Speciālā relativitātes teorija - 2018

E.Šilters, S.Lācis

2018. gada 3. maijā

Saturs

Nodaļa 1

Notikumu relatīvistiskā kinemātika

Nodaļas saturs

1.1 STR postulāti

1 Galileja-Einšteina relativitātes princips.

2 Elektromagnētiskās mijiedarbības (elektromagnētisko viļņu, arī gaismas) izplatīšanās ātrums vakuumā.

Par **S**peciālās **R**elativitātes **T**eorijas (STR) "dzimšanas gadu" pieņemts uzskatīt 1905. gadu, kurā vācu žurnālā "Annalen der Physik" 17.numurā var lasīt tolaik vēl ne visiem pazīstamā Alberta Einšteina rakstu "Zur Elektrodynamik der bewegter Körper"

(A. Einstein, Annalen der Physik 17, 891 (1905), atkārtoti publicēts Annalen der Physik, 14, Supplement, 2005, pp194-224). Internetā raksts brīvi pieejams pēc adreses

`http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/Einstein-in-AdP.htm`
un PDF formātā
`http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/papers/1905_17_891-921.pdf`
Šai 31 lapaspusi garajā tekstā var izlasīt par:

- vienlaicības jēdzienu un hronometru sinhrinizācijas nosacījumu;
- Lorenca transformācijām un
- iegūt to izvedumus no nosacījuma $c = const$.

Rakstā nav eksperimentālu atsauču uz to, ka kāds būtu īpaši pētījis apgalvojumu pareizību, ka neviens "nevar aizskriet ātrāk par gaismu", ka gaismas ātrums nav atkarīgs no sākumpunkta izvēles un visiem novērotājiem ir nemainīgs lielums. Taču, kā zināms, Maikelsona-Morlija gaismas ātruma mērījumi jau 19.g.s. 90.-jos gados par to liecināja.

1.

Lai kā tas arī nebūtu bijis toreiz, šodien apgalvojums, ka elektrodinamiskās mijiedarbības izplatīšanās ātrums vakuumā ir maksimālais signāla (enerģijas, informācijas) izplatīšanās ātrums, neatkarīgi no atskaites sistēmas (novērotāja pozīcijas) izvēles ir STR aksioma (postulāts.

$$\begin{bmatrix} c &=& max \\ c &=& const \\ c &=& exact \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$\begin{array}{rcl} c &=& 299\,792\,458\,\frac{m}{s} \\ c &\approx& 3\cdot 10^8\frac{m}{s} \end{array} \tag{1.2}$$

Līdzās STR aksiomai $c = max,\ const$ vēlams piebilst, ka šobrīd zinātnē (kopš 1985.gada) ir pieņemts uzskatīt, ka šī konstante ir "eksakta", t.i., "līdz turpmākajam rīkojumam" netiek precizēta (netiek mainīti kļūdas robežās esošie pēdējie cipari).

Turpat jāpebilst, ka SI vienību sistēmā $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, kur ε_0 ir elektriskā konstante un μ_0 - magnētiskā konstante. Un, tā kā magnētiskā konstante pēc definīcijas tiek noteikta kā precīzs skaitlis

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{H}{m} \quad , \tag{1.3}$$

tad arī elektriskā konstante ir $\varepsilon_0 = exact$ un šobrīd netiek precizēta. Tās pieņemto vērtību nosaka pēc formulas $\varepsilon_0 = c^2\,\mu_0$

$$\varepsilon_0 = (8,854\,187\,817\ldots)\cdot 10^{-12}\frac{F}{m} \quad , \tag{1.4}$$

STR postulāts par elektromagnētiskās mijiedarbības izplatīšanos ātrumu, protams, attiecas uz visu “elektromagnētisko viļņu skalu”, tātad uz visiem elektromagnētisko viļņu diapazoniem (radio-, IS, redzamās gaismas, UV, Rhg, γ). Neapšaubāmi, tas prasa eksperimentālu pamatojumu. Šobrīd nav zināmi izņēmumi vai šaubas par postulāta pareizību.

Akcentēsim, ka STR postulāts par elektromagnētiskās mijiedarbības izplatīšanās ātrumu attiecas uz signāla izplatīšanās ātrumu. Varbūt precīzāk, ja ir runa par viļņa ātrumu, tad tas šajā gadījumā ir viļņu grupas ātrums $v_G = c$. Viļņa fāzes ātrumu v_F šajā izpratnē STR postulāts neierobežo. Pārliecinošs piemērs tam ir rotējoša gaismas avota radītā gaismas zaķīša iespējamā skriešana pa debess sfēru ar jebkuru, neierobežotu lineāro ātrumu $v = \omega\, R$, ja vien rotācijas leņķiskaisātrums ω un attālums R ir pietiekami lieli. Šajā gadījumā gaismas viļņa enerģija plūst pa staru ar ātrumu c, bet gaismas zaķītis katrā jaunā pozīcijā ir “cits”, no iepriekšējā neatkarīgs notikums.

2.

Galileja relativitātes princips jau ir pazīstams apgalvojums Ņūtona mehānikā. To var formulēt dažādi, kaut vai, piemēram, tā: “ne ar kādiem mehānikas novērojumiem vai eksperimentiem novērotājs nevar konstatēt pats savu vienmērīgu taisnvirziena kustību. Tas būtībā ir Ņūtona dinamikas pirmā likuma formulējums. No tā arī izriet, ka visas inerciālās atskaites sistēmas ir savstarpēji ekvivalentas”. Jāpiebilst tikai - “ekvivalentas vienādos robežnosacījumos”. Jo atskaites sistēmai var, piemēram, uzlikt ārēju magnētisko lauku un “ekvivalence” uzreiz izzudīs.

Būtībā Galileja relativitātes princips nozīmē to, ka ķermeņa paātrinājums jebkurā inerciālā, tātad vienmērīgi vienai pret otru taisnvirziena kustībā esošā atskaites sistēmā ir proporcionāls ķermenim pieliktam spēkam

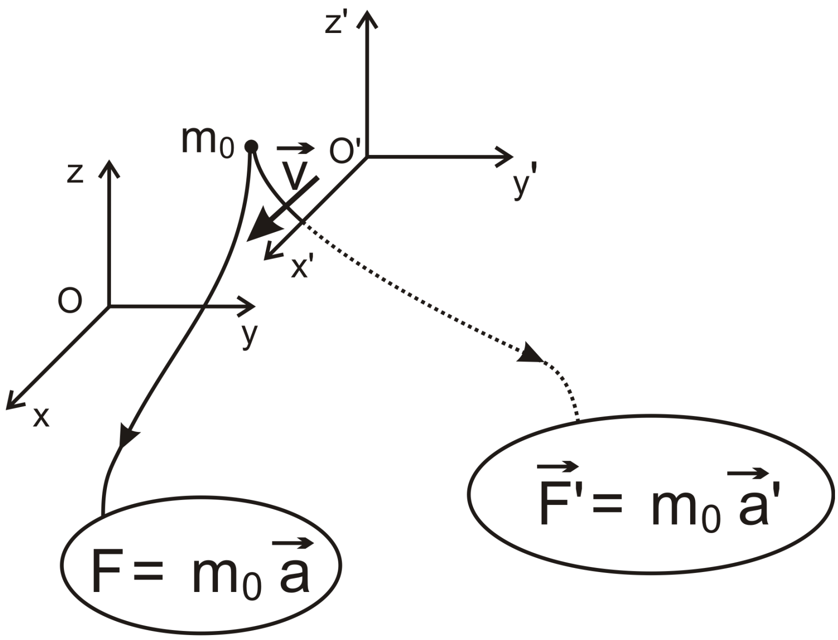
$$\vec{a} \sim \vec{F} \quad , \tag{1.5}$$

jeb

$$m_0 \vec{a} \sim \vec{F} \quad , \tag{1.6}$$

kur m_0 - inerces mērs Ņūtona mehānikā (miera masa). proti, Galileja relativitātes princips apgalvo, ka dinamikas pamatlikumi visās inerciālās atskaites sitēmās vienādos nosacījumos izpaužas vienādi.

SRT vispārina Galileja relativitātes principu arī elektrodinamikai, plašākā nozīmē attiecinot to uz fiziku vispār. Proti, šis vispārinājums, ko dēvē arī par Galileja-Einšteina relativitātes principu, nozīmē, ka ne vien mehānikas dinamika, bet arī elektrodinamikas pamatlikumi visās inerciālajās atskaites sitēmās vienādos apstākļos izpaužas vienādi.



Att. 1.1: Attēls

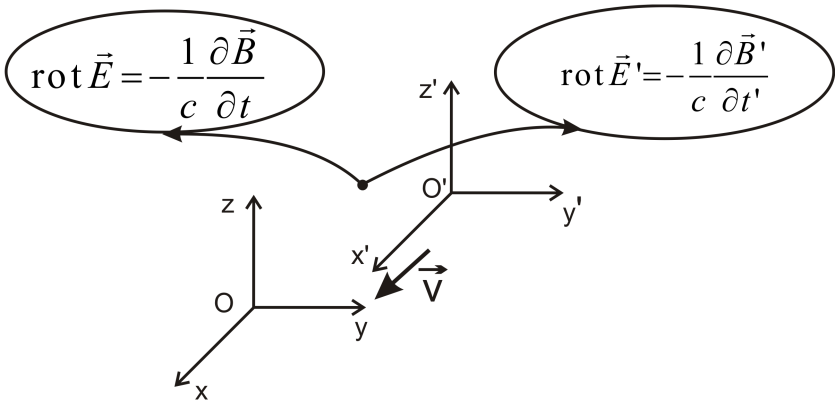
Tā kā galvenie pamatlikumi elektromagnētiskā lauka teorijā vakuumā savā matemātiskajā formulējumā izpaužas kā Maksvela vienādojumi, kas satur arī elektromagnētisko viļņu izplatīšanās ātrumu c, tad ir acīmredzami, ka šis vienādojums visās inerciālajās atskaites sistēmās var izrādīties spēkā tikai un vienīgi tad, ja pārejot no vienas atskaites O uz citu atskaites sistēmu O', viļņu ātrums c nemainās. Piemēram, 1.Maksvela vienādojums (Elektromagnētiskās indukcijas likums) vienādi tiek formulēts gan "nekustīgajā" (laboratorijas) atskaites sitēmā O

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{1.7}$$

gan pret to kustīgajā atskaites sistēmā O':

$$rot'\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'} \quad . \tag{1.8}$$

Turpretī, ja ātrums c pārejā $O \leftrightarrow O'$ mainītos, izmainītos arī pamatvienādojuma struktūra un jēga.

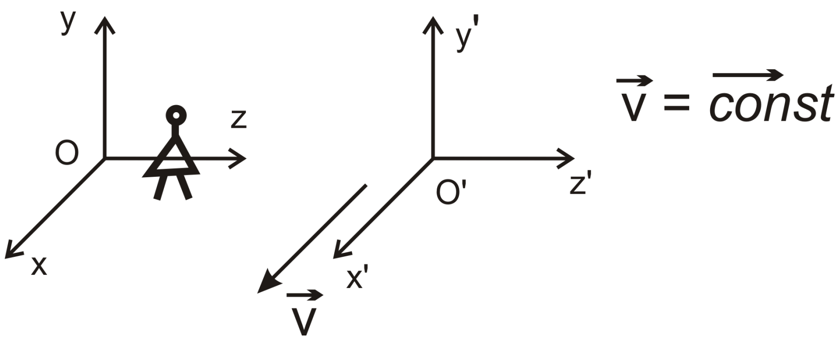


Att. 1.2: Attēls

1.2 Attāluma un laika mērīšana inerciālā atskaites sistēmā. Laika gaitas sinhronizācija

Relativistiskajā kinemātikā primārais jēdziens ir notikums N. Ar to mēs saprotam (ļoti vispārīgi) jebkuru faktu, ko konstatē dotās atskaites sistē,mas noteiktā punktā P konkrētā laika momentā t.

Te uzreiz jāpiebilst, ka, esot spēkā G-E realativitātes principam, visus notikumus "var redzēt" no jebkuras i8nerciālas atskaites sistēmas. Un visas tās ir līdzvērtīgas. Tāpēc, galvenais, lai salīdzinātu kāda viena notikuma N vietu un laiku dažādās atskaites sistēmās, jāvienojas, kā to nosaka vienā konkrētā atskaites sistēmā, tajā kurā šobrīd atroidas novērotājs. Saprotams, ka attiecībā pret šo novērotāju, citas inerciālās sistēmas atrodas kustībā. Tāpēc, viennozīmīgas sarunas labad, turpmāk novērotāja atskaites sistēmu dēvēsim par nekustīgo atskaites sistēmu O jeb par laboratorijas atskaites sitēmu.

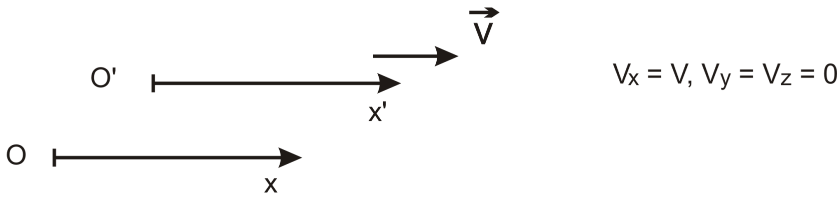


Att. 1.3: Pret novērotāju nekustīgā (laboratorijas) un kustošā atskaites sitēmas

Jebkuru citu, attiecībā pret laboratoriju ar ātrumu $\vec{v}$ kustošu atskaites sistēmu tā arī sauksim - par kustošo atskaites sistēmu O'.

Tā kā tukša telpa ir homogēna un izotropa, tad divām atskaites sitēmām uzskatīsim, ka to asis ir orientētas savstarpēji paralēli un to relatīvais ātrums $\vec{v}$ ir vērsts x asu virzienā (Att.1.3).

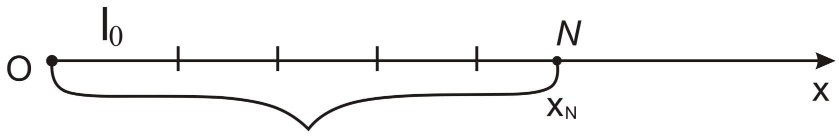
Tālāk, acīmredzami, ka pie šādas norunas mēs kinemātikas ilustrācijas daudzviet varam izmantot viendimensionālo modeli (Att.1.4) Atgriezīsimies pie notiku-



Att. 1.4: Viendimensiālais modelis atskaites sitēmām

ma N vietas un laika noteikšanas laboratorijas atskaites sistēmā.

Notikuma N vietu laboratorijas atskaites sistēmā nosaka tā koordinātes x_N, y_N z_N. Lai tās noteiktu, jāizmēra notikuma kā punkta attālums $l_N = \sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2}$ līdz koordinātu sistēmas sākumpunktam O. nekustīgajā atskaites sistēmā to izdara ar garuma etalonu l_0. Tā, piemēram, $l_N = n\, l_0, n = 1, 2, 3, \ldots$ (Att.1.5). Zinot no-

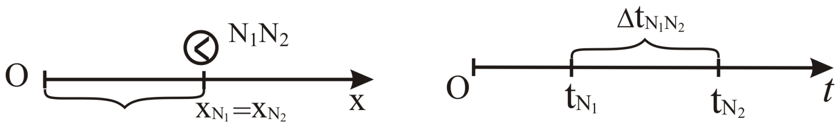


Att. 1.5: Koordinātes x ass

tikumu N_1 un N_2 koordinātes, attālums starp notikumiem $\Delta l_{N_1 N_2} = |x_{N_2} - x_{N_1}|$, jeb vispār $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, kur $\Delta x = |x_2 - x_1|$, $\Delta y = |y_2 - y_1|$, $\Delta z = |z_2 - z_1|$. (Pierodot, ka koordinātu indeksi numurē notikumus, turpmāk notikumu simbolu vairs nerakstīsim!)

Lai dotajā atskaites sistēmā moteiktu notikuma N laiku (precīzāk - laika momentu t_N), notikuma vietā jābūt hronometram, kas saistītu savā starpā secīgus (diskrētus) laika momentus. Pats par sevi saprotams, ka laiku $\Delta t_{N_1 N_2} = |t_{N_2} - t_{N_1}|$, kas pagājis starp diviem notikumiem N_1 un N_2 vienā punktā, nosaka šajā punktā novietotais hronometrs. Problēma rodas tad, ja notikumi N_1 un N_2 ir dažādos punktos $x_{N_1} \neq x_{N_2}$, kad tos šķir attālums $\Delta l_{N_1 N_2}$. Tad mums vajadzīgi jau divi hronometri abās notikumu vietās. Tie, protams, tur var būt bet tad laika $\Delta t_{N_1 N_2} \equiv \Delta t$ noteikšanai būs viennozīmīga tikai tad, ja abi hronometri "ies" sinhroni. To jāprot

Att. 1.6: Laika ass t, hronometra gaita notikuma punktā

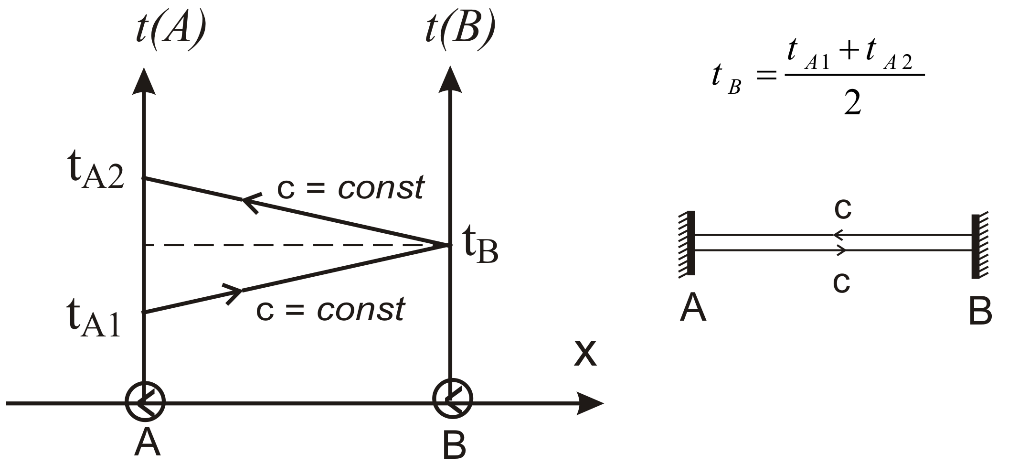


Att. 1.7: Punktā novietots "nekustīgs" hronometrs

panākt kaut vai principiāli. (Praktiski to ar noteiktu precizitāti realizē metroloģiskie laika dienasti.)

Dažādos punktos novietotu laika etalonu sinhronizāciju panāk ar elektromagnētisko (radioviļņu, gaismas) signālu, vienīgo signālu, kura izplatīšanās ātrums $c = const$ (SRT postulāts!). Tikai, pateicoties tam, ka elektromagņētiskš mijiedarbības izplatīšanās ātrums tukšā telpā nav atkarīgs no atskaites sistēmas izvēles, hronometru sinhrnizācijas procedūra kļūst viennozīmīga visām atskaites sistēmām.

Piemēra pēc, t.s. hronometru sinhronizācija pēc Einšteina ideālā variantā var tikt realizēta tā, kā parādīts ilustrācijā Att.1.8. Laika momentā t_{A1}, no hronometra A uz hronometru B nosūta elektromagnētisko signālu, kas to sasniedz momentā t_B (pēc hronometra B rādījuma). Signālu tūdaļ atstaro atpakaļ hronometram A, kur tas nonāk momentā t_{A2} (pēc hronometra A rādījuma). Jāpanāk, lai izpildītos nosacījums $t_B = \frac{t_{A1}+t_{A2}}{2}$, un tad A un B hronometri iet sinhroni. Tā pa pāriem var sinhrinizēt visus atskaites sitēmas reperu punktos novietotos hronometrus un panākt to, ka atskaites sistēmā O visur iet savstarpēji sinhroni hronometri (Att.1.9). Tad laika gaitu var attēlot ar vienu "Laimas pulksteņa" laika asi t un viennozīmīgi laboratorijas atskaites sistēmā izsekot visiem procesiem laika gaitā. Norunāsim, ka šādi organizētu sinhronu hronometru laika gaitu turpmāk sauksim par atskaites sitēmas laiku (ši gadījumā atskaites sitēmas O).



Att. 1.8: Pulksteņu sinhronizācija

1.3 Notikumu vienlaicība. Vienlaicības relativitāte.

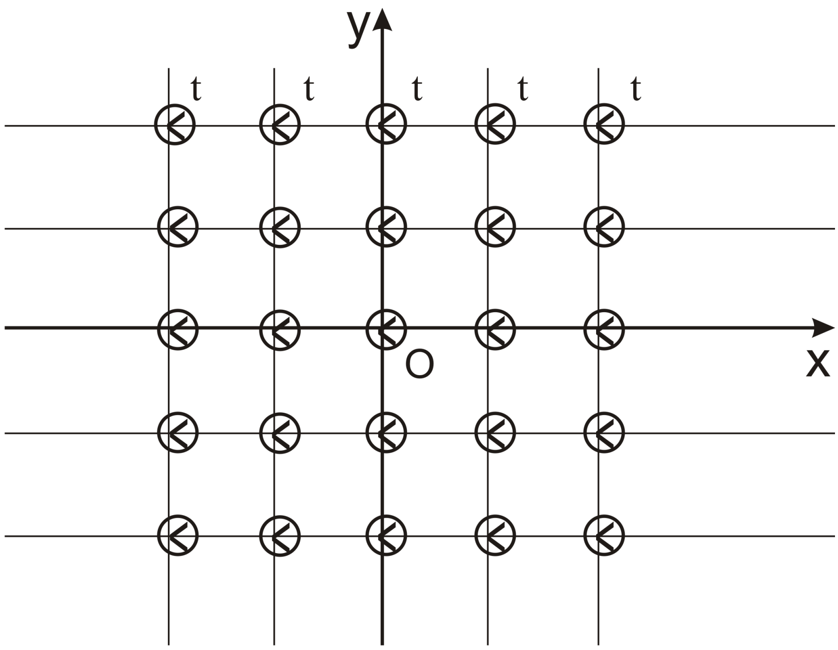
Laika 'jēdziens fizikā ir tāpēc, lai notikumus dotajā atskaites sistēmā O pēc tajā esošajiem sinhroniem hronometriem sakārtotu uz laika ass. Ja tā dara, tad jāsāk ar kādu norunātu notikumu salīdzinājumu uz laika ass un tas ir divu vienlaicīgu notikumu jēdziens.

Definiīcija ir triviāla: notikumi N_1 un N_2 ir vienlaicīgi, ja pēc sinhroniem hronometriem $t_{N_1} = t_{N_2}$. Problēma ir šī fakta konstatācijā. Tātad, jābūt vismaz principiālai iespējai eksperimentāli noteikt, ka $t_{N_1} = t_{N_2}$!

Ir divi gadījumi. Vienkāršākais - ja notikumi N_1 un N_2 ir vienā punktā, tad tikai "jāpaskatās uz hronometru", lai konstatētu vienlaicību!

Ne tik triviāli ir konstatēt notikumu vienlaicību, ja N_1 un N_2 notiek dažādās vietās. Protams, notikumu momentus notikumu vietās fiksē tur esošie sinhronizētie hronometri, līdzīgi kā iepreikš. Taču tagad tie var atrasties tālu vien no otra un, lai fiksētu notikumu vienlaicību, tie ir jāsalīdzina. Kāda salīdzināšanas iespēja pastāv? Einšteina piedāvātais variants ir šāds. Par "notikumu esamību ar elektromagnētisko signālu "paziņo" novērotājam, kas atrodas attāluma viduspunktā starp notikumiem. Ja tas pēc sava sinhronā hronometra signālus no notikumiem N_1 un N_2 saņem vienlaicīgi, tad acīmredzot tie vienlaicīgi ir arī izsūtīti no notikumu N_1 un N_2 vietām un mēs varam apgalvot, ka $t_{N_1} = t_{N_2}$. Uzskatīsim, ka šī ir divu attālu notikumu vienlaicības definīcija. Šī noruna ir relatīvistiskās kinemātikas un tātad arī SRT "atslēga".

$$t_{N_1} = t_{N_2} = t_N - \frac{l_0}{2\,c} \tag{1.9}$$



Att. 1.9: Sinhronizētu pulksteņu sistēma visā atskaites sitēmā

Momentu t_N nosaka vienlaicību konstatējošais "viduspunkta" novērotājs.

Kā redzams no "situācijas izspēles", par attālu notikumu vienlaicību novērotājs var konstatēt tikai pagātnē (t.i., raugoties no "nākotnes pozīcijas"). Notikumi ir jau bijuši, jo ātrākajam signālam c arī ir vajadzīgs laiks Δt, pēc kura par notikumiem var uzzināt.

No šīs divu notikumu vienlaicības definīcijas izriet secinājums: divu notikumu N_1 un N_2 vienlaicība ir relatīva. Ko tas nozīmē?

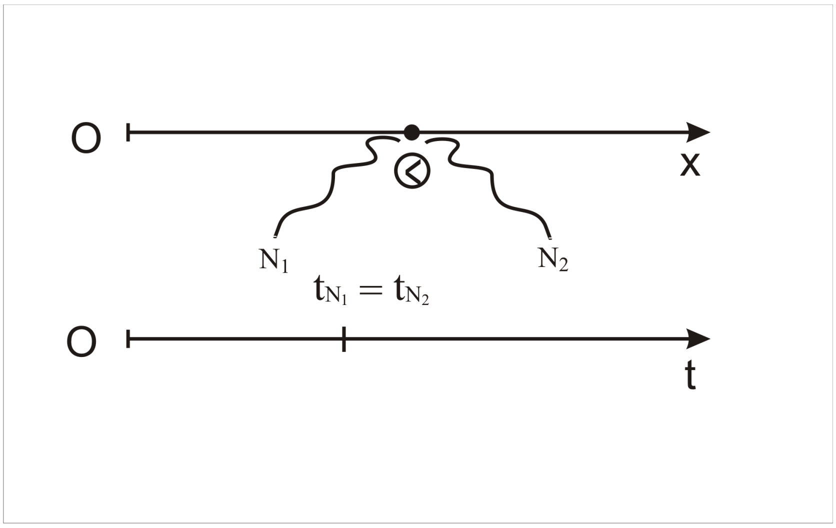
Tas nozīme to, ka tas, kas ir vienlaicīgs vienam, tas nebūt nav tā citam novērotājam. (Mēs, protams, pieņemam, ka visās inerciālās atskaites sitēmās vienlaicību konstatē ar vienādiem paņēmieniem. Savukārt, ja tā patiešām ir, tad, acīmredzot, nav iespējams savstarpēji sinhronizēt hronometrus divās, vienai pret otru kustošās atskaites sistēmās un

$\dashrightarrow$ notikuma laiks t, tāpat kā koordinātes $x,\ y,\ z$, ir relatīvs.

Ilustrēsim divu notikumu vienlaicības noteikšanu divās inerciālās atskaites sitēmās: kustošās sistēmas O' ātrums attiecībā pret laboratorijas sistēmu O ir $v_x = v$.

Pieņemsim, ka sistēmā O' konstatē ar to saistītu divu notikumu N_1 un N_2 vienlaicību un pēc tās sinhronizētajiem hronometriem $t'_{N_1} = t'_{N_2} = t'_N - \frac{l_0}{2\,c}$ (Att.1.12)

Tad, novērojot šos pašus notikumus nekustīgajā laboratorijas sistēmā pēc sistēmas O sinhronui ejošiem hronometriem, izrādās, ka $t_{N_1} < t_{N_2}$ un, tātad, notikumi

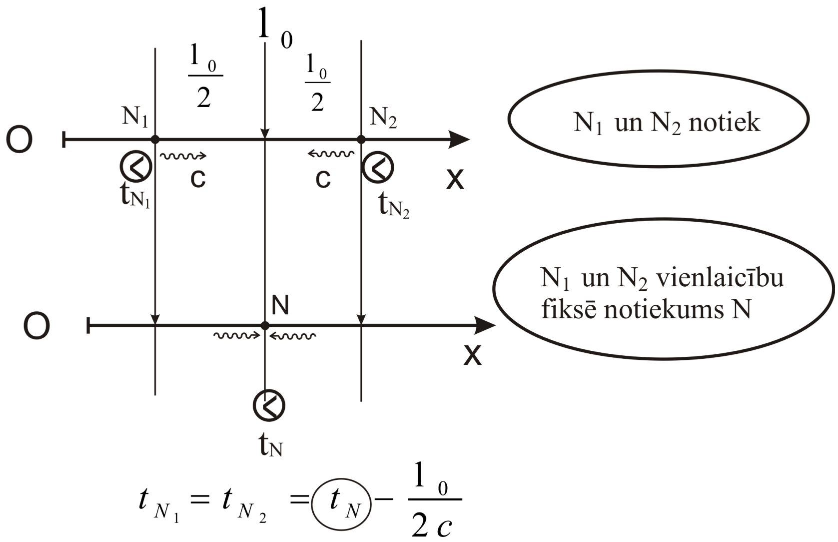


Att. 1.10: Notikumu vienlaicīgums vienā punktā

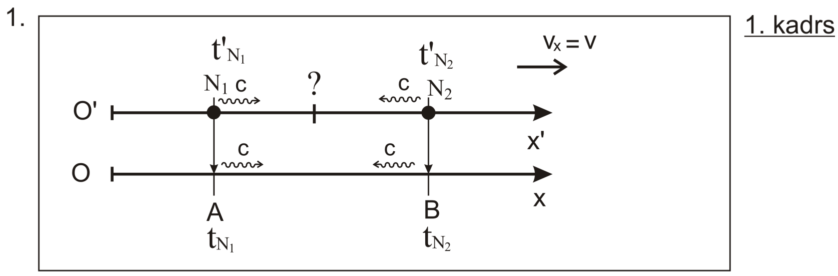
laboratorijas sitēmā nevar būt vienlaicīgi.

Esot notikumiem N_1 un N_2 atskaites sistēmā O', atzīmējam to vietas A un B laboratorijā O. No šīm vietām laboratorijas novērotājs "redz" raidam elektromagnētiskos signālus virzienā uz centru (Att.1.13). Notikumu laika momenti nevienā no atskaites sistēmām vēl nav fiksēti.

Momentā, kad signāls ir sasniedzis novērotāju N un atskaites sitēmā O' tiek konstatēta vienlaicība $t'_{N_1} = t'_{N_2}$. Acīmredzot šo faktu laboratorijā novēro punktā C laika momentā t_N. Bet, tā kā $l_1 > l_2$, tad $t_{N_1} < t_{N_2}$. Tātad notikums N_1 ir agrāks nekā notikums N_2 (Att.1.14).



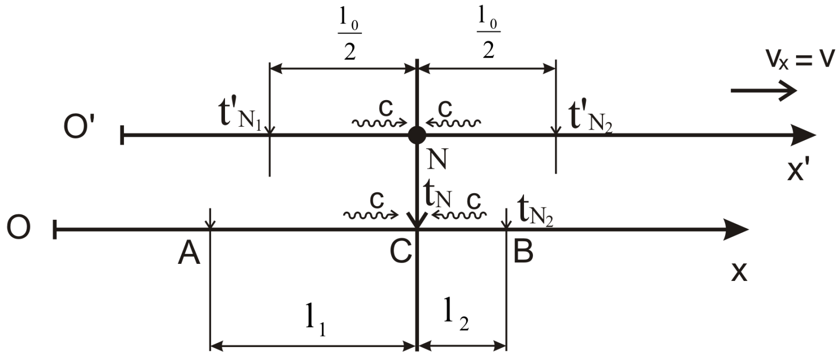
Att. 1.11: Notikumu vienlaicīgums diviem atšķirīgiem telpas punktiem



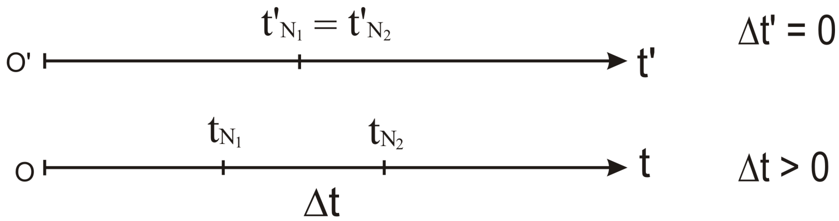
Att. 1.12: Notikumu "vienlaicības" relativitāte, skats no O'

Norunāsim, ka laboratorijas atskaites sistēmā O, kurā atrodas novērotājs, un ar kuru ir saistīti notikumi N_1 un N_2, attālumu Δl_0 starp tiem, tieši izmērītu ar etalonu l_0, sauc par ģeometrisko attālumu (garumu). Tā mēs akcentējam to, ka visi tiešie mērījumi, kas izdarīti ar garuma etalonu - garums Δl_0, laukums ΔS_0, tilpums ΔV_0 ir invarianti.

