1. Numpy

1.1 Dla dowolnego wektora liczb wyznacz (najlepiej wylosować 30 liczb z rozkładu jednostajnego z przedziału [-4, 4]):

A. liczbę elementów dodatnich,
B. Wszystkie wartości ze zbioru [-2,-1] i [1,2],
C. Wypisz na ekran liczbę wszystkich wartości nieujemnych,
D. Wyznacz średnią arytmetyczna wartości bezwzględnych elementów,
E. sumę elementów, które po zaokrągleniu są podzielne przez 3 - policz zarówno sumę elementów przed jak i po zaokrągleniu,
F. Wyznacz wartość najbliższą i najdalsza od 0 (zachowując jej znak),
G. Wyznacz wartość najbliższą i najdalszą od 2 (zachowując jej znak),
H. Wypisz na ekran część ułamkową wszystkich elementów,
I. odległość każdego z elementów od liczby 8
J. jego postać znormalizowaną - minimum przechodzi na -1, maks na 1, a pozostałe elementy mają zostać liniowo przeskalowane według poniższego wzoru, gdzie min, max to ekstrema wektora, a new max/min to docelowy zakres - w naszym przypadku -1 oraz 1

   $$x' = \frac{x - \text{min}}{\text{max} - \text{min}} \cdot (new_{\text{max}} - new_{\text{min}}) + new_{\text{min}}$$

K. średnią wartość kwadratów liczb większych od 5 lub mniejszych od 2
L. wektor napisów składający się z dwóch wartości: "nieparzysta" oraz "parzysta" w zależności od tego czy dany element jest parzysty lub nie
M. Utworz wektor napisów y o długości takiej samej, jaką ma x, dla ktorego yi przyjmuje wartosc 'nieujemna', jesli xi jest nieujemne oraz 'ujemna' w przeciwnym przypadku,
N. jego średnią (nie używając funkcji mean()),
O. jego wariancję (nie używając funkcji var oraz sd),
P. jego minimum i maksimum,ale nie używając funkcji min i max (rozwiązanie nie musi być optymalne)

Q. Utwórz wektor liczbowy y o dlugosci takiej samej, jaką ma x, dla którego yi przyjmuje wartość k+0.5 wtedy i tylko wtedy, gdy xi należy do [k, k+1), gdzie k to liczba całkowita (prosty histogram).

1.2 Dla dwóch wektorów równej długości x i y oblicz ich korelację ze wzoru:

A. $$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

B. $$r = r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}\ \sqrt{(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2)}}.$$

C. $$r = r_{xy} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\ \sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}.$$

Sprawdź wyniki dla następujących par wektorów:
x = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] i y = [10,9,8,7,6,5,4,3,2,1]
x = losowa próbka ze standardowego rozkładu normalnego, y = 5*x+2
x = losowa próbka ze standardowego rozkładu normalnego, y = losowa próbka ze standardowego rozkładu normalnego

1.3 Dla danego wektora liczbowego x o nieparzystej długości n i wartości k <= (n−1)/2 wyznacz tzw. średnią k-winsorowską, tj. średnią arytmetyczną z podwektora x, w którym k najmniejszych i k największych elementów zostaje zastąpionych przez, odpowiednio, (k + 1)-szą wartość najmniejszą i największą.

1.4 Napisz funkcję factorial_stirling(), która zwraca przybliżoną wartość silni według wzoru Stirlinga: $n! \simeq (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$

1.5 Korzystając ze wzoru Leibniza $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$ oblicz przybliżoną wartość liczby pi dla 1 000, 10 000 i 100 000 początkowych wyrazów i porównaj uzyskane liczby z wartością R-owej stałej `pi`.

1.6 Podana wyżej metoda nie jest jedyną na przybliżanie liczby pi. Skorzystamy teraz z metody Monte Carlo, której algorytm wygląda następująco:

1. Wylosuj n punktów z dwuwymiarowej przestrzeni [-1,1] x [-1,1]
2. Sprawdź ile punktów jest oddalonych od punktu (0,0) o mniej niż 1
3. Podziel tę liczbę przez n i przemnóż przez 4

Do losowania punktów użyj funkcji np.random.uniform (sprawdź w dokumentacji jak)

1.7 Dla danego wektora liczbowego zawierającego braki danych (`NA`) należy uzupełnić je średnią wartością pozostałych, poprawnych wartości.

