Lukas Welte
Dr. C. Dick
Seminar: How to make a PIXAR movie
24. Januar 2013

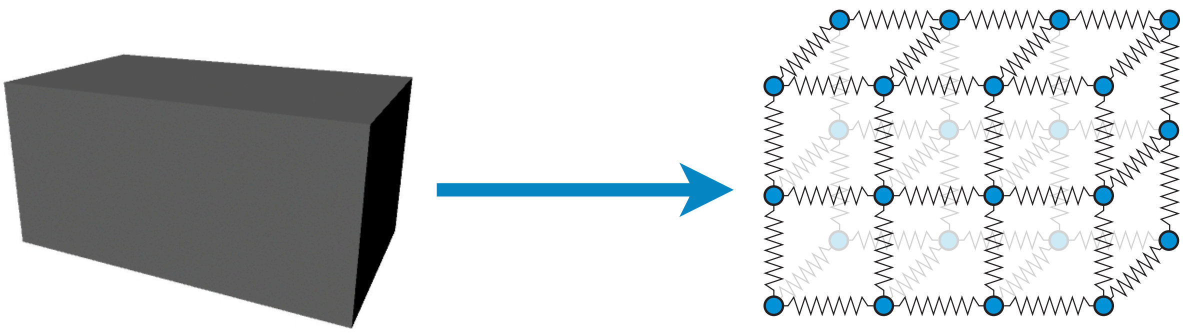
DEFORMABLE BODIES

1. Einleitung

In unserer Welt existieren keine Festkörper, sie besteht vollkommen aus deformierbaren Körpern. Bei der Animation von Filmen spielt dies eine entscheidende Rolle, da es einen nahezu unaufbringbaren Aufwand darstellt physikalisch bedingte Bewegung per Hand zu animieren. Genau hier greifen die deformierbaren Körper, denn mit ihnen können diese Bewegungen einfach simuliert werden und erzeugen so einfach realitätsnahe Animationen. Anklang findet das vor allem in der Kleidungs-, sowie der Haar und Fell Simulation. Genauso betrifft es aber Crashsimulationen und viele weitere Bereiche.

2. Feder Masse System

Die einfachste Art einen deformierbaren Körper zu repräsentieren ist, durch das Benutzen eines Feder Masse Systems. Hierbei wird ein Körper in einzelne Massenpunkte unterteilt, die untereinander mit Federn verbunden sind, wie in folgender Abbildung vereinfacht dargestellt wird.



Hierbei sind die Federn um die Massenpunkte frei beweglich, sozusagen nicht im Massenpunkt verankert, wodurch Scherkräfte von der Feder nicht aufgenommen werden. Um bei einer realitätsnahen Animation zu bleiben, müssen deswegen zusätzlich Federn eingebaut werden die jene Scherkräfte in sich speichern. Tetraeder stellen zum Beispiel Körper dar, deren Grundform schon genug Federn beinhaltet um nicht kollabieren zu können. Oft wird deshalb ein Objekt in viele Tetraeder unterteilt, um ein stabiles Masse Feder System zu erlangen. Jede Feder kann in einem Feder Masse System eine spezifische Federkonstante erhalten, wodurch verschiedenste Materialen simuliert werden können.

2.1. Physikalische Grundlagen

2.1.1. Kraft auf einen Partikel bei einer Feder

Um die aktuelle Position eines Massenpunktes berechnen zu können müssen wir die Kraft jeder Feder berechnen. Diese wird durch das Hooksche Gesetz beschrieben:

$$F = D \cdot \Delta L \cdot \frac{L}{\| L \|}$$

Hierbei ist D die Federkonstante, ΔL die Differenz zwischen der Ruhelänge und der aktuellen Länge der Feder und $\frac{L}{\| L \|}$ der Richtungsvektor, durch welchen die Kraft in Federrichtung wirkt.

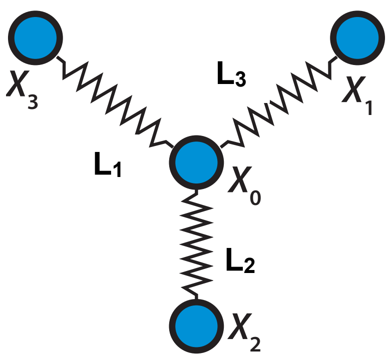
Daraus folgt, um die Federkraft für einen Partikel 0 in einer Feder zu berechnen, folgende Formel:

$$F_{0,1} = D_{0,1} \cdot (\left\| X_1 - X_0 \right\| - L_{0,1}) \cdot \frac{X_1 - X_0}{\left\| X_1 - X_0 \right\|}$$

Hierbei sind 0 sowie 1 die Massenpunkte und X der Ortsvektor des jeweiligen Partikels.

