2015./16. m.g. IPhO izlases kandidātu 3. treniņnodarbība, 17. oktobris, E1

Viens no būtiskajiem veidiem, kā izprast un apstrādāt eksperimentāli iegūtos datus ir to attēlošana grafikos. Grafiku veidošanā un analīzē tiek izmantotas šādas metodes: aproksimācija, interpolācija, ekstrapolācija un integrēšana.

Pirms mēs apskatām grafiku analīzes metodes, apskatīsim, kā korekti veidot grafikus.

- Grafiku jāzīmē uz milimetru papīra vai citā tam piemērotā vietā. Pirmās ir jānovelk horizontālās un vertikālās asis. Uz katras ass ir jāatzīmē fizikālā lieluma apzīmējums (piem., spriegumam – U), kā arī mērvienības (piem., spriegumam – mV (milivolti)).
- Pēc iespējas ir jācenšas aizpildīt viss grafikam dotais laukums, tāpēc prātīgi jāizvēlas iedaļu lielumi un sākumpunkti uz asīm. Jāsaprot, ka iedaļām nav jāsākas no 0, kā arī, ka horizontālās un vertikālās ass mērogiem nav obligāti jāsakrīt. Tāpat, vērts padomāt vai datu punktiem ir tikai pozitīvas, vai arī negatīvas vērtības.
- Precīzi atliek punktus tā, lai tie ir viegli pamanāmi. Katram punktam, ja iespējams, atzīmē kļūdas robežu abos lielumos.

Aproksimācija ir mērījumu datu aprakstīšana ar kādu matemātiski definētu sakarību. Ar rokām to labi iespējams paveikt tikai sakarībām, kuru grafiskais attēlojums ir taisne, kuru viegli atrast izmantojot lineālu.

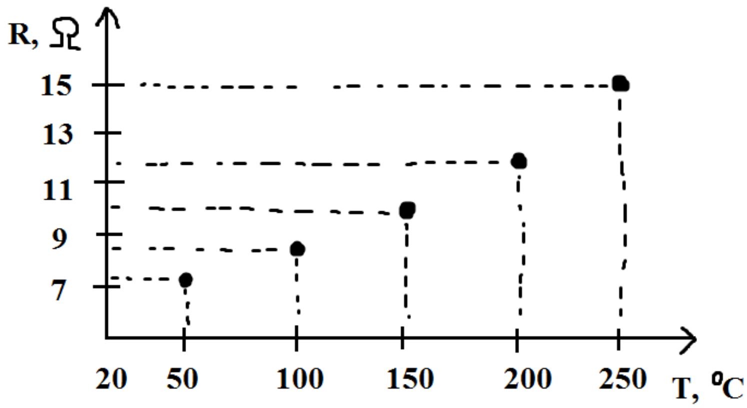
Interpolācija ir metode, kad pēc dotajiem eksperimentālajiem datiem un sakarībām uzzīmējam aptuvenu grafiku. To dara, lai noteiktu starpvērtības, kas iepriekš nav eksperimentāli noteiktas. Lai to darītu, tiek pieņemts, ka lielumi starp mērījumu punktiem mainās pēc zināma likuma. Vienkāršākajā gadījumā datu punktus savieno taisnes vai “uz aci”.

Ekstrapolācija ir metode, kad mēs doto grafiku pagarinām, lai iegūtu jaunas vērtības, pieņemot, ka sakarība starp lielumiem paliek nemainīga. To visbiežāk dara, ja nav iespējams veikt tiešu mērījumu.

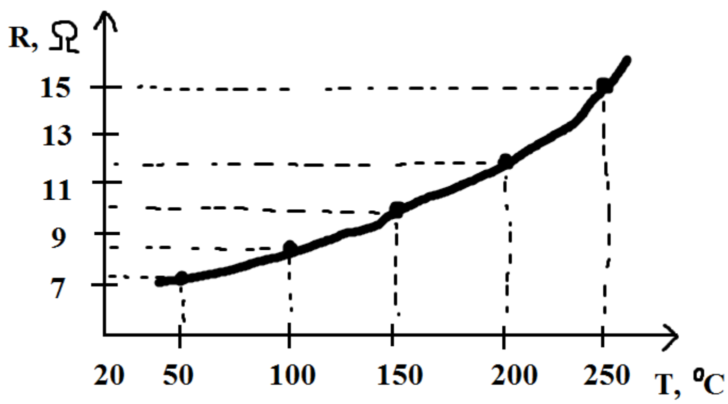
Integrēšana izmantojot grafiku atbilst laukuma atrašanai grafikā. Par to sīkāk rakstīts šī materiāla beigās.