Pieņemsim tagad, ka "ģeometriskais mērstienis" Δl_0 attiecībā pret laboratorijas sistemu atrodas kustībā, un jautāsim - kāds ir tā garums nekustīgajā atskaites sistēmā? Kustīgajā atskaites sitēmā O' ģeometriskais garums $\Delta l' = \Delta l_0 = |x'_1 - x'_1|$. Ko saukt par garumu, ja attālums starp šiem notikumiem N_1 un N_2 nekustīgajā sistēmā O, par to ir jāvienojas. Relativistiskajā kinemātikā pieņemts, ka tā ir mērstieņa Δl_0 "projekcija" uz nekustīgās sistēmas X asi, vienlaicīgi fiksējot mērstieņa galapunktus (notikumu N_1 un N_2 vietas). Iegūto mērskaitli turpmāk



Att. 1.13: Notikumu "vienlaicības" relativitāte, skats no O



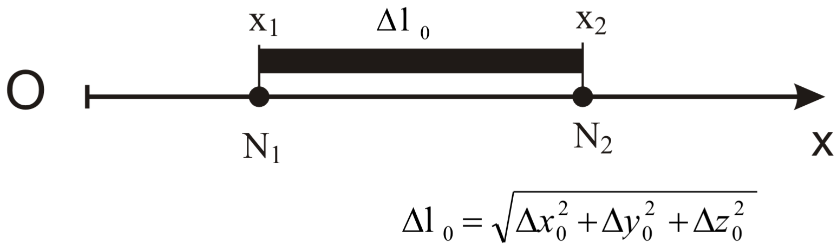
Att. 1.14: Notikumu "vienlaicības" relativitāte, laika atkaite abās sistēmās

dēvēsim par kinemātisko attālumu (garumu) Δl.

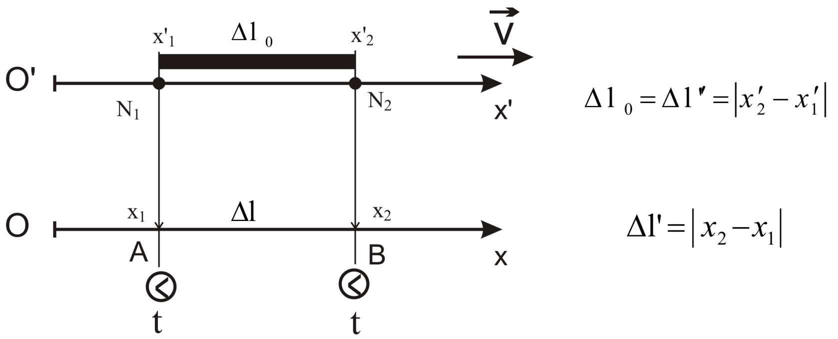
Pasvītrosim vēlreiz būtisko atšķirību starp ģeometriskao un kinemātisko attālumu (garumu).

Ģeometriskais garums Δl_0 ir notikumu pāra (N_1 un N_2) invariants. Kinemātiskais garums Δl ir šo pašu notikumu "atstātās pēdas" nekustīgajā atskaites sitēmā - vienlaicīgi iezīmētās notikumu vietas, attālumu starp kurām, protams, izmēra ar garuma etalonu.

Saprotams, ka lielumiem Δl_0 un Δl *a priori* nav jābūt vienādiem, kā to, "klusu ciešot" pieņem klasiskā mehānika. Vienīgais, ko šobrīd varam pateikt, ka kinemātiskais, notikumus N_1 un N_2 raksturojošais lielums izsakās kā $\Delta l = f(\Delta l_0, v)$. Funkcionālā skarība $f(\Delta l_0, v)$ vēl "nav zināma". Protams, ka mēs šeit gribam rakstīt Lorenca saīsinājuma formulu $\Delta l = \Delta l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, taču līdz tās izvedumam vēl jānokļūst.



Att. 1.15: Ģeometriskais attālums (garums)



Att. 1.16: Kinemātiskais garums - ķermeņa garums, kādu "redz" no laboratorijas atskaites sitēmas

1.4 Relativistiskais intervāls: klasifikācija, interpretācija, invariance

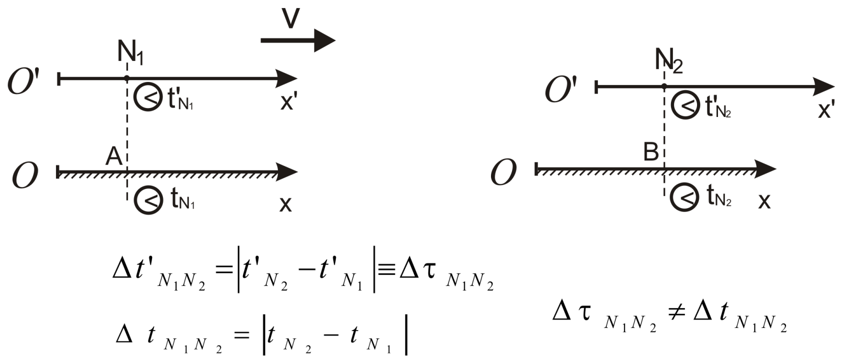
1

Iepriekš noskaidrotā divu notikumu vienlaicības relativitāte nozīmē to, ka laiks nav absolūts - hronometru gaita katrā atskaites sistēmā ir jāsinhronizē atsevišķi. Tātad, katrā inerciālā atskaites sistēmā notikumu laika momentu fiksēšanai jānodrošina savi sinhroni ejošie hronometri. Bet, tas nebūt nenozīmē, ka atskaites sitēmā O un atskaites sistēmā O' esošie hronometri iet savstarpēji sinhroni.

Gluži pretēji, ja O' kustās attiecībā pret laboratoriju O, tad laiks Δt, kas pagājis starp notikumiem sistēmā O, nav vienāds ar laiku $\Delta t'$, kas šķir šos notikumus kustošajā sistēmā O' pēc tās hronometriem.

Laiku, ko skaista ar pašiem notikumiem saistītās atskaites sistēmas hronometri (šajā gadījumā O'), dēvē par īpašlaiku un atbilstoši apzīmē ar τ, vai $\Delta\tau$.

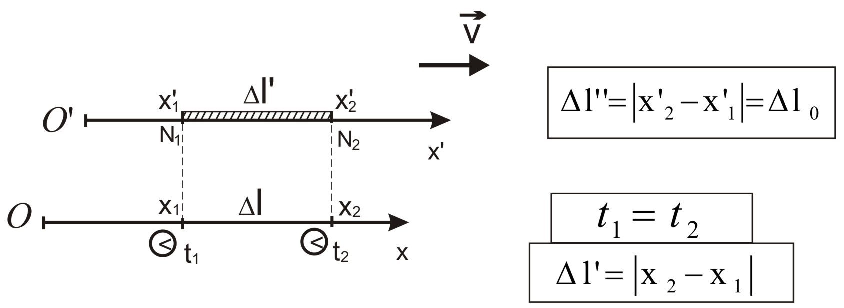
Sapratīsim arī - šāda īpašlaik definīcija nozīmē, ka īpašlaiks $\Delta\tau = inv$ ir notikumu pāra N_1 N_2 invariants. Patiešām, ar pašiem notikumiem saitsītā atskaites



Att. 1.17: Laika gaita atskaites sitēmās

sistēmā O' ir tikai un vienīgi viena. Piemēram, tā ir atskaites sistēma, kas saistīta ar masas kustību, vai arī - īpašlaiku uzsrāda katra paša rokas pulkstenis.

Līdzās klasiskajā me'hānikā pierastajam absolūtā laika invariantam Δt, relativistiskajā kinemātikā zūd arī otrs klasiskais invariants - attālums Δl starp notikumiem N_1 un N_2. Atgādināsim, ka ģeometriskais attālums $\Delta l' = \Delta l_0$ pašu notikumu atskaites sistēmā un kinemātiskais attālums Δl nav definēti kā identiski lielumi.

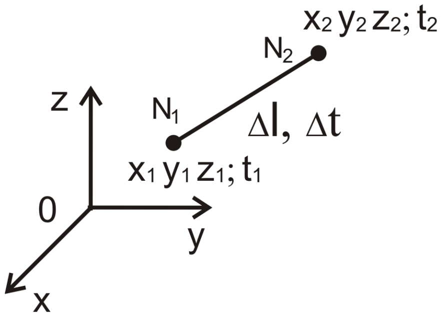


Att. 1.18: Divi notikumi (1)

Relativistiskajā kinemātikā klasisko invariantu - absolūtā laika Δt un absolūtā attāluma Δl vietā "stājas" relativistiskais intervāls starp notikumiem Δs.

Relativistiskais intervāls, līdzīgi kā laiks Δt un attālums Δl vienmēr ir attiecināms uz diviem notikumiem N_1 un N_2. Dotā atskaites sitēmā katram notikumam ir vieta (x, y, z), noteikta ar šīs sistēmas garuma etalonu un tas notiek momentā (t) pēc kāda no šīs sistēmas sinhronajiem hronometriem.

Tātad diviem notikumiem vienmēr var noteikt attālumu Δl un laiku Δt starp tiem.



$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\,,$$
$$\Delta x = |x_2 - x_1|\,,$$
$$\Delta y = |y_2 - y_1|\,,$$
$$\Delta z = |z_2 - z_1|\,,$$
$$\Delta t = |t_2 - t_1|\,.$$

Att. 1.19: Divi notikumi (2)

No abiem "klasiskajiem" lielumiem var izveidot trešo, un, lai nebūtu "jānodarbojas" ar kvadrātsakņu izteiksmēm, šo trešo lielumu pieņemts formulēt kā kvadrātisku formu.

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 \tag{1.10}$$

jeb

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{1.11}$$

Šo kvadrātisko formu sauc par relativistiskā intervāla kvadrātu. Tas ir uzrakstīts diviem telpā un laikā ar galīgiem intervāliem Δl un Δt šķirtiem notikumiem. Līdzīgi relativistiskā intervāla kvadrātu var uzrakstīt diviem telpā un laikā tuviem notikumiem. Tad

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \tag{1.12}$$

jeb

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.13}$$

Norunāsim, ka $\Delta s = +\sqrt{\Delta s^2}$, jeb $ds = +\sqrt{ds^2}$.

Relativistiskā intervāla kvadrāts Δs^2, kā redzams, atšķirībā no attāluma kvadrāta $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ nav pozitīvi definēts (tas var būt arī negatīvs). Ja tā, tad acīmredzot ir trīs iespējas, ko turpmāk izmantosim notikumu identifikācijai:

laikveida intervāls - notikumi N_1 un N_2 ir tādi, ka relativistiskā intervāla kvadrāts starp tiem $\Delta s^2 > 0$. Šādus relativistiskus intervālus sauc par laikveida intervāliem;

nulles jeb gaismas intervāls - notikumi N_1 un N_2 ir tādi, ka relativistiskā intervāla kvadrāts starp tiem $\Delta s^2 = 0$. Šādus relativistiskus intervālus sauc par nulles jeb gaismas intervāliem;

telpveida intervāls - notikumi N_1 un N_2 ir tādi, ka relativistiskā intervāla kvadrāts starp tiem $\Delta s^2 < 0$. Šādus relativistiskus intervālus sauc par telpveida intervāliem.

2.

Relativistiska intervāla nozīmīgākā īpašība ir tā invariance attiecībā pret inerciālas atskaites sistēmas maiņu, Δs^2 un tātad arī $\Delta s = \sqrt{\delta s^2}$ ir galvenais kinemātiskais invariants relativistiskajā kinemātikā.

To, ka tas tā patiešām ir, nulles intervāla gadījumā, kad $\delta s^2 = 0$, saskatāms triviāli. Patiešām, pieņemsim, ka atskaites sistēmā O notikumus N_1 un N_2 šķir nulles intervāls un $\delta s^2 = 0$. Tad, acīmredzot, $\Delta l^2 = c^2 \Delta t^2$, jeb $\Delta l_{N_1 N_2} = c \Delta t_{N_1 N_2}$. Tātad Δl ir gaismas noietais ceļš atskaites sistēmā O, bet notikums N_1 - gaismas emisija (fotona, viļņa) punktā $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ laika momentā t_1 un notikums N_2 - šī paša signāla uztveršana punktā $(x_2,\, y_2,\, z_2)$ laika momentā t_2.

Pats par sevi saprotams, ka saskaņā ar postulātu $c = const$, gaismas "stara" (forona, viļņa frontes) ceļa formula tāda ir visās inerciālās atskaites sistēmās, tātad arī O', kur $\Delta l'_{N_1 N_2} = c \Delta t'_{N_1 N_2}$. No šejienes $c^2 \Delta t'^2_{N_1 N_2} - \Delta l'^2_{N_1 N_2} = 0$ un intervāla kvadrāts $\Delta s'^2 = 0$. Rezultātā $\Delta s^2 = \Delta s'^2 = inv$. Bet tikai nulles intervālam. Citu intervālu gadījumā ($\Delta s^2 > 0$, $\Delta s^2 < 0$), kādi citiem notikumiem ar;i ir iespējami, intervāla invariance ir jāpierāda īpaši.

Vienu no intervāla invarianta pierādījuma versijām var lasīt L.Landau un E.Lifšica "Klasiskā lauka teorija" (Teorētiskā fizika, 2.sējums). Tas ir pierādījums no pretējā intervāla diferenciālim ds, jo galīgu intervālu nav grūti iegūt ar integrālsummu $\Delta s = \int ds$. Tātad, pieņemsim, ka trijās sistēmās O, O', O'' diviem notikumiem $ds \neq ds \neq ds''$ un nonāksim pretrunā. Norunāsim, ka:

O' kustās attiecībā pret O ar $\vec{v}'$

O'' kustās attiecībā pret O ar $\vec{v}''$

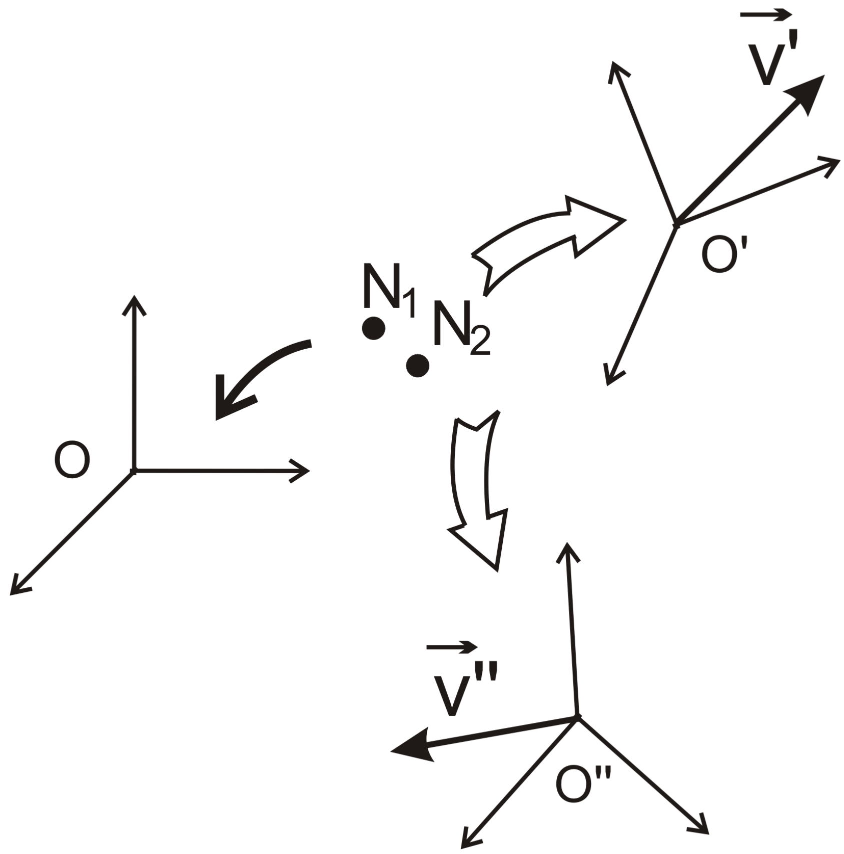
O'' kustās attiecībā pret O' ar $\vec{v}$

No vispārīgiem apsvērumiem, ko šeit detāli nekomentēsim, izriet, ka

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ds & = & f'(v')ds' \\ ds & = & f''(v'')ds'' \\ ds' & = & f(v', v'', \varphi_{\vec{v}'\vec{v}''})ds'' \end{array} \right. \tag{1.14}$$

kur f, f', f'' - funkcijas tikai no ātrumu moduļiem v', v'' un lenķa $\varphi_{\vec{v}'\vec{v}''}$ starp ātruma vektoriem $\vec{v}'$ un $\vec{v}''$. No šejines iegūst funkcionālu vienādojumu

$$f(v', v'', \varphi_{\vec{v}'\vec{v}''}) = \frac{f''(v'')}{f'(v')} \tag{1.15}$$



Att. 1.20: Trīs atskaites sistēmas

Acīmredzama pretruna, jo vienādojuma labās puses izteiksme nav atkarīga no leņķa. Tātad, funkcijas irtikai konstantes $a = \frac{a''}{a'}$ un atbilstoši

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ds & = & a'ds' \\ ds & = & a''ds'' \\ ds' & = & ads'' \end{array} \right. \tag{1.16}$$

Tātad intervāli sistēmās O, O', O'' atšķiras tikai ar mēroga reizinātājiem, kas, protams, nav būtiski. Izvēloties vienādu mērvienību sistēmu visās inerciālās atskaites sistēmās $a = a' = a'' = 1$ un intervāla ds invariance ir pierādīta.

3

Tagad mēs varam atšifrēt gan "dīvainos" intervālu nosaukumus, gan raksturot notikumus N_1 un N_2, uz kuriem tie attiecas.

A

Pieņemsim, ka intervāls starp N_1 un N_2 ir laikveida un, tātad, $\Delta s^2 > 0$. Aplūkosim šo notikumu divās atskaites sistēmās O un O', un tātad $\Delta s^2 = \Delta s'^2 > 0$, piemēram, kaut vai $\Delta s^2 = +1$. Uzrakstīsim notikumu vietas un laiku saistošo vienādojumu $c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2$. Tā kā vienādojuma labās puses izteiksme ir pozitīva, tad noteikti var atrast tādu kustošos sistēmu O', kurā abi notikumi ir vienā punktā un $\Delta l' = 0$. Tad šajā sistēmā O' starp notikumiem ir pagājušais laiks acīmredzot ir

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.17}$$

vai arī

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.18}$$

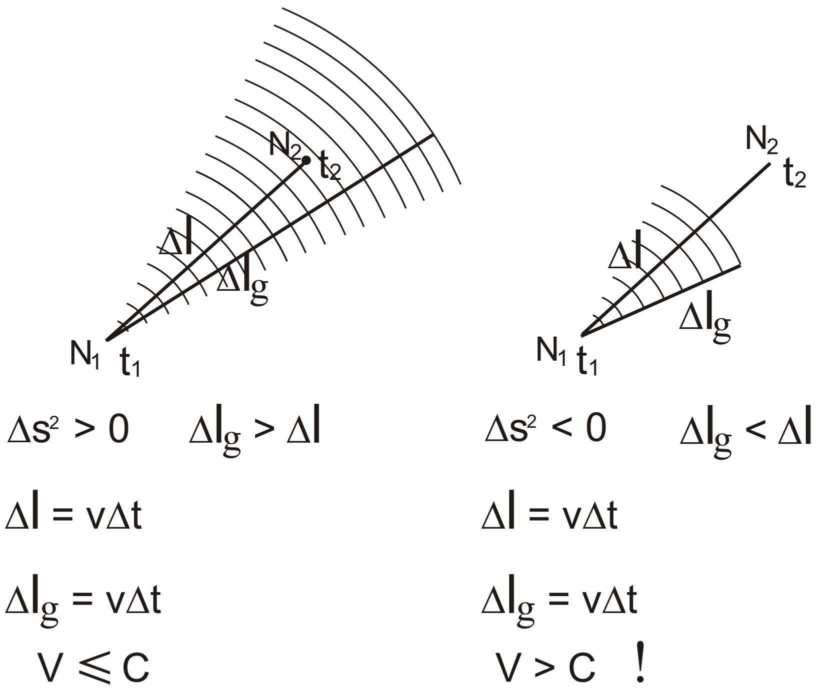
kur $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ ir O' kustības ātrums pret O. Tā kā kustošajā atskaites sistēmā ar notikumiem saistītais hronometrs iet īpašlaika režīmā $\Delta t' \equiv \Delta\tau$, tad esam ieguvuši forulu, kas saista īpašlaiku $\Delta\tau$ un laboratorijas laiku Δt. Efektus, saistītus ar šo pulksteņu gaitas formulu, aplūkosim vēlāk, Tagad tikai atzīmēsim, ka patiešām, nosaukumam "laikvaida intervāls" ir pamats tādam būt. Patiešām, mūsu izvēlētajā atskaites sistēmā O', kurā abi notikumi ir vienā punktā, intervāls $\Delta s = c\Delta\tau$ un tātad tas ir proporcionās īpašlaikam.

B

Pieņemsim, ka intervāls starp N_1 un N_2 ir telpveida, proti, $\Delta s^2 < 0$. Tātad divās atskaites sistēmās O un O' izpildās $\Delta s^2 = \Delta s'^2 < 0$, piemēram, $\Delta s^2 = \Delta s'^2 = -1$. Rakstām notikumu vietas un laiku saistošo vienādojumu $c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2$. Tā kā intervāla kvadrāta izteiksme negatīva, tad tāda atskaites sistēma O', kurā attālums $\Delta l' = 0$, neeksistē. Toties var atrast sistēmu, kurā notikumi N_1 un N_2 ir vienlaicīgi un $\Delta t' = 0$. Tad, kā redzams, $\Delta s'^2 = -\Delta l'^2$ un $\Delta s' = i\,\Delta l'$ un intervāls, patiešām, mēra "telpu" - attālumu starp notikumiem.

4

Jebkuri divi notikumi N_1 un N_2 acīmredzot var būt savstarpēji cēloņsaistīti (N_1 - cēlonis, N_2 - sekas), vai arī savstarpēji neatkarīgi. Cēloņsaistītum notikumu gadījumā ir paredzams, ka cēlonis un sekas saista mijiedarbība, kuras izplatīšanās ātrums $v \leq c$. Tā, piemēram, cēloņsaistītu notikumu virkne ir jebkura masas punkta secīgi stāvokļi uz trajektorijas.



Att. 1.21: Notikumu saistība - laikveida un telpveida intervāli

Divus cēloņsaistītus notikumus vinmēr saista laikveida intervāls ($\Delta s^2 > 0$). Patiešām, laikveida intervāla gadījumā $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 > 0$. Tad varam saprast, ka laikā Δt, kas pagājis starp notikumiem, elektromagnētiskā signāla (gaismas) noietais ceļš $\Delta l_g = c\Delta t$ ir lielāks par attālumu starp notikumiem Δl.

$$\Delta s^2 = \Delta l_g^2 - \Delta l^2 > 0 \tag{1.19}$$

Acīmredzami, ka laikā Δt ātrākais iespējamais signāls ir jau "pārklājis" attālumu Δl un notikumus šajā laikā var saistīt signāls ar izplatīšanās ātrumu $v = \frac{\Delta l}{\Delta t} < c$. Tas ir reāli iespējams jebkurā inerciālā atskaites sistēmā.

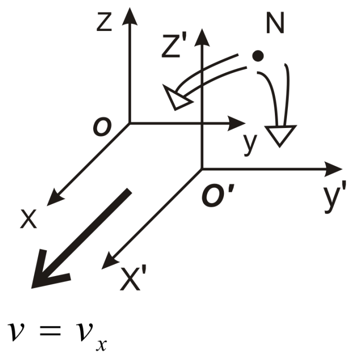
Situācijā, kad notikumus saista telpveida intervāls, veidojas cita situācija. Tad $\Delta s^2 = \Delta l_g^2 - \Delta l^2 < 0$. Proti, attālums starp notikumiem $\Delta l > \Delta l_g$ un pat pats ātrākais signāls tos nevar saistīt (būtu nepieciešams $v > c$!). Tādi notikumi jāsauc par absolūti neatkarīgiem viens no otra, jo intervāla invariances dēļ šā situācija nav maināma nevienā atskaites sistēmā.

Robežgadījumā, kad $\Delta s^2 = 0$, gaismas noietais attālums $\Delta l'_g = \Delta l$, un notikumi var būt saistīti ar elektromagnētisko signālu.

1.5 Notikuma vietas un laika momenta speciālās Lorenca transfmācijas

Katrā inerciālajā atskaites sistēmā notikumam N ir vieta (koordinātes) un laika moments. Ja, piemēram, ar notikumu N saistītajā atskaites sistēmā O' notikuma vieta un laika moments ir x', y', z', t', tad novērotāja laboratorijā O šī notikuma vieta un laika moments ir x, y, z, t. Notikuma vietas un laika momenta "koordi-

$$N \Rightarrow \begin{cases} O : x,\ y, z, t \\ O': x',\ y', z', t' \end{cases}$$



$$\circledast$$

$$\begin{cases} x = F_x(x',\ y', z', t', v) \\ y = F_y(x',\ y', z', t', v) \\ z = F_z(x',\ y', z', t', v) \\ t = F_t(x',\ y', z', t', v) \end{cases}$$

Att. 1.22: Attēls

nātes" x, y, z, t un x', y', z', t' divās inerciālajās atskaites sistēmās O un O' saista tā saucamās Lorenca transformāciju formulas.

Telpas izotropijas dēļ pieņemsim, ka laboratorijas atskaites sistēmas O un kustošās sistēmas O' koordinātu asis vienmēr ir orientētas savstarpēji paralēli un O' kustība attiecībā pret O notiek x-ass virzienā ($\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ kur $v_x = v$). Šādos nosacījumos transformācijas dēvē par **speciālajām Lorenca transformācijām** (Att.1.22).

Nosacījumi, kas ierobežo transformāciju formulu uzrakstīšanu, ir strikti formulējami. Proti:

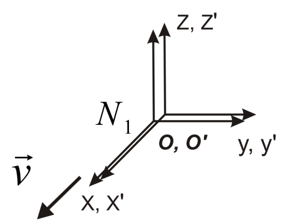
- Transformācijām jābūt lineārām (prasība, kas izriet no relativitātes principa)
- Jāizpildās atbilstības principam, kas šajā gadījumā nozīmē to, ka nerelatīvistiskiem ātrumiem $v \ll c$ transformācijas formulas ir zināmas - tās ir Galileja

transformācijas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x' + v\,t' \\ y & = & y' \\ z & = & z' \\ t & = & t' \end{array}\right. \tag{1.20}$$

kur **laiks ir absolūts**

- Jebkuru divu notikumu relativistiskais intervāls ir invariants (tā lielums nemainās pie Lorenca transformāciju formulu pielietošanas)



$$N_1 \Rightarrow \begin{cases} O: x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0,\ t_1 = 0 \\ O': x_1' = 0,\ y_1' = 0,\ z_1' = 0,\ t_1' = 0 \end{cases}$$

Att. 1.23: Attēls

Aplūkojam divus notikumus, kurus saista relativistiskais intervāls $\Delta s_{N_1 N_2}$. Notikums N_1 saistās ar brīdi, kad atskaites sistēmu O un O' sākumpunkti sakrīt: $x_1 = x_1' = 0$, $y_1 = y_1' = 0$, $z_1 = z_1' = 0$. Šai brīdī tiek "iedarbināti" abu sistēmu hronometri: $t_1 = t_1' = 0$ (Att.1.23).

Otrs notikums $N_2 \equiv N$ tādā gadījumā ir kāds patvaļīgs (mūs interesējošs) notikums ($x_2 = x$, $y_2 = y$, $z_2 = z$, $t_2 = t$). Tādā gadījumā abus notikumus saistošais relativistiskā intervāla kvadrāts dod vienādojumu

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \quad , \tag{1.21}$$

jeb, notikuma N koordinātēm un laika momentam

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad . \tag{1.22}$$

Nosacījuma $v_x = v$, $v_y = 0$, $v_z = 0$ un simetrijas apsvērumu dēļ acīmredzot

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & y' \\ z & = & z' \end{array}\right. \quad . \tag{1.23}$$

Tātad, no intervāla invariances ("nemainības" transformācijās), izriet, ka

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \quad . \tag{1.24}$$

Transformāciju formulu linearitātes dēļ

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha x' + \beta t' \\ t & = & \gamma x' + \delta t' \end{array}\right. , \tag{1.25}$$

kur koeficienti α β, γ, δ var būt atkarīgi tikai no ātruma $\vec{v}$ moduļa $v = v_x$.

Izmantojot atbilstības principu un Galileja transformācijas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x' + v\,t' \\ t & = & t' \end{array}\right. , \tag{1.26}$$

koeficientu β meklē formā $\beta = \alpha\,v$, proti,

$$x = \alpha(x' + v\,t') \quad , \tag{1.27}$$

Ievietojot izteiksmes (1.25) un (1.27) intervāla invariance vienādojumā (1.24), iegūst sakarību

$$c^2(\gamma x' + \delta t')^2 - \alpha^2(x' + v\,t')^2 = c^2 t'^2 - x'^2 \quad , \tag{1.28}$$

no kuras izriet trīs vienādojumi, no kuriem var noteikt trīs nezināmos koeficientus α, γ un δ:

$$\left\{\begin{array}{lcl} c^2\gamma^2 - \alpha^2 & = & -1 \\ c^2\delta^2 - \alpha^2 v^2 & = & c^2 \\ c^2\gamma\,\delta - \alpha^2 v & = & 0 \end{array}\right. , \tag{1.29}$$

No tām izsaka koeficientus

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \qquad \gamma = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{1.30}$$

un, tātad, arī speciālās Lorenca transformācijas:

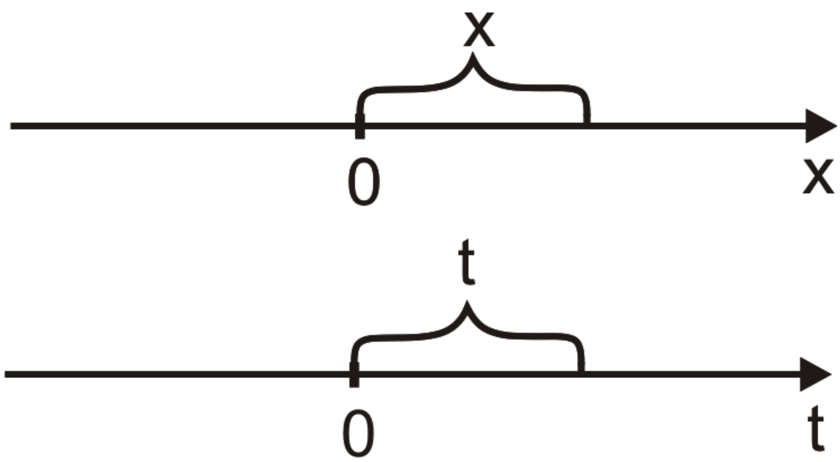
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{x' + v t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y & = & y' \\ z & = & z' \\ t & = & \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right. . \tag{1.31}$$

Nosauksim šīs formulas par tiešajām transformācijām. Apgrieztās transformācijas var uzrakstīt uzreiz, "pārceļot" novērotāju atskaites sistēmā O'. Tad mainās tikai sistēmu savstarpējās kustības ātruma virziens, kas mūsu gadījumā skar tā projekciju $v'_x = -v$. Tad

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right. . \tag{1.32}$$

Acīmredzot, Lorenca transformācijas "izpilda" Bora atbilstības principu. Proti, ja $v \ll c$, tad $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \approx 1$ un

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & \approx & x - vt \\ t' & \approx & t \end{array}\right. . \tag{1.33}$$



Att. 1.24: Laika ritums klasiskajā mehānikā

Tātad, relatīvi mazu ātrumu ($v \ll c$)gadījumā var pieņemt, ka inerciālās atskaites sistēmās laika ritums ir absolūts.