2.1.2. Interne Kraft auf einen Partikel

Da ein Feder Masse System nicht nur aus einer Feder bestimmt wird reicht es nicht, nur die Kraft einer einzelnen Feder zu berechnen. Um die intern wirkende Kraft auf einen Partikel berechnen zu können, müssen alle an ihn angebundenen Federn berücksichtigt werden. Das ist relativ trivial da die Federkräfte, die die benachbarten Partikel auf ihn ausüben, schlicht summiert werden.



Bei einem Feder Masse System wie in obiger Abbildung dargestellt würde dies folgendermaßen Aussehen:

$$F_0 = \sum_{i \in N} D_{0,i} \cdot (\left\| X_i - X_0 \right\| - L_{0,i}) \cdot \frac{X_i - X_0}{\left\| X_i - X_0 \right\|}$$

Hierbei ist N die Menge aller benachbarten Partikel, im obigen Fall $1,2,3$. Die Formel innerhalb der Summe bestimmt die Federkraft die vom benachbarten Punkt i auf den Punkt 0 wirkt.

2.1.3. Gesamtkraft auf einen Partikel

Zusätzlich zu den inneren Kräften wirken auf einen Partikel äußere Kräfte, wie die Gravitationskraft. Um die wirkende Kraft auf einen Partikel vollständig bestimmen zu können, müssen jegliche externen Kräfte mit einbezogen werden. Externe Kräfte können zum Beispiel Wind, Kollisionen mit einem anderen Objekt oder auch die Gravitation sein. Die Gesamtkraft auf einen Partikel wird bestimmt durch die Summe der internen Kraft, wie im vorherigen Punkt beschrieben, und der externen Kraft.

$$F_p = F_{äußereKräfte} + \sum_{i \in N} D_{p,i} \cdot (\left\| X_i - X_p \right\| - L_{p,i}) \cdot \frac{X_i - X_p}{\left\| X_i - X_p \right\|}$$

Hierbei ist p der Partikel für welchen die Kraft bestimmt werden soll und N die Menge aller benachbarten Partikel von p . Der zweite Summand stellt die interne Kraft auf den Punkt p dar.

2.1.4. Position eines Partikels

Um ein Objekt simulieren zu können, muss die Position jedes Partikels bekannt sein, um ihn auf den Bildschirm zu zeichnen. Die Position ist ableitbar aus dem zweiten Newtonschen Gesetz:

$$F = m \cdot a$$

Durch das vernachlässigen der Reibung würde das Feder Masse System im aktuellen Stand, einmal angestossen, nie aufhören zu schwingen. Um dem entgegenzuwirken wird von der resultierenden Kraft eine Dämpfkraft abgezogen:

$$F - D \cdot v = m \cdot a$$

Hierbei ist D die Dämpfkonstante und v die Geschwindigkeit des Partikels.

Um die Position zu erhalten muss diese Formel nur umgeformt werden, mit dem Wissen, dass die erste Ableitung der Position die Geschwindigkeit und die zweite Ableitung der Position die Beschleunigung ist. Unter Anbetracht dieser Tatsache lässt sich obige Formel folgendermaßen darstellen:

$$F - D \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$

x ist der Ortsvektor des Partikels.

Wenn man diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in höhere Ordnung konvertiert, entstehen zwei Formeln:

$$\dot{x}(t) = v(t) \qquad \dot{v}(t) = \frac{F(t) - D \cdot v(t)}{m}$$

Die Position eines Partikels muss zu jedem Zeitpunkt bekannt sein. Durch Integration über die Zeit erhält man folgende Formeln für die Position und die Geschwindigkeit eines Partikels:

$$x(t+h) = x + \int_t^{t+h} v(t) \qquad v(t+h) = v + \int_t^{t+h} \frac{F(t) - D \cdot v(t)}{m}$$

Hierbei ist t der aktuelle Zeitschritt und h die Schrittweite zum nächsten Zeitschritt.

