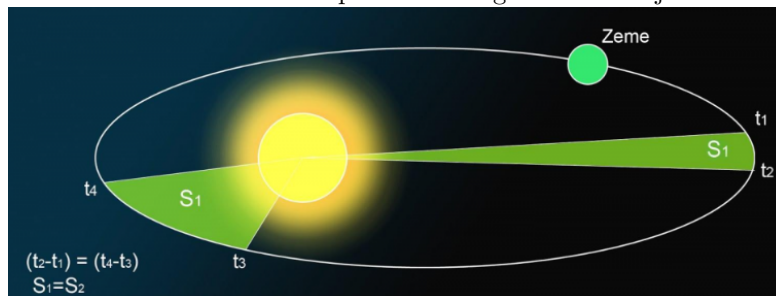
Keplera likums 3.1 *Planētu orbītas ir elipses, turklāt Saule atrodas vienā no fokusa punktiem.*

Keplera likums 3.2 *Vienādos laika intervālos planētas noklāj vienādus laukumus attiecībā pret nogriežņiem, kas vilkti no Saules.*

Keplera likums 3.3 *Divu planētu apriņķošanas perioda kvadrāti attiecas tāpat kā to lielu pusasu kubi ($T^2 \propto a^3$).*

Lai gan Keplera likumi šķiet primitīvi, tie īstenībā satur pilnīgi visu informāciju par orbītu dinamiku. Piemēram, iedomāsimies speciālgadījumu, kad orbītas ir riņķa līnijas - otrais likums apgalvo, ka planētu kustībai ir jābūt vienmērīgai, savukārt trešais saista orbītas rādiusu ar tās periodu. Gluži tāpat varam atrisināt arī vispārīgo gadījumu, kad no otrā likuma iegūstam $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$ (vienādojuma labā puse ir pilnā laukuma attiecība pret periodu).

Att. 2: Pirmo divu Keplera likumu grafisks attēlojums.

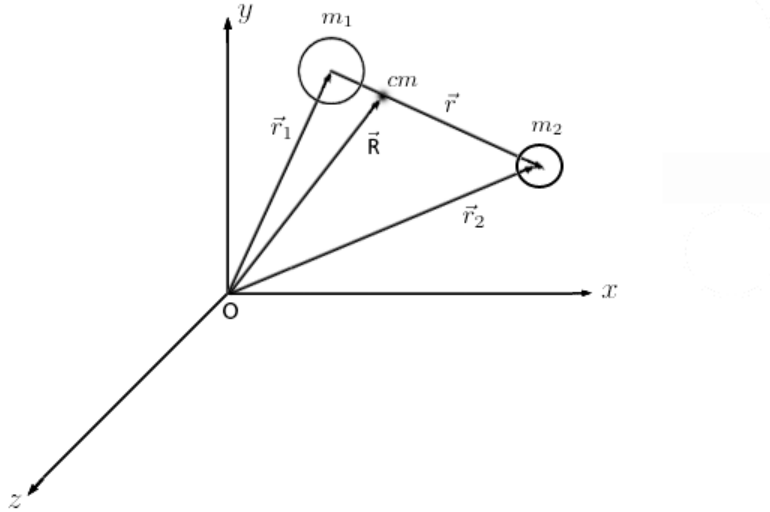


³Gan ar dažiem slaveniem izņēmumiem. Piemēram, Jupitera masa ir $m_J \approx M_{\odot}/1000$, kas ir lielākā vērtība no visām Saules sistēmas planētām. Jupitera-Saules masas centrs atrodas nedaudz ārpus pašas Saules rādiusa, tāpēc viena Jupitera perioda laikā arī Saule apmet nelielu cilpu ap šo punktu. Otrs piemērs ir Merkūrs, kura orbītai ir lielākā ekscentritāte un tās precesija kalpo kā viens no klasiskajiem vispārīgās relativitātes testiem.