Relatisvistisku ātrumu gadījumā ($v \sim c$) Lorenca transformācijas demonstrē notikuma vietas $(x,\, y,\, z)$ un laika momenta (t) funkcionālo saistību. Proti, laika ritumu t vairs nevar attēlot kā neatkarīgu kontinuumu, kā to dara klasiskajā mehānikā (Att.1.24).

Tā vietā notikumu laika ass iekļaujas notikumus attēlojošā četrdimensionālā kontinuumā kā koordinātēm $x,\, y,\, z$ līdzvērtīgs parametrs (Att.1.25).

1.6 Lorenca transformāciju kinemātiskie efekti

Tā mēs esam nosaukuši trīs galvenos kinemātiskos secinājumus, kas izriet no Lorenca transformācijām.

1. Laika gaitas efekts. (arī - īpašlaika τ un laboratorijas laika t saistība $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ jeb $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$). (Šī formula mums jau pazīstama no laikveida intervāla invariances nosacījuma $\Delta S = c\,\Delta\tau$.)

No Lorenca transformācijām laika gaitas efektu $\Delta\tau < \Delta t$, ja vien $0 < v < c$, var iegūt, atkārtoti (2 reizes) salīdzinot kustoša hronometra (O') un laboratorijas hronometra (O) gaitu.

Pirmajā salīdzināšanā (notikums N_1) nekustīgajā (laboratorijas) hronometra momentam t_1 atbilst kustošā (īpašlaika) hronometra moments t'_1. Tā kā kustošais hronometrs novietots punktā x', tad no 4. Lorenca transformācijas laika momentam izriet, ka

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{1.34}$$

Oreizējā salīdzināšanā "pēc kāda laika" ar citu, laboratorijas sistēmā esošu sinhronā hronometra eksemplāru, iegūst, ka

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{1.35}$$

Tātad starp šiem diviem notikumiem N_1 un N_2 pēc īpašlaika ir pagājis laiks $t'_2 - t'_1 = \Delta\tau$, bet pēc laboratorijas laika $t_2 - t_1 = \Delta t$. Acīmredzot, ka

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{1.36}$$

jeb

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{1.37}$$

Daži secinājumi no laika gaitas formulas:

1 acīmredzot, īpašlaika hronometra gaita atpaliek no laboratorijas hronometra gaitas, jo $\Delta\tau < \Delta t$ $(0 < v < c)$; tādejādi visi kustošās atskaites sistēmas procesi, raugoties no laboratorijas, norisinās palēninātā ritmā;

2 raugoties no laboratorijas, gadījumā, kad $v \to c$, īpašlaiks starp notikumiem $\Delta\tau \to 0$, tātad īpašlaika hronometrs "apstājas";

3 visi laika gaitas efekti ir relatīvi tādā nozīmē, ka visi notikumi N_1, N_2, N_3, ... notiek cēloņsaistītā secībā visās inerciālās atskaites sistēmās, atšķirīgi ir tikai laika vienības etaloni to savstarpējā salīdzinājumā.

2. Lorenca saīsinājums (ģeometriskā garuma Δl_0 un kinemātiskā garuma Δl salīdzinājums). Kā noskaidrots, ģeometrisko attālumu $\Delta l' = |x'_2 - x'_1|$ pašu notikumu atskaites sistēmā nosaka ar garuma etalonu $\Delta l' \equiv \Delta l_0$.

Turpretī kinemātisko attālumu starp tiem pašiem notikumiem N_1 un N_2 nosaka kā $\Delta l = |x'_2 - x'_1|$, "atzīmējot" laboratorijas atskaites sistēmā galapunktu koordinātes x_1 un x_2 vienlaicīgi, piemēram, momentā t.

Lai šo vienlaicību fiksētu, acīmredzot ir jāizmanto pirmā apgrieztā Lorenca transformācija

$$x'_1 = \frac{x_1 - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{1.38}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{1.39}$$

No šīm formulām ģeometriskais attālums $|x'_2 - x'_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, jeb $\Delta l_0 = \frac{\Delta l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Tātad kinemātiskais attālums $\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ir pakļauts Lorenca saīsinājumam $\Delta l < \Delta l_0$ ($0 < v < c$).

Daži secinājumi no Lorenca saīsinājuma formulas:

1 acīmredzot, kinemātiskais attālums starp diviem punktiem N_1 un N_2 ir mazāks par ģeometrisko, un robežgadījumā, kad $v \to c$, tad $\Delta l \to 0$. Šādā izpratnē izteikti relativistiskiem objektiem (piemēram, elektromagnētiskā lauka kvantiem) nenākas runāt par to izmēriem.

2 līdzās kinemātiskajam attālumam, rela'tivistisku objektu "vienlaicīgām projekcijām" laboratorijas atskaites sistēmā jāmin gan kinemātiskie laukumi $\Delta S = \Delta S_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ un kinemātiskie tilpumi $\Delta V = \Delta V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

3. Relativistiskā ātrumu saskaitīšana.

Klasiskais "ātruma vektoru" saskaitīšanas likums $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ izriet no Galileja transformācijām. Patiešām, ja punktveida masas relatīvais ātrums atskaites sistēmā O' ir $\vec{u}$ ($u_x = \frac{dx'}{dt'}$, $u_y = \frac{dy'}{dt'}$, $u_z = \frac{dz'}{dt'}$) un atskaites sistēmas pārneses ātrums $\vec{v}$ ($v_x = v$, $v_y = 0$, $v_z = 0$), tad rezultējošo ātrumu $\vec{w}$ ($w_x = \frac{dx}{dt}$, $w_y = \frac{dy}{dt}$, $w_z = \frac{dz}{dt}$) iegūst no Galileja transformācijām

$$x = x' + v_x t' \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad t = t' \quad . \tag{1.40}$$

Patiešām, pielietojot atbilstošās formulas,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \frac{d(v_x t')}{dt'} \quad , \quad jeb \qquad w_x = u_x + v_x \quad , \tag{1.41}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \quad , \quad jeb \qquad w_y = u_y + 0 \quad , \tag{1.42}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \quad , \quad jeb \qquad w_z = u_z + 0 \quad . \tag{1.43}$$

Tieši tādā pat veidā iegūst rezultējošā ātruma komponentes w_x, w_y un w_z, izmantojot Lorenca speciālās transformācijas. Tā kā relativistiskajā kinemātikā laiks nav absolūts, tad no Lorenca transformācijām izriet, ka

$$dx = \frac{dx' + v_x dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad dy = dy' \quad , \quad dz = dz' \quad , \tag{1.44}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v_x}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{1.45}$$

Pielietojot šīs sakarības atbilstošo atvasinājumu aprēkināšanā (iegūstot tos kā atbilstošo diferenciāļu attiecību jeb daļu), iegūst ātruma vektora komponentes:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'+v_x dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{dt'+\frac{v_x}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{dx' + v_x dt'}{dt' + \frac{v_x}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_x}{1 + \frac{v_x}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u_x + v_x}{1 + \frac{v_x u_x}{c^2}} \quad , \tag{1.46}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\frac{dt'+\frac{v_x}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{1 + \frac{v_x}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{u_y}{1 + \frac{v_x u_x}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \tag{1.47}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\frac{dt'+\frac{v_x}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{1 + \frac{v_x}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{u_z}{1 + \frac{v_x u_x}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{1.48}$$

Tātad relativistiskajā kinemātikā

$$w_x = \frac{u_x + v_x}{1 + \frac{v_x u_x}{c^2}} \quad , \tag{1.49}$$

$$w_y = \frac{u_y}{1 + \frac{v_x u_x}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \tag{1.50}$$

$$w_z = \frac{u_z}{1+\frac{v_x u_x}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{1.51}$$

Paturēsim prātā, ka $v_x = v$.

Daži secinājumi no relativistiskās ātrumu saskaitīšanas formulām:

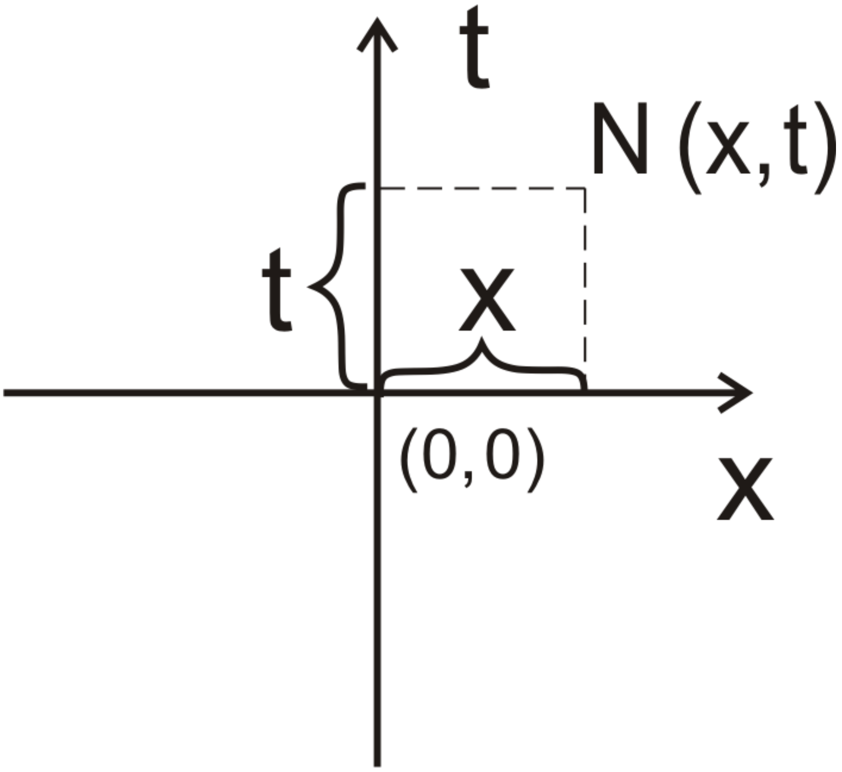
1 acīmredzot relativistiskie ātrumi $\vec{u}$ un $\vec{v}$ nedz algebriski, nedz ģeometriski nesaskaaitās kā trīsdimensionāli vektori;

2 no relativistiskās ātrumu saskaitīšanas izriet relativistiskās aberācijas likums;

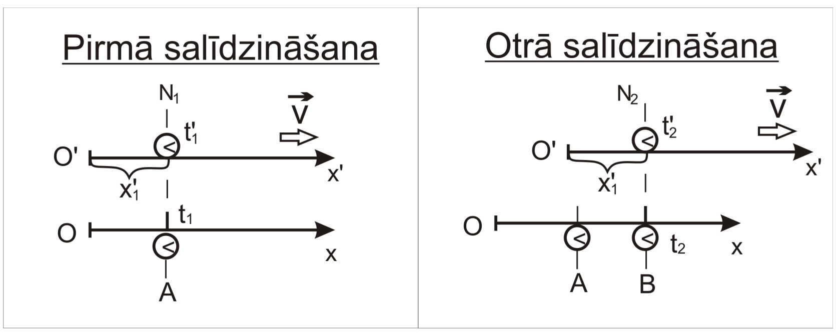
3 gadījumā, kad $v \ll c$ un $u \ll c$, protams, izpildās atbilstības princips un $w_x \approx u_x + v_x$, $w_y \approx u_y$, $w_z \approx u_z$;

4 relativistiskajā robežgadījumā, kad saskaitāmie ātrumi $v \to c$ un/vai $u \to c$, arī rezultējošais ātrums nepārsniedz maksimālo ātrumu: $w \to c$ (protams, izpildās SRT postulāts $c = max$!)

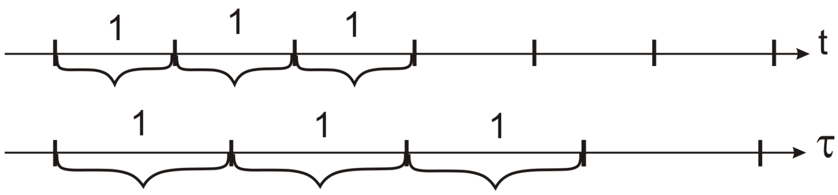
(Lai arī šada situācija ir nekorekta, jo nav skaidrs kā to realizēt, tomēr arī gadījumā, kad $v = u = c$, $w = \frac{c+c}{1+1} = c$!)



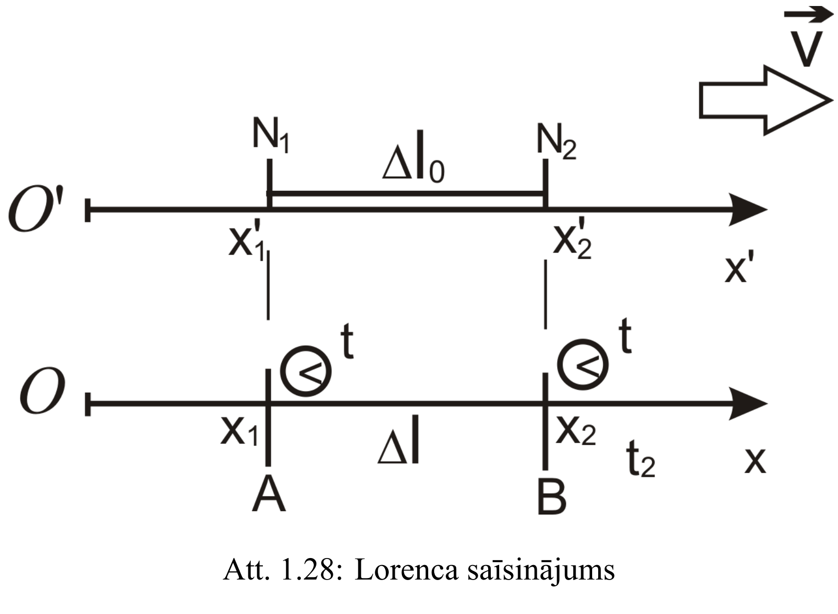
Att. 1.25: Laiks kā “papildus” koordināte 4D telpā



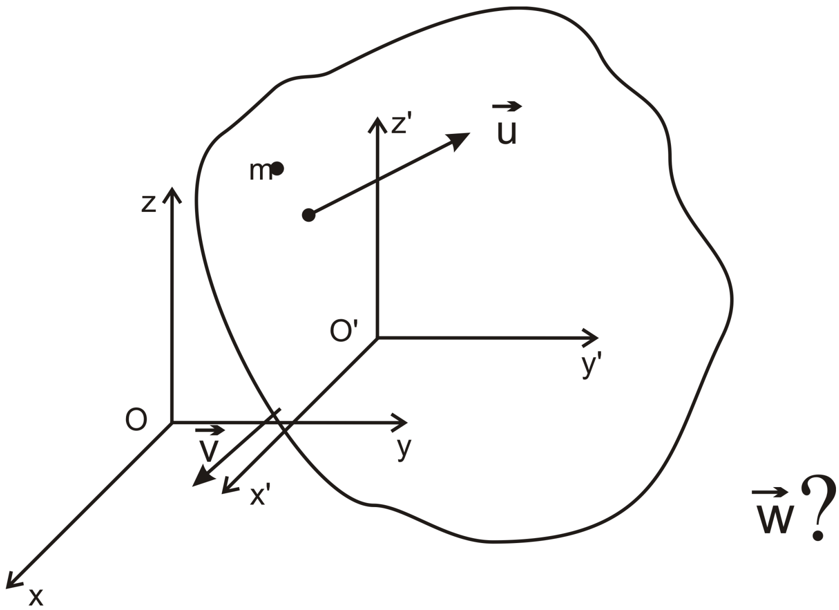
Att. 1.26: Laika gaitas efekts



Att. 1.27: Atšķirības laika mērīšanā



Att. 1.28: Lorenca saīsinājums



Att. 1.29: Relativistiskā ātrumu saskaitīšana

Nodaļa 2

Notikumu četrdimensionālās (Minkovska) telpas algebra

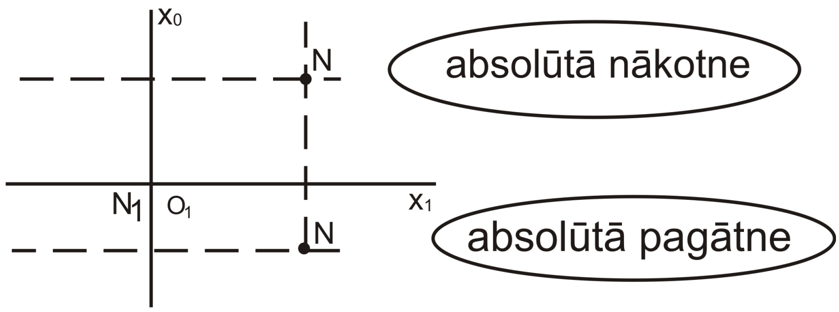
Nodaļas saturs

2.1 Notikumu 4-rādiusvektors (x_0 un x_4 reprezentācijas)

Dotajā atskaites sitēmā O notikuma N koordinātes x, y, z un laika moments t ir punkts notikumu kontinuumā. Noteiksim notikumu N līdzīgi kā punktu telpā R^3 ar tā koordinātēm, izvēloties visām tām vienādu dimensiju, piemēram, garumu:

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z \quad , \quad x_0 = c\,t \tag{2.1}$$

Notikuma N koordinātes x_i $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_0)$ nosauksim par 4-rādiusvektora komponentēm.



Att. 2.1: Koordinātu plakne

Kinemātiskajās ilustrācijās parasti attēlo notikumu kontinuuma $x_1\, x_0$ plakni, kuras "koordinātu sākumpunkts" $x_1 = 0$, $x_0 = 0$ atbilst notikumam koordinātu sistēmas sākumpunktā $x_1 = x = 0$ laika momentā $x_0 = ct = 0$, kurā "startē" atskaites sistēmas O sinhronie hronometri.

Šādā nozīmē notikumu laik moments (koordināte x_0) var būt ar;i negatīvs. Tāpēc notikumu kontinuumā notikumus N_0 $(x_1 = x,\ x_0 = ct = 0)$ mēdz saukt par tagadnes notikumiem, un notikumus N $(x_1 = x,\ x_0 = ct > 0)$ - par nākotnes notikumiem un notikumus N $(x_1 = x,\ x_0 = ct < 0)$ - par pagātnes notikumiem.

(Notikumu kontinuuma citas plaknes mēs neattēlojam, jo 4-kontinuumu nevar attēlot trīsdimensionālā telpā un vēl jo vairāk - plakanā ("divdimensionālā") attēlā.)

Algebriskajiem pārvietojumiem (vēsturiski nedaudz vēlāk), acīmredzamu priekšrocību dēļ, ērtāk izrādās 4-rādiusvektora ceturto (laika) koordināti definēt kā imagināru lielumu $x_4 = i\, x_0$, jeb $x_4 = ict$. Proti, notikuma N rādiusvektors ir x_i, kur $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, jeb $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict.$

2.2 Attālums notikumu telpā

Lai notikumu kontinuums kļūtu par telpu un notikumi N par telpas punktiem, jādefinē attālums starp notikumu telpas punktiem.

Trīsdimensionālā telpā R^3 punkta P apkārtnes punktu attālumu nosaka pozitīvi definēta kvadrātiskā forma (homogēns kvadrātisks polinoms, tā atsevišķu monomu kopējā pakāpe ir 2) $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \geq 0$, jeb $dl^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} dx_i^2 \geq 0$, kur $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Telpa ar šādi definētu attālumu sauc par Eiklīda telpu. Šķiet saprotams, ka attālumam telpā jābūt tās invariantam, attiecībā pret dotajai telpai pieļaujamām koordinātu transformācijām.

Relativistiskajā kinemātikā saskaņā ar Galileja-Einšteina relativitātes principu "pieļaujamās" koordinātu un laika transformācijas ir Lorenfa transformācijas. To invariants, kā zināms, ir divus notikumus saistošais relativistiskais intervāls. Tāpēc ds^2 arī ir tā kvadrātiskā forma $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, kas nosaka attālumu no notikuma N līdz tā apkārtnei.

Izsakot notikuma koordinātes un laika momentu ar 4-rādiusvektoru, iegūst, ka attāluma kvadrāts (tagad jau notikumu telpā) izsakās kā

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad , \tag{2.2}$$

jeb

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) = -\sum_{i=1}^{4} dx_i^2 \quad . \tag{2.3}$$

Kā jau zinām, realtivistiskā intervāla kvadrāts nav pozitīvi definēta kvadrātiskā forma:

- laikveida attālumam $ds^2 > 0$,
- telpveida attālumam $ds^2 < 0$,
- gaismas (nulles) attālumam $ds^2 = 0$.

Telpu ar šādu attāluma kvadrāta definīciju sauc par pseidoeiklīda telpu. To dēvē arī par Minkovska telpu. Ģeometriskās atšķirības starp Eiklīda un Minkovska telpām aplūkosim nedaudz vēlāk.

Poļu matemātiķis un fiziķis Minkovskis sāka izveidot šo četrdimensionālo SRT matemātisko aparātu. Uz to brīdi H.Minkovskis un SRT autors A.Einšteins jau bija pazīstami un abu zinātnieku sadarbība turpinājās līdz pat Minkovska pāragrajai nāvei.

H.Minkovskis dzimis 22. jūnijā 1864.gadā Kauņā (toreiz Krievijas impērija, tagad Lietuva) un miris 12. janvārī 1909. gadā Getingenē, Vācijā.

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Minkowski.html`

2.3 Speciālās Lorenca transformācijas notikumu telpā

Speciālās Lorenca transformācijas nav jāiegūst no jauna. Tās tikai jāpārraksta notikumu telpai adekvātos simbolos.

Pirms tam pievērsties, atgādināsim dažas sakarības, kas raksturo Eiklīda telpu un pseido-Eiklīda telpu.

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_space

Eiklīda telpā ir definēts skalārais reizinājums no kura izriet vektora norma, attālums un metrika. Starp diviem Eiklīda n-dimensiju telpas punktiem $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ attālums ir

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \,. \tag{2.4}$$

Pseidoeiklīda telpa.

https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudo-Euclidean_space

Pseido-Eiklīda telpā apskatāmā kvadrātiskā forma atšķiras no (2.4), tā vietā aplūko kvadrātisko formu

$$q(\vec{x},\vec{y}) = \left((x_1-y_1)^2+\cdots+(x_k-y_k)^2\right) - \left((x_{k+1}-y_{k+1})^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right) \,. \tag{2.5}$$

Tagad varam pievērsties konkrētam tematam - četrdimensiju norikumu telpai, kas atbilst pseido-Eiklīda telpai. Katru konkrētu notikumu N laboratorijas atskaites sistēmā O raksturo 4-rādiusvektors x_i $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict)$ un - atskaites sistēmā O' - 4-rādiusvektors x_i' $(x_1' = x',\ x_2' = y',\ x_3' = z',\ x_4' = ict')$. Tādējādi redzams, ka speciālās Lorenca transformācijas ir 4-rādiusvektora koordinātu transformāciju formulas. Nomainot trīsdimensionālos apzīmējumus ar četrdimensionālajiem, iegūst:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y &=& y' \\ z &=& z' \\ t &=& \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& (x_1' - i\beta x_4')\,\gamma \\ x_2 &=& x_2' \\ x_3 &=& x_3' \\ x_4 &=& (x_4' + i\beta x_1')\,\gamma \end{array}\right. , \tag{2.6}$$

kur ieviesti sekojoši apzīmējumi: 1) bezdimensionālais ātrums $\beta = \frac{v}{c}$, kur $0 \le \beta \le 1$ $(0 \le v \le c)$; 2) relatīvistiskais faktors $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Turpmāk Lorenca transformācijas ērti pierakstīt lineāru transformāciju formā:

$$x_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} x'_k \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad , \tag{2.7}$$

kur koeficientu matricu α_{ik} sauc par speciālo Lorenca transformāciju matricu:

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad . \tag{2.8}$$

Apgrieztajām Lorenca transformācijām

$$x'_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha^*_{ik} x_k \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad , \tag{2.9}$$

kur $\alpha^*_{ik} = \alpha^{Tr}_{ik}$ ir matricas α_{ik} transponētā matrica

$$\alpha^{-1}_{ij} = \alpha^{Tr}_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad . \tag{2.10}$$

Šāds 4-rādiusvektora Lorenca transformāciju pieraksts ļauj attīstīt tenzoru algebru un analīzi 4-dimensionālajā notikumu telpā, kas izrādās SRT postulātiem adekvāts matemātiskais aparāts.

2.4 Lorenca transformācijas matrica α_{ik}

a_i pēc definīcijas pārejā no vienas inerciālas atskaites sistēmas uz otru transformējas tāpat kā rādiusvektors x_i. Tātad - pēc Lorenca transformācijām. Proti, ja kustošā sistēmā O' vektora komponentes ir a'_i jeb $(a'_1,\, a'_2,\, a'_3,\, a'_4)$, tad laboratorijas atskaites sistēmā 4-vektora komponentes $(a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4)$ iegūst kā:

$$a_i = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} a'_j \tag{2.11}$$

Eksistē arī apgrieztā transformācija:

$$a'_i = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij}^{-1} a_j \tag{2.12}$$

Izrakstot transformāciju formulas, iegūst, ka

$$a_1 = \frac{a'_1 - i\,\beta\, a'_4}{\gamma} \quad , \tag{2.13}$$

$$a_2 = a'_2 \quad , \qquad a_3 = a'_3 \quad , \tag{2.14}$$

$$a_4 = (a'_4 + i\,\beta\, a'_1)\,\gamma \quad , \tag{2.15}$$

kur $\beta = \frac{v}{c}$ - bezdimensionālais ātrums un $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ - relativistiskais faktors.

Pārbaudam, vai 4-vektoru skalārais reizinājums ir invariants:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\, b_i = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} a'_j \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} b'_k = \sum_{j=1}^{4} a'_j \sum_{k=1}^{4} b'_k \sum_{i=1}^{4} \alpha_{ij}\alpha_{ik} \tag{2.16}$$

Savukārt

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{ji}^{Tr}\alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{ji}^{-1}\alpha_{ik} = \delta_{jk} \tag{2.17}$$

jo izteiksme $\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_{ji}^{-1}\alpha_{ik}$ ir matricu reizibājums, bet natricas reiznājums ar tās inverso matricu ir vienības matrica, kuru reprezentē Kronekera delta simbols δ_{ij}.

Tātad

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\, b_i = \sum_{i=1}^{4} a'_i\, b'_i \tag{2.18}$$

jo

$$\sum_{j=1}^{4} a'_j \sum_{k=1}^{4} b'_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{4} a'_j b'_j = \sum_{i=1}^{4} a'_i b'_i \tag{2.19}$$

2.5 4-ātruma un 4-paātrinājuma vektori, to relativistiskie invarianti

2.5.1 Četrdimensionāli skalāri un vektori notikumu telpā

Notikumu telpā, kur rādiusvektors ir $x_i\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$ un attālums starp tuviem notikumiem izsakās kā $ds = -\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4} dx_i^2}$, skalārus, vektorus un tenzorus definē un atšķir pēc tā, kā šie lielumi (vai to komponentes) tramsfomējas, pārejot no vienas inerciālas atskaites sistēmas O uz citu inerciālu atskaites sistēmu O'.

Fizikā lielumus mēdz klasificēt atkarībā no to "uzvedības" attiecībā pret transformācijām, ko pieļauj brīvības pakāpes. Šajā gadījumā tās ir Lorenca transformācijas, kas "padara ekvivalentas" visas inerciālās atskaites sistēmas (G-E relativitātes princips).

Visi lielumi, kas "nejūt" Lorenca transformācijas un ir invarianti attiecībā pret tām, acīmredzot ir relativistiski skalāri jeb invarianti. Šobrīd mums pazīstamie skalāri ir $c = const$, $ds = cd\tau$.

Visi lielumi, kuru vērtības, pārejot no vienas inerciālas atskaites sistēmas uz otru, transformējas tāpat kā 4-rādiusvektors $x_i\ (x, y, z, ict)$, notikumu telpā ir vektori. Turpmāk šos vektorus sauksim par 4-rādiusvektoriem $a_i\ (a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Tenzorus notikumu telpā, jeb 4-tenzorus (precīzāk, 2. ranga 4-tenzorus) iegūst kā atbilstošos 4-vektorus tenzoriālos reizinājumos, piemēram, $c_{ik} = a_i b_k$, kur a_i un b_k ir 4-vektoru komponentes, $i, k = 1, 2, 3, 4$.

2.5.2 Četrdimensionālais ātrums un paātrinājums

Veidojot punkta kinemātiku notikumu telpā, jāidentificē notikuma $N(x_i)$ "izmaiņas" ātrums (četrdimensionālais, jeb 4-ātrums) un paātrinājums (četrdimensionālais, jeb 4-paātrinājums).

Šeit rīkojas pēc analoģijas ar ātruma $v_i\ (v_x, v_y, v_z)$ un paātrinājuma $a_i\ (a_x, a_y, a_z)$ komponenšu definēšanu atskaites sistēmā O.

Trīsdimensiju telpā, atskaites sistēmā O, kurā rit absolūtais laiks t, trīsdimensionālā ātruma vektora komponentes ir

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad , \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad . \tag{2.20}$$

Tātad, kā redzams, 3-ātruma komponentes ir rādiusvektora $\vec{r}\,(x, y, z)$ komponenšu atvasinājums pēc invarianta t - absolūtā laika (laika ritējums klasiskajā mehānikā ir vienāds visās koordinātu sistēmās).

Ātruma definīcija notikumu telpā nemainās. 4-ātruma u_i komponentes ir 4-rādiusvektora komponenšu (4-telpas koordināšu) $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ atvasinājums pēc 4-telpas laika invarianta - īpašlaika τ:

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{2.21}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{2.22}$$

$$u_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dz}{dt} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{2.23}$$

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d(ict)}{dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{2.24}$$

Izsakot 4-vektora komponentes ar trīsdimensionālajiem lielumiem, ievērojam īpašlaika saistību ar laboratorijas laiku $d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$.

Saīsināta pierakstā trīs pirmās 4-vektora komponentes u_1, u_2, u_3 ērti attēlot 3-vektora formā $\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Tad 4-ātruma vektors u_i $(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Līdzīgi kā rādiusvektoram x_i $(x, y, z, ict) \equiv x_i$ $(\vec{r}, ict)$, jebkura 4-vektora pirmās trīs komponentes pieņemts saukt par vektora "telpas komponentēm", bet ceturto - par "laika komponenti".

Divu vektoru skalārais reizinājums ir skalārs. Šis apgalvojums ir pareizs arī 4-vektoriem. Divu 4-vektrou skalārais reizinājumu iegūst tāpat, kā 3-dimensionāliem vektoriem $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Tātad, ja a_i un b_i ir divi 4-vektori, tad to skalārais reizinājums ir $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i$. Līdzīgi iegūst vektora skalāro kvadrātu $(\vec{a}\cdot\vec{a}) = a^2$. Acīmredzot 4-vektora a_i skalārais kvadrāts ir $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2 = \sum_{i=1}^{4} a_i^2$. Acīmredzot jebkurš divu 4-vektoru skalārais reizinājums un skalārais kvadrāts ir relativistisks invariants.

Uzrakstīsim 4-ātrumu vektora u_i $(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$ skalāro kvadrātu

$$\sum_{i=1}^{4} u_i^2 = \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v^2-c^2}{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = -c^2 \quad . \tag{2.25}$$

4-vektora skalārais kvadrāts saista tā 4 komponentes ar 1 vienādojumu, ko dažkārt izdevīgi izmantot vektora vienas komponentes izteikšanai ar trijām citām komponentēm.

Līdzīgi kā 4-ātruma vektoru, notikumu telpā definē trešo kinemātikas vektoru - 4-paātrinājumu w_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$w_1 = \frac{du_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad , \tag{2.26}$$

$$w_2 = \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad , \tag{2.27}$$

$$w_3 = \frac{du_3}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad , \tag{2.28}$$

$$w_4 = \frac{du_4}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad , \tag{2.29}$$

vai, kompoaktākā pierakstā

$$w_i \quad \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\right) \quad . \tag{2.30}$$

Ir iespējami divi kustības gadījumi: 1) punkta ātrums mainās tikai pēc virziena bet $v = const$; 2) punkta ātrums mainās arī pēc moduļa un $v \neq const$.