Autori: Daniels Krimans, Guntars Kitenbergs

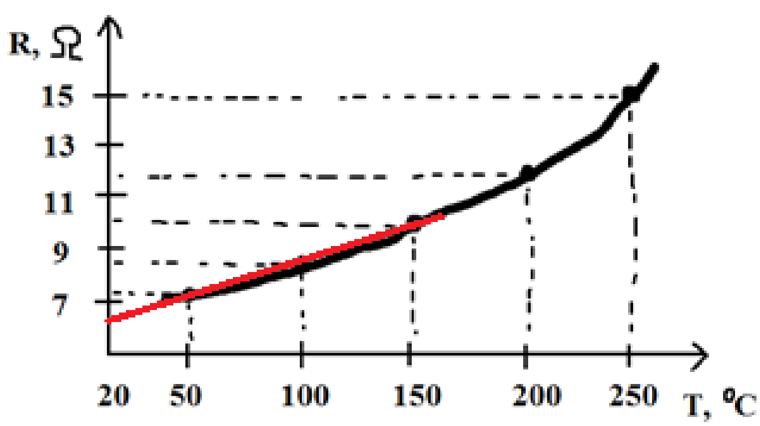
Piemērs. Mums ir jānosaka kvēldiega pretestība, kad tā temperatūra ir 20°C. Eksperimentāli tas ir praktiski neiespējami, jo, ieslēdzot spuldzīti, tā gandrīz momentāni sakarst. Eksperimentāli mēs varam noteikt grafiku R(T). Tas izskatās aptuveni šādi:



Šos datus mēs varam **interpolēt** un uzzīmēt aptuvenu grafiku, kā, pēc mūsu domām, tam ir jāizskatās, lai tas atbilstu eksperimentāli noteiktajiem punktiem.



Pēc tam varam šos datus **ekstrapolēt,** un pagarināt grafiku līdz vajadzīgajai vērtībai (20°C), pieņemot, ka sakarība starp pretestību un temperatūru nemainās.



Tad varam aptuveni noteikt, kāda ir meklētā pretestības vērtība (nolasot no grafika). Jāievēro, ka šis grafiks ir nekorekti uzzīmēts, jo nav atliktas kļūdu vērtības.

Autori: Daniels Krimans, Guntars Kitenbergs

Kā redzams piemērā, ar interpolēšanas un ekstrapolēšanas palīdzību var noteikt aptuveno sakarību starp lielumiem, līdz ar to, noteikt vērtības, kas nav starp eksperimentāli noteiktajām. Mūsu piemērā ar spuldzīti, interpolējot grafiku, mēs varam noteikt aptuveno pretestības vērtību jebkurai temperatūrai noteiktajā intervālā. Jāsaprot, ka šīs vērtības ir tikai aptuvenas, jo skaidrs, ka dotajiem datu punktiem mēs varam uzzīmēt bezgalīgi daudz dažādu grafiku, kas tos pietiekami labi apraksta. Tāpēc, lai interpolācija būtu precīzāka, eksperimentāli jāiegūst pēc iespējas vairāk vērtību, it īpaši apgabalos, kur strauji mainās mērījumu vērtības.

Nozīmīgākais veids, kā iegūt informāciju no grafika, ir datu **aproksimācija** ar zināmu fizikālu sakarību. Treniņa nolūkā turpmāk apskatīsim dažādas sakarības, kurām atbilstošie dati ir apskatāmi šajā tabulā:

Datu tabula

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0.5	4.5	1.7	0.8	2.2	0.3	0.2
1.0	5.6	2.2	1.3	2.9	1.1	0.8
1.5	7.5	3.5	1.9	3.8	2.4	1.7
2.0	9.6	3.7	2.3	5.2	3.9	3.5
2.5	11.7	5.1	2.6	7.8	6.4	6.3
3.0	14.1	6.6	2.6	10.8	9.0	9.8
3.5	15.5	7.6	3.0	15.0	12.2	14.6
4.0	17.8	10.2	3.0	21.1	16.0	20.7
4.5	19.9	11.7	3.1	29.8	20.4	28.4
5.0	22.3	14.5	3.2	42.0	24.9	37.4