3. Numerische Integration

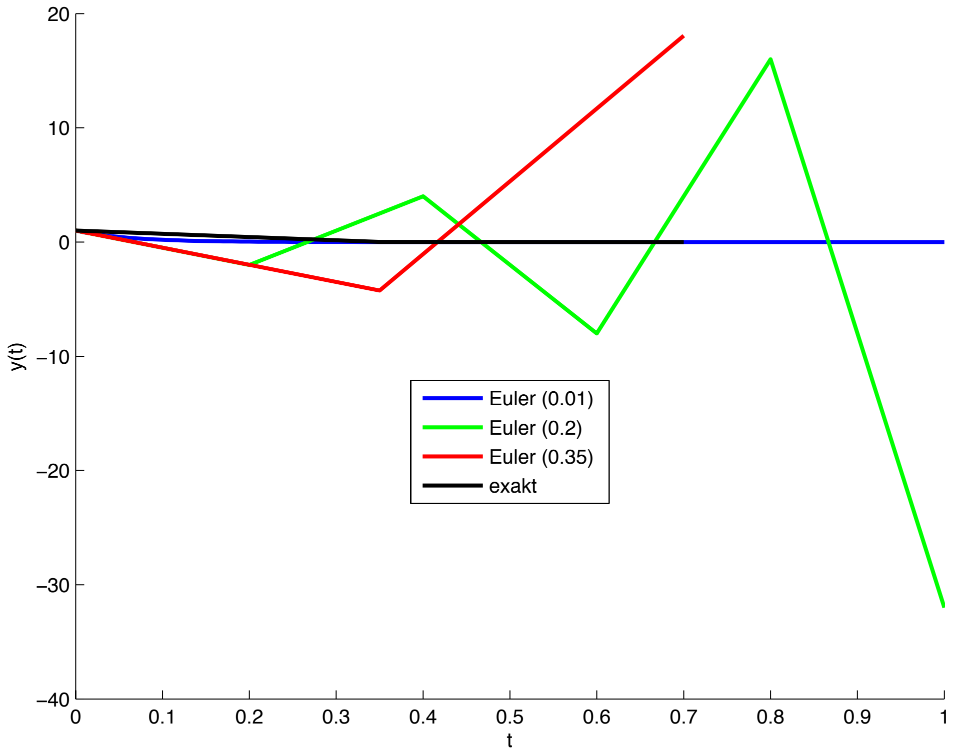
Die Position und Geschwindigkeit kann nun approximiert werden. Hierfür gibt es verschieden Verfahren, sogenannte Numerische Integrationsverfahren. Diese approximieren Werte Schritt für Schritt. Das einfachste dieser Verfahren ist das explizite Euler Verfahren.

$$y(t+h) = y(t) + h\ \dot{y}(t)$$

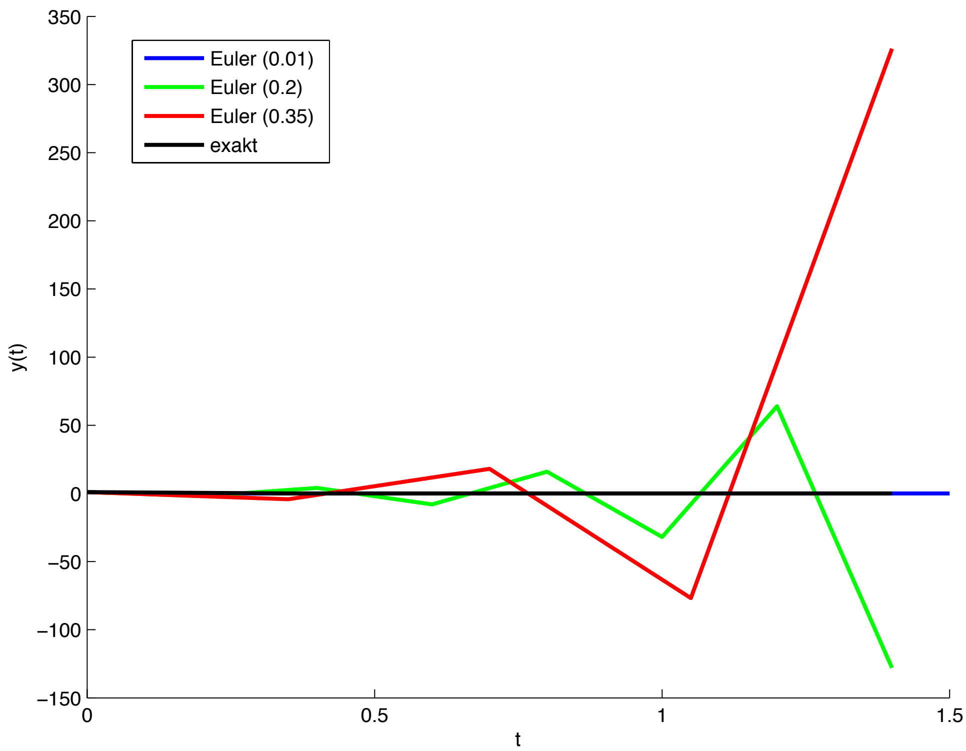
Hierbei ist h die Schrittweite und t der aktuelle Zeitpunkt. Unter Anwendung des expliziten Euler auf die Formeln für die Position und Geschwindigkeit eines Partikels erhält man folgende Gleichungen:

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot v(t) \qquad v(t+h) = v(t) + h \cdot \frac{F(t) - D \cdot v(t)}{m}$$

Hiermit ist es nun möglich einen deformierbaren Körper Schritt für Schritt zu simulieren. Das explizite Euler Verfahren bietet durch diese simple Approximation einen geringen Rechenaufwand und sie lässt sich dank der resultierenden einfachen Formeln leicht implementieren. Die Approximation rein auf Basis der Steigung im aktuellen Punkt bringt mit sich, dass die Genauigkeit des Verfahrens stark vom gewählten Zeitschritt h abhängt.



In obigem Graph ist gut zu sehen, wie ein geringer Zeitschritt (0,01s) die tatsächlichen Werte nahezu perfekt approximiert. Mit wachsendem Zeitschritt wird dieser Fehler aber schnell größer. Das explizite Euler Verfahren ist numerisch Instabil, was bedeutet das die approximierten Werte explodieren, wie in folgender Grafik bei einer Schrittweite von 0,035s zu erkennen ist.



4. Implementierung

Der Prinzipielle Ablauf bei der Simulation eines deformierbaren Körpers besteht aus der Berechnung der Kraft auf den Partikel und der darauffolgenden Positionsbestimmung des Partikels. Dies erfolgt pro Zeitschritt für jeden Partikel des Körpers. In Pseudo-Code könnte eine Implementierung eines deformierbaren Körpers folgendermaßen Aussehen.

```
while (1)

        foreach point p         //Berechnung der Kraft auf jeden Partikel

                F[p] += gravity;

                F[p] += -DEFAULT_DAMPING * V[p];

                foreach neighbour n

                        F[p] += getSpringForceOfPoint(p,n);


        foreach point p         //Explizites Eulerverfahren

                X[p]  += h * V[p];

                V[p] += h * F[p] / m;
```

5. Finite Elemente Methode

Feder Masse Systeme sind zwar physikalisch basiert aber nicht physikalisch korrekt. Dies liegt daran, dass die Materialeigenschaften des Körpers mittels verschiedener Feder- und Dämpfkonstanten nur approximiert werden, aber nunmal nicht mit Materialeigenschaften gerechnet wird. Die Finite Elemente Methode ist eine Alternative zu den Feder Masse Systemen. Bei dieser Methode wird der Körper durch Finite Elemente, meist Tetraeder, diskretisiert. Im Gegensatz zu den Feder Masse Systemen arbeitet die Finite Elemente Methode mit Materialeigenschaften und ist somit physikalisch korrekt. Durch die physikalische Korrektheit wird dieses Verfahren vor allem zur Simulation von Unfällen oder zu Materialsimulationen verwendet. Es erfordert einen enorm hohen Rechenaufwand und ist deswegen, im Gegensatz zu den Feder Masse Systemen, nicht echtzeitfähig.

6. Zusammenfassung

Für die Verwendung von deformierbaren Körpern zu rein optischen Zwecken eignen sich Feder Masse Systeme optimal, da sie dank dem geringen Rechenaufwand echtzeitfähig sind. Das simple Verfahren ermöglicht eine einfache und schnelle Implementierung. In den Fällen, in welchen es auf absolute physikalische Korrektheit ankommt, sollten die Finite Elemente Methode den Feder Masse Systemen vorgezogen werden. Mit dieser Methode ist es zwar im aktuellen Stand der Technik noch nicht möglich in Echtzeit die Simulation durchzuführen, dafür liefert die Methode aber physikalisch korrekte Werte.

Bibliografie

1. Weber, K. *Interaktive Echtzeitsimulation deformierbarer Oberflächen für Trainingssysteme in der Augenchirurgie*. 2009; Available from: https://ub-madoc.bib.uni-mannheim.de/2816.

2. Zachmann, G. *Virtuelle Realität Feder-Masse-Systeme*. 2011; Available from: http://zach.in.tu-clausthal.de/teaching/vr_0910/folien/16-mass-spring-systems.pdf.

3. Diziol, R. *Simulation inkompressibler deformierbarer Körper*. 2012; Available from: http://i33www.ibds.uni-karlsruhe.de/papers/FinalDissertationRaphaelDiziol.pdf.