Pirmajā gadījumā (piemēram, vienmērīga kustība pa riņķa līniju), 4-paātrinājumam $w_4 = 0$, un

$$w_i \quad \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}, \, 0\right) \quad , \tag{2.31}$$

jeb

$$w_i \quad \left(\frac{\vec{a}}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \, 0\right) \quad . \tag{2.32}$$

Izskaitļosim 4-ātruma un 4-paātrinājuma vektoru skalāro reizinājumu $\sum\limits_{i=1}^{4} u_i w_i = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + u_4 w_4$. To var izdarīt, piemēram šādi. Jau zināms, ka

$$\sum_{i=1}^{4} u_i^2 = -c^2 \quad . \tag{2.33}$$

Atvasinot vienādojuma kreisās puses izteiksmi pēc īpašlaika τ, iegūstam, ka

$$\frac{d}{d\tau}\sum_{i=1}^{4}u_i^2 = 2\sum_{i=1}^{4}u_i\frac{d\,u_i}{d\tau} = 2\sum_{i=1}^{4}u_iw_i \quad . \tag{2.34}$$

Savukārt

$$\frac{d(-c^2)}{d\tau} = 0 \quad , \tag{2.35}$$

tātad pierādīts, ka

$$\sum_{i=1}^{4}u_iw_i = 0 \quad . \tag{2.36}$$

Tātad, neatkarīgi no konkrē'tās kustības, notikumu telpā 4-ātruma un 4-paātrinājuma vektoru skalārais reizinājums visās inerciālās atskaites sistēmās ir vienāds ar nulli. Proti, vektori u_i un w_i vienmēr ir savstarpēji ortogonāli. (Protams, ka Ņūtona mehānikā $(\vec{v}\cdot\vec{a}) = 0$ un $\vec{v}\perp\vec{a}$ ir tikai īpašs kustības gadījums.)

2.5.3 4-paātrinājuma vektors, izvērsts izvedums un tā relativistiskais invariants (papildmateriāls)

4-paātrinājums:

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau} \tag{2.37}$$

Komponentes:

$$w_1 = \frac{du_1}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\frac{v_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{2.38}$$

Tā kā

$$\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{dv_x}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + v_x\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{2.39}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = w_x \tag{2.40}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt}\right) \tag{2.41}$$

Skaidrs, ka

$$\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{d(\vec{v})}{dt} + \frac{d(\vec{v})}{dt}\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\vec{a} \tag{2.42}$$

Apkopojot

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \left(1-(v/c)^2\right)^{-3/2}\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} = \frac{1}{1-(v/c)^2}\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{2.43}$$

Apvienojot (2.38), (2.39) un (2.43), iegūst

$$w_1 = \frac{a_x}{1-(v/c)^2}+\frac{1}{1-(v/c)^2}\,\frac{v_x\,(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{1-(v/c)^2}\left(a_x+\frac{v_x\,(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) \tag{2.44}$$

"Laika komponente"

$$w_4 = \frac{i\,c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{c}\,\frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})}{\left[1-(v/c)^2\right]^2} \tag{2.45}$$

Apkopojot:

$$w_1 = \frac{1}{1-(v/c)^2}\left(a_x+\frac{v_x\,(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2\,\left[1-(v/c)^2\right]}\right) \tag{2.46}$$

$$w_2 = \frac{1}{1-(v/c)^2}\left(a_y+\frac{v_y\,(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2\,\left[1-(v/c)^2\right]}\right) \tag{2.47}$$

$$w_3 = \frac{1}{1-(v/c)^2}\left(a_z+\frac{v_z\,(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2\,\left[1-(v/c)^2\right]}\right) \tag{2.48}$$

$$w_4 = \frac{i}{c}\,\frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})}{\left[1-(v/c)^2\right]^2} \tag{2.49}$$

4-paātrinājuma invariants

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} w_i^2 &= \tfrac{1}{[1-(v/c)^2]^2}\left(\vec{a}+\tfrac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2\,[1-(v/c)^2]}\right)^2 - \tfrac{1}{c^2}\,\left(\tfrac{(\vec{v}\cdot\vec{a})}{[1-(v/c)^2]^2}\right)^2 \\
&= \tfrac{a^2}{[1-(v/c)^2]^2} + \tfrac{v^2(\vec{v}\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^4[1-(v/c)^2]^4} + \tfrac{2(\vec{v}\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2[1-(v/c)^2]^3} - \tfrac{(\vec{v}\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2[1-(v/c)^2]^4} \\
&= \tfrac{a^2}{[1-(v/c)^2]^2} + \tfrac{(\vec{v}\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^4[1-(v/c)^2]^4}\left(v^2+2c^2\left[1-(v/c)^2\right]-c^2\right) \\
&= \tfrac{a^2}{[1-(v/c)^2]^2} + \tfrac{(\vec{v}\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^4[1-(v/c)^2]^4}c^2\left(1-(v/c)^2\right) \\
&= \tfrac{a^2}{[1-(v/c)^2]^2} + \tfrac{(\vec{v}\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2[1-(v/c)^2]^3}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Kā atsevišķu gadījumu var aplūkot situāciju, kad $v = const$ un $\frac{dv}{dt} = 0$. Tas ir gadījums ar centrtieces paātrinājumu, $\vec{v}\perp\vec{a}$, automātiski $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$ un 4-paātrinājuma izteiksmes ievērojami vienkāršojas:

$$w_1 = \frac{a_x}{1-(v/c)^2} \tag{2.51}$$

$$w_2 = \frac{a_y}{1-(v/c)^2} \tag{2.52}$$

$$w_3 = \frac{a_z}{1-(v/c)^2} \tag{2.53}$$

$$w_4 = 0 \tag{2.54}$$

4-vektors paātrinājumam

$$w_i = \left(\frac{\vec{a}}{1-(v/c)^2},\ 0\right) \tag{2.55}$$

2.5.4 Piemērs: ātruma saskaitīšana vienādi vērstiem ātrumiem

Tā, piemēram, ja punkta kustības ātrums atskaites sistēmā O' ir $u = u_x$ (3D lielums!) un O' kustās pret O ar ātrumu $v = v_x$, tad punkta 4-ātrums sistēmā O' izsakās kā

$$u'_i \quad \left(u'_1 = \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}},\ 0,\ 0,\ u'_4 = \frac{i\,c}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}\right) \quad , \tag{2.56}$$

Tāpēc, saskaņā ar Lorenca transformāciju formulām, rezultējošais 4-ātrums laboratorijas atskaites sistēmā ir

$$u_1 = \frac{u'_1 - i\frac{v_x}{c}u'_4}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{u_x + v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} \quad , \tag{2.57}$$

$$u_2 = u_3 = 0 \quad , \tag{2.58}$$

$$u_4 = \frac{u'_4 + i\frac{v_x}{c}u'_1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{ic + i\frac{v_x\,u_x}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} = ic\frac{1+\frac{v_x\,u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} \quad . \tag{2.59}$$

Pārbaudei aplūkojam

$$\sum_{i=1}^{4} u_i^2 = u_1^2 + u_4^2 = \frac{(u_x+v_x)^2 - c^2\left(1+\frac{v_x\,u_x}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u_x^2}{c^2}\right)} \quad . \tag{2.60}$$

To var pārveidot kā

$$\sum_{i=1}^{4} u_i^2 = c^2\frac{c^2u_x^2 + c^2v_x^2 + 2c^2u_xv_x - c^4 - v_x^2u_x^2 - 2c^2v_x\,u_x}{c^4 - c^2v_x^2 - c^2u_x^2 + v_x^2u_x^2} = -c^2 \quad , \tag{2.61}$$

kas arī ir 4-ātruma inavariants, ko veido tā skalārais kvadrāts.

Att. 2.2: Hermanis Minkovskis

Nodaļa 3

Notikumu četrdimensionālās (Minkovska) telpas ģeometrija

Nodaļas saturs

3.1 Notikumu telpas invariantie apgabali, gaismas konuss)

SRT ģeometriskās interpretācijas attēlosim reālā notikumu telpā, kurā laika "koordināte" ir $x_0 = ct$.

Šajā telpā relativistiskā intervāla koordināte - attālums starp notikumiem diferenciālā formā ir

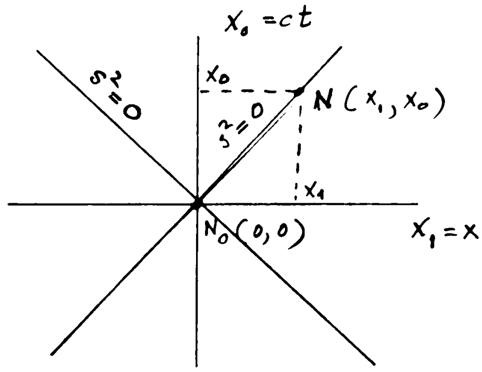
$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \tag{3.1}$$

un notikuma N koordinātes: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_0 = ct$.

Ģeometriskajām ilustrācijām galvenokārt izmantojam plakni (x_1, x_0). Šajā plaknē koordinātu sākumpunkts ir tagadnes notikums N_0 trīsdimensionālas telpas laboratorijas atskaites sistēmas O sākumpunktā $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ laika momentā $x_0 = ct = 0$, kad "startē" atskaites O sistēmas sinhronie hronometri.

Attiecībā pret tagadni, notikumi, kuriem $x_0 > 0$ ir nākotnes notikumi, bet notikumi, kuriem $x_0 < 0$ ir pagātnes notikumi. Klasificēsim visus notikumus N attiecībā pret tagadni pēc to "attāluma" līdz tagadnei.

1 Ja notikuma N attlums līdz tagadneo ir vienāds ar nulli, tad tā kvadrāts $s^2_{N_0N} = 0$, jeb $x_0^2 - x_1^2 = 0$. Proti, $x_1 = \pm x_0$, jeb $x = \pm ct$. Acīmredzot visi šādi notikumi (x_1, x_0) plaknē guļ uz bisektrisēm. Šos notikumus ar tagadni saista gaismas signāls.



Att. 3.1: Koordinātu plakne

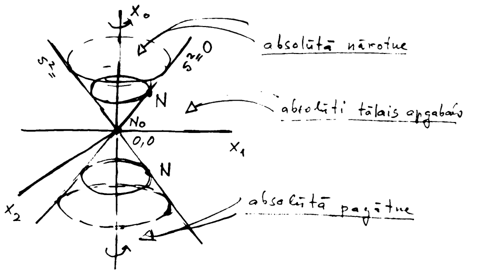
Vispārinājums 4-dimensionālajā pseidoeiklīda notikumutelpā bisektrisu vietā notikumam $N(x,\ y,\ z,\ ct)$ dod trīsdimensionāla kona vienādojumu

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad . \tag{3.2}$$

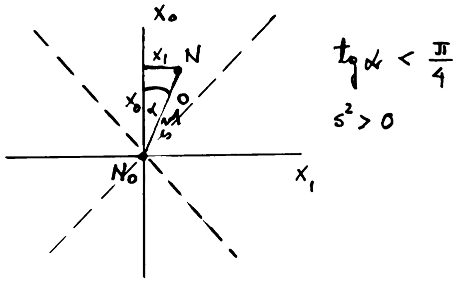
Šo konusu sauc par gaismas konusu, kas relativistiskā intervāla invariances dēļ, sadala 4-dimensionālo telpu trijos invariances apgabalos. Tie ir invarianti tādā nozīmē, ka nevienā inerciālā atskaites sistēmā notikums (punkts notikumu telpā) nevar "šķērsot" apgabala robežu un tātad citā atskaites sistēmā atrasties citā no trim apgabaliem

2 Ja notikuma N atālums līdz tagadnei ir laikveida, tad tā kvadrāts $s^2 = x_0^2 - x_1^2 > 0$. Acīmredzot, ka šādā gadījumā $\tan\alpha = \frac{x_1}{x_0} < 1$, un notikums "guļ" gaismas konusa iekšienē (nākotnē, vai tagadnē). Šādu notikumu N ar tagadni var saistīt signāls, kura izplatīšanās ātrums $\frac{x_1}{x_0} = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} < 1$, jeb $v < c$. Visi, ar tagadni cēloņsaistītie notikumi (kustības trajektorijas) atrodas absolūtās nākotnes vai pagātnes konusos. 4-dimensionālā telpā attāluma kvadrāts $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$.

3 Ja notikuma N attālums līdz tagadnei ir telpveida, tad tā kvadrāts $s^2 = x_0^2 - x_1^2 < 0$. Acīmredzot šādā gadījumā $\tan\alpha = \frac{x_1}{x_0} > 1$, un notikums



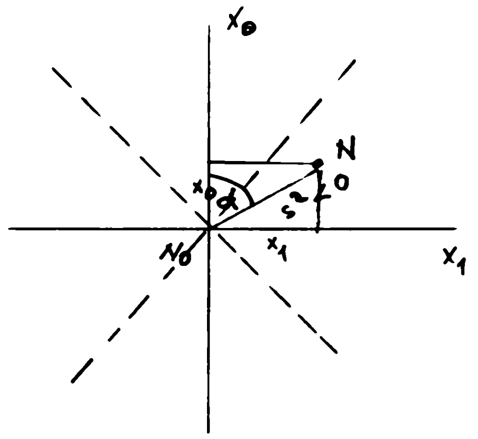
Att. 3.2: Gaismas konuss un trīs invriantie apgabali



Att. 3.3: Ar tagadni saistīts notikums

"ģuļ" ārpus gaismas konusa. Šādu notikumu ar tagadni nevar saistīt neviens signāls, jo tad $\frac{x_1}{x_0} = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} > 1$ un $v > c$, kas nav iespējams. Tāpēc acīmredzot visi šie, ārpus konusa esošie notikumi ir absolūti neatkarīgi no tagadnes. Saka arī, ka notikumu telpā tie ir absolūti tālu, no tagadnes nesasniedzami.

Sapratīsim, ka visi šie attēli ir interpretējami kā "Pasaules" momentuzņēmumi attiecībā pret tagadni. Ejot laikam $x_0 = ct$, tagadne, protams, "slīd grafikā uz augšu", un notikumu pasaules aina ir jāiztēlojas dinamiski.



Att. 3.4: Ar tagadni nesaistīts notikums

3.2 Notikumu invariantās "līnijas" un "virsmas"

Tā kā relativistiskais intervāls ir invariants $s^2 = inv$ tad laikveida un telpveida intervālu gadījumos $s^2 > 0$ un $s^2 < 0$ notikumu telpā veidojas divas invariantu virsmu saimes:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0 \quad , \tag{3.3}$$

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 < 0 \quad . \tag{3.4}$$

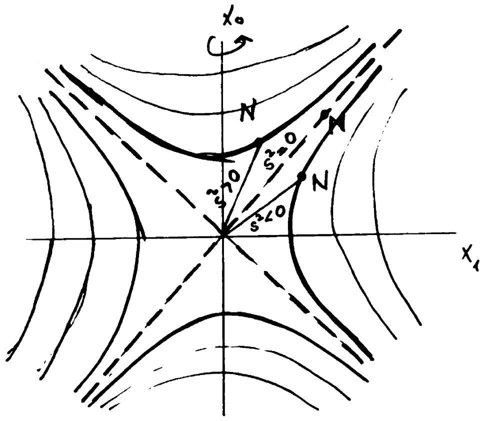
Plaknē (x_1, x_0) tās ir invariantas līnijas

$$x_0^2 - x_1^2 > 0 \quad , \tag{3.5}$$

$$x_0^2 - x_1^2 < 0 \quad . \tag{3.6}$$

z katru no šīm virsmām (līnijām) esošajiem notikumiem ir viens un tas pats attālums līdz tagadnei. Tāpēc izrādās, ka pārejot no vienas inerciālas atskaites sistēmas O uz citu inerciālu atskaites sistēmas O', notikuma N vieta notikumu telpā paliek uz atbilstošās virsmas (līnijas). Proti, Lorenca transformāciju dēl notikuma viet un laiks var tikai slīdēt pa atbilstošo līniju $s^2 = const.$

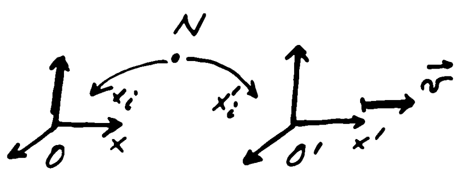
Kā vienā, tā otrā gadījumā $S^2 \neq 0$ šīs virsmas (līnijas) ir hiperboloidi (hiperbolas), kuru asimptotu plaknes (līnijas) ir gaismas konusa veidules. Lorenca transformācijas šo trīsdimensionālo virsmu (līkņu) saimi nevar izmainīt! Notikumam ir atļauts tikai "slīdēt" pa doto virsmu (līniju) $s^2 = const.$



Att. 3.5: Konstanta intervāla līnijas

3.3 Lorenca transformāciju ģeometriskā interpretācija

Lorenca transformācijas, kā zināms, "pārrēķina" notikuma N koordnātes un laika momentu (4-rādiusvektoru x_i) no kustīgās atskaites sistēmas O' laboratorijas sistēmā O.



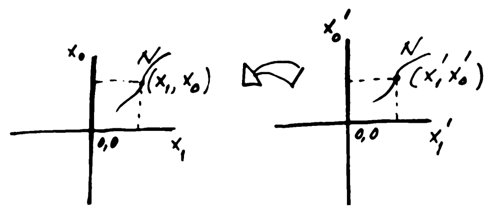
Att. 3.6: Koordinātu transformācija

Katras atskaites sistēmas novērotājam ir savs notikumu telpas "eksemplārs", kurā norisinās notikumu kinemātika un dinamika:

Arī notikumu telpas koordinātu asu punkti ir notikumi:

1) koordinātu ass x_1 atbilst visiem vienlaicīgajiem notikumiem uz x ass laika momentā $t = 0$, (līdzīgi arī atskaites sistēmā O');

2) laika ass $x_0 = ct$ atbilst visiem notikumiem koordinātu sākumpunktā $x = 0$, kas notiek, laikam ritot.



Att. 3.7: Notikumu "līnijas" transformācijas

Projicēsim kustošās atskaites sistēmas O' 4-telpas koordinātu asis $x_1'x_0'$ uz nekustīgās (laboratorijas) sistēmas 4-telpas asīm x_1x_0. Šo operāciju, protams, izpilda Lorenca transformācijas. Uzrakstīsim tās notikumu koordinātēm x_1, x_0:

$$x_1 = \frac{x_1' + \frac{v}{c}x_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad x_0 = \frac{x_0' + \frac{v}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{3.7}$$

Nošīm transformācijām redzams, ka sistēmas O' x' ass punktu vietu nekustīgajā atskaites sistēmā O atrod no nosacījuma $x_0' = 0$ ($t' = 0$):

$$x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad x_0 = \frac{\frac{v}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{3.8}$$

Tātad $\frac{x_0}{x_1} = \frac{v}{c}$, jeb $\tan\alpha = \frac{v}{c}$.

Savukārt laika ass $x_1' = 0$ punktu vietu nekustīgajā atskaites sistēmā O nosaka pēc transformācijām

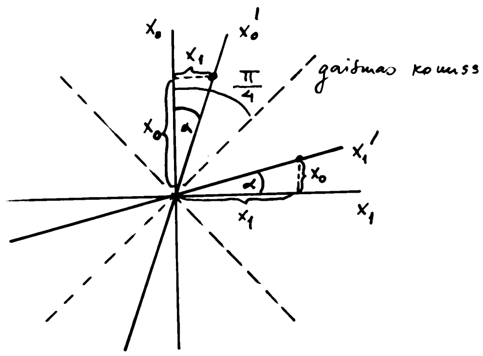
$$x_1 = \frac{\frac{v}{c}x_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad x_0 = \frac{x_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{3.9}$$

No tām izriet $\frac{x_1}{x_0} = \frac{v}{c}$, jeb $\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{v}{c}$.

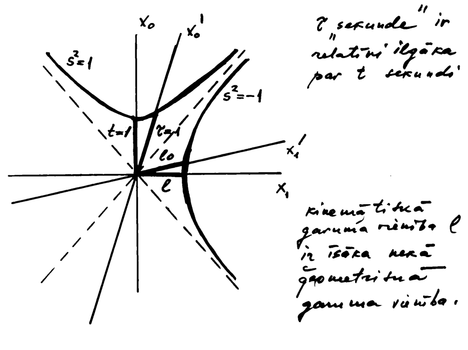
Acīmredzot O' 4-telpas projekcija O 4-telpas veido slīpleņķa koordinātu sistēmu

Pieaugot O' ātrumiem v, "kustīgās" asis $x_1'x_0'$ sakļaujas ap gaismas konusa veidulēm. Robežgadījumā $v \to c$, protams, proiekšstats par notikumu vietu un laika momentu zūd. (Ar fotonu, p-kvantu principā nevar saistīt atskaites sistēmu! Fotonam "laiks ir apstājies" un neeksistē kā 4-telpas koordināte.)

Šis, Lorenca transformāciju ģeometriskais attēlojums uzskatāmi interpretē arī transformāciju kinemātikas efektus (laika gaitas un Lorenca saīsinājumu).



Att. 3.8: Koordinātu plakne



Att. 3.9: Kinemātiskie efekti

Nodaļa 4

Relativistiskā dinamika

Nodaļas saturs

4.1 Brīvas daļiņas akcija un Lagranža funkcija

Relativistisko dinamiku var racionāli formulēt Lagranža mehānikas formā. (Nav daudzu gadu desmitu un pat gadu simtu minētās empīrikas, kā tas ir klasiskajā mehānikā kopš Ņūtona "Principiem".)

Atgādināsim Lagranža mehānikas formālisma galvenos jēdzienus:

1 Sistēmas vispārinātās koordinātes q_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, kur s - sistēmas brīvības pakāpju skaits.

2 Vispārināto koordinātu atvasinājumi pēc laika ir $\dot{q}_1, \ \dot{q}_2, \ \ldots \dot{q}_s$vispārinātie ātrumi.

(Brīvai daļiņai, piemēram, $\dot{q}_1 = \dot{x} = v_x$, $\dot{q}_2 = \dot{y} = v_y$, $\dot{q}_3 = \dot{z} = v_z$, jeb, vektoriālā formā, $\vec{v}$.)

3 Lagranža funkciju definē ar akcijas integrāli $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt$, kur integrēšana notiek pa kustības trajektoriju no sākumpunkta t_1 līdz beigu momentam t_2.

4 Sistēmas Lagranža funkcija vispārīgā gadījumā $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, kur konservatīvām sistēmām $L = L(q_i, \dot{q}_i)$.

(Klasiskajā mehānikā punktveida masai potenciālā laukā $L = T - U$, kur $T = m_0 \frac{v^2}{2}$ un $U = U(x,\, y,\, z)$ - potenciālā enerģija.)

5 Lagranža funkcijas atvasinājumi pēc vispārinātajiem ātrumiem $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $(i = 1,\, 2, \ldots s)$ir vispārinātie impulsi.

(Brīvai daļiņai $p_1 = \frac{\partial L}{\partial v_x} = p_x$, $p_2 = \frac{\partial L}{\partial v_y} = p_y$, , $p_3 = \frac{\partial L}{\partial v_z} = p_z$, jeb, vektoriālā formā, $\vec{p}$.)

6 Sistēmas pilno enerģiju, zinot Lagranža funkciju, nosaka pēc formulas

$$E = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L \quad . \tag{4.1}$$

(Brīvas daļiņas gadījumā $E = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - L$, jeb $E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$.)

Punktveida masas (ķermeņa, daļiņas) akcijai S jābūt relativistiskam invariantam attiecībā pret Lorenca transformācijām. Protams, šāda invarianta izvēle liekas viennozīmīga, lai gan skaidrs, ka notikumu telpā akcijai jābūt integrālim pa trajektoriju no sākumnotikuma $N_1(t_1)$ līdz notikumam $N_2(t_2)$:

$$S = \alpha \int_{N-1}^{N_2} ds \quad , ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad , \tag{4.2}$$

kur α - konstante un ds - pasaules līnijas (trajektorijas) loka elements.

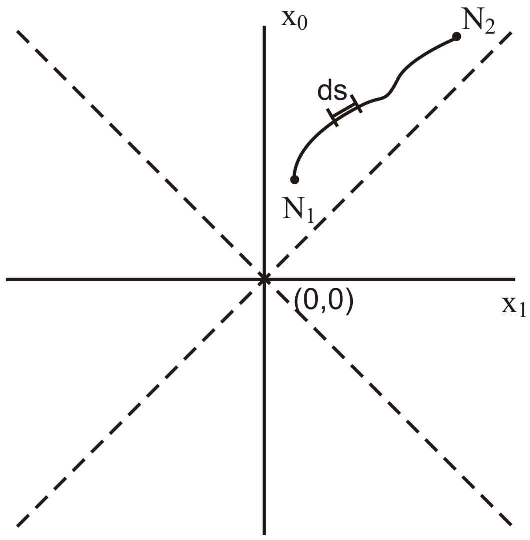
Šī akcija ir relativistiskās dinamikas postulāts. Konstantes α noteikšanai jāizmanto Bora atbilstības princips, jo gadījumā, kad punkta kustības ātrums $v \ll c$, jāiegūst punkta klasiskā (Ņūtona) dinamika.

Lai "ieraudzītu" relativistisko Lagranža funkciju, projicēsim integrēšanas notikumu telpā uz laika asi. Acīmredzot, $ds = c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, kur $v^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Tāpēc akcijas integrālis

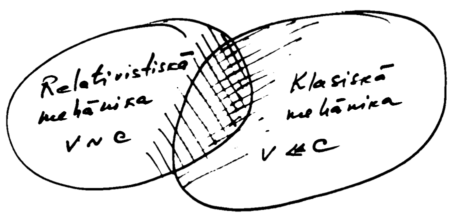
$$S = \alpha c \int_{t-1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad . \tag{4.3}$$

No šejienes punktveida masas (daļiņas, ķermeņa) relatīvistiskā Lagranža funkcija

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{4.4}$$



Att. 4.1: Integrēšanas ceļš 4-telpā



Att. 4.2: Bora atbilstības princips

Konstantes α noteikšanai izmantojam nerelatīvistisko tuvinājumu $v \ll c$, jeb $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$. Tad $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ (ar precizitāti līdz pirmajam kustības ātrumu saturošajam saskaitāmajam $\frac{v^2}{c^2}$). Tādejādi $L \approx \alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha c - \alpha \frac{v^2}{2c}$. Tā kā klasiskajā mehānikā brīvas daļiņas Lagranža funkcija $L_{kl} = T = \frac{m_0 v^2}{2} + const$ ir vienāda ar daļiņas kinētisko enerģiju, kur m_0 - masa (inerces mērs) Ņūtona mehānikā. No šejienes acīmredzot $\alpha = -m_0 c$. Proti, brīvas daļiņas Lagranža funkcija

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{4.5}$$

4.2 Brīvas daļiņas impulss, masa un enerģija

Brīvas daļiņas relativistiskais impulss

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{4.6}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial v_y} = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{4.7}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial v_z} = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{4.8}$$

Impulsu var uzrakstīt arī 3-dimensionāla vektora formā, jo

$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} = \frac{\partial L}{\partial v_x}\vec{i} + \frac{\partial L}{\partial v_y}\vec{j} + \frac{\partial L}{\partial v_z}\vec{k} \quad . \tag{4.9}$$

Tādejādi relatīvistiskais impulss

$$\vec{p} = grad_v L = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{4.10}$$

Saskaņā ar atbilstības principu, kad $v \ll c, \vec{p} \approx p_{kl} = m_0\vec{v}$ (ievērojot, ka $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1$), kas ir klasiskais impulss.

Lai noteiktu relativistisko inerces mēru - relativistisko masu, izmantojam "klasisko" impulsa definīciju $\vec{p} = m\vec{v}$. Tādējādi, acīmredzot

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{4.11}$$

Atskaites sistēmā, saistītā ar pašu daļiņu, kurā $v = 0$, inerces mērs $m(0) = m_0$. Masu paša objekta atskaites sistēmā m_0 sauc par miera masu. Acīmredzot masas jēdziens Ņūtona mehānikā un miera masa ir identiski jēdzieni.

Relativistiskiem ātrumiem, kad $v \to c$, $m \to \infty$. Neierobežotais inerces pieaugums šādā situācijā neļauj pērsniegt ātruma robežu c. Ievērosim vēl, ka relativistiskās masas atkarība no ātruma *a priori* paredz, ka $m_0 \neq 0$. Tādējādi formula nav lietojama, piemēram, elektromagnētiskā lauka kvantiem, kuri kustās ar gaismas ātrumu.

Brīvas daļiņas enerģiju aprēķina pēc izteiksmes

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L \quad , \tag{4.12}$$

Att. 4.3: Masas atkarība no ātruma

jeb

$$E = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{4.13}$$

No šejienes iegūst t.s. Einšteina formulu pilnajai enerģijai. Vienādojot izteiksmes saucējus

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{4.14}$$

jeb

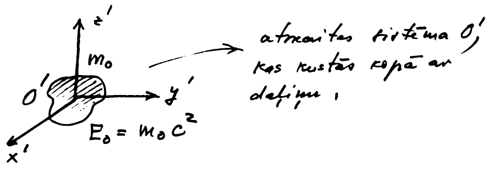
$$E = m(v) c^2 \quad . \tag{4.15}$$

Pašas daļiņas atskaites sistēmā, kurā $v = 0$, daļiņas pilnā enerģija ir noteikta ar miera stāvokļa inerces mēru:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad . \tag{4.16}$$

Šo enerģiju sauc par miera enerģiju. To jāinterpretē kā objekta iekšējo enerģiju, ko neatkarīgi no tā struktūras, iekšējās uzbūves nosaka tikai daļiņas "pasē ierakstītajam" parametram - miera masai.

Atskaitot no pilnās iekšējās enerģijas daļiņas miera enerģiju, iegūst to enerģijas komponenti, kas tieši un tikai ir atkarīga no ātruma v. Šī ir relativistiskā kinētiskā

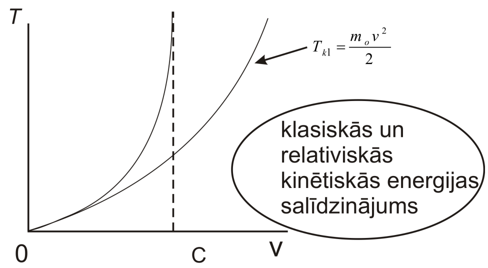


Att. 4.4: Daļiņas masas "pašas" atskaites sitēmā

enerģija, proti,

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad . \tag{4.17}$$

Pārliecināmies, ka nerelativistiskiem ātrumiem $v \ll c$ (kad $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$), kinētiskā enerģija $T \approx T_{kl} = \frac{m_0 v^2}{2}$ tiecas uz klasisko robežu



Att. 4.5: Kinētisko enerģiju salīdzinājums

4.3 Brīvas daļiņas Hamiltona funkcija

Brīvas daļiņas (ķermeņa) gadījumā Hamiltona funkcijai ir pilnās enerģijas jēga $H \equiv E$. Tikai šajā gadījumā tā ir pilnā enerģija Hamiltona mehānikā, kurā kanoniskie mainīgie ir nevis vispārinātās koordinātes un vispārinātie ātrumi

$\{q_i,\ \dot{q}_i\}$, jeb $(x,\ y,\ z;\ v_x,\ v_y,\ v_z)$, jeb $(\vec{r},\ \vec{v})$,

bet vispārinātās koordinātes un vispārinātie impulsi:

$\{q_i,\ \dot{q}_i\}$, jeb $(x,\ y,\ z;\ p_x,\ p_y,\ p_z)$, jeb $(\vec{r},\ \vec{p})$.

Daudzejādā ziņā, it sevišķi kvantu mehānikā, impulsa mainīgajiem ir priekšroka pret ātrumiem. Kā fizikāls lielums, impulss ir pakļauts nezūdamības likumam, impulsa operatora īpašvērtības vai vidējās vērtības ir novērojami lielumi, ko nevar teikt par ātrumiem.