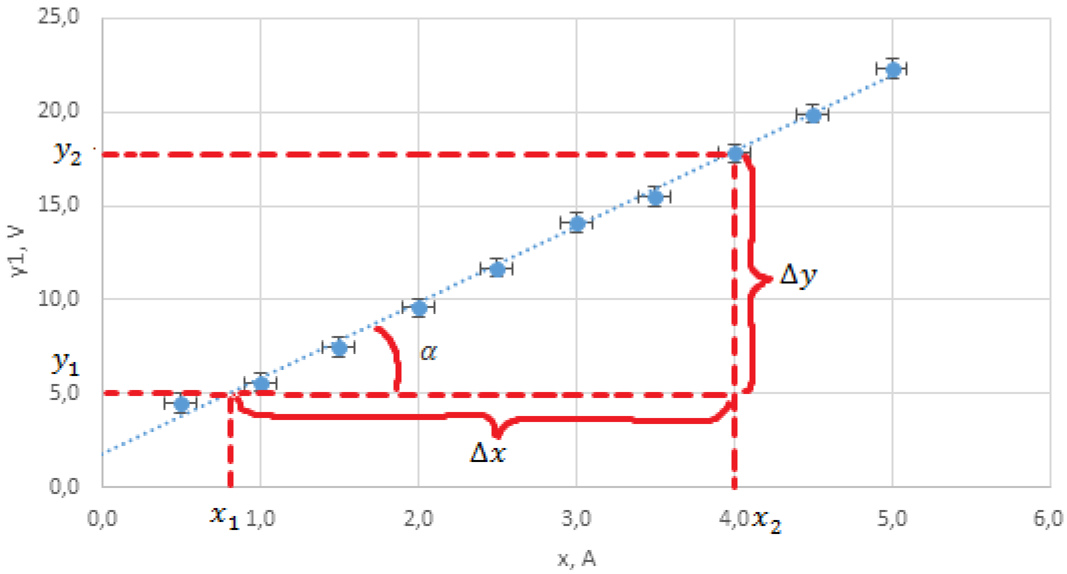
Mērvienība	A	V	V	V	V	V	V
Kļūdas +/-	0.1	0.5	0.5	0.3	0.1	0.3	0.3

Apskatīsim pirmo sakarību, kas teorētiski ir aprakstāma šādi:

$$y_1 = ax + b$$

Tas ir taisnes vienādojums, kas nozīmē, ka grafikam teorētiski jābūt taisnei. Veiksim visus nepieciešamos soļus un uzzīmēsim šos datu punktus, ņemot vērā mērījumu kļūdas.

Autori: Daniels Krimans, Guntars Kitenbergs



Izmantojot lineālu, datu punktus kļūdu robežās savieno ar taisni. To izmantojot, grafiski viegli noteikt nezināmos koeficientus a un b.

Pirmais nezināmais koeficients a ir taisnes slīpums un to nosaka pēc formulas:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha,$$

kur x_1 , y_1 un x_2 , y_2 ir divu taisnes punktu. Alternatīvi, slīpuma koeficientu var atrast aprēķinot tangensu no leņķa, ko veido x-ass un novilktā taisne.

Tā kā slīpums taisnei starp jebkuriem diviem punktiem ir konstants, tad vienalga, kādus divus punktus mēs izvēlamies. Taču, lai būtu precīzāk, vēlams, lai šie divi punkti atrastos pēc iespējas tālāk viens no otra.

Otrais nezināmais koeficients b atbilst krustpunktam ar y asi. To var nolasīt ekstrapolējot (pagarinot) taisnes grafiku, līdz $y = 0$. Alternatīvi, brīvo koeficientu var aprēķināt izmantojot punkta x_1 , y_1 koordinātas un jau zināmo koeficientu a.