4 Divu gravitacionāli saistītu ķermeņu problēma

Lai gūtu nedaudz vairāk ieskata Keplera likumos, apskatīsim šo pašu uzdevumu no Ņūtona mehānikas viedokļa. Precīzs likumu izvedums ir pārāk matemātiski čakarīgs un neatklāj daudz par apakšā esošo fiziku, tādēļ pieiesim problēmai no citas perspektīvas. Pieņemsim, ka mums ir divas masas m_1 un m_2 (sistēmas kopējā masa ir M), kas atrodas pozīcijās \mathbf{r}_1 un \mathbf{r}_2 , turklāt tās ir gravitacionāli saistītas caur spēkiem $\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}_{21}$, kur $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ⁴. Ir izdevīgi veikt koordinātu transformāciju $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{R})$, kur $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ ir sistēmas masas centrs, jo šī transformācija padarīs visu par viena ķermeņa problēmu.

Att. 3: Divu ķermeņu problēmā izmantotie lielumi.



Teorēma 4.1 *Masas centra koordināta \mathbf{R} ir vai nu stacionāra, vai arī mainās laikā vienmērīgi.*

Pierādījums: No definīcijas un Ņūtona likumiem $\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}}{M} = 0$. Tas savukārt nozīmē, ka \mathbf{R} ir lineāra funkcija laikā.

Teorēma 4.2 *Abu ķermeņu kustība ir planāra attiecībā vienam pret otru.*

Pierādījums: No iepriekšējās teorēmas zinām, ka eksistē inerciāla atskaites sistēma, kurā masas centrs ir stacionārs. Pāriesim uz šo sistēmu un novietosim savu koordinātu sākumpunktu masas centrā. Šajā gadījumā visi spēki ir centrāli, tātad leņķiskais impulss $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$ tiek saglabāts. No tā secinām, ka pozīciju un lineārā impulsa vektoriem vienmēr jāatrodas plaknē, kas perpendikulāra \mathbf{L} .

⁴Es izmantošu pierakstu, kur pašus vektorus apzīmē ar treknrakstu (piem., \mathbf{a}), kamēr vektoru moduli ir parastā drukā (piem., a). Vienībvektors \mathbf{a} virzienā tiek apzīmēts kā $\hat{\mathbf{a}}$.

Atminēsimies, ka $\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1}$ un $\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$; atņemot pirmo vienādojumu no otrā un definējot $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{21}$, mēs iegūstam $\ddot{\mathbf{r}} = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\mathbf{F}(\mathbf{r})$, jeb

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

, kur $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ir sistēmas reducētā masa. Tātad apkoposim rezultātus - mēs esam parādījuši, ka sistēmas masas centra kustība ir pilnīgi triviāla (kas bija viegli paredzams, jo uz to nedarbojas ārēji spēki), savukārt abu ķermeņu savstarpējā kustība ir ekvivalenta viena ķermeņa problēmai ar masu μ centrālā spēka laukā $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Ar šo sistēmu ir iespējams asociēt potenciālo enerģiju $V(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$, tātad sistēmas pilnā enerģija ir $E_{tot} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{r}_2^2}{2} + V(r)$. Līdzīgā veidā definējam pilno leņķisko impulsu $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$ (šoreiz tas var būt attiecībā pret patvaļīgu telpas punktu un ne masas centra atskaites sistēmā).