1.8 Wypisz w postaci wektora dziesięć pierwszych liczb rozwinięcia dziesiętnego liczby pi (korzystając ze stałej R-owej `pi`)
Wynik powinien być następujący:
[3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5]

1.9 [Matplotlib] Napisz samodzielnie funkcję regresja(), która policzy współczynniki α, β w modelu prostej regresji liniowej, tj.y = α + βx. Funkcja na wejściu przyjmuje dwa wektory liczbowe x, y.

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x}$$

1.10 Dla dowolnej macierzy odwróć kolejność jej wierszy

1.11 Dla dowolnej macierzy odwróć kolejność jej kolumn

1.12 Prawą macierzą stochastyczną nazywamy macierz kwadratową, której elementami są nieujemne liczby rzeczywiste i~w~której każdy wiersz sumuje się do jedynki. Przykładem prawej macierzy stochastycznej jest macierz:

R =
0.5 & 0.3 & 0.2 \\
0.2 & 0.8 & 0 \\
0.3 & 0.3 & 0.4

Napisz funkcję doStochastycznej(), która przyjmuje kwadratową macierz (niekoniecznie prawą stochastyczną) i~wykonuje następujące czynności:

1. Sprawdza, czy wszystkie elementy są nieujemne
2. Sprawdza, czy w każdym wierszu jest co najmniej jeden element większy od zera,
3. Tworzy nową macierz na bazie wejściowej macierzy, w której wiersze są ,,unormowane'', czyli sumują się do jedynki. Dla przykładu, dla następującego wiersza: 5, 3, 2, w macierzy zwracanej ten wierszy powinien wyglądać tak: 0.5, 0.3, 0.2.

1.13

Dana jest macierz $P \geqslant 0$ rozmiaru $n \times m$ taka, że $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{i,j} = 1$ oraz posortowane rosnąco wektory liczbowe $\mathtt{x}$ (n-elementowy) i $\mathtt{y}$ (m-elementowy). Trójka $(\mathtt{x}, \mathtt{y}, P)$ opisuje rozkład prawdopodobieństwa pewnej dwuwymiarowej zmiennej losowej dyskretnej (X, Y), tak jak w poniższym podzadaniu.

W pewnej szkole rozkład prawdopodobieństwa uzyskania ocen z Filozofii Bytu i Wychowania Fizycznego przez tego samego studenta przedstawia się następująco.

		WF			
		2	*3*	*4*	*5*
FB	*2*	*0*	*0,01*	*0,1*	*0,2*
	3	*0,01*	*0,05*	*0,03*	*0,1*
	4	*0,1*	*0,03*	*0,05*	*0,01*
	5	*0,2*	*0,1*	*0,01*	*0*

a) Zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego i, j zachodzi $p_{i,j} = (\sum_{k=1}^{n} p_{k,j})(\sum_{l=1}^{m} p_{i,l})$. Napisz funkcję `niezaleznosc()`, która sprawdza, czy zachodzi ta własność dla danych $(\mathtt{x}, \mathtt{y}, P)$ (zwracamy wartość logiczną).
b) Ponadto napisz funkcję `podststat()`, która dla $(\mathtt{x}, \mathtt{y}, P)$ zwróci wektor liczbowy (z ustawionym atrybutem `names` – dowolne, lecz czytelne dla użytkownika etykiety) zawierający wartości podstawowych charakterystyk (X, Y):

- Wartości oczekiwane: $\mathbb{E}\,X = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{i,j}$, $\mathbb{E}\,Y = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}$,
- Wariancje: $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\,X^2 - (\mathbb{E}\,X)^2$, gdzie $\mathbb{E}\,X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{m} p_{i,j}$ oraz $\operatorname{Var} Y = \mathbb{E}\,Y^2 - (\mathbb{E}\,Y)^2$, gdzie $\mathbb{E}\,X^2 = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}$,
- Kowariancję: $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}\,X\,\mathbb{E}\,Y$ dla $\mathbb{E}\,(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{i,j}$,
- Współczynnik korelacji: $\varrho(X, Y) = \operatorname{Cov}(X, Y)/\sqrt{\operatorname{Var} X \operatorname{Var} Y}$.