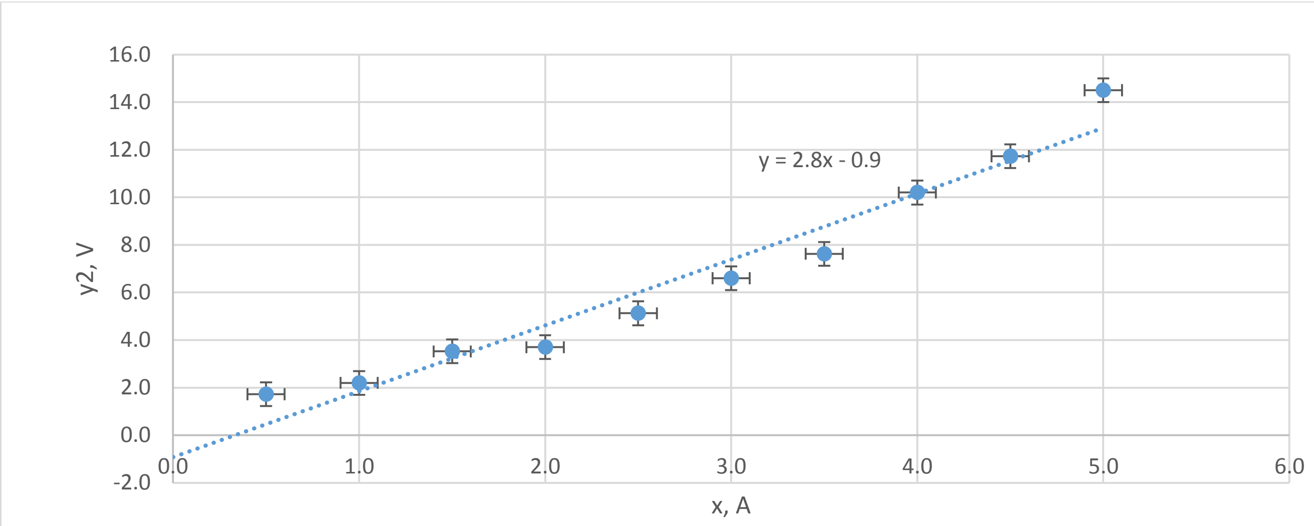
Kā redzams, tad taisnes grafiku ir viegli analizēt un tas ir ērts nezināmo koeficientu noteikšanai. Nākamajā nodarbībā noskaidrosim, kā noteikt arī šo lielumu kļūdu.

Secinājums. *Lai noteiktu kādas funkcijas nezināmos locekļus grafiski, šo sakarību pārveido par taisnes vienādojumu, uzzīmē atbilstošo grafiku un veic aprēķinus izmantojot to.*

Piemērs. Apskatīsim otro sakarību, kas teorētiski ir aprakstāma šādi:

$$y_2 = ax^2 + b$$

Grafiks izskatās šādi:



Šajā gadījumā aproksimējot grafiku ar taisni, tas slikti atbilst noteiktajiem punktiem, tāpēc koeficienti būs ļoti neprecīzi.

Mēģināsim doto sakarību pārveidot par taisnes vienādojumu.

$$y = ax^2 + b$$

Ja mēs ieviesīsim jaunu vērtību $x' = x^2$, tad dotā sakarība pārvēršas par taisnes vienādojumu:

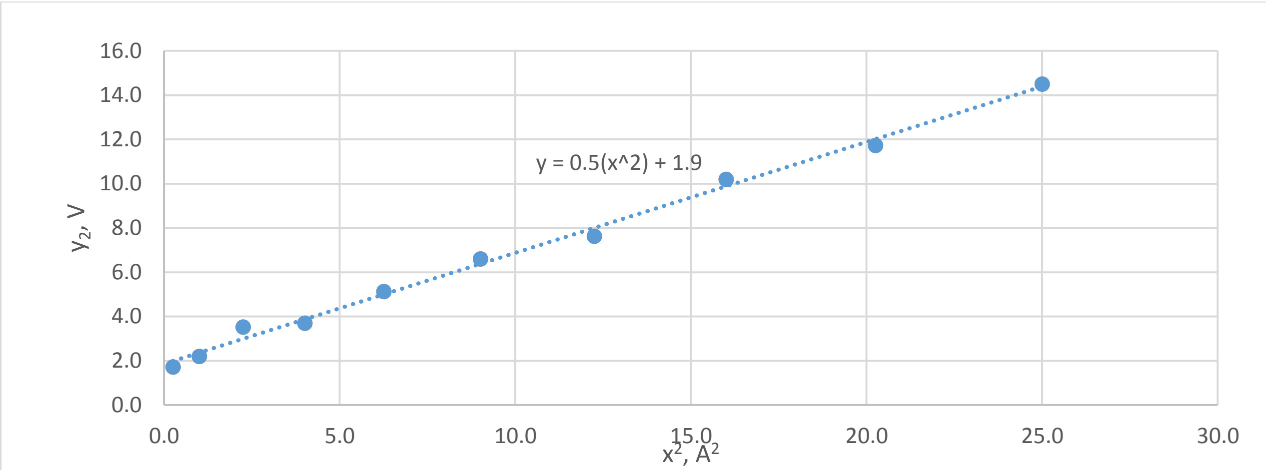
$$y = ax' + b$$

Tāpēc, tagad zīmēsim grafiku $y(x')$.