Tādejādi brīvas daļiņas relativistisko Hamiltona funkciju varam uzrakstīt, izslēdzot ātrumus no Einšteina formulas. Tādejādi jāaplūko vienādojumi

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E & = & \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \\ \\ \vec{p} & = & \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \end{array} \right. \tag{4.18}$$

Lai izteiktu ātruma kvadrātu, izmantojam vienādojumu kvadrātus

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E^2 & = & \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad , \\ \\ p^2 & = & \frac{m_0^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad . \end{array} \right. \tag{4.19}$$

no kurienes izsakām

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2c^4\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = m_0^2c^4 \quad . \tag{4.20}$$

Tātad

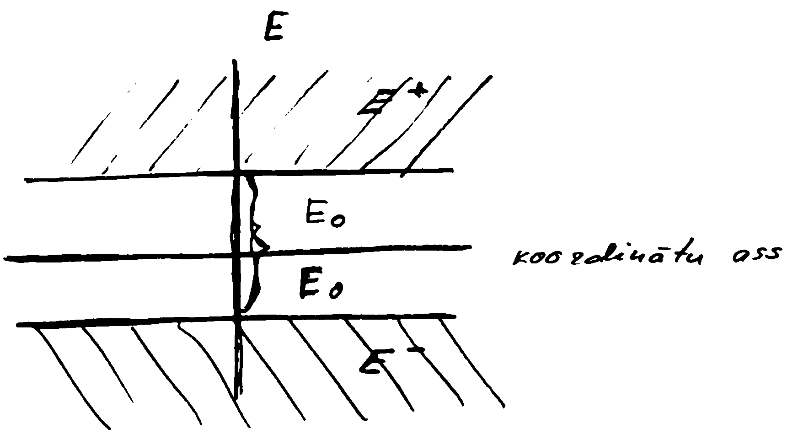
$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \quad , \tag{4.21}$$

jeb

$$E \equiv H = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \quad . \tag{4.22}$$

Šī arī ir brīvas daļiņas relativistiskā Hamiltona funkcija, kas pilnai enerģijai piedāvā pozitīvo un negatīvo enerģiju spektrus $E^+ > 0$, $E^- < 0$.

Ievērosim, ka daļiņām ar miera masu m_0 abus enerģijas spektrus atdala “aizliegtā zona”, kuras platums ir $\Delta E = 2E_0 = 2m_0c^2$.



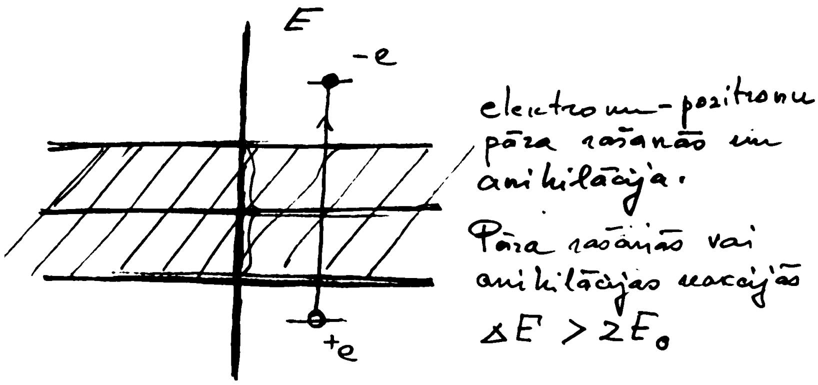
Att. 4.6: Pilnās enerģijas spektri un aizliegtā zona

Aizliegtās enerģijas platums divu miera enerģiju vērtībā ir izteikti relativistisku enerģiju rajonā. Piemēram, salīdzinot ar daļiņu klasiskajām kinētiskajām enerģijām $\frac{m_0 v^2}{2} \ll m_o c^2$. Tā, piemēram, vieglākās stabilās elementārdaļiņas - elektrona - miera enerģija $E_{0e} \approx 0.5 \cdot 10^6 eV$, kur turklāt šā paša elektrona enerģija atoma elektronu čaulā ir tikai daži desmiti eV.

Tādejādi relativistiskajā fizikā (arī nerelativistiskajā kvantu mehānikā) pārejas aizliegtajai zonai nav domājamas, un dinamikā var ierobežoties tikai ar vienu, piemēram, pozitīvu enerģiju apgabalu. Turklāt, brīvai daļiņai, kad $v \ll c$, Hamiltona funkciju $H = +\sqrt{p^2c^2 + m_0^2 c^4}$ var izvirzīt rindā pēc $\frac{p}{m_0 c} \ll 1$ pakāpēm. Tad iegūst, ka $H \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$, ko var atpazīt kā $H \approx E_0 + T_{kl}$, kur $T_{kl} = \frac{p^2}{2m_0}$ ir klasiskā brīvas daļiņas Hamiltona funkcija.

Situācija mainās, ja daļiņu reakcijas enerģija kļūst salīdzināma ar miera enerģiju. Tad kļūst iespējamas pārejas aizliegtajai zonai un enerģiju negatīvais spektrs iegūst reālu interpretāciju. Pazīstamākā no tām ir saistīta ar antidaļiņu stāvokļiem. Tā izriet arī no Diraka relativistiskās kvantu mehānikas.

Cita ekvivalenta interpretācija, arī sākotnēji attīstīta Diraka teorijā, ir daļiņu - caurumu versija, kad negatīvo enerģiju zonā vakuuma situācijā visi negatīvie līmeņi ir aizņemti un tie parādas tikai elektronam pārvietojoties pozitīvo enerģiju zonā, atstājot caurumus.



Att. 4.7: Elektrona-pozitrona pāris

4.4 Impulsa-enerģijas vektors

Nedz relativistiskā impulsa vektors $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, nedz relativistiskā enerģija (Einšteina formula) $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ nav relativistiski invarianti lielumi. Proti, tie ir uzrakstīti kādā atsevišķā (šobrīd laboratorijas) atskaites sistēmā O un, vispārīgā gadījumā, nav zināms, kā šie lielumi mainās, pārejot no vienas inerciālas atskaites sistēmas uz citu atskaites sistēmu.

Notikumu telpā relativistiskajam trīsdimensionālajam impulsam $\vec{p}$ un relativistiskajai enerģijai E atbilst 4-vektors, kurš mainot atskaites sistēmu, transformējas pēc Lorenca transformācijām.

4-impulsa, jeb impulsa-enerģijas vektoru notikumu telpā definē, kā invariantās (miera) masas m_0 un 4-ātruma u_i reizinājumu:

$$p_i = m_0 u_i, \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \quad . \tag{4.23}$$

Šī 4-vektora komponentes acīmredzot ir

$$p_1 = m_0 u_1, = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{4.24}$$

$$p_2 = m_0 u_2, = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{4.25}$$

$$p_3 = m_0 u_3, = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{4.26}$$

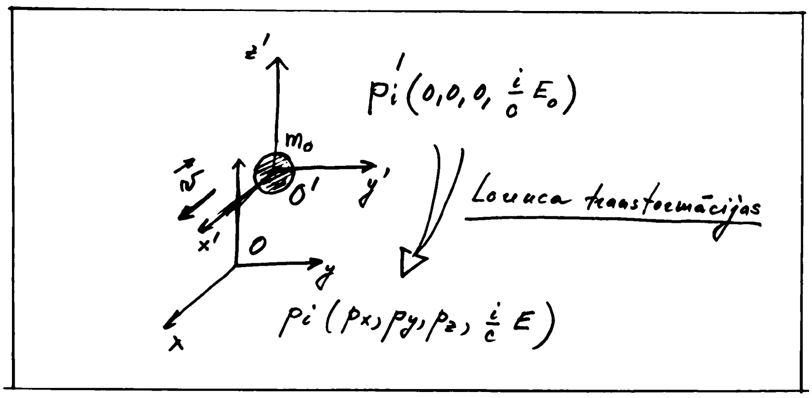
$$p_4 = m_0 u_4, = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \tag{4.27}$$

Acīmredzot 4-vektora p_i telpas komponentes p_1, p_2, p_3 ir relativistiskais impulss $\vec{p} = m(v)\vec{v}$, bet "laika" komponente $p_4 = \frac{i}{c}E$ ir proporcionāla relativistiskajai enerģijai, proti p_i $(\vec{p}, \frac{i}{c}E)$. Galvenais, ko šajā sakarībā nākas ievērot, ir tas, ka notikumu telpā daļiņas enerģija E nav skalārs lielums, bet vektora komponente, un kā tāda tā ir pakļauta Lorenca transformācijām kopā ar impulsa komponentēm.

Aplūkosim impulsa-enerģijas vektora invariantu, tā skalāro kvadrātu $\sum_{i=1}^{4} p_i^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = inv$. Proti,

$$\sum_{i=1}^{4} p_i^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = inv \quad . \tag{4.28}$$

Aprēķināsim šo invariantu, piemēram, tā: izskaitļosim to pašas atskaites sistēmā O', kurā tās ātrums $v = 0$. Šajā atskaites sistēmā impulsa-enerģijas vektors ir p_i



Att. 4.8: 4-impulsa vektors

$(0,\, 0,\, 0,\, \frac{i}{c}E_0)$. Tā kā no skalārā kvadrāta invariances nosacījuma izriet $\sum_{i=1}^{4} p_i^2 = \sum_{i=1}^{4} p'^2_i$, tad $\sum_{i=1}^{4} p'^2_i = p'^2_4 = -\frac{E_0^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$. Tādejādi jebkurā atskaites sistēmā

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad , \tag{4.29}$$

jeb

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad . \tag{4.30}$$

Dažkārt šo universālo sakarību dēvē par impulsa-enerģijas nezūdamības likumu. Tā jebkurā inerciālā atskaites sistēmā daļiņas (arī ķermeņa vai ķermeņu sistēmas) enerģijai E jābūt saistītai ar impulsu $\vec{p}'$.

Piebildīsim, ka sakarība $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ ir jau pazīstama kā brīvas daļiņas Hamiltona funkcijas kvadrāts.

4.5 Impulsa-enerģijas vektors Lorenca transformācijas

Daļiņas impulsa un enerģijas saistību divās atskaites sistēmās nosaka Lorenca transformācijas (kā jau jebkuram 4-vektoram). Pieņemsim, ka KAS O', kas kustas attiecībā pret LAS O ar ātrumu $\vec{v}$ x-ass virzienā, daļiņas impulss ir $\vec{p}\,' = \dfrac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ un enerģija $E' = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ (šeit $\vec{u}$ - daļiņas relatīvais kustības ātrums, mērīts KAS O').

Tad LAS O daļiņas impulsu $\vec{p}$ un enerģiju E nosaka 4-vektora transformāciju formulas

$$p_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} p'_k \quad , \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \quad , \tag{4.31}$$

kur α_{ik} ir Lorenca transformāciju matrica

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad , \tag{4.32}$$

kurā izmanto apzīmējumus $\beta = \dfrac{v}{c}, \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Turklāt šajās formulās $(p_i) = (\vec{p}, \frac{i}{c}E)$ un $(p'_i) = (\vec{p}\,', \frac{i}{c}E')$.

No Lorenca transformācijām izriet vispārīgās sakarības

$$\begin{aligned} p_1 &= (p'_1 - i\beta p'_4)\,\gamma \ , \\ p_2 &= p'_2 \ , \\ p_3 &= p'_3 \ , \\ p_4 &= (i\beta p'_1 + p'_4)\,\gamma \ . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Atšifrējam tās gadījumā, kād KAS O' atrodas ar to nekustīgi saistīta daļiņa ($p'_1 = 0$, $p'_2 = 0$, $p'_3 = 0$, $p'_4 = i\,m_0c$, turklāt $v_x = v$). Tad Lorenca transformācija vienkāršojas par

$$
\begin{cases}
p_1 &= \dfrac{0 - i\frac{v}{c} i\, m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
p_2 &= 0 \\
p_3 &= 0 \\
p_4 &= \dfrac{i\, m_0 c + i\frac{v}{c} 0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
p_x &= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
p_y &= 0 \\
p_z &= 0 \\
E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}
. \qquad (4.34)
$$

Iegūtās transformācijas būtībā "definē" gan relativistisko 3D impulsu $\vec{p}$, gan relativistisko enerģiju E. Tātad, ja mums būtu bijušas zināma "*a prori*" visu inerciālo atskaites sistēmu ekvivalence un tas, kā izsakās daļiņas "iekšējā" enerģija $E_0 = m_0 c^2$, tad impulsa un enerģijas vispārīgās izteiksmes, ķermenim atrodoties kustībā ar ātrumu $\vec{v}$, mēs iegūtu kovariantā ceļā - izdarot atļautās koordināšu transformācijas.

4.6 4-spēka vektors

Nerelatīvistiski, klasiskajā gadījumā, 3D spēka izteiksme mums saistās ar kādu no Otrā Ņūtona likuma pieraksta formām:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ . \tag{4.35}$$

Relatīvistisko 4-spēka definīciju ieviešam veidā, kas nodrošina tā atbilstību klasiskajai mehānikai mazu ātrumu gadījumā. Papildus nosacījums nosaka, ka formulā jāizmanto tikai 4-telpas tenzoru elementi - skalāri, vektori. Tā tiks nodrošināta sakarības izpilde visās inerciālās atskaites sistēmās. Tādēļ masu aizstāj ar miera masu m_0, ātrumu aizstāj ar 4-ātrumu, bet laiku - ar pašlaiku (*proper time*).

Tāpēc 4-spēka vektors $(K_i) = (K_1, K_2, K_3, K_4)$, saukts arī par Minkovska spēku, tiek ieviests kā spēka relatīvistisks vispārinājums sekojošā formā:

$$m_0\frac{d}{d\tau}u_i = K_i \ , \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ . \tag{4.36}$$

Atsvaidzināsim atmiņā, ka

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt} \ , \qquad p_i = m_0u_i = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt} \ . \tag{4.37}$$

Tai skaitā,

$$u_1 = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \qquad p_1 = m_0u_1 = \frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = p_x \tag{4.38}$$

un

$$u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \qquad p_4 = m_0u_4 = \frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{iE}{c} \ . \tag{4.39}$$

Ņemot vērā, ka m_0 ir konstants lielums, var teikta, ka 4-spēka vēktoru iegūst kā 4-impulsa vektora p_i $(\vec{p}, \frac{i}{c}E)$ atvasinājumu pēc invariantā īpašlaika τ:

$$K_i = \frac{dp_i}{d\tau} \ , \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ . \tag{4.40}$$

Šie 4 vienādojumi ir kovarianti (tie saglabā savu struktūru visās inerciālās atskaites sistēmās), un tie ir daļiņas (ķermeņa) dinamikas likumi relativistiskajā mehānikā. Atdalot to trīsdimensionālo pierakstu, var vieglāk saprast vienādojumu saistību ar klasiskās mehānikas lielumiem, tātad arī interpretāciju:

$$\begin{cases} K_1 &= \dfrac{dp_1}{d\tau} &= \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\dfrac{dp_x}{dt} \\ K_2 &= \dfrac{dp_2}{d\tau} &= \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\dfrac{dp_y}{dt} \\ K_3 &= \dfrac{dp_3}{d\tau} &= \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\dfrac{dp_z}{dt} \\ K_4 &= \dfrac{dp_4}{d\tau} &= \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\dfrac{i}{c}\dfrac{dE}{dt}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} &= \dfrac{dp_x}{dt} \\ K_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} &= \dfrac{dp_y}{dt} \\ K_3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} &= \dfrac{dp_z}{dt} \\ K_4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} &= \dfrac{i}{c}\dfrac{dE}{dt} \end{cases} . \tag{4.41}$$

Tā kā klasiskais 3D spēks $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, tad

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} = K_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \,, \\ F_y &= \frac{dp_y}{dt} = K_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \,, \\ F_z &= \frac{dp_z}{dt} = K_3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Ceturtā kovariantā vienādojuma $K_4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \dfrac{i}{c}\dfrac{dE}{dt}$ un K_4 jēgu vieglāk saprast, ja aplūko relatīvistisko invariantu $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i^2 = -m_0^2c^2$, to atvasinot pēc invariantā pašlaika. Tā kā labā puse ir konstanta (jo invariants), tad $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i\dfrac{dp_i}{d\tau} = 0$, jeb

$$\sum_{i=1}^{4} p_i K_i = 0 \,. \tag{4.43}$$

Proti,

$$\begin{aligned} &p_xK_1 + p_yK_2 + p_zK_3 + \frac{iE}{c}K_4 \\ =&\frac{p_xF_x + p_yF_y + p_zF_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}K_4 \\ =&m_0\frac{v_xF_x + v_yF_y + v_zF_z}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}K_4 = 0 \,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Izsakot no (4.44) lielumu K_4, iegūst

$$K_4 = \frac{i}{c}\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{4.45}$$

Tātad ceturtais vienādojums ir enerģijas saglabāšanās likums

$$\frac{d\,E}{d\,t} = \vec{F}\cdot\vec{v} \tag{4.46}$$

un K_4 saistās ar spēka attīstīto jaudu, uz ko norāda $\vec{F}\cdot\vec{v}$.

Tātad relativistiskie invarianti dinamikas vienādojumi ietver Ņūtona dinamikas relativistiskos vienādojumus un arī paredz enerģijas nezūdamības ceturto vienādojumu.

Šis apstāklis lieku reizi norāda fizikas pamatvienādojumu kovariantā pieraksta nozīmību. To, ko Ņūtona dinamikā nākas formulēt kā atsevišķu aksiomu (enerģijas saglabāšanos), notikumu pasaulei adekvātā pierakstā iegūst kā secinājumu.

Starp citu, treniņa nolūkos var aplūkot invariantu $\sum\limits_{i=1}^{4} u_i K_i$ un izvest, ka tas ir vienāds ar nulli, ja ievēro, ka $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \dfrac{\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$.

Nodaļa 5

Elektromagnētiskā lauka pamatvienādojumi kovariantā formā

Nodaļas saturs

5.1 Kas ir relativistiskā elektrodinamika?

Šķiet retorisks jautājums - taču, izlasot virsrakstā “relativistiskā elektrodinamika”, var rasties jautājums - vai vispār iespējama nerelativistiska elektrodinamika! Relativitātes teorijas aksiomātika taču pati veidojās kā risinājums starp novērojumiem un eksperimentiem elektromagnētismā un līdz 20.gs. pastāvošo tāldarbības koncepciju teorētiskajā fizikā (mehānikā).

Patiešām, brīvs elektromagnētiskais lauks (elektromagnētiskie viļņi), kuru izplatīšanās ātrums vakuumā $c = const$ ir maksimālais mijiedarbības ātrums dabā, ir relativistisks objekts. Te nerelativistiskais tuvinājums principā nav iespējams. Brīva elektromagnētiskā lauka teorija "pēc definīcijas" ir relativistiskā fizika.

Cits jautājums, ka līdzšinējā, tā sauktā Maksvela formulējumā, elektrodinamika nedarbojais tai adekvātajā 4-dimensionālajā Minkovska telpā. Tajā, līdzīgi kā ķermeņu kustībā mehānikā, arī elektromagnētiskā lauka $\vec{E}(\vec{r},\, t)$, $\vec{B}(\vec{r},\, t)$ konstatācija punktā $x_i(\vec{r},\, ict)$ ir uzskatāma par notikumu. Tādejādi arī lauka dinamika (elektrodinamika) aprakstāma ar notikumu telpai raksturīgajām struktūrām - 4-skalāriem, 4-vektoriem, 4-tenzoriem, kādi nepārprotami nav nedz trīsdimensionālie vektori $\vec{E}$ un $\vec{B}$, nedz elektromagnētiskā lauka potenciāli φ un $\vec{A}$, nedz arī lauka avotu funkcijas ρ un $\vec{j}$.

Tas ir šīs kursa nodaļas viens no uzdevumiem - iegūt elektromagnētisko lauku raksturojošiem trīsdimensionāliem lielumiem atbilstošos analogus notikumu telpā un uzrakstīt elektromagnētiskā lauka vienādojumues kovariantā formā. Tas ir - uzrakstīt tādā formā. lai elektromagnētiskā lauka pamatlikumu atbilstība Galileja-Einšteina relativitātes principam kļūtu acīmredzama (visas inerciālās atskaites sistēmas vienādos nosacījumos ir ekvivalentas).

Relativistiska vai nerelativistiska elektrodinamika var būt tikai attiecībā pret elektromagnētiskā lauka avotu - vielas lādiņnesēju q kustības ātrumu v. Ja $v \ll c$, tad tā pakļaujas klasiskajai mehānikai, bet, ja lādiņu kustības ātrums $v \sim c$, jālieto relativistiskās mehānikas likumsakarības, ko aplūkojām kursa 2. sadaļā. Šie ir jautājumi, kas specifiski skar lauka avotu blīvumu funkcijas ρ un $\vec{j}$ un uz lādiņnesējiem darbojošos spēku blīvumu $\vec{f}$ un enerģijas ārējos elektriskajos un magnētiskajos laukos.

Jāatzīmē vēl trešā "relativistiskās elektrodinamikas" jautājumu grupa, ko gan šeit īpaši neakcentējam. Tā ir saistība ar elektrodinamikas relativistisko formulējumu, izmantojot mazākās akcijas principu $\delta S = 0$ un Lagranža mehānikas formālismu. Šī nepieciešamība rodas saistībā ar kvantu lauka teorijas (kvantu elektrodinamikas) aspektu aplūkošanu, kas nav šī kursa uzdevumu sarakstā.

Ko nozīmē "vienādojumi kovariantā forma"? Šeit vārdu "kovariants" nedrīkst jaukt ar tenzoru analīzē lietoto terminu pāri kovarints un kontravariants (runājot par ko- un kontravariantām tenzora komponentēm un indeksiem). Vienādojumu kovarianta forma izpaužas tādā veidā, ka korenti 4-tenzoru formā pierakstīts vienādojums, transformējoties uc citu atskaites sistēmu, precīzi saglabā savu pieraksta veidu. Tātad mainās līdzi, jeb ir "ko"-"variants", līdzi-mainīgs.

5.2 Elektrodinamikas 3D vienādojumi un sakarības

Uzskaitīsim vienādojumus un sakarības SI mērvienībās, kurus vēlāk izteiksim 4-tenzoru formā.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \quad , \tag{5.1}$$

$$\vec{\nabla}^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \tag{5.2}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \quad , \tag{5.3}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \tag{5.4}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \tag{5.5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad , \tag{5.6}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \tag{5.7}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{5.8}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \tag{5.9}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad , \tag{5.10}$$

5.3 4-potenciāls un 4-strāvas blīvums. Elektromagnētiskā lauka potenciālu vienādojumi kovariantā formā.

Definīcija: Notikumu telpā $x_i(\vec{r},\, ict)$ elektromagnētisko lauku raksturojošā vienkāršākā struktūra ir 4-vektors, ko sauc par 4-potenciālu A_i. Šī vektora telpas komponentes $A_1,\, A_2,\, A_3$ ir vektorpotenciāls $\vec{A}$, bet imaginārajā "laika komponentē" $A_4 = i\dfrac{\varphi}{c}$ ir iesaistīts skalārais potenciāls. Tādējādi relatīvistiskajā elektrodinamikā elektromagnētiskā lauka potenciāls ir 4-vektors $A_i(\vec{A},\, i\dfrac{\varphi}{c})$.

Definīcija: Savukārt elektromagnētiskā lauka avotus - lādiņa blīvumu ρ un strāvas blīvumu $\vec{j}$ notikumu telpā ekvivalenti aizstāj 4-strāvas blīvuma vektors j_i. Šī vektora telpas koordinātu $j_1,\, j_2,\, j_3$ lomā ir vadītspējas strāvas blīvuma vektors $\vec{j}$, bet "laika komponente" $j_4 = ic\rho$ nosaka lādiņa blīvumu ρ. Tādējādi 4-strāvas blīvums ir $j_i(\vec{j},\, ic\rho)$.

Definīcija: Atvasināšanā piedalās operatora nabla vispārinājums 4-telpā

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z},\, \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right) \quad . \tag{5.11}$$

4-vektoru $\frac{\partial}{\partial x_k}$ sauc par 4-gradientu notikumu telpā, tas izsakās kā $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\vec{\nabla},\, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Strāvas nepārtrauktības vienādojums 4-telpā tiek iegūts kā 4-atvasināšanas operatora un 4-strāvas vektora skalārais reizinājums:

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_k}j_k = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial(ic\rho)}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad . \tag{5.12}$$

Ja lielums, kas izvests (5.12), ir vienāds ar 0 kādā vienā atskaites sistēmā (kas neapšaubāmi ir), tad vienādība ar nulli saglabājas arī citās atskaites sistēmās.

Definīcija: Dalambēra operators notikumu telpā ir relativistiski invariants operators (skatīt invarianta izvedumu tālāk tekstā). Dekarta koordinātēs Dalambēra operators izsakās kā:

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad . \tag{5.13}$$

Vēl var piebilst, ka pie 4-strāvas var nonākt arī reizinot 4-rādiusvektoru ar lādiņu blīvumu ρ_0 kā skalāru lielumu (līdzīgi, kā atvasina pēc īpašlaika, tā šeit reizina ar lādiņu blīvumu, kas noteikts pret lādiņiem nekustīgā atskaites sistēmā). "Īstais invariants" gan ir lādiņš, kas atrodas kādā telpas daļā - tā kopējais lielums nemainās, pārejot no vienas atskaites sistēmas uz otru.

Uzrakstam elektromagnētiskā lauka potenciālu vienādojumus Dekarta koordinātēs vektropotenciālam $\vec{A}$ un skalārajam potenciālam φ. Tie ir 4 Dalambēra vienādojumi

$$\begin{cases} \triangle A_x - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \left(\triangle - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_x = \Box A_x = -\mu_0 j_x \\ \triangle A_y - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = \left(\triangle - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_y = \Box A_y = -\mu_0 j_y \\ \triangle A_z - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = \left(\triangle - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_z = \Box A_z = -\mu_0 j_z \\ \triangle \varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\triangle - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = \Box \varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \tag{5.14}$$

Kā redzams, uz 4-potenciāla komponentēm A_x, A_y, A_z un φ darbojas Dalambēra operators $\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, kas notikumu telpā ir relativistiski invariants operators.

Invariantumu pierāda sekojoša izteiksme, kur starta pozīcija ir Dalambēra operators Dekarta koordinātēs:

$$\begin{aligned} \Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \end{aligned} \tag{5.15}$$

.

Iegūto summu var uzrakstīt arī kā 4-gradienta $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ skalāro kvadrātu, proti:

$$\Box = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \quad . \tag{5.16}$$

Principā atvasinājumu pēc rādiusvektora komponentēm 4-vektora daba tieši izriet no tā, ka rādiusvektors $x_k(x, y, z, ict)$ ir 4-vektors. Savukārt, katra 4-vektora skalārais kvadrāts ir invariants attiecībā pret Lorenca transformāciojām, tātad

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k'^2} = inv \quad . \tag{5.17}$$

Un tas mums der - ja potenciālu "uzkonstruē" kā 4-vektoru, tad atbilstošie vienādojumi izskatīsies vienādi visās inerciālās atskaites sistēmās.

Tam, ka Dalambēra operators ir relativistiskais invariants, ir izšķiroša nozīme. Ja Dalambēra vienādojumi (5.14) elektromagnētiskā lauka potenciāliem ir relativistiski korekti (tā ir mūsu, no relativitātes teorijas principiem izrietoša aksioma), tad, pārejot no vienas inerciālas atskaites sistēmas uz citu inerciālu atskaites sistēmu, vienādojumu struktūra nemainās. Izpildot Lorenca transformācijas, vienādojumu (5.14) labās un kreisās puses izteiksmēm jātransformējas ekvivalenti ($A_x \sim j_x$, $A_y \sim j_y$, $A_z \sim j_z$, $\varphi \sim \rho$). Četrkomponentu struktūrām tas var būt spēkā tikai 4-vektoriem. Pierakstot Dalambēra vienādojumus 4-potenciālam $A_i(A_x, A_y, A_z, \dfrac{i\varphi}{c}) \equiv A_i(\vec{A}, \dfrac{i\varphi}{c})$, iegūst, ka

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} A_i = -\mu_0 \, j_i \quad , \qquad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4, \tag{5.18}$$

kur 4-vektors $j_i(j_x, j_y, j_z, ic\rho) \equiv i_i(\vec{j}, ic\rho)$ ir 4-strāvas blīvuma vektors. Šī ir Dalambēra vienādojuma kovariantā forma (tāda forma, kas nodrošina vienādojuma vienādu pierakstu visās inerciālajās atskaites sistēmās).

Dalambēra vienādojumi elektromagnētiskā lauka potenciāliem, kā zināms, ir spēkā pie Lorenca nosacījuma $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. Pārrakstīsim arī šo vienādojumu kovariantā formā. Lorenca nosacījums Dekarta koordinātēs ir pirmās kārtas diferenciālvienādojums

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_x}{\partial x_k} + \frac{\partial A_y}{\partial x_y} + \frac{\partial A_z}{\partial x_z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial A_x}{\partial x_k} + \frac{\partial A_y}{\partial x_y} + \frac{\partial A_z}{\partial x_z} + \frac{\partial \frac{i\varphi}{c}}{\partial ict} \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0\end{aligned} \tag{5.19}$$

.

Ievērojot 4-rādiusvektora $x_i(x, y, z, ict)$ un 4-potenciāla $A_i(A_x, A_y, A_z, \dfrac{i\varphi}{c})$ koordinātu definīcijas, arī Lorenca nosacījumu var uzrakstīt kovariantā formā:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k = 0 \ . \tag{5.20}$$

Lorenca nosacījums (5.20) ir pierakstīts divu 4-vektoru (4-gradienta $\frac{\partial}{\partial x_k}$ un 4-potenciāla A_k) skalārā reizinājuma formā. Tātad tas ir relatīvistiskais invariants.

4-vektora koordinātu atvasinājumu pēc 4-rādiusvektora koordinātēm summu, līdzīgi kā tas ir trīsdimensiju telpā, kad $\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x_k} + \frac{\partial A_y}{\partial x_y} + \frac{\partial A_z}{\partial x_z}$, sauc par šī vektora diverģenci (4-diverģenci) $\sum_{k=0}^{4} \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$. Tātad Lorenca nosacījums (5.20) apgalvo, ka 4-potenciāla diverģence notikumu telpā ir vienāda ar nulli.

5.4 4-potenciāla Lorenca transformācijas.

Elektromagnētiskā lauka vektropotenciālu $\vec{A}$ un skalārā potenciāla φ apvienošanās 4-potenciāla vektorā nozīmē, ka, mainot inerciālu atskaites sistēmu, potenciāli $\vec{A}$ un φ transformējas savstarpēji saistīti.

Pieņemsim, ka pret laboratoriju O kustīgajā atskaites sistēmā O' elektromagnētiskā lauka 4-potenciāls ir $A'_i\,(A'_1,\, A'_2,\, A'_3,\, \frac{i\varphi'}{c})$. Tad, laboratorijas atskaites sistēmā O, 4-potenciāls ir $A_i\,(A_1,\, A_2,\, A_3,\, \frac{i\varphi}{c})$. Saskaņā ar speciālajām Lorenca transformācijām

$$A_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} A'_k \quad, i = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \quad , \tag{5.21}$$

kur

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \ , \ \beta = \frac{v}{c} \ , \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.22}$$

ir Lorenca transformāciju matrica. Tātad 4-potenciāla komponentes laboratorijas atskaites sistēmā ir šādas:

$$\begin{cases} A_1 &= \alpha_{11} A'_1 + \alpha_{14} A'_4 \\ A_2 &= \alpha_{22} A'_2 \\ A_3 &= \alpha_{33} A'_3 \\ A_4 &= \alpha_{41} A'_1 + \alpha_{44} A'_4 \end{cases} , \tag{5.23}$$

jeb

$$\begin{cases} A_x &= \dfrac{A'_x + \frac{v}{c^2}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ A_y &= A'_y \\ A_z &= A'_z \\ \varphi &= \dfrac{\varphi' + vA'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} . \tag{5.24}$$

Aplūkosim piemēru - punktveida lādiņš q, atrodoties atskaites sistēmas O' sākumpunktā, ir elektrostatiskā lauka avots un šī lauka skalārais potenciāls ir φ'. Tātad ar pašu lauka avotu saistītajā notikumu telpā 4-potenciāls acīmredzot ir $A', (0,\ 0,\ 0,\ \dfrac{i\varphi'}{c})$. Turpmāk elektrostatikā lauka potenciālu avota atskaites sistēmā O' apzīmēsim ar $\varphi' = \varphi_0$. Tad $A', (0,\ 0,\ 0,\ \dfrac{i\varphi_0}{c})$ un laboratorijas atskaites sistēmā O, attiecībā pret kuru lādiņš q kustās x ass virzienā ar ātrumu $v_x = v$, 4-potenciāla vektora komponentes ir

$$A_x = \frac{\frac{v}{c^2}\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ , \quad A_y = A_z = 0\ , \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{5.25}$$

Saprotams, ka pret novērotāju O ar ātrumu v kustošs lādiņš ir strāva, ap kuru pastāv arī magnētiskais lauks. Tā vektorpotenciāls ir paralēls ātruma vektoram (strāvas virzienu nosaka lādiņa kustības virziens) $A = A_x$.