Teorēma 4.3 *Enerģiju un leņķisko impulsu var aprēķināt arī (\mathbf{r}, \mathbf{R}) sistēmā. To vērtības ir $E_{tot} = \frac{M \mathbf{R}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + V(r)$ un $\mathbf{L} = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.*

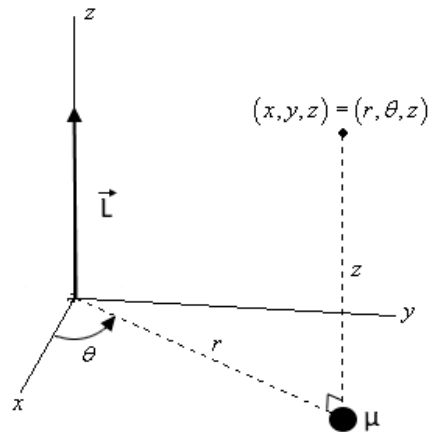
Pierādījums: Atstāju šo algebrisko rezultātu jūsu pašu rokās. Jums visdrīzāk noderēs sekojošie pārveidojumi:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

Atkal esam pārliecinājušies, ka visa sistēmas dinamika ir pilnīgi atdalīta jaunajā koordinātu sistēmā. Ievērojiet līdzību starp izvestajiem vienādojumiem un sistēmu, kas sastāv no divām neatkarīgām masām M un μ .

Beidzot esam ieguvuši pietiekami daudz rezultātu, lai atrisinātu sākotnējo problēmu. Atkal pārejam uz atskaites sistēmu, kur $\mathbf{R} = \dot{\mathbf{R}} = 0$. Atcerieties, ka mēs meklējam atbildi jautājumam - kā masa μ pārvietojas laukā $\mathbf{F}(\mathbf{r})$; mēs jau zinām, ka visa kustība notiek vienā plaknē, kas perpendikulāra \mathbf{L} . Lai izmantotu spēka lauka simetriju, pāriesim uz cilindriskām koordinātām. Ievēro, ka mūs interesējošo plakni parametrizē (r, θ) koordinātas.

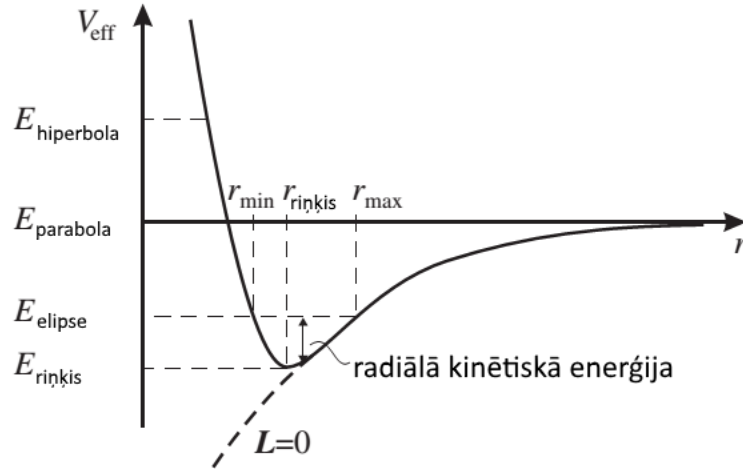


Mūsu jaunajā koordinātu sistēmā $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ un $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$, tātad $\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Varam šos rezultātus ievietot iepriekš izvestajās sakarībās priekš enerģijas un leņķiskā impulsa, lai iegūtu $\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mu r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$ un $E_{tot} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$. Paņemot leņķiskā impulsa vienādojuma abu pušu modulusus, iegūstam $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, ko savukārt varam ievietot enerģijas vienādojumā, lai iegūtu

$$E_{tot} = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r)$$

, kur $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$ ir sistēmas efektīvais potenciāls. Tā kā gan E_{tot} , gan L kustības laikā tiek saglabāti, mēs sistēmas dinamiku esam padarījuši viendimensionālu (vienīgā palikusī koordināta ir r). Attiecīgo vienādojumu ir iespējams atrisināt, izmantojot diezgan riebīgus, trigonometriskus integrāļus, bet mēs atrisinājumam pieiesim grafiski. Att. 4 ir attēlota V_{eff} atkarība no r .

Att. 4: Saistība starp orbītas parametriem un koniskajiem šķēlumiem.