Lai iegūtu x' vērtības pie katra y, kāpināsim atbilstošos eksperimentāli noteiktos x.

Jaunā vērtību tabula:

x^2, A^2	y_2 , V
0.3	1.7
1.0	2.2
2.3	3.5
4.0	3.7
6.3	5.1
9.0	6.6
12.3	7.6
16.0	10.2
20.3	11.7
25.0	14.5



Šādi pārveidojot sakarības par taisnes vienādojumiem īpašu uzmanību jāpievērš mērvienībām. Tā kā jaunais $x' = x^2$, tad tā mērvienības būs A^2 nevis vienkārši A.

Tagad ir viegli aprēķināt nezināmos koeficientus a un b. Pievērsiet uzmanību mērvienībām.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x'} = 0.5 \frac{V}{A^2}$$

$$b = krustpunkts\ ar\ y\ asi = 1.9\ V$$

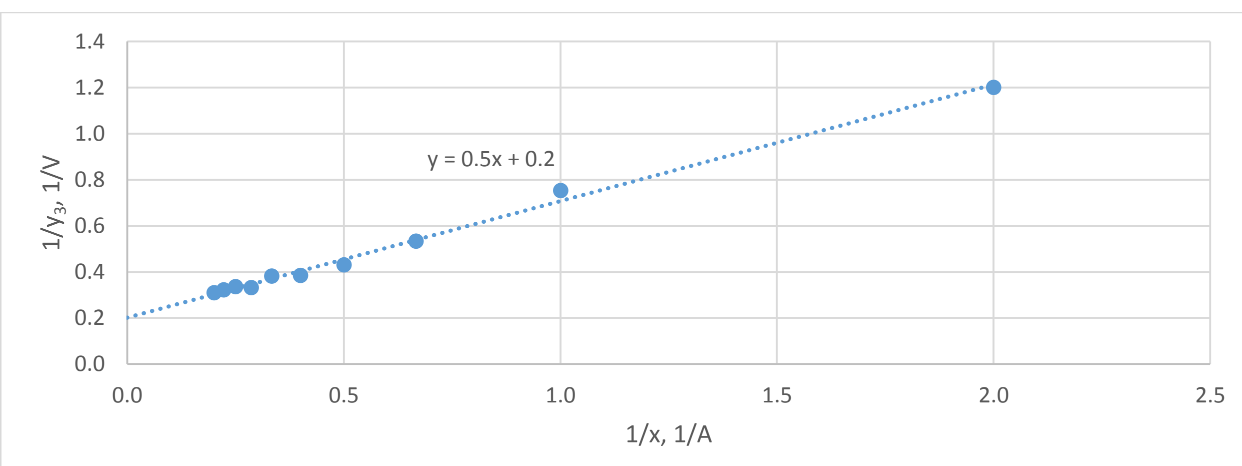
Piemērs. Apskatīsim trešo sakarību, kas teorētiski ir aprakstāma šādi:

$$\frac{1}{y_3} = \frac{a}{x} + b$$

Pārveidosim doto sakarību par taisnes vienādojumu, lai ērti noteiktu koeficientus.

Izvēlēsimies $y' = \frac{1}{y_3}$ un $x' = \frac{1}{x}$, tādā veidā iegūstot: $y' = ax' + b$.

Aprēķināsim jaunās vērtības un atzīmēsim tās grafikā:



Autori: Daniels Krimans, Guntars Kitenbergs

Aprēķināsim nezināmos koeficientus a un b, pievēršot uzmanību mērvienībām.

$$a = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = 0.5\frac{A}{V}$$

$$b = krustpunkts\ ar\ y\ asi = 0.2\ \frac{1}{V}$$

Piemērs. Apskatīsim ceturto sakarību, kas teorētiski ir aprakstāma šādi:

$$y_4 = a^{x+b}$$

Pārveidosim šo sakarību par taisnes vienādojumu. Lai to izdarītu, izmantosim logaritmu īpašības.