Nerelativistiskajā gadījumā, kad $v \ll c$, kā tas notiek, piemēram, ar lādiņnesējiem vadītājā, neievērojot relativistiskos efektus, $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1$. Tad, laboratorijas atskaites sitēmā lādiņa elektriskā lauka potenciāls $\varphi \approx \varphi_0$ un magnētiskā lauka vektorpotenciāls $A = A_x \approx \frac{v}{c^2}\varphi_0$. Proti, lēni kustoša lādiņa radītais elektriskais lauks $\vec{E} \approx -\operatorname{grad}\varphi_0$ ir tāds pats, kā nekustīga lādiņa elektrostatiskais lauks. Un otrs secinājums, kas izriet no Lorenca transformācijām - magnētiskā lauka vektorpotenciāls, kā arī citi, ar nerelativiski kustošu lādiņu saistītie magnētiskie efekti ir ar lieluma kārtu $\frac{v}{c}$. Šo apstākli mēs jau tikām atzīmējuši iepriekš. Papildus jaievēro, ka A_x tiek izteikts ar $\frac{\varphi_0}{c}$, kur c parādās no mērvienību saskaņošanas SI sistēmā.

5.5 4-strāvas blīvuma Lorenca transformācijas.

Līdzīgi kā 4-potenciālā, arī 4-strāvas blīvuma vektorā kā dažādas koordinātas apvienojas trīsdimensionālāis vadītspējas strāvas blīvums $\vec{j}$ un lādiņa blīvums ρ. Tāpēc, pārejot no vienas inerciālas atskaites sistēmas uz citu inerciālu atskaites sistēmu, šie trīsdimensionālajā telpā atšķirīgie lielumi transformējas savstarpēji saistīti. Patiesībā to mēs jau daļēji zinām: ja lādiņš kustās, tad to identificē ar strāvu.

Pieņemot, ka attiecībā pret kustīgo atskaites sistēmu O' plūstošās vadītspējas strāvas blīvums ir $\vec{j}'(j'_x,\, j'_y,\, j'_z)$ un šajā atskaites sistēmā lādiņa sadalījumu nosaka tilpuma lādiņa blīvums ρ'. Tad atskaites sistēmas O' notikumu telpā elektromagnētiskā lauka avotus raksturo 4-strāvas blīvuma vektors $j'_i(j'_x,\, j'_y,\, j'_z,\, ic\rho')$.

Savukārt laboratorijas atskaites sistēmas O notikumu telpā 4-strāvas blīvumu iegūst saskaņā ar Lorenca transformācijām:

$$j_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} j'_k \ , \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \ . \tag{5.26}$$

No šīm transformācijām izriet, ka

$$\begin{cases} j_1 &= \alpha_{11} j'_1 + \alpha_{14} j'_4 \\ j_2 &= \alpha_{22} j'_2 \\ j_3 &= \alpha_{33} j'_3 \\ j_4 &= \alpha_{41} j'_1 + \alpha_{44} j'_4 \end{cases} , \tag{5.27}$$

jeb

$$\begin{cases} j_x &= \dfrac{j'_x + v\rho'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ j_y &= j'_y \\ j_z &= j'_z \\ \rho &= \dfrac{\rho' + \frac{v}{c} j'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} . \tag{5.28}$$

Saprotams, ka pret laboratoriju kustībā esošs elektriski lādēts ķermenis izraisa konvektīvās strāvas $v\,\rho'$, kuras pārstāv pirmās Lorenca transformācijas labās puses izteiksmes otrais saskaitāmais. Savukārt no ceturtās transformāciju formulas izriet, ka laboratorijas atskaites sitēmā ķermeņa lādiņa sadalījumu ietekmē arī tajā plūstošās strāvas $\vec{j}'$.

Transformāciju formulu ilustrācijai aplūkosim šādu raksturīgu situāciju. Pieņemsim, ka elektriski uzlādētā ķermenī pastāv stacionārs lādiņa sadalījums $\rho' = \rho$. Strāvas neplūst, proti, vadītspējas strāvas blīvums $\vec{j}' = 0$. Tad ar ķermeni saistītajā atskaites sistēmā O' 4-strāvas blīvuma vektora koordinātas ir šādas: $j_i'(0,\, 0,\, 0,\, ic\rho_0)$. Ja attiecībā pret laboratoriju O ķermenis kustas x ass virzienā ar ātrumu $v = v_x$, tad laboratorijas atskaites sistēmas notikumu telpā 4-strāvas blīvuma vektora komponentes ir

$$j_x = \frac{v\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ , \quad j_y = j_z = 0\ , \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ . \tag{5.29}$$

Pievērsīsim uzmanību lādiņa blīvuma transformācijai. Kā redzams, tad laboratorijas atskaites sistēmā lādiņa blīvums $\rho > \rho_0$. Šis apstāklis ir saistīts ar to, ka kustībā novērotā ķermeņa tilpums $V = V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ir pakļauts Lorenca saīsinājumam, pastāvot pilnā lādiņa tilpumā "nezūdamībai". Pēdējais apstāklis arī ir būtisks - mēs uzskatām, ka lādiņš ir vienādliels visās atskaites sistēmās. Tādejādi kinemātiskais tilpums $V < V_0$ ir mazāks par ģeometrisko tilpumu un tas noved pie lādiņa blīvuma palielināšanās, jo, saskaņā ar lādiņa nezūdamības likumu, $q = q_0$ jeb $\int \rho\, dV = \int \rho_0\, dV_0$. Samazinoties tilpumam, jāpieaug lādiņa blīvumam.

Nerelativistiskai kustībai, kad $v \ll c$, no Lorenca transformācijām izriet, ka vadītspējas strāvas blīvumu var izteikt ar kustošos lādiņa blīvumu, tuvināti tas izskatās kā $j_x \approx \rho_0 v_x$, kas pilnībā sakrīt ar nerelatīvistiskās teorijas priekšstatiem. Un, protams, neievērojot relativistiskos efektus, $\rho \approx \rho_0$.

5.6 Elektromagnētiskā lauka tenzors.

Zinot elektromagnētiskā lauka potenciālus $\vec{A}$ un φ, magnētiskā lauka indukciju $\vec{B}$ un elektriskā lauka intensitāti $\vec{E}$ nosaka pēc formulām $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ un $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Uzrakstīsim $\vec{B}$ un $\vec{E}$ izteiksmes Dekarta koordinātēs:

$$\left\{\begin{array}{lcl} B_x & = & \dfrac{\partial}{\partial y}A_z - \dfrac{\partial}{\partial z}A_y \\ B_y & = & \dfrac{\partial}{\partial z}A_x - \dfrac{\partial}{\partial x}A_z \\ B_z & = & \dfrac{\partial}{\partial x}A_y - \dfrac{\partial}{\partial y}A_x \end{array}\right. , \tag{5.30}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_x & = & -\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi - \dfrac{\partial}{\partial t}A_x \\ E_y & = & -\dfrac{\partial}{\partial y}\varphi - \dfrac{\partial}{\partial t}A_y \\ E_z & = & -\dfrac{\partial}{\partial z}\varphi - \dfrac{\partial}{\partial t}A_z \end{array}\right. . \tag{5.31}$$

Iegūstam sešu elektromagnētiskā lauka funkciju B_x, B_y, B_z, E_x, E_y, E_z reprezentāciju notikumu telpā, ievērojot, ka tās tiek uzskatītas kā 4-potenciāla vektora $A_i(A_x,\, A_y,\, A_z,\, \dfrac{i\varphi}{c})$ koordinātu atvasinājumi pēc 4-rādiusvektora $x_i(x,\, y,\, z,\, ict)$ koordinātām. Turklāt šie atvasinājumi veido divu 4-vektoru tenzoriālā reizinājuma struktūru $a_i b_k = F_{ik}$. Tāpēc lietderīgi magnētiskā lauka indukcijas $\vec{B}$ un elektriskā lauka intensitātes $\vec{E}$ komponentēm piekārtot tieši tenzoriālajam reizinājumam atbilstošos komponenšu indeksus $i,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, 4$. Tad var uzrakstīt, ka magnētiskā lauka indukcijas komponentes

$$\left\{\begin{array}{lcl} B_x & = & \dfrac{\partial A_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_3} = F_{23} \\ B_y & = & \dfrac{\partial A_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1} = F_{31} \\ B_z & = & \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_2} = F_{12} \end{array}\right. , \tag{5.32}$$

bet elektriskā lauka intensitātes komponentes

$$\begin{cases} E_x & = & ic\left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) = i\,cF_{14} \\ \\ E_y & = & ic\left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_4}\right) = i\,cF_{24} \\ \\ E_z & = & ic\left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_4}\right) = i\,cF_{34} \end{cases} \quad , \tag{5.33}$$

jeb

$$\begin{cases} -i\dfrac{E_x}{c} = F_{14} \\ -i\dfrac{E_y}{c} = F_{24} \\ -i\dfrac{E_z}{c} = F_{34} \end{cases} \quad . \tag{5.34}$$

Kā redzams, katra no šīm sešām lauka funkcijām ir 4-gradienta $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ un 4-potenciāla $A_k(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ tenzoriālo reizinājumu starpība - tātad "lielums ar 2 indeksiem". Patvaļīga jaunā lieluma komponente izsakās ar formulu

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i}A_k - \frac{\partial}{\partial x_k}A_i \quad . \tag{5.35}$$

Katrs tenzoriālais reizinājums pēc definīcijas ir tenzors. Konkrēto otrā ranga (komponentēm 2 indeksi, nejaukt ar matricu ranga jēdzienu) tenzoru F_{ik} sauc par elektromagnētiskā lauka tenzoru. Tā kā $F_{ik} = -F_{ki}$, tad elektromagnētiskā lauka tenzors ir antisimetrisks. Tenzoru, kuru definē ar izteiksmi (5.35), sauc arī par četrdimensionālo rotoru jo tā komponentes F_{ik} tiek sastādītas līdzīgi kā trīsdimensionālā vektora $\vec{A}$ rotora koordinātas $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. Tam nolūkam jāatceras rotora definīcija $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, un vektoriālais reizinājums jāuzraksta kā determinants

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad . \tag{5.36}$$

Tad, piemēram, $(\mathrm{rot}\,\vec{A})_x = \dfrac{\partial}{\partial y}A_z - \dfrac{\partial}{\partial z}A_y$, $(\mathrm{rot}\,\vec{A})_y = \dfrac{\partial}{\partial z}A_x - \dfrac{\partial}{\partial x}A_z$, $(\mathrm{rot}\,\vec{A})_z = \dfrac{\partial}{\partial x}A_y - \dfrac{\partial}{\partial y}A_x$. Izteiksmju struktūras līdzību tenzoram F_{ik} un $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ ir acīmredzama.

Jebkuram antisimetriskam tenzoram, un tātad arī elektromagnētiskajam tenzoram, diagonālās komponentes ir vienādas ar nulli, proti, $F_{ii} = 0 (F_{11} = 0,\ F_{22} = 0,\ F_{33} = 0,\ F_{44} = 0)$. Ievērojot antisimetriju, otrā ranga elektromagnētiskā lauka tenzoram notikumu telpā ir 6 neatkarīgas komponentes, kas uzdod 6 elektromagnētisko lauku raksturojošus lielumus. Par šīm tenzora neatkarīgajām komponentēm pieņemsim:

$$\begin{matrix} F_{12} = B_z & , & F_{13} = -B_y & , & F_{23} = B_x \\ F_{14} = i\,\dfrac{E_x}{c} & , & F_{24} = i\,\dfrac{E_y}{c} & , & F_{34} = i\,\dfrac{E_z}{c} \end{matrix} \quad . \tag{5.37}$$

Tad, pierakstot elektromagnētiskā lauka tenzoru matricas formā, šī matrica izskatās sekojoši:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -i\,\frac{E_x}{c} \\ \star & 0 & B_x & -i\,\frac{E_y}{c} \\ \star & \star & 0 & -i\,\frac{E_z}{c} \\ \star & \star & \star & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{5.38}$$

Tenzora neatkarīgās komponentes aizņem matricas augšējo trijstūri un to fizikālā jēga atklājas trīsdimensiju telpā pazīstamo magnētiskā lauka indukcijas un elektriskā lauka intensitātes vektoru $\vec{B}$ un $\vec{E}$ komponentēs.

Tenzora matricas apakšējā trīsstūra komponentu vietās simboliski esam ielikuši $\star$ zīmes, lai nerakstītu "liekus" lielumus, kuri atkārtojas (bet ar pretēju zīmi). Tos vienmēr var iegūt no tenzora antisimetrijas nosacījuma. Piemēram, $F_{31} = -F_{13} = B_y$, utt. Pilns matricas pieraksts ir sekojošs:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -i\,\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -i\,\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -i\,\frac{E_z}{c} \\ i\,\frac{E_x}{c} & i\,\frac{E_y}{c} & i\,\frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{5.39}$$

Elektromagnētiskā lauka tenzorā F_{ik} "iejauktās" $\vec{B}$ un $\vec{E}$ vektoru komponentes norāda uz to, ka kādos konkrētos gadījumos elektromagnētiskā lauka sadalīšana atsevišķi elektriskajā un magnētiskajā laukos ir visnotaļ nosacīta. Par to jau minējām iepriekš, analizējot 4-potenciālua Lorenca transformāciju izteiksmes. Uzrakstot elektromagnētiskā lauka tenzoru, teiktais izceļas vēl reljefāk. Lai par to pārliecinātos, jāuzraksta tenzora F_{ik} Lorenca transformācijas.

5.7 Elektromagnētiskā lauka tenzora Lorenca transformācijas.

Otrā ranga tenzora Lorenca transformācijas, kuras apraksta pāreju no atskaites sistēmas O' uz O, vispārējā gadījumā viegli iegūt, ievērojot to, ka 2.ranga tenzoru var reprezentēt kā vektoru tenzoriālo rezinājumu. Savukārt jebkurš 4-vektors transformējas tāpat kā 4-rādiusvektors - pēc Lorenca transformācijām. Tātad otrā ranga 4-tenzora komponentes $c_{ik} = a_i b_k$ transformējas kā divu 4-vektoru komponenšu transformāciju "reizinājums". Apskatīsimies, ko tas īsti nozīmē.

Uzrakstām vektoru a_i un b_k $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ koordinātu transformāciju formulas vispārīgā veidā:

$$a_i = \sum_{l=1}^{4} \alpha_{il}\, a'_l\ , \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{5.40}$$

un

$$b_k = \sum_{m=1}^{4} \alpha_{km}\, b'_m\ , \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ . \tag{5.41}$$

Šeit α_{il} un α_{km} ir Lorenca transformāciju matricu atbilstošās komponentes (no i-tās un k-tās rindiņām, indeksi i un k ir fiksēti, pēc kolonnu indeksiem l un m, kā parasti, notiek summēšana). Uzsveram, ka tā ir viena un tā pati matrica abos gadījumos.

Sareizinot komponenti a_i ar b_k (indeksi patvaļīgi), iegūstam dubultu summu:

$$a_i\, b_k = \sum_{l=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} \alpha_{il}\, \alpha_{km}\, a'_l\, b'_m\ . \tag{5.42}$$

Bet, tā kā reizinājums $c_{ik} = a_i\, b_k\ (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ ir tenzora komponente (ik) laboratorijas atskaites sistēmā O, bet reizinājums $c'_{lm} = a'_l\, b'_m\ (l,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ - šī paša tenzora komponente (lm) pret laboratoriju kustošā atskaites sistēmā O', tad otrā ranga tenzora transformācijas formula ir šāda:

$$c_{ik} = \sum_{l,\,m=1}^{4} \alpha_{il}\, \alpha_{km}\, c'_{lm}\ , \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ . \tag{5.43}$$

Šāda transformāciju formula ir labi zināma tenzoru analīzē, tā faktiski ir tenzora definīcijas sastāvdaļa. Pēc šīs formulas transformējas arī elektromagnētiskā lauka tenzors F_{ik}:

$$F_{ik} = \sum_{l,\,m=1}^{4} \alpha_{il}\, \alpha_{km}\, F'_{lm}\ , \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ . \tag{5.44}$$

Turklāt, rakstot transformāciju formulas tieši tenzoram F_{ik}, ir lietderīgi ievērot arī tenzora antisimetriju. Tad iegūstam vienkāršākas transformāciju formulu gala izteiksmes. Skaidrs, ka jāiegūst 6 transformāciju formulas, atbilstoši elektromagnētiskā lauka tenzora 6 neatkarīgām komponentēm.

Piemēram, izskaitļosim tenzora komponentes F_{12} Lorenca transformāciju. Konkretizējot formulu (5.44), iegūst

$$F_{12} = \sum_{l,m=1}^{4} \alpha_{1l}\, \alpha_{2m}\, F'_{lm}\ . \tag{5.45}$$

Ievērojot Lorenca transformāciju matricā tikai no nulles atšķirīgos elementus un to, ka antisimetriskam tenzoram diagonālie elementi F_{ii} ir vienādi ar nulli, iegūst, ka

$$F_{12} = \alpha_{11}\, \alpha_{22}\, F'_{12} + \alpha_{14}\, \alpha_{22}\, F'_{42} = (F'_{12} - i\beta\, F'_{42})\, \gamma\ . \tag{5.46}$$

Tā kā laboratorijas atskaites sistēmā O tenzora komponente $F_{12} = B_z$, bet kustīgajā atskaites sistēmā O' tenzora komponentes $F'_{12} = B'_z$ un $F'_{42} = i\frac{E'_y}{c}$, tad magnētiskā lauka indukcijas z-komponente

$$B_z = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ . \tag{5.47}$$

Līdzīgi izskaitļosim vēl, piemēram, tenzora komponenti F_{24}. Saskaņā ar (5.44)iegūst sekojošu izteiksmi:

$$F_{24} = \sum_{l,m=1}^{4} \alpha_{2l}\, \alpha_{4m}\, F'_{lm}\ . \tag{5.48}$$

Izrakstot summas $\sum\limits_{l,m=1}^{4}$ atklātā formā, iegūst

$$F_{24} = \alpha_{22}\, \alpha_{41}\, F'_{21} + \alpha_{22}\, \alpha_{44}\, F'_{24} = (i\beta\, F'_{21} + F'_{24})\, \gamma\ . \tag{5.49}$$

Tā kā atskaites sistēmā O tenzora komponente $F_{24} = -i\, E_y$, bet atskaites sistēmā O' komponentes $F'_{21} = -B'_z$ un $F'_{24} = -i\, E'_y$, tad transformācijas formula ir

$$E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ . \tag{5.50}$$

Šīs formulas, protams, ir saistītas ar x-asu orientāciju kustības virzienā. Izskaitļosim vēl vektora $\vec{E}$ komponenti E_x (to, kas orientēta kustības virzienā $v_x =$

v). Meklējam transformāciju formulu tenzora komponentei $F_{14} = i\,E_x$. Izmantojot (5.44),

$$F_{14} = \sum_{l,\,m=1}^{4} \alpha_{1l}\,\alpha_{4m}\,F'_{lm} = \alpha_{11}\,\alpha_{41}\,F'_{11} + \alpha_{11}\,\alpha_{44}\,F'_{14} + \alpha_{14}\,\alpha_{41}\,F'_{41} + \alpha_{14}\,\alpha_{44}\,F'_{44}\,. \tag{5.51}$$

Atgādinām, ka $\alpha_{11} = \gamma$, $\alpha_{14} = -i\,\beta\gamma$, $\alpha_{41} = i\,\beta\gamma$, $\alpha_{44} = \gamma$ un $F'_{11} = 0$, $F'_{44} = 0$, $F'_{41} = -F'_{14}$. Tātad

$$F_{14} = \alpha_{11}\,\alpha_{44}\,F'_{14} + \alpha_{14}\,\alpha_{41}\,F'_{41} = (\alpha_{11}\,\alpha_{44} - \alpha_{14}\,\alpha_{41})\,F'_{14} = \left(1-\beta^2\right)\gamma^2 F'_{14}\,, \tag{5.52}$$

no kā izriet

$$E_x = E'_x\,, \tag{5.53}$$

ja ievēro, ka $F_{14} = i\,\frac{E_x}{c}$, $F'_{14} = i\,\frac{E'_x}{c}$ un $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$.

Mēs esam parādījuši, kā iegūst transformāciju formulas trijām elektromagnētiskā lauka tenzora komponentēm F_{12}, F_{24}, F_{14} (formulas 5.47, 5.50, 5.52). Līdzīgi iegūst transformāciju formulas atlikušajām trijām neatkarīgajām tenzora komponentēm F_{13}, F_{23}, F_{34}. Apvienojot tās, elektromagnētiskā lauka funkciju B_x, B_y, B_z, E_x, E_y, E_z Lorenca transformācijas ir sekojošas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} B_x & = & B'_x \\ B_y & = & \frac{B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ B_z & = & \frac{B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right.\,, \qquad \left\{\begin{array}{lcl} E_x & = & E'_x \\ E_y & = & \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ E_z & = & \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right.\,. \tag{5.54}$$

Salīdzināsim otrā ranga tenzora F_{ik} transformāciju formulas (5.54) ar vektora transformāciju formulām, piemāram, 4-potenciāla transformāciju formulām (5.24). Būtiskākā atšķirība, kā redzams, ir tā, ka 4-vektora telpas komponente $A_1 = A_x$, kas orientēta atskaites sistēmas kustības virzienā $v_x = v$, ir pakļauta Lorenca transformācijai. Turklāt, otrā ranga tenzoram, kas veidots kā divu vektoru tenzoriālais reizinājums, kustības virzienā orientēto trīsdimensionālo vektoru B_x un E_x komponentes Lorenca transformāciju rezultātā nemainās. Antisimetriska tenzora F_{ik} gadījumā, gluži pretēji, savstarpēji transformējas kustības virzienam perpendikulārās trīsdimensionālo vektoru komponentes B_y, B_z un E_y, E_z. Šeit gan jāpatur prātā, ka šīm 3D vektoru komponentēm ir "savdabīga" saistība ar 2. ranga 4-tenzora komponentēm (5.39).

Elektrisko un magnētisko lauku savstarpējo saistību ilustrē arī sekojošs piemērs. Pieņemsim, ka atskaites sistēmā O' pastāv stacionāru lādiņu elektriskais lauks $\vec{E}'$ (E'_x, E'_y, E'_z), bet magnētiskā lauka nav. Ja lādiņu sistēma atrodas kustībā attiecībā pret laboratoriju O, tad laboratorijas sistēmā bez elektriskā lauka $\vec{E}$ (E_x, E_y, E_z) pastāv arī magnētiskais lauks $\vec{B}$ (B_x, B_y, B_z). No transformāciju formulām (5.54) izriet, ka laboratorijas atskaites sistēmā O

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_x & = & E'_x \\ E_y & = & \frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ E_z & = & \frac{E'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{lcl} B_x & = & 0 \\ B_y & = & -\frac{\frac{v}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ B_z & = & \frac{\frac{v}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right. . \tag{5.55}$$

Nerelativistiski kustošiem $v \ll c$ lādiņiem no transformācijām (5.55) iegūst, ka

$$\vec{E} \approx \vec{E}' \;, \qquad \vec{B} \approx \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{E}'\right) \approx \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{E}\right) \;. \tag{5.56}$$

Šis nerelativistiskais secinājums ir jau pazīstams. Sakarības starp $\vec{E}$ un $\vec{B}$ laukiem ar ātrumu $\vec{v}$ kustoša lādiņa gadījumā iegūst no Bio-Savara likuma stacionāru strāvu magnētiskajam laukam. Pievērsīsim uzmanību arī "mēroga" reizinātājam $\frac{v}{c}$, kas saskatāms magnētiskā lauka komponentēs kā $\frac{\vec{v}}{c}$ un mērvienību saskaņošanas SI, kas noved pie $\frac{\vec{E}}{c}$, kopā radot $\frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{E}}{c}$.

Protams, ir spēkā arī secinājums, ka magnētiskais lauks $\vec{B}'$ kustošā vidē inducē elektrisko lauku $\vec{E}$ nekustīgajā atskaites sistēmā. Saskaņā ar formulām (5.54) nerelativistiskajā gadījumā

$$E_x = 0, \quad E_y = vB'_z, \quad E_z = -vB'_y \;. \tag{5.57}$$

Un arī šeit ir ieraugāms reizinātājs $\frac{v}{c}$.

5.8 Maksvela vienādojumi kovariantā formā.

Uzrakstīsim vienādojumus elektromagnētiskā lauka tenzoram F_{ik}. Tos iegūst no elektromagnētiskā lauka Maksvela vienādojumu sistēmas

$$I\ \left\{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla}\times\vec{E} & = & -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} & = & 0 \end{array}\right. , \qquad II\ \left\{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla}\times\vec{B} & = & \frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} & = & 4\pi\rho \end{array}\right. , \tag{5.58}$$

pārrakstot to notikumu telpai adekvātos lielumos - izmantojot elektromagnētiskā lauka tenzoru F_{ik} (5.37) un 4-strāvas blīvuma vektoru $j_i\ (j_x,\ j_y,\ j_z,\ ic\rho)$.

Uzrakstīsim Maksvela vienādojumu I pāra 4-vienādojumus, Sākam ar to pierakstu vektoru komponentēs, iegūstam 4 vienādojumus

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \end{array}\right. . \tag{5.59}$$

Izsakot šajos vienādojumos $\vec{E}$ un $\vec{B}$ trīsdimensionālo vektoru koordinātas ar elektromagnētiskā lauka tenzora F_{ik} atbilstošajām komponentēm (5.37) un 4-rādiusvektora $x_i\ (x,\ y,\ z,\ ict)$ koordinātēm, iegūst:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}=0 \\ \\ \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_4}=0 \\ \\ \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}=0 \\ \\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}=0 \end{array}\right. . \tag{5.60}$$

Uzrakstot vienādojumus (5.60) izmantota tenzora antisimetrija $F_{ik}=-F_{ki}$. Ievērosim, ka katrā no četriem Maksvela I vienādojumu pāra vienādojumiem tenzora F_{ik} komponenšu indeksi (ik) un rādiusvektora x_l kordinātes indekss (l) veido ciklisku maiņu, piemēram, mainoties "pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam", ko ilustrējam ar sekojošu "shēmu":

$$\begin{cases} \circlearrowleft \\ \begin{pmatrix} 3\;4 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4\;2 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2\;3 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrel{⊜} 0 \\ \\ \circlearrowleft \\ \begin{pmatrix} 1\;4 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4\;3 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3\;1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrel{⊜} 0 \\ \\ \circlearrowleft \\ \begin{pmatrix} 2\;4 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4\;1 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1\;2 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrel{⊜} 0 \\ \\ \circlearrowleft \\ \begin{pmatrix} 2\;3 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3\;1 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1\;2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrel{⊜} 0 \end{cases} . \qquad (5.61)$$

Katram vienādojumam atbilst noteikts indeksu $(i,\ k,\ l)$ “trijnieks”: $(3,\ 4,\ 2)$, $(1,\ 4,\ 3)$, $(2,\ 4,\ 2)$, $(2,\ 3,\ 1)$. Un, tā kā katram no indeksiem ir iespējamas četras vērtības $i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, tad, acīmredzot, šie ir četri iespējamie dažādu vērtību indeksu trijnieki.

Vienādojumus (5.60) var apvienot, vispārīgā veidā uzrakstot Maksvela vienādojumu pirmo pāri šādi:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0\ , \qquad i \neq j \neq k\ . \qquad (5.62)$$

Starp citu, viegli pārbaudīt, ka sakrītošu indeksu gadījumā, piemēram $k = i$, vienādojuma (5.62) kreisā puse “anihilējas”, tāpēc nosacījumu $\neq\ j\ \neq\ k$ var izlaist. Vienādojumā (5.62) sakrītoši indeksi nedod nekādu jaunu informnāciju.

No šī pieraksta izriet vienādojumu kovariance. Patiešām, katrs no vienādojuma labās puses izteiksmes saskaitāmajiem veido tenzoriālo reizinājumu, piemēram, $\frac{\partial}{\partial x_k} \cdot F_{li}$ un tātad ir trešā ranga tenzors. Protams, tad arī vienādojuma (5.62) kreisās puses izteiksme ir trešā ranga tenzors. Vienādojumā ir pateikts, ka šis tenzors ir nulles tenzors. Savukārt, ja kādā atsevišķā inerciālā atskaites sistēmā visas tenzora komponentes ir vienādas ar nulli, tad tās ir vienādas ar nulli arī visās citās atskaites sistēmās.

Līdzīgi pieraksta Maksvella vienādojumu sistēmas II pāra četrus cienādojumus notikumu telpā. To projekcijas uz koordinātu asīm ir

$$\begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \vec{j}_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \vec{j}_y + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \vec{j}_z + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} . \tag{5.63}$$

Vienādojumi ir nehomogēni. Tāpēc ne tikai trīsdimensionālo vektoru $\vec{E}$, $\vec{B}$ komponentes, bet arī lauka avotu funkcija - trīsdimensionālais strāvas blīvuma vektora $\vec{j}$ komponentes j_x, j_y, j_z un lādiņa blīvums jāizsaka ar adekvātiem četrdimensionālajiem lielumiem - tenzoru F_{ik} un 4-strāvas blīvuma vektoru $j_i\ (j_x,\ j_y,\ j_z,\ ic\rho)$.

Iegūstam

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \mu_0 j_1 \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} = \mu_0 j_2 \\ \frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} = \mu_0 j_3 \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \mu_0 j_4 \end{cases} . \tag{5.64}$$

Uzrakstot vienādojumus, kreisās puses izteiksmes locekļi sakārtoti tenzora F_{ik} kolonnas indeksa pieaugošā secībā, “simetrijas” nolūkā pievienojot katram vienādojumam “trūkstošo” saskaitāmo $\frac{\partial F_{ii}}{\partial x_i} \equiv 0$.

Maksvela vienādojumu sistēmas II pāra četrus vienādojumus notikumu telpā apvieno vienā izteiksmē

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \mu_0 j_i \quad , \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ . \tag{5.65}$$

Arī šo vienādojumu kovariance ir acīmredzama. Vienādojuma kreisās puses izteiksme - otrā ranga tenzora atvasinājumu elementi $\frac{\partial}{\partial x_k} \cdot F_{ik}$ (trešā ranga tenzora komponentes) summējot samazina tenzora rangu par 2 un kļūst par 4-vektoru. Vektors s_k ir vienādojuma labās puses izteiksmēs. izpildot Lorenca transformācijas, 4-vektors, protams, transformējas par vektoru, un vienādojumu struktūra saglabājas nemainīga visās inerciālās atskaites sistēmās.

5.9 Elektromagnētisko viļņu Doplera efekts.

Viena no brīva elektromagnētiskā lauka relativistiskām izpausmēm, kam būtībā nav klasiskas analoģijas, ir elektromagnētisko viļņu aberācija un Doplera efekts (aberācija - izplatīšanās virziena maiņa, Doplera efekts - frekvences jeb viļņu garuma maiņa atkarībā no viļņa avota un uztvērēja savstarpējās kustības ātruma).

Aplūkosim elektromagnētisko viļņu Doplera efektu. Doplera efektu, protams, var novērot jebkuriem viļņiem, piemēram, arī skaņas viļņiem gaisā. Un šajā gadījumā tas nebūt nav relativistisks efekts, jo skaņas viļņu ātrums nekustīgā gaisā jebkurā gadījumā ir $v \ll c$. Taču skaņai Doplera efekts ir saistīts ar to, un tikai ar to, ka, nekustīgai skaņas viļņu avota svārstību frekvencei ν_0, skaņas viļņa garums λ ir atkarīgs no avota, vai vilni nesošās vides ātruma v attiecībā pret novērotāju. Skaņas vilnis formējas un izplatās vidē. Taču elektromagnētiskajam vilnim vakuumā šādas vides vispār nav. Turklāt, tā izplatīšanās ātrums c ir absolūtā konstante. Tāpēc elektromagnētiskā viļņa Doplera efekta cēlonis ir pavisam cits. Tas izrādās saistīts ar laboratorijā uztvertā viļņa svārstību frekvences ν atšķirību no svārstību frekvences ν_0, kas piemīt viļņa avotam. Savukārt, šajā uztvertās frekvences izmaiņā izpaužas relativistiskās laika gaitas efekts, saskaņā ar kuru viļņa avota (piemēram, atoma, kas izstaro elektromagnētisko vilni) kustošajā atskaites sistēmā un novērotāja nekustīgajā atskaites sistēmā hronometri nav sinhronizējami. Bet tas ir izteikti relativistisks efekts. Un tas, ka frekvences ν_0 maiņa atspoguļojas viļņa garuma λ_0 izmaiņā, jo $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, ir tikai sekas.