Pieņemsim, ka esam noteikuši mūsu orbītas L vērtību. Kādas ir iespējamās E_{tot} vērtības un kā izskatās ar tām saistītās orbītas? Tik ilgi, kamēr $L \neq 0$, $V_{eff}(r)$ eksistē minimums (kurš arī ir E_{tot} minimums). Ir skaidrs, ja E_{tot} pieņems šo vērtību, tad $\dot{r} = 0$ un sistēmas rādiuss ir laikā nemainīgs - mēs esam atraduši riņķveida orbītas savā sistēmā! Ja enerģija ir robežās $E_{rinkis} < E_{tot} < 0$, sistēma vēl joprojām ir gravitacionāli saistīta. Eksistē vērtības r_{min} un r_{max} , starp kurām r laika gaitā svārstīsies ⁵. Šīs vērtības parasti sauc par apsīdām un tās apzīmē ķermeņu tuvāko un tālāko savstarpējo

⁵Atcerieties, ka ļoti vērtīgs veids, kā domāt par daļiņas kustību noteiktā potenciālā, ir iedomāties, ka potenciāla formā ir izveidoti amerikāņu kalniņi un tava daļiņa ir ratiņi, kas pa tiem palaisti.

attālumu orbītas laikā. Izrādās, ka attiecīgā orbīta šajā gadījumā pieņem elipses formu. Ja mēs iedomājamies gadījumu $E_{tot} = 0$, ir skaidrs, ka $r_{max} \rightarrow \infty$, tātad sistēma vairs nav saistīta; šajā gadījumā orbīta ir parabola. Visbeidzot, ja $E_{tot} > 0$, sistēma ir nesaistīta un orbītas ir hiperbolas.

Lieliski! Mēs esam izveidojuši saikni starp ģeometriju, ko pielieto Keplera formulējums, un Ņūtona vienādojumu atrisinājumiem. Bet no kurienes tieši nāk pārējie divi likumi? Izskaidrot otro Keplera likumu ir diezgan vienkārši - iedomāties to pašu masu μ un aprēķini tās noklāto laukumu neilgā laika intervālā Δt . Šis laukums būs trijstūris ar augstumu r un pamatni $r\dot{\theta}\Delta t$, tātad tā laukums ir $A = \frac{r^2\dot{\theta}\Delta t}{2} = \frac{L\Delta t}{2\mu}$. No šī varam secināt, ka $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}$, tātad otrais Keplera likums īstenībā ir nedaudz apslēpta leņķiskā impulsa saglabāšanās forma. Trešo likumu var viegli izvest riņķveida orbītu gadījumā (pārliecinieties, ka varat to bez mazākās aizķeršanās izdarīt nakts vidū), bet vispārīgas elipses gadījumā nepieciešams atrisināt tos integrāļus, ko pieminēju iepriekš.

Divu ķermeņu problēma ir sagādājusi mums lielu pārsteigumu devu: sākotnēji mēs parādījām, ka tā īstenībā ir viena ķermeņa problēma un pēc tam to reducējām uz viendimensionālu uzdevumu efektīvā potenciālā. Kas ir šīs sistēmas īpašība, kas ļāva mums to padarīt tik vienkāršu⁶? Atbilde uz šo jautājumu fizikā ir gandrīz universāla - simetrija. Mēs varējām savus ķermeņus patvaļīgi rotēt vienu ap otru (kas noveda pie leņķiskā impulsa saglabāšanās) un kopīgi pārvietot telpā (kas padarīja masas centra kustību elementāru); šo vienkāršojumu sekas bija ievērojama neatkarīgu mainīgo skaita reducēšana, kas pavēra iespēju elegantam atrisinājumam šķietami neatrisināmai problēmai.

⁶Vispārīgā N gravitacionāli saistītu ķermeņu problēma ir haotiska, ja $N > 2$, kas nozīmē, ka patvaļīgiem sākumnosacījumiem analītisks atrisinājums neeksistē.