1) Sākumā logaritmēsim abas puses, iegūstot

$$\ln(y_4) = \ln(a^{x+b})$$

2) Izmantojot logaritmu īpašību $\ln(a^b) = b\ln(a)$, pārveidosim labo pusi, iegūstot

$$\ln(y_4) = (x + b)\ln(a)$$

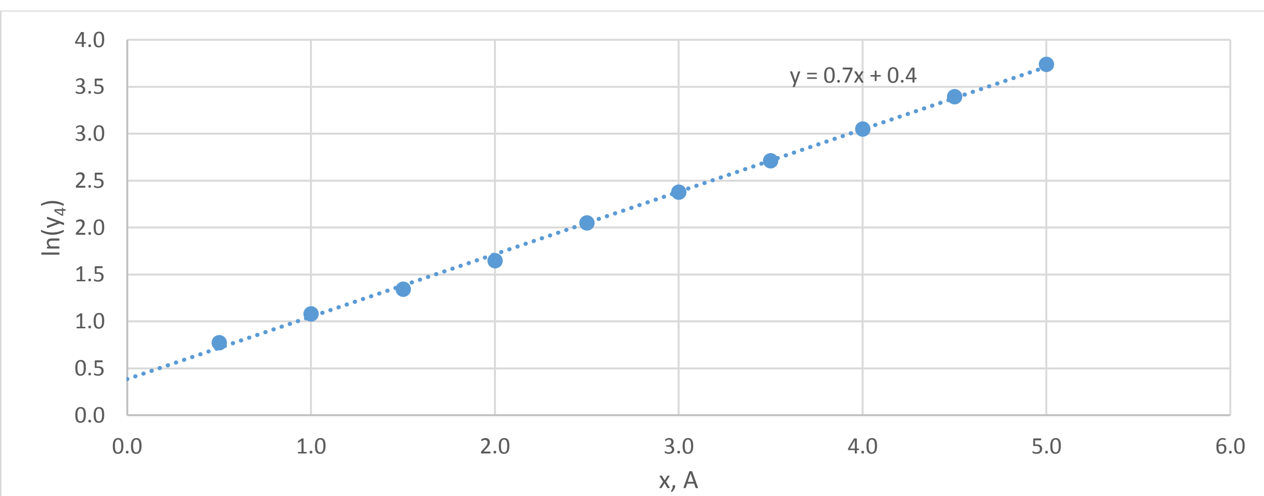
3) Atvērsim iekavas, iegūstot

$$\ln(y_4) = xln(a) + b\ \ \ln(a)$$

4) Iegūtajā vienādojumā aizvietosim $a' = \ln(a)$, $b' = b\ln(a)$, $y' = \ln(y_4)$, iegūstot

$$y' = a'x + b'$$

Aprēķināsim jaunās y' vērtības un uzzīmēsim grafiku.



Pievērsīsim uzmanību y' mērvienībām. Tā kā $y' = \ln(y)$ un y mērvienība ir V, tad y' mērvienība būs ln(V).

Autori: Daniels Krimans, Guntars Kitenbergs

$$a' = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = 0.7\frac{\ln(\mathrm{V})}{A}$$

Tā kā $a' = \ln(a)$, tad nezināmo koeficientu a var atrast kā $a = e^{a'}$ $(a\ m\bar{e}rvien\bar{\imath}ba\ ir\ V)$.

$$b' = krustpunkts\ ar\ y' asi = 0.4\ln(V)$$

Tā kā $b' = b\ln(a)$, tad $b = \frac{b\prime}{\ln(a)}$ (b nav mērvienības).

Piemērs. Apskatīsim piekto sakarību, kas teorētiski ir aprakstāma šādi:

$$y_5 = b\,x^a$$

Pārveidosim šo sakarību par taisnes vienādojumu. Lai to izdarītu, izmantosim logaritmu īpašības.

1) Sākumā logaritmēsim abas puses, iegūstot

$$\ln(y_5) = \ln(bx^a)$$

2) Izmantojot logaritmu īpašību $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, pārveidosim labo pusi, iegūstot