Lai noskaidrotu, pēc kādas likumsakarības notiek elektromagnētiskā viļņa frekvences izmaiņa, pārejot no atskaites sistēmas O', kas saistīta ar starotāju, uz laboratorijas atskaites sistēmu O, jāuzraksta īpašfrekvencei ν_0 atbilstošā Lorenca transformācija. To var izdarīt, saskatot, ka elektromagnētisko viļņu svārstību frekvence ν notikumu telpā ir saistīta ar 4-viļņu vektora k_i $(\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$ laika koordināti $k_4 = \frac{i}{c}\omega = \frac{2\pi i}{c}\nu$.

Par to, ka notikumu telpā pastāv 4-viļņu vektors, var pārliecināties kaut vai uzrakstot enerģijas-impulsa vektoru gaismas kvantam p_i $(\vec{p}, \frac{i}{c}E)$. Gaismas kvanta impulss $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, bet enerģija, pēc Planka formulas $E = \hbar\omega$. Tātad gaismas kvantam atbilstošo enerģijas-impulsa vektoru var uzrakstīt šādi: p_i $(\hbar\vec{k}, \frac{i}{c}\hbar\omega) = \hbar k_i$, kur 4-vektors k_i $(\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$ ir 4-viļņa vektors. Tā telpas koordinātas $\vec{k}$ (k_x, k_y, k_z) ir trīsdimensionālais viļņa vektors, bet laika koordināta $k_4 = \frac{i}{c}\omega$.

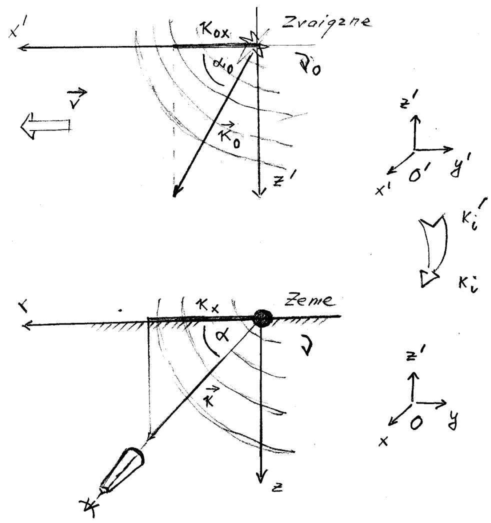
Acīmredzot, lai iegūtu Doplera efekta formulu elektromagnētiskam vilnim, jāuzraksta 4-viļņa vektora k_i $(\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$ laika koordinātas transformācijas formula, pārejot no kustīgās atskaites sistēmas O' uz laboratorijas atskaites sistēmu O.

Ja kustīgajā, piemēram, ar kādu zvaigzni saistītā atskaites sistēmā O' izstarotā elektromagnētiskā viļņa 4-viļņu vektors ir $k'_i(k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) \equiv (k_{x0}, k_{y0}, k_{z0}, \frac{i}{c}\omega_0)$, bet laboratorijas atskaites sistēmā, piemēram, uz Zemes, šī viļņa vektors ir

$k_i(k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4) \equiv (k_x,\, k_y,\, k_z,\, \frac{i}{c}\omega)$, tad atbilstoši transformāciju formulām

$$k_4 = \alpha_{41}k_1' + \alpha_{44}k_4' \quad \Rightarrow \quad \frac{i}{c}\omega = i\beta\gamma k_{x0} + \gamma\frac{i}{c}\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\omega_0 + vk_{x0}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ . \tag{5.66}$$

Tā kā atskaites sistēmā O' viļņa vektora $\vec{k}_0$ projekcija uz x'-asi ir $k_{x0} = k_0 \cos\alpha_0 = \frac{\omega_0}{c}\cos\alpha_0$ un $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, tad (5.66) var uzrakstīt formā (skat. att. 5.1)



Att. 5.1: Integrēšanas ceļš 4-telpā

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ . \tag{5.67}$$

Formulas (5.67) labās puses izteiksme satur novērotājam laboratorijā "nepieejamu" leņķi α_0 starp izstarotā viļņa vektora $\vec{k}_0$ un ātruma $\vec{v}$ virzieniem. Nomainīsim to ar leņķi α, ko viļņa uztvērējs nosaka laboratorijā O. Tam nolūkam tiešās transformācijas (5.67) vietā jāuzraksta apgrieztā transformācija:

$$\nu_0 = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \tag{5.68}$$

jeb, izsakot uztvertā elektromagnētiskā viļņa frekvenci atkarībā no īpašfrekvences

ν_0,

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha} \quad , \tag{5.69}$$

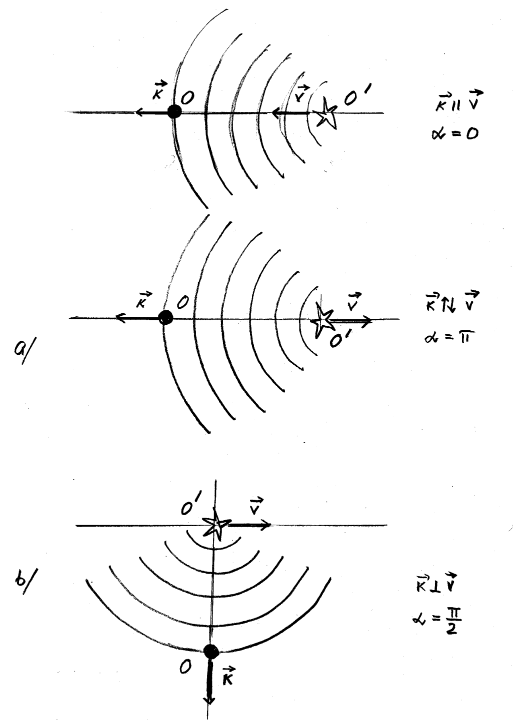
Šī ir relativistiskā Doplera efekta formula elektromagnētiskajam vilnim.

Doplera efektam raksturīgi divi gadījumi:

1 elektromagnētiskā viļņa avots kustās virzienā uz novērotāju, vai arī attālinās no tā - šajā gadījumā novēro t.s. Doplera garenefektu ($\nu_{\parallel}$);

2 elektromagnētiskā viļņa avots pārvietojas perpendikulāri viļņa uztveršanas virzienam - šajā gadījumā novēro t.s. Doplera šķērsefektu ($\nu_{\perp}$).

Doplera šķērsefektam nav analoģijas nerelativistiskajā fizikā (att. 5.2). Doplera



Att. 5.2: Integrēšanas ceļš 4-telpā

garenefekta gadījumā: viļņa avotam virzoties uz uztvērēju, uztvertā viļņa vektors $\vec{k} \upuparrows \vec{v}$, $\alpha = 0$ un $\cos\alpha = 1$; viļņa avotam attālinoties no novērotāja - viļņa vektors

$\vec{k} \uparrow\downarrow \vec{v}$, $\alpha = \pi$ un $\cos\alpha = -1$. Doplera garenefekta formula abām iespējām

$$\nu_{\parallel} = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 \mp \frac{v}{c}} \quad . \tag{5.70}$$

Ja viļņa avota kustības ātrum $v \ll c$, tad, saglabājot tikai pirmās kārtas $\frac{v}{c} \ll 1$ saskaitāmos, $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1$ un $\frac{1}{1\mp\frac{v}{c}} \approx 1 \pm \frac{v}{c}$, iegūst Doplera garenefekta nerelativistisko tuvinājumu

$$\nu_{\parallel} \approx \nu_0 (1 \pm \frac{v}{c}) \quad . \tag{5.71}$$

Avotam tuvojoties novērotājam $\nu_{\parallel} > \nu_0$, bet attālinoties - $\nu_{\parallel} < \nu_0$. Šajos gadījumos elektromagnētiskā viļņa izturēšanās neatšķiras, piemēram, no pazīstamā Doplera efekta skaņas viļņiem.

Doplera šķērsefekta gadījumā uztvertā viļņa vektors $\vec{k} \perp \vec{v}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ un $\cos\alpha = 0$. Tātad Doplera šķērsefekta formula

$$\nu_{\perp} = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{5.72}$$

Perpendikulāri avota kustības ātrumam uztvertā viļņa frekvence $\nu_{\perp} < \nu_0$ un viļņa garums $\lambda_{\perp} < \lambda_0$. Šī izteiksme ir pazīstamā sarkanās novirzes formula. Klasikā analoga tai nav. Formula izriet no secinājuma, ka ar kustošu ķermeni saistītais īpašlaika τ hronometrs atpaliek, salīdzinot ar laboratorijas laiku t.

Nerelativistiskiem ātrumiem $v \ll c$, tuvināti $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$. Tāpēc šajā gadījumā Doplera šķērsefekts izpaužas tikai otrās kārtas tuvinājumā $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, proti

$$\nu_{\perp} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \quad . \tag{5.73}$$

Ar elektromagnētisko viļņu Doplera efektu jārēķinās, piemēram, spektrālajā analīzē, jo elementārstarotāju (atomu un molekulu) siltumkustības dēļ jārēķinās ar spektrāllīniju paplašināšanos $\Delta\nu = |\nu_0 \pm \nu|$.

Elektromagnētisko viļņu Doplera efekta izraisītā debess ķermeņu elektromagnētiskā starojuma viļņu garuma nobīde $\Delta\lambda$ astrofizikā ir paņēmiens, kā noteikt tālu kosmisko objektu ātrumu v pēc tā sauktā Z faktora vērtības. Pēc kosmoloģijā pazīstamā Habla likuma, Visuma izplešanās rezultātā, tālo kosmisko objektu ātrums $v = H\,R$ ir proporcionāls attālumam R līdz tiem. Tādejādi, pēc Doplera efekta izskaitļojot ātrumu v, var uzzināt attālumu R. Z faktors ir vienāds ar relatīvo viļņa garuma maiņu $Z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$, kur $\lambda = \lambda_0 \frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ un $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 > 0$.

Tātad relativistiskajā gadījumā Z faktoru nosaka pēc formulas

$$Z = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \quad . \tag{5.74}$$

Piemēram, ja novērotais Z faktors ir 4, tad kosmiskais objekts attālinās no mums ar ātrumu $v \approx 0.9c$.

Nodaļa 6

Relativistiskā lādiņa kustība elektromagnētiskajā laukā

Nodaļas saturs

6.1 Lagranža funkcija elektriskajam lādiņam elektromagnētiskajā laukā

Akciju lādiņam ārējā laukā meklējam kā divu akciju summa:

$$S = \alpha \int_{N_1}^{N_2} ds + S' \tag{6.1}$$

kur pirmā daļa jau zināmā brīvās daļiņas akcija ar $\alpha = -m_0 c$, bet S' - akcija, kuru papildus rada tieši lādiņš. Arī S' jābūt relatīvistiski invariantam integrālim pa ladiņa trajektoriju 4-telpā.

Akcijas S' integrālim, acīmredzami, vajag saturēt magnētisko lauku. Vienkāršākais veids ir iekļaut 4-vektoru un tad vienīgais atbilstošais 4-vektors ir 4-potenciāls A_i. Lai būtu arī integrēšanas mainīgie, jāņem ar 4-rādiusvektora izmaiņa dx_i, kas norādīs trajektoriju 4-telpā. Tāpēc akcijas integrālī iekļauj relatīvistisko invariantu

$$\sum_{i=1}^{4} A_i\, dx_i = \vec{A}\cdot d\vec{r} + \frac{i\varphi}{c}\, icdt = \vec{A}\cdot d\vec{r} - \varphi\, dt = \vec{A}\cdot\vec{v}\, dt - \varphi\, dt = \left(\vec{A}\cdot\vec{v} - \varphi\right) dt \tag{6.2}$$

Ja akcijas integrāli meklē kā

$$S' = \alpha q \int\limits_{N_1}^{N_2} \sum_{i=1}^{4} A_i\, dx_i = \alpha q \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\vec{A}\cdot\vec{v} - \varphi\right) dt \tag{6.3}$$

tad ir ietverta informācija par elektromagnētisko lauku, lādiņu un arī trajektoriju (dx_i). Svarīgi, lai iegūtais rezultāts pāriet klasiskajā rezultātā pie maziem ātrumiem.

Salīdzinot ar

$$S' = \int\limits_{t_1}^{t_2} L'\, dt \tag{6.4}$$

var secināt, ka

$$L' = \alpha q(\vec{A}\cdot\vec{v} - \varphi) \tag{6.5}$$

Apvienojot ar "mehānisko" Lagranža funkciju L_0:

$$L = L_0 + L' = -m_0c^2\sqrt{1-(v/c)^2} + \alpha q(\vec{A}\cdot\vec{v} - \varphi) \tag{6.6}$$

Aplūkojot enerģijas izteiksmi (6.10), kuru iegūst no Lagranža funkcijas, var secināt, ka saistībai ar klasisko teoriju nepieciešams $\alpha = 1$

$$L = L_0 + L' = -m_0c^2\sqrt{1-(v/c)^2} + q(\vec{A}\cdot\vec{v} - \varphi) \tag{6.7}$$

6.2 Lādiņa impulss, enerģija un Hamiltona funkcija elektromagnētiskajā laukā

Impulsu komponentes iegūst kā Lagranža funkcijas atvasinājumus pēc ātruma komponentēm:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = -m_0c^2\frac{-v_i/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + qA_i = \frac{m_0\, v_i}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + qA_i \tag{6.8}$$

Vektoru formā

$$\vec{P} = \frac{m_0\,\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + q\vec{A} = \vec{p} + q\vec{A} \tag{6.9}$$

kur $\vec{p}$ ir lādiņa impulss bez lauka. Vektorpotenciāla būtība tātad ir aprakstīts lādiņa impulsu (turklāt arī pats lādiņš tieši ieiet formulā), kas tam piemīt kā lādiņa, nevis masas īpašība.

Enerģiju no Lagranža funkcijas nosaka kā

$$\mathcal{E} = \vec{P}\cdot\vec{v} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + q\,\varphi \tag{6.10}$$

Enerģijā elektromagnētiskais lauks izpaužas caur skalāro potenciālu. Lorenca spēks, kas darbojas uz lādiņu un tiek saistīts ar magnētisko lauku (vektorpotenciāls $\vec{A}$), ir perpendikulars ātrumam $\vec{v}$ un darbu neveic, tātad enerģiju neizmaina.

Hamiltona funkcija H var tikt iegūta, ja pilnās enerģijas izteiksmē ātrumu $\vec{v}$ jāizsaka ar lādiņa impulsu $\vec{P}$.

Izmantosim

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & = & \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + q\,\varphi \\ \\ \vec{P} & = & \frac{m_0\,\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + q\vec{A} \end{array}\right. \tag{6.11}$$

ko vispirms pārveidojam kā

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\mathcal{E} - q\,\varphi)^2 & = & \frac{m_0^2 c^4}{(1-(v/c)^2)} \\ \\ (\vec{P} - q\vec{A})^2 & = & \frac{m_0^2\,v^2}{(1-(v/c)^2)} \end{array}\right. \tag{6.12}$$

Tad izslēdzam v^2 sekojošā veidā:

$$(\mathcal{E} - q\,\varphi)^2 - (\vec{P} - q\vec{A})^2\,c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{(1-(v/c)^2)} - \frac{m_0^2\,v^2\,c^2}{(1-(v/c)^2)} = m_0^2 c^4 \frac{1 - v^2/c^2}{(1-(v/c)^2)} \tag{6.13}$$

Tātad

$$(\mathcal{E} - q\,\varphi)^2 - (\vec{P} - q\vec{A})^2\,c^2 = m_0^2 c^4 \tag{6.14}$$

un

$$(\mathcal{E} - q\,\varphi) = \pm\sqrt{(\vec{P} - q\vec{A})^2\,c^2 + m_0^2 c^4} \tag{6.15}$$

Hamiltona funkcija

$$H = \pm\sqrt{(\vec{P} - q\vec{A})^2\,c^2 + m_0^2 c^4} + q\,\varphi \tag{6.16}$$

ievietojot $\vec{P}$ izteiksmi

$$H = \pm\sqrt{p^2\, c^2 + m_0^2 c^4} + q\,\varphi \tag{6.17}$$

Līdzīgi kā brīvai daļiņai, ir divi enerģiju "stāvokļi" - pozitīvai un negatīvais, kas atdalīti ar joslu, kuras platumu nosaka lielums $2\mathcal{E}_0 = 2m_0 c^2$, kurš ir būtiski lielāks par lādētās daļiņas kinētisko enerģiju $T = p^2/(2m_0)$.

Gadījumā, kad parametrs $p^2/(m_0^2 c^2) \ll 1$,

$$\sqrt{p^2\, c^2 + m_0^2 c^4} = m_0 c^2 \sqrt{p^2/(m_0^2 c^2) + 1} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m_0^2 c^2}\right) \tag{6.18}$$

$$H \approx \frac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m_0} + m_0 c^2 + q\,\varphi \tag{6.19}$$

Analoģija kvantu mehānikā: Hamiltona operātors elektronam elektromagnētiskajā laukā kvantu mehānikā tiek ieviests kā

$$\hat{H} \approx \frac{\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\right)^2}{2m_0} + e\,\varphi \tag{6.20}$$

kur $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ un $\hbar$ ir Planka konstante.

6.3 Lādiņa kustības vienādojumi Lagranža formā, Lorenca spēka blīvums

Laboratorijas atskaites sitēmā

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{6.21}$$

Tilpuma spēks strāvas un lādiņu blīvuma gadījumā $d\vec{F} = \vec{f}\, dV$, $dq = \rho\, dV$ un $dq\ \vec{v} = \vec{j} dV$, kā rezultātā spēku blīvums

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{6.22}$$

Gam lādiņu blīvums ρ, gan strāvu blīvums $\vec{j}$ ir doti nekustīgajā atskaites sistēmā O. Sistēmā O', kas kustās ar lādiņu $\rho' = \rho_0$ un strāvu blīvums $\vec{j}' = \vec{0}$.

Lorenca transformācijas nosaka, ka

$$\vec{j} = \frac{\rho_0\,\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{6.23}$$

un

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{6.24}$$

Tātad

$$\vec{f} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) = \frac{\vec{f_0}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{6.25}$$

kur

$$\vec{f_0} = \rho_0\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{6.26}$$

ir nerelatīvistiskajam spēka blīvums. Tas redzams pie $v \ll c$.

Tilpuma elementa kustības vienādojums (šeit $\vec{p}$ ir tilpuma vienības kustības daudzums) ir sekojošs

$$\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = \frac{d\vec{p}}{d\,t} \tag{6.27}$$

Šeit $\vec{p}$ ir relatīvistiskais impulss:

$$\vec{p} = \frac{m_0\,\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{6.28}$$

Maziem ātrumiem, kad masa ir praktiski konstanta,

$$\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = m_0\frac{d\vec{v}}{d\,t} \tag{6.29}$$

Kāds ir kustības vienādojums 4-telpā? Vispirms vajadzīga spēka definīcija. Ja 4-spēks ir 4-vektors, kas saistīts ar ar citu 4-vektoru (4-stravu) caur elektromagnētisko lauku, kas ir 2.ranga 4-tenzors, tad tas ir iespējams summas veidā:

$$f_i = \sum_{k=1}^{4} F_{ik}\,j_k, \qquad i = 1,\,2,\,3,\,4 \tag{6.30}$$

Atgadinām, ka

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -i\,E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -i\,E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -i\,E_z/c \\ i\,E_x/c & i\,E_y/c & i\,E_z/c & 0 \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

t.i.

$$\begin{array}{lcl} F_{12} = -F_{21} = B_z & \Leftrightarrow & B_z = F_{12} \\ F_{13} = -F_{31} = -B_y & \Leftrightarrow & B_y = F_{31} \\ F_{23} = -F_{32} = B_x & \Leftrightarrow & B_x = F_{23} \\ F_{14} = -F_{41} = -i\,E_x/c & \Leftrightarrow & E_x/c = i\,F_{14} \\ F_{24} = -F_{42} = -i\,E_y/c & \Leftrightarrow & E_y/c = i\,F_{24} \\ F_{34} = -F_{43} = -i\,E_z/c & \Leftrightarrow & E_z/c = i\,F_{34} \end{array} \tag{6.32}$$

Savukārt 4-strāva ir $(j_1,\, j_2,\, j_3,\, j_4) = (j_x,\, j_y,\, j_z,\, i\,c\,\rho)$.

Tātad

$$f_1 = (F_{11}\,j_1 + F_{12}\,j_2 + F_{13}\,j_3 + F_{14}\,j_4) = (B_z\,j_y - B_y\,j_z - (i\,E_x/c)\,i\,c\,\rho) \tag{6.33}$$

$$f_2 = (F_{21}\,j_1 + F_{22}\,j_2 + F_{23}\,j_3 + F_{24}\,j_4) = (-B_z\,j_x + B_x\,j_z - (i\,E_y/c)\,i\,c\,\rho) \tag{6.34}$$

$$f_3 = (F_{31}\,j_1 + F_{32}\,j_2 + F_{33}\,j_3 + F_{34}\,j_4) = (B_y\,j_x - B_x\,j_y - (i\,E_z/c)\,i\,c\,\rho) \tag{6.35}$$

$$f_4 = (F_{41}\,j_1 + F_{42}\,j_2 + F_{43}\,j_3 + F_{44}\,j_4) = ((i\,E_x/c)\,j_x + (i\,E_y/c)\,j_y + (i\,E_z/c)\,j_z) \tag{6.36}$$

Tātad

$$f_1 = \rho\,E_x + (B_z\,j_y - B_y\,j_z) \tag{6.37}$$

$$f_2 = \rho\,E_y + (B_x\,j_z - B_z\,j_x) \tag{6.38}$$

$$f_3 = \rho\,E_z + (B_y\,j_x - B_x\,j_y) \tag{6.39}$$

$$f_4 = \frac{i}{c}\,(E_x\,j_x + E_y\,j_y + E_z\,j_z) \tag{6.40}$$

kas atbilst

$$\vec{f} = (f_1,\, f_2,\, f_3) = \rho\,\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{6.41}$$

un

$$f_4 = \frac{i}{c}\vec{j} \cdot \vec{E} \tag{6.42}$$

Kā redzams, tad f_4 atbilst omiskajiem zudumiem, jeb jaudas blīvumam (darbam laika vienībā uz tilpuma vienību), ko veic lādiņi. Saskaņā ar enerģijas nezūdamības likumu

$$f_4 = \frac{i}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt} \tag{6.43}$$

Tātad lādiņa kustības vienādojumu var uzrakstīt kā

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ik}\,j_k = \frac{d\,p_i}{d\,\tau} \tag{6.44}$$

kur τ ir īpašlaiks un $p_i = m_0\, u_i$ - enerģijas impulsa vektors. Tātad pirmie trīs vienādojumi no (6.44) ir impulsa nezūdamības likums (kustības vienādojumi) un ceturtais ir enerģijas nezūdamības likums

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} \tag{6.45}$$

6.4 Elektromagnētiskā lauka enerģijas-impulsa tenzors [Vēl nav pārlabots uz SI!!!]

Ieviešam sekojošu simetrisku otrā ranga 4-tenzoru.

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(\sum_{k=1}^{4} F_{ik}\, F_{jk} - \frac{1}{4}\delta_{ij} \sum_{k,l=1}^{4} F_{kl}\, F_{kl}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(\sum_{k=1}^{4} F_{ik}\, F_{jk} + \frac{1}{4}\delta_{ij} \sum_{k,l=1}^{4} F_{kl}\, F_{lk}\right) \tag{6.46}$$

Šai summā lielums $\sum\limits_{k,l=1}^{4} F_{kl}\, F_{kl}$ ir tenzora invariants, kas saglabā savu vērtību visās atskaites sitēmās. Izteiksim šo vērtību ar elektriskā un magnētiskā lauku lielumiem:

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{4} F_{kl}F_{kl} &= F_{12}F_{12} + F_{13}F_{13} + F_{14}F_{14} + F_{21}F_{21} + F_{23}F_{23} + F_{24}F_{24} \\
&+ F_{31}F_{31} + F_{32}F_{32} + F_{34}F_{34} + F_{41}F_{41} + F_{42}F_{42} + F_{43}F_{43} \\
&= B_z^2 + B_y^2 - E_x^2/c^2 + B_z^2 + B_x^2 - E_y^2/c^2 \\
&+ B_y^2 + B_x^2 - E_z^2/c^2 - E_x^2/c^2 - E_y^2/c^2 - E_z^2/c^2 \\
&= 2\left(B^2 - E^2/c^2\right)
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Noskaidrosim šī 4-tenzora komponentes. Šai nolūkā

$$\sum_{k=1}^{4} F_{ik}\, F_{jk} = F_{i1}F_{j1} + F_{i2}F_{j2} + F_{i3}F_{j3} + F_{i4}F_{j4} \tag{6.48}$$

jāsaista ar laukiem $\vec{E}$ un $\vec{B}$:

$$\sum_{k=1}^{4} F_{1k}\, F_{1k} = 0 + B_z^2 + B_y^2 - E_x^2/c^2 = -E_x^2/c^2 - B_x^2 + B^2 \tag{6.49}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{1k}\, F_{2k} = \sum_{k=1}^{4} F_{2k}\, F_{1k} = 0 + 0 - B_yB_x - E_xE_y/c^2 = -E_xE_y/c^2 - B_yB_x \tag{6.50}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{1k}\, F_{3k} = \sum_{k=1}^{4} F_{3k}\, F_{1k} = 0 - B_z B_x + 0 - E_x E_z/c^2 = -E_x E_z/c^2 - B_z B_x \tag{6.51}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{1k}\, F_{4k} = \sum_{k=1}^{4} F_{4k}\, F_{1k} = 0 + iE_y B_z/c - iE_z B_y/c + 0 = i(E_y B_z - E_z B_y)/c \tag{6.52}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{2k}\, F_{2k} = B_z^2 + 0 + B_x^2 - E_y^2/c^2 = -E_y^2/c^2 - B_y^2 + B^2 \tag{6.53}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{2k}\, F_{3k} = \sum_{k=1}^{4} F_{3k}\, F_{2k} = -B_z B_y + 0 + 0 - E_y E_z/c^2 = -E_y E_z/c^2 - B_z B_y \tag{6.54}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{2k}\, F_{4k} = \sum_{k=1}^{4} F_{4k}\, F_{2k} = -iB_z E_x/c + 0 + iB_x E_z/c + 0 = i(B_x E_z - B_z E_x)/c \tag{6.55}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{3k}\, F_{3k} = B_y^2 + B_x^2 + 0 - E_z^2/c^2 = -E_z^2/c^2 - B_z^2 + B^2 \tag{6.56}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{3k}\, F_{4k} = \sum_{k=1}^{4} F_{4k}\, F_{3k} = iB_y E_x/c + iB_x E_y/c + 0 + 0 = i(B_y E_x - B_x E_y)/c \tag{6.57}$$

$$\sum_{k=1}^{4} F_{4k}\, F_{4k} = -E_x^2/c^2 - E_y^2/c^2 - E_z^2/c^2 + 0 = -E^2/c^2 \tag{6.58}$$

Tātad

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(-E_i E_j/c^2 - B_i B_j + \delta_{ij} B^2 - \frac{1}{2}\delta_{ij}(B^2 - E^2/c^2)\right), \quad i,j = 1,2,3 \tag{6.59}$$

ko var pārveidot par

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(-E_i E_j/c^2 - B_i B_j + \frac{\delta_{ij}}{2}(B^2 + E^2/c^2)\right), \quad i,j = 1,2,3 \tag{6.60}$$

Piebildīsim, ka 3D otrā ranga tenzoru $T_{ij},\ i,j = 1,2,3$ sauc par Maksvela spriegumu tenzoru un izmanto spēku aprēķinos.

Savukārt

$$T_{j4} = T_{4j} = \frac{i}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_j = \frac{i}{c} S_j, \quad j = 1,2,3 \tag{6.61}$$

kur $\vec{S}$ ir Pointinga vektors (enerģijas plūsmas blīvums)

$$\vec{S} = \frac{c}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{6.62}$$

Un, visbeidzot,

$$T_{44} = \frac{1}{4\pi}\left(-E^2 - \frac{1}{2}(B^2 - E^2)\right) = -\frac{B^2 + E^2}{8\pi} \tag{6.63}$$

Atgādinām, ka

$$w = -T_{44} = \frac{B^2 + E^2}{8\pi} \tag{6.64}$$

ir elektromagnētiskā lauka enerģijas telpiskais blīvums.

Paturot prātā T_{ij} saistību ar Maksvela spriegumu tenzoru, pērliecināsimies, ka šī tenzora diverģence $\sum\limits_{k=1}^{4}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ ir saistīta ar elektrodinamiskā 4-spēka blīvumu $f_i = 1/c\sum\limits_{k=1}^{4} T_{ik}j_k$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{l=1}^{4}F_{il}\,F_{kl} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\sum_{m,l=1}^{4}F_{ml}\,F_{ml}\right)\\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{4}\left(\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{kl} + \sum_{l=1}^{4}F_{il}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\sum_{m,l=1}^{4}F_{ml}\frac{\partial F_{ml}}{\partial x_k}\right)\\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{4}\left(\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{kl} + \sum_{l=1}^{4}F_{il}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\sum_{m,l=1}^{4}F_{ml}\frac{\partial F_{ml}}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Mūsu rīcībā ir elektromagnētiskā lauka tenzora antisimetriskuma īpašība $F_{ik} = -F_{ki}$ un Maksvela vienādojumi 4-formā:

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c}j_i \tag{6.66}$$

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j} = 0 \tag{6.67}$$

Tad

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= \tfrac{1}{8\pi}\left(2\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\tfrac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{kl}+2\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}F_{il}\tfrac{\partial F_{kl}}{\partial x_k}-\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}F_{ml}\tfrac{\partial F_{ml}}{\partial x_i}\right)\\
&= \tfrac{1}{8\pi}\left(2\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\tfrac{\partial F_{il}}{\partial x_m}F_{ml}+2\sum_{l=1}^{4}F_{il}\tfrac{-4\pi}{c}j_l-\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}F_{ml}\left(-\tfrac{\partial F_{im}}{\partial x_l}-\tfrac{\partial F_{li}}{\partial x_m}\right)\right)\\
&= -\tfrac{1}{c}\sum_{l=1}^{4}F_{il}j_l+\tfrac{1}{8\pi}\left(2\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\tfrac{\partial F_{il}}{\partial x_m}F_{ml}+\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}F_{ml}\tfrac{\partial F_{im}}{\partial x_l}+\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}F_{ml}\tfrac{\partial F_{li}}{\partial x_m}\right)\\
&= -\tfrac{1}{c}\sum_{l=1}^{4}F_{il}j_l+\tfrac{1}{8\pi}\left(2\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\tfrac{\partial F_{il}}{\partial x_m}F_{ml}+\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=1}^{4}F_{lm}\tfrac{\partial F_{il}}{\partial x_m}+\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}F_{ml}\tfrac{\partial F_{li}}{\partial x_m}\right)\\
&= -\tfrac{1}{c}\sum_{l=1}^{4}F_{il}j_l+\tfrac{1}{8\pi}\sum_{m,l=1}^{4}\left(2\tfrac{\partial F_{il}}{\partial x_m}F_{ml}+(-F_{ml})\tfrac{\partial F_{il}}{\partial x_m}+F_{ml}\tfrac{\partial(-F_{il})}{\partial x_m}\right)\\
&= -\tfrac{1}{c}\sum_{k=1}^{4}F_{ik}j_k
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

Tātad

$$
\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{4}F_{ik}j_k = -f_i \tag{6.69}
$$

kas arī bija jāpierāda.

Šī sakarība parāda nepārtrauktas vides mehāmikā labi zināmu lietu - sprieguma tenzora diverģence ir vienāda ar tilpuma spēku blīvumu.

Tāpēc enerģijas-impulsa 4-tenzors ir "spēka" sprieguma 4-tenzors (nejaukt ar jēdzienu "spriegums" elektrībā!).

Izrakstīsm (6.69) atklātā fomā un noskaidrosim šo sakarību fizikālo jēgu.

$$
f_i = -\left(\frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{i4}}{\partial x_4}\right) = -\left(\frac{\partial T_{i1}}{\partial x}+\frac{\partial T_{i2}}{\partial y}+\frac{\partial T_{i3}}{\partial z}-\frac{i}{c}\frac{\partial T_{i4}}{\partial t}\right) \tag{6.70}
$$

Apzīmēsim ar $\tilde{T}_{ik}$ sprieguma 4-tenzora telpisko daļu (Maksvela sprieguma tenzoru), $i,k=1,2,3$.