$$\ln(y_5) = \ln(b) + \ln(x^a)$$

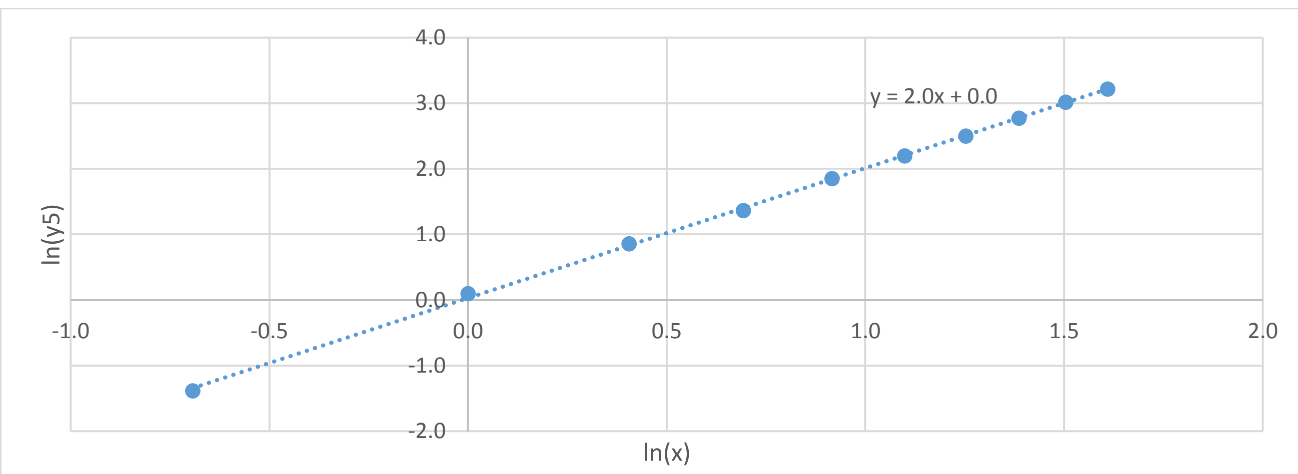
3) Izmantojot logaritmu īpašību $\ln(a^b) = b\ln(a)$ iegūsim

$$\ln(y_5) = \ln(b) + a\ln(x)$$

4) Iegūtajā vienādojumā aizvietosim $b' = \ln(b)$, $y' = \ln(y_5)$, $x' = \ln(x)$, iegūstot

$$y' = ax' + b'$$

Aprēķināsim jaunās y' un x' vērtības un uzzīmēsim grafiku.



Šajā piemērā y' mērvienībās ir ln(V), bet x' mērvienībās ir ln(A).

Autori: Daniels Krimans, Guntars Kitenbergs

Noteiksim koeficientus no šī grafika:

$$a = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = 2.0\frac{\ln(\mathrm{V})}{\ln(A)}$$

$$b' = krustpunkts\ ar\ y'asi = 0.0\ \ln(V)$$

Tā kā $b' = \ln(b)$, tad $b = e^{b'}$ (b mērvienības ir $\frac{V}{A}$).

Lai šajā gadījumā saprastu, kādas ir b un a mērvienības, apskatīsim doto sakarību:

$$y_5 = b\,x^a$$

Skaidrs, ka, ja x mēra A vienībās, tad x^a mērvienība arī būs A. Tā kā y_5 mērvienība ir V, tad no tā seko, ka b mērvienība jābūt $\frac{V}{A}$.

Piemērs. Apskatīsim sesto sakarību, kas teorētiski ir aprakstāma šādi:

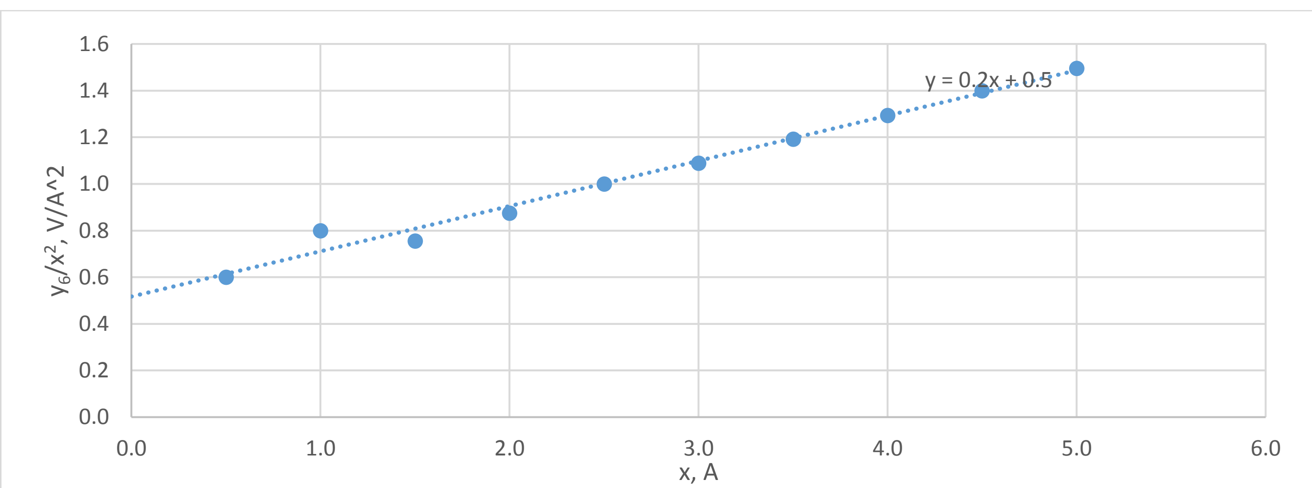
$$y_6 = ax^3 + bx^2$$

Pārveidosim šo funkciju par taisnes vienādojumu. Lai to izdarītu, dalīsim abas puses ar x^2, iegūstot sakarību:

$$\frac{y_6}{x^2} = ax + b$$

Apzīmēsim $y' = \frac{y6}{x^2}$, iegūstot $y' = ax + b$.

Uzzīmēsim attiecīgo grafiku:



Noteiksim koeficientus no šī grafika:

$$a = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = 0.2\frac{V}{\mathrm{A}^3}$$

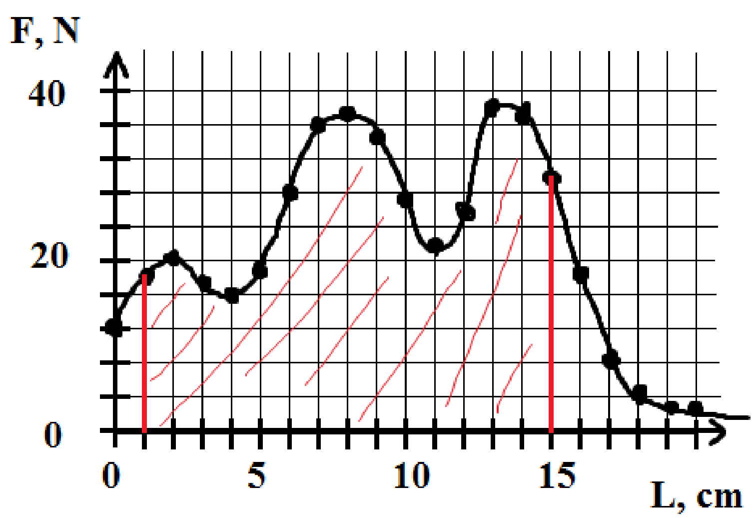
$$b = krustpunkts\ ar\ y'asi = \ 0.5\frac{V}{\mathrm{A}^2}$$

Vēl viens paņēmiens, ko var izmantot uzdevumos, kad tas ir nepieciešams – **integrēšana „pa rūtiņām"** . Piemēram, ja mums ir dots grafiks, kurā attēlota spēka atkarība no veiktā attāluma un mums jāaprēķina darbs, tad jāsaprot, ka darbs ir laukums zem šīs funkcijas (integrēšanas pamatjēdziens). Tā vietā, lai noteiktu šo laukumu matemātiski, kas bieži var būt ļoti komplicēti vai pat neiespējami, mēs varam saskaitīt rūtiņu skaitu, kas ir zem šī laukuma, aprēķināt vienas rūtiņas darbu, izmantojot doto mērogu un saskaitīt kopējo darbu.

Piemērs. Aprēķināt darbu pārvietojumam no L1 = 1cm līdz L2 = 15cm, ja eksperimentāli ir noteikta spēka funkcija no attāluma F(L).

$$W = \int_{L1}^{L2} F(L)\, dL$$

Darbs būs laukums zem funkcijas F(L) koordinātēs F(L). Tā kā mums nav dota šīs funkcijas teorētiskā sakarība ar L, tad var izmantot integrēšanu „pa rūtiņām".



Saskaitīsim aptuveno rūtiņu skaitu vajadzīgajā apgabalā zem funkcijas. $N \sim 95\ rūtiņas$.

Katras rūtiņas darbs

$$W_1 = F_1 L_1 = 4N \cdot 0.01m = 4J$$

Kopējais darbs

$$W = W_1 \cdot N = 4 \cdot 95 = 380J$$

Autori: Daniels Krimans, Guntars Kitenbergs