Tad

$$
f_i - \frac{i}{c}\frac{\partial(i\,S_i/c)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial T_{i1}}{\partial x}+\frac{\partial T_{i2}}{\partial y}+\frac{\partial T_{i3}}{\partial z}\right) \tag{6.71}
$$

jeb

$$
f_i + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \tilde{T}_{ik}}{\partial x_k} \tag{6.72}
$$

Atcerēsimies, ka kustības daudzuma telpiskais blīvums ar spēku telpisko blīvumu saistīts sekojošā veidā: $\vec{f} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$. Tātad

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(p_i + \frac{S_i}{c^2}\right) = -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \tilde{T}_{ik}}{\partial x_k} \tag{6.73}
$$

Aplūkojot integrāli pa tilpumu V, iegūst

$$\frac{d}{d\,t}\int\limits_V \left(p_i + \frac{S_i}{c^2}\right) dV = -\int\limits_V \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \tilde{T}_{ik}}{\partial x_k} dV = -\oint\limits_{S_V} \sum_{k=1}^{3} \tilde{T}_{ik} n_k dS \tag{6.74}$$

No nepārtrauktas vides mehānikas pēdējais saskaitāmais ir atpazīstams kā tilpuma V virsmai S_V pieliktais summārais virsmas spēks (precīzāk, tā i-tā komponente). n_k ir normāles vektora k-tā komponente.

Ja tiecoties uz bezgalību $E \sim 1/r^2$ un $B \sim 1/r^2$ (vai arī dilst vēl straujāk), tad aplūkojot "visu telpu", $\lim\limits_{r\to\infty} \oint\limits_{S_V} \tilde{T}_{ik} n_k dS \to 0$. Tātad

$$\frac{d}{d\,t}\int\limits_V \left(p_i + \frac{S_i}{c^2}\right) dV = 0 \tag{6.75}$$

ja integrē pa visu telpu ierobežotai sistēmai.

Secinām, ka

$$\int\limits_V \left(\vec{p} + \frac{\vec{S}}{c^2}\right) dV = co\vec{n}st \tag{6.76}$$

Šī sakarība ir kopējā impulsa saglabāšanās likums (elektromagnētiskā, ko nosaka $\vec{S}/c^2$, un "mehāniskā", ko nosaka $\vec{p}$).

Aplūkojam "atlikušo sakarību"

$$f_4 = -\left(\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4}\right) = -\left(\frac{\partial T_{41}}{\partial x} + \frac{\partial T_{42}}{\partial y} + \frac{\partial T_{43}}{\partial z} - \frac{i}{c}\frac{\partial T_{44}}{\partial t}\right) \tag{6.77}$$

Tā kā $f_4 = \frac{i}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}$, $T_{44} = -w$ un $T_{4k} = \frac{i}{c}S_k$, tad skarību (6.77) var pārveidot par

$$\frac{i}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} = -\left(\frac{i}{c}div\vec{S} + \frac{i}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{6.78}$$

No kā seko labi zināmā sakarība elektromagnētiskā lauka enerģijai:

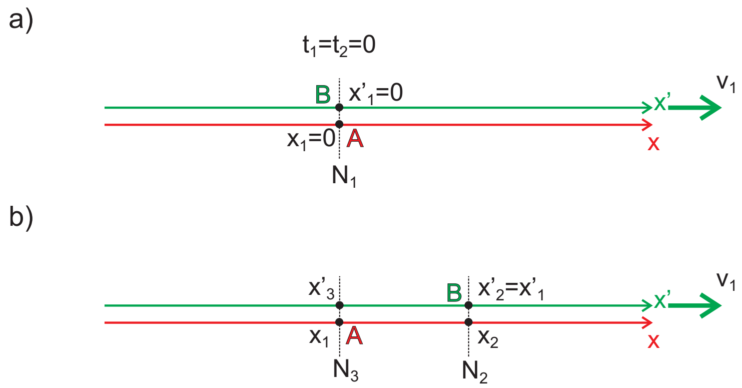
$$\frac{\partial w}{\partial t} = div\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} \tag{6.79}$$

Tas ir enerģijas nezūdamības likums elektromagnētiskajam laukam jeb Pointinga vienādojums.

Nodaļa 7

Papildmateriāls: Dvīņu paradokss

7.1 Dvīņi, kas izšķiras un vairs netiekas



Att. 7.1: Divu atskaites sistēmu modelis (dvīņi vairs nesatiekas)

Laika gaitas un koordinātes saistība laboratorijas ("sarkanā", tajā nekustīgi atrodas objekts **A**, att.7.1) un kustīgajā atskaites sistēmā ("zaļā", tajā nekustīgi atrodas objekts **B**, kura ātrums ir v_1 un atskaites sistēma kustās līdz ar objektu **B**) tiek uzdota ar transformāciju formulām:

$$
\begin{aligned}
x &= (x' + v_1 t')\,\gamma_1, \\
t &= \left(t' + \frac{v_1}{c^2}x'\right)\gamma_1, \\
\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}, \\
x' &= (x - v_1 t)\,\gamma_1, \\
t' &= \left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right)\gamma_1.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Aplūkojam notikumu N_1: abās atskaites sistēmās saskaņojam pulksteņus un koordinātes merīšanu:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ t_1 &= 0, \\ x'_1 &= 0, \\ t'_1 &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Pēc laika intervāla Δt (izmērītu laboratorijas atskaites sistēmā) izraisām notikumu N_2, kas kustīgajā atskaites sistēmā notiek pie $x'_2 = 0$ (punkta **B** jaunajā atrašanās vietā). Tad, atbilstoši (7.1), iegūstam

$$\begin{aligned} x_2 &= (x'_2 + v_1 t'_2)\,\gamma_1 = v_1 t'_2 \gamma_1, \\ t_2 &= \left(t'_2 + \frac{v_1}{c^2} x'_2\right)\gamma_1 = t'_2 \gamma_1, \end{aligned} \tag{7.3}$$

no kā seko

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 = t'_2\gamma_1 = t'_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \\ x_2 &= v_1 t'_2 \gamma_1 = v_1 \Delta t. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Līdz ar to var teikt, ka notikums N_2 kustīgajā atskeites sistēmā notiek tās jaunajā sākumpunkta atrašanās vietā pēc laika intervāla $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$

Ja laika momentā $t = \Delta t$ laboratorijas sistēmas sākumpunktā izraisām notikumu N_3 (punkta **A** atrašanās vietā), tad tam atbilst

$$\begin{aligned} x'_3 &= (x_3 - v_1 t_3)\,\gamma_1 = (0 - v_1 \Delta t)\,\gamma_1 = -v_1 \Delta t \gamma_1 = -v_1 \Delta t', \\ t'_3 &= \left(t_3 - \frac{v_1}{c^2} x_3\right)\gamma_1 = \left(\Delta t - \frac{v_1}{c^2} 0\right)\gamma_1 = \Delta t \gamma_1 = \Delta t', \end{aligned} \tag{7.5}$$

Notikumus N_2 un N_3 nevar saukt par simetriskiem, jo tiem neatbilst vienādi īpašlaika momenti. Ja pēc laika intervāla Δt skatās, kur kustīgajā sistēmā "redz" objektu A (notikums N_4), tad izrādās, ka tam atbilst

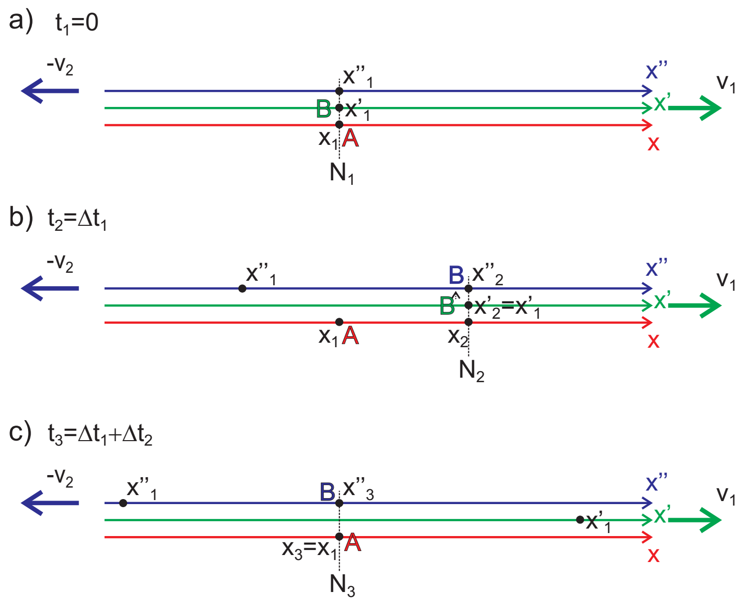
$$\begin{aligned} x'_4 &= (x_4 - v_1 t_4)\,\gamma_1 = (0 - v_1 t_4)\,\gamma_1 = -v_1 t_4 \gamma_1, \\ t'_4 &= \left(t_4 - \frac{v_1}{c^2} x_4\right)\gamma_1 = \left(t_4 - \frac{v_1}{c^2} 0\right)\gamma_1 = t_4 \gamma_1. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Tā kā $t'_4 = \Delta t$, tad $x'_4 = -v_1 \Delta t$, kas pilnībā atbilst (7.4), tā pat kā objekta **A** īpašlaika ritējums $t_4 = \frac{t'_4}{\gamma_1} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$.

Tātad var apgalvot, savstarpēji notiekošais abiem objektiem **A** un **B** izskatās simetriski.

7.2 Dvīņi: trīs atskaites sistēmu modelis

Lai skaidrotu tā saukto dvīņu paradoksu, dvīņiem **A** un **B** ieviesīsim 3 inerciālas atskaites sistēmas atbilstoši 7.2 attēlam, kurā parādīti trīs notikumi N_1, N_2, N_3. Dvīnis A paliek uz bezgalīgi gara perona (x, t). Dvīnis B iekāpj (notikums N_1)



Att. 7.2: Trīs atskaites sistēmu modelis (dvīņi atkal satiekas)

pirmajā vilcienā (x', t') un kādu laiku ceļo ar ātrumu v_1. Tad dvīnis pārsēžas (notikums N_2) otrajā vilcienā (x'', t''), kas brauc ar ātrumu $-v_2$ pretējā virzienā (ātrums atskaitīts pret peronu). Īstajā brīdī (notikums N_3) dvīnis B izkāpj uz perona, lai atkal satiktos ar dvīni A un salīdzinātu pulksteņu rādījumus. Šajā modelī netiek aplūkoti paātrināšanās efekti.

7.2.1 Notikums N_1 - iekāpšana pirmajā vilcienā

Notikumā N_1 saskaņo koordinātu un pulksteņu atskaites sākumu (vienkāršības pēc):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ t_1 &= 0, \\ x_1' &= 0, \\ t_1' &= 0, \\ x_1'' &= 0, \\ t_1'' &= 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Transformāciju formulas ir sekojošas:

$$
\begin{aligned}
x &= (x' + v_1 t')\,\gamma_1, \\
t &= \left(t' + \frac{v_1}{c^2} x'\right)\gamma_1, \\
\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \\
\\
x &= (x'' - v_2 t'')\,\gamma_2, \\
t &= \left(t'' - \frac{v_2}{c^2} x''\right)\gamma_2, \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}},
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

7.2.2 Notikums N_2 - pārkāpšana no pirmā uz otro vilcienu

Notikumam N_2 atbilst "perona" laiks $t_2 = \Delta t_1$ un dvīņa B koordināte $x_2' = 0$. No perona redz, ka dvīnis B atrodas pret koordināti $x_2 = \Delta t_1 v_1$, jo ir ceļojis uztotot laika intervālu ar ātrumu v_1. Formulas apliecina sekojošo:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= (x_2' + v_1 t_2')\,\gamma_1 = (0 + v_1 t_2')\,\gamma_1 = v_1 t_2' \gamma_1, \\
t_2 &= \left(t_2' + \frac{v_1}{c^2} x_2'\right)\gamma_1 = \left(t_2' + \frac{v_1}{c^2} 0\right)\gamma_1 = t_2' \gamma_1.
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Tātad

$$
\begin{aligned}
t_2' &= \frac{t_2}{\gamma_1} = \frac{\Delta t_1}{\gamma_1}, \\
x_2 &= v_1 \Delta t_1.
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Ja skatās no pirmā vilciena, tad pārkāpšanas brīdī $t_2' = \frac{\Delta t_1}{\gamma_1}$, pēc (7.8) atbilstoši $x_{2A} = 0 = (x_2' + v_1 t_2')\,\gamma_1$ dvīņa A atrašanās vieta pirmā vilciena koordinātēs ir

$$
x_{2A}' = -v_1 t_2' = -v_1 \frac{\Delta t_1}{\gamma_1} \tag{7.11}
$$

Otrajā vilcienā notikumam N_2 atbilst

$$
\begin{aligned}
x_2'' &= (x_2 + v_2 t_2)\,\gamma_2 = (v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_1)\,\gamma_2 = (v_1 + v_2)\,\Delta t_1 \gamma_2, \\
t_2'' &= \left(t_2 + \frac{v_2}{c^2} x_2\right)\gamma_2 = \left(\Delta t_1 + \frac{v_2}{c^2} v_1 \Delta t_1\right)\gamma_2 = \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)\Delta t_1 \gamma_2.
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

Kolīdz dvīnis B ir "pārsēdies" otrajā vilcienā, interesanti būtu noskaidrot, kā no šī vilciena izskatās dvīnis A. Tātad, ņemsim laika momentu t''_2 ar otro vilcienu saistītajā sistēmā, bet dvīni A raksturos $x_{2A} = 0$ perona atskaites sistēmā. Noteiksim x''_{2A} un t_{2A}:

$$\begin{aligned} x''_{2A} &= (x_{2A} + v_2 t_{2A})\,\gamma_2 = (0 + v_2 t_{2A})\,\gamma_2 = v_2 t_{2A}\gamma_2, \\ t''_2 &= \left(t_{2A} + \frac{v_2}{c^2}x_{2A}\right)\gamma_2 = \left(t_{2A} + \frac{v_2}{c^2}0\right)\gamma_2 = t_{2A}\gamma_2. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Tātad

$$\begin{aligned} t_{2A} &= \frac{t''_2}{\gamma_2} = \frac{\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)\Delta t_1 \gamma_2}{\gamma_2} = \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)\Delta t_1, \\ x''_{2A} &= v_2 t_{2A}\gamma_2 = v_2\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)\Delta t_1 \gamma_2, \end{aligned} \tag{7.14}$$

7.2.3 Pārsēšanās ietekme uz laika gaitu

Pārsēžoties, perona pulkstenis notikumam N_2 rāda pavisam noteiktu laiku, vilcienu pulksteņu rādījumi atšķirās, bet tas saistās ar atskaites sākumu vai beigām. Mūs vairāk interesē dvīņa B īpašlaika saistība ar dvīņa A īpašlaiku.

Pārkāpšanas brīdī, otrā vilciena pulksteņi dvīnim A uzrāda novēroto īpašlaiku (7.14):

$$t_{2A} = \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)\Delta t_1. \tag{7.15}$$

Ja $v_2 = -v_1$, tad $t_{2A} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\Delta t_1$.
Ja $v_2 = 0$, tad $t_{2A} = \Delta t_1$.
Ja $v_2 = v_1$, tad $t_{2A} = \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)\Delta t_1$.
Ja $v_2 = v_2$, tad $t_{2A} = \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)\Delta t_1$.

Tātad, pārkāpjot starp vilcieniem, kuru ātrumi pret peronu ir v_1 un $-v_2$, tiek konstatēts, ka no otrā vilciena, atrodoties tajā tieši pret dvīni A (tad tam jābūt kādam citam novērotājam, jo dvīnis B tur neatrodas), redz perona pulksteņa divus dažādus laikus, kuru atšķirība starp abiem gadījumiem ir

$$\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)\Delta t_1 - \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\Delta t_1 = \left(\frac{v_1 v_2}{c^2} + \frac{v_1^2}{c^2}\right)\Delta t_1 = \frac{(v_1 + v_2)v_1}{c^2}\Delta t_1 \tag{7.16}$$

Šī ir tā laika gājuma diference, kas izjauc abu dvīņu savstarpējās relativitātes simetriju, kā rezultātā dvīnis A "noveco straujāk".

7.2.4 Notikums N_3 - atgriešanās

Pēc perona pulksteņa skatoties, dvīņa B atgriešanās notiek pēc laika, kas nepieciešams, lai ar ātrumu v_1 veiktu turpceļu un ar ātrumu v_2 veiktu atpakaļceļu, pārvarot attālumu $v_1 \Delta t_1$:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 0, \\
t_3 &= \Delta t_1 + \frac{v_1 \Delta t_1}{v_2} = \Delta t_1 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right).
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

Otrā vilciena pulkstenis rāda laiku, ko iegūst no transformāciju formulām

$$
\begin{aligned}
x_3'' &= (x_3 + v_2 t_3)\, \gamma_2 = \left(0 + v_2 \Delta t_1 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right)\right) \gamma_2 = v_2 \Delta t_1 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) \gamma_2, \\
t_3'' &= \left(t_3 + \frac{v_2}{c^2} x_3\right) \gamma_2 = \left(\Delta t_1 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) + \frac{v_2}{c^2} 0\right) \gamma_2 = \Delta t_1 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) \gamma_2.
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Kopā ceļojumā dvīnis B ir pavadījis laiku (īpašlaiku!!!)

$$
\begin{aligned}
\Delta t_B &= (t_2' - t_1') + (t_3'' - t_2'') = \frac{\Delta t_1}{\gamma_1} + \left(\Delta t_1 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) \gamma_2 - \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right) \Delta t_1 \gamma_2\right) \\
&= \frac{\Delta t_1}{\gamma_1} + \Delta t_1 \gamma_2 \frac{v_1}{v_2} \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) = \Delta t_1 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \frac{v_1}{v_2}\right).
\end{aligned}
\tag{7.19}
$$

Dvīņa A laiks starp notikumiem N_1 un N_3 atbilstoši (7.18) ir

$$
t_A = \Delta t_1 \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) \tag{7.20}
$$

un tas ir lielāks par $t_B = \Delta t_1 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \frac{v_1}{v_2}\right)$.

Nodaļa 8

Papildmateriāls: Speciālās Lorenca transformācijas notikumu telpā

Katru konkrētu notikumu N laboratorijas atskaites sistēmā O raksturo 4-rādiusvektors
x_i $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict)$
un - atskaites sistēmā O' - 4-rādiusvektors
x'_i $(x'_1 = x',\ x'_2 = y',\ x'_3 = z',\ x'_4 = ict')$.

Tādejādi redzams, ka speciālās Lorenca transformācijas ir 4-rādiusvektora koordinātu transformāciju formulas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y & = & y' \\ z & = & z' \\ t & = & \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & (x'_1 - i\beta x'_4)\,\gamma \\ x_2 & = & x'_2 \\ x_3 & = & x'_3 \\ x_4 & = & (x'_4 + i\beta x'_1)\,\gamma \end{array}\right. , \tag{8.1}$$

kur ieviesti sekojoši apzīmējumi: 1) bezdimensionālais ātrums $\beta = \frac{v}{c}$, kur $0 \leq \beta \leq 1$ ($0 \leq v \leq c$); 2) realativistiskais faktors $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Turpmāk Lorenca transformācijas ērti pierakstīt lineāru transformāciju formā:

$$x_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} x'_k \quad ; \quad i = 1,2,3,4 \quad , \tag{8.2}$$

kur koeficientu matricu α_{ik} sauc par speciālo Lorenca transformāciju matricu:

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad . \tag{8.3}$$

Apgrieztajām Lorenca transformācijām

$$x'_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha^*_{ik} x_k \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad , \tag{8.4}$$

kur $\alpha^*_{ik} = \alpha^{Tr}_{ik}$ ir matricas α_{ik} transponētā matrica

$$\alpha^{-1}_{ij} = \alpha^{Tr}_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad . \tag{8.5}$$

Šāds 4-rādiusvektora Lorenca transformāciju pieraksts ļauj attīstīt tenzoru algebru un analīzi 4-dimensionālajā notikumu telpā, kas izrādās SRT postulātiem adekvāts matemātiskais aparāts.

4-strāvas blīvuma vektors:

$s_i(j_x,\, j_y,\, j_z,\, ic\rho)$.

4-potenciāls:

$A_i(A_x,\, A_y,\, A_z,\, \frac{i}{c}\varphi)$.

4-“nabla”, 4-diferenciāloperators, 4-gradients

$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y}\, \frac{\partial}{\partial z},\, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_k - \frac{\partial}{\partial x_k} A_i \quad . \tag{8.6}$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{8.7}$$

Nodaļa 9

Papildmateriāls: 4D telpas transformāciju formulu izvedums

http://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_special_relativity
http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Lorentz_transformations
http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_special_relativity
http://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_relativity
http://en.wikipedia.org/wiki/Galilean_invariance

9.1 Izvedums

Ņemot vērā telpas izotropijas un homogenitātes īpašības, laboratorijas atskaites sitēmas (**LAS**) koordinātas x, y, z, t ar kustīgās atskaites sistēmas (**KAS**) koordinātām x', y', z', t' saista lineāras sakarības

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \tag{9.1}$$

Noteiksim nezināmos koeficientus a_{ij}. Pirms to sākt, precizēsim situāciju.

Notikumam N_0 ar koordinātām $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ atbilst koordinātas $(x', y', z', t') = (0, 0, 0, 0)$, kā to apliecina (9.1).

KAS pārvietojas ar ātrumu v pret LAS x ass virzienā. Šai pašā virzienā izvietojam x' asi. Pārējās asis izvietojam tā, lai plakne $x'y'$ pārvietotos pa plakni xy un plakne $x'z'$ - pa plakni xz.

Tālākie izvedumi balstīsies uz "gaismas sfēru", kuru izstaro notikumā N_0 un kura pēc vienādiem fizikas likumiem ar gaismas ātrumu c izplatās abās atskaites sistēmās.

9.1.1 Gaismas stari gar x asi.

Aplūkojam notikumus $N_{\pm 1}$, kuros gaismas stars laika momentā t sasniedz noteiktus punktus uz x ass. Tie raksturojas ar $y = z = 0$ un vieglāk padodas analīzei. Notikumi $N_{\pm 1}$

$$N_{\pm 1}: \quad x_{\pm 1} = \pm c\, t_1, \quad y_{\pm 1} = z_{\pm 1} = 0, \quad t_{\pm 1} = t_1 \tag{9.2}$$

KAS raksturojas ar koordinātām

$$\begin{aligned} x'_{\pm 1} &= \pm a_{11} c t_1 + a_{14} t_1 \\ y'_{\pm 1} &= 0 = \pm a_{21} c\, t_1 + a_{24} t_1 \\ z'_{\pm 1} &= 0 = \pm a_{31} c\, t_1 + a_{34} t_1 \\ t'_{\pm 1} &= \pm a_{41} c t_1 + a_{44} t_1 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Tā kā $x'_{\pm 1} = \pm c t'_{\pm 1}$, tad

$$\pm\, a_{11} c t_1 + a_{14} t_1 = \pm c \left(\pm a_{41} c t_1 + a_{44} t_1\right) \tag{9.4}$$

no kā seko divas sakarības koeficientiem:

$$\begin{aligned} a_{14} &= c^2 a_{41} \\ a_{11} &= a_{44} \end{aligned} \tag{9.5}$$

Savukārt, KAS sākumpunkta kustību ar ātrumu v LAS apraksta sakarība $x = v\, t$, kas noved pie

$$0 = a_{11} v t + a_{14} t \tag{9.6}$$

Apvienojot (9.5) un (9.6) iegūst

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_0 \\ a_{14} &= -v\, a_0 \\ a_{41} &= -\frac{v}{c^2} a_0 \\ a_{44} &= a_0 \end{aligned} \tag{9.7}$$

un

$$\begin{aligned} x' &= a_0 (x - vt) \\ t' &= a_0 (t - \frac{v}{c^2} x) \end{aligned} \tag{9.8}$$

Pēc analoģijas

$$\begin{aligned} x &= a'_0 (x' + vt') \\ t &= a'_0 (t' + \frac{v}{c^2} x') \end{aligned} \tag{9.9}$$

jo KAS un LAS situācija ir savstarpēji apgriežama, mainās tikai atskaites sistēmu savstarpējā pārvietošanās ātruma zīme. Turklāt no simetrijas apsvērumiem

$$a_0 = a_0' \tag{9.10}$$

kas nozīmē, ka abās atskaites sistēmās ievieš vienādus lineālus un pulksteņus.

Apvienojot (9.8) un (9.9), iegūst

$$\begin{aligned} x' &= a_0(x - vt) \\ &= a_0\left(a_0'(x' + vt') - va_0'(t' + \frac{v}{c^2}x')\right) \\ &= a_0a_0'\left(x' + vt' - vt' - \frac{v^2}{c^2}x'\right) \\ &= a_0^2x'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{9.11}$$

no kā seko

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{9.12}$$

Tas, ka visi notikumi uz x ass tiek novēroti kā notikumi uz x' ass KAS izriet no simetrijas apsvērumiem un šķiet pašsaprotami, jo x' ass "tiek uzlikta" uz x ass. Sakarības

$$\begin{aligned} 0 &= \pm a_{21}c + a_{24} \\ 0 &= \pm a_{31}c + a_{34} \end{aligned} \tag{9.13}$$

sniedz pie koeficientu vērtības

$$a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0 \tag{9.14}$$

Apkopojot

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + a_{12}y + a_{13}z - \frac{vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{32}y + a_{33}z \\ t' &= -\frac{vx}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + a_{42}y + a_{43}z + \frac{t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{9.15}$$

9.1.2 Gaismas stari gar y asi

Aplūkojam notikumus $N_{\pm 2}$, kuros gaismas stars laika momentā t sasniedz noteiktus punktus uz y ass. Tie raksturojas ar $x = z = 0$. Notikumi $N_{\pm 2}$ LAS

$$N_{\pm 2}: \quad y_{\pm 2} = \pm c\,t_2, \quad x_{\pm 2} = z_{\pm 2} = 0, \quad t_{\pm 2} = t_2 \tag{9.16}$$

un KAS

$$\begin{aligned} x'_{\pm 2} &= \pm a_{12} c\,t_2 + a_{14} t_2 \\ y'_{\pm 2} &= \pm a_{22} c\,t_2 \\ z'_{\pm 2} &= \pm a_{32} c\,t_2 \\ t'_{\pm 2} &= \pm a_{42} c\,t_2 + a_{44} t_2 \end{aligned} \tag{9.17}$$

Novirzoties no x ass "pa kreisi" vai "pa labi" (kas ne tuvu nav tas pats kā "uz priekšu" vai "atpakaļ" pa x asi), būtu jānovēro simetrija. Tāpēc $a_{12} = 0$, jo sagaidām, ka $x'_{+2} = x'_{-2}$. Nav pamata parādīties rotācijai ap x asi (novirzei no $x'y'$ plaknes, kas izpaustos kā $z'_{\pm 2} \neq 0$), tātad $a_{32} = 0$. Simetriju sagaida arī attiecībā uz laiku jeb $t'_{+2} = t'_{-2}$, tātad $a_{42} = 0$.

9.1.3 Gaismas stari gar z asi

Notikumos $N_{\pm 3}$

$$N_{\pm 3}: \quad z_{\pm 3} = \pm c\,t_3, \quad x_{\pm 3} = y_{\pm 3} = 0, \quad t_{\pm 3} = t_3 \tag{9.18}$$

pēc analoģijas ar notikumiem $N_{\pm 2}$ iegūst $a_{13} = a_{23} = a_{43} = 0$.

9.1.4 Gaismas stari slīpi pret asīm

Apkopojot, šobrīd iegūts

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= a_{22} y \\ z' &= a_{33} z \\ t' &= \frac{t - \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{9.19}$$

Aplūkojam notikumu N_4

$$N_4: \quad x_4 = y_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} c\, t_4, \quad z_4 = 0, \quad t_4 = t_4 \tag{9.20}$$

Tam atbilst KAS koordinātas

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} c\, t_4 - v t_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= a_{22} \frac{\sqrt{2}}{2} c\, t_4 \\ t' &= \frac{t_4 - \frac{v}{c^2} \frac{\sqrt{2}}{2} c\, t_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{9.21}$$

Jāizpildās

$$x'^2 + y'^2 = c^2 t'^2 \tag{9.22}$$

Tātad

$$\frac{\frac{1}{2} c^2 - \sqrt{2} v c + v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_4^2 + a_{22}^2 \frac{1}{2} c^2\, t_4^2 = c^2 t_4^2 \frac{1 - \sqrt{2} \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{9.23}$$

Pareizinot (9.23) ar $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{2}{t_4^2}$, iegūst

$$(c^2 - 2\sqrt{2} v c + 2v^2) + a_{22}^2 (c^2 - v^2) = 2c^2 - 2\sqrt{2} v c + v^2 \tag{9.24}$$

kas tālāk vienkāršojas par

$$a_{22}^2 (c^2 - v^2) = c^2 - v^2 \tag{9.25}$$

un noved pie

$$a_{22} = \pm 1 \tag{9.26}$$

Pavēršot y un y' asis vienādi, koeficients $a_{22} = 1$.

Analoģiski notikumā N_5

$$N_5: \quad x_5 = z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} c\, t_5, \quad y_5 = 0, \quad t_5 = t_5 \tag{9.27}$$

iegūs $a_{33} = 1$.

9.1.5 Patvaļīgs punkts uz gaismas sfēras

Transformāciju formulas

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{9.28}$$

un

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{9.29}$$

paredz, ka saglabājas sekojošas izteiksmes vērtība

$$\begin{aligned} c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) =& \frac{c^2t'^2 + 2vt'x' + \frac{v^2}{c^2}x'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ & - \frac{x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y'^2 - z'^2 \\ =& \frac{t'^2(c^2 - v^2) + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)x'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y'^2 - z'^2 \\ =& c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \end{aligned} \tag{9.30}$$

Jebkuram notikumam uz gaismas sfēras LAS $c^2t^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$, jo laikā t gaisma ir noskrējusi attālumu $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, un no transformāciju formulām izriet pareiza sakarība $c^2t'^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)$ arī KAS.

Literatūra

[1] A chronology of geomagnetism. http://www.phy6.org/earthmag/timelin.htm.

[2] Unit of electric current (ampere): Si brochure: The international system of units (si) [8th edition, 2006; updated in 2014]. http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/ampere.html.

[3] Vikipedija: Elektromagnētiskā lauka enerģija. https://lv.wikipedia.org/wiki/Elektromagn%C4%93tisk%C4%81_lauka_ener%C4%A3ija.

[4] Web: Si brochure, section 2.1.1.1. http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter2/2-1/metre.html.

[5] Wikipedia: Ampere. http://en.wikipedia.org/wiki/Ampere.

[6] Wikipedia: Electrical breakdown. http://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_breakdown.

[7] Wikipedia: Electrical resistivity and conductivity. https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity.

[8] Wikipedia: Liénard–wiechert potential. http://en.wikipedia.org/wiki/Li%C3%A9nard%E2%80%93Wiechert_potential.

[9] Wikipedia: Poynting's theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Poynting's_theorem.

[10] Wikipedia: Pseudovector. https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudovector.

[11] Wikipedia: Speed of light. http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_light.

[12] A.I. Aleksejevs. Uzdevumu krājums klasiskajā elektrodinamikā [krieviski]. Nauka, 1977.

[13] D.J.Griffiths and M.A.Heald. Time-dependent generalizations of the biot–savart and coulomb laws. Am.J.Phys., 59:111–117, 1991.

[14] J.Miķelsons E. Šilters, G.Sermons. Elektrodinamika. Zvaigzne, Rīga, 1986.

[15] L.D. Landau E.M. Lifshitz. Teorētiskās fizikas kurss. —-, —-.

[16] J.D. Jackson. Classical Electrodynamics, 3rd edition. Wiley, 1998.

[17] S.Lācis and E.Šilters. Elektrodinamika, lekciju konspekts. e-versija, LU, 2009.

[18] Bo Thidé. Electromagnetic Field Theory (On-line Textbook). Upsilon Books, Upsala, Sweden, http://www.plasma.uu.se/CED/Book/, 2009.

[19] I.N.Toptigin V.V. Batigin. Uzdevumu krājums elektrodinamikā [krieviski]. Nauka, 1970.