Matematyka

notatki z wykładu

Łukasz Kusek

Wyższa Szkoła Oficerska Sił Powietrznych w Dęblinie

Wersja robocza z dnia 4 stycznia 2014

Kontakt:
tel. +48 509 955 365

Spis treści

Wstęp

Rozdział 1

Relacje

Definicja 1.0.1. *Przez* **parę uporządkowaną** (a, b) *rozumieć będziemy zbiór pewnych podzbiorów zbioru* $\{a, b\}$*, a mianowicie:*

$$(a, b) \quad = \quad \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

[7, Definicja 1.1.1]

Definicja 1.0.2. Iloczynem kartezjańskim *zbiorów* A *i* B *nazywamy* ***zbiór wszystkich par uporządkowanych*** (a, b)*, takich, że*

- $a \in A$,
- $b \in B$

i oznaczmy symbolem

$$A \times B \quad = \quad \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}$$

[7, Definicja 1.1.3]

1.1 Relacja

Definicja 1.1.1. **Relacją** *$\mathcal{R}$ określoną w zbiorach A i B (zachodzącą między elementami zbiorów A i B) nazywamy* ***trójkę uporządkowaną*** *(Def. 1.0.1, str. 1)*

$$(A, gr\mathcal{R}, B)$$

gdzie

- *$gr\mathcal{R}$ jest* ***podzbiorem iloczynu kartezjańskiego*** *$A \times B$.*

[7, Definicja 1.2.1]

Definicja 1.1.2. *Niech*

- *$a \in A$,*
- *$b \in B$.*

Mówimy, że element a **pozsotaje w relacji** *$\mathcal{R}$ z elementem b ($a\mathcal{R}b$), wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a\mathcal{R}b \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in gr\mathcal{R}$$

[7, Definicja 1.2.2]

Definicja 1.1.3. **Dziedziną relacji** *($\mathrm{D}\mathcal{R}$)*

$$\mathcal{R} = (A,\ gr\mathcal{R},\ B)$$

nazywamy ***podzbiór zbioru*** *A, określony następująco:*

$$\mathrm{D}\mathcal{R} = \{a \in A\colon\ \exists_{b \in B} \quad a\mathcal{R}b\}$$

[7, Definicja 1.2.3]

Definicja 1.1.4. Przeciwdziedziną relacji *($\sqsupset\mathcal{R}$)*

$$\mathcal{R} \;=\; (A,\; gr\mathcal{R},\; B)$$

nazywamy ***podzbiór zbioru*** *B, określony następująco:*

$$\sqsupset\mathcal{R} \;=\; \{b \in B\colon\; \exists_{a \in A} \quad a\mathcal{R}b\}$$

[7, Definicja 1.2.4]

Definicja 1.1.5. *Dana jest relacja*

$$\mathcal{R} \;=\; (A,\; gr\mathcal{R},\; B)$$

Relacją *do niej* **odwrotną** *nazywamy relację*

$$\mathcal{R}^{-1} \;=\; \big(B,\; gr\mathcal{R}^{-1},\; A\big)$$

gdzie

$$gr\mathcal{R}^{-1} \;=\; \{(b,a) \;\in\; B \times A\colon \quad (a,b) \;\in\; gr\mathcal{R} \;\subset\; A \times B\}$$

[7, Definicja 1.2.5]

Definicja 1.1.6. Relację

$$\mathcal{R} \;=\; (A,\; gr\mathcal{R},\; B)$$

nazywamy **wszędzie określoną***, jeżeli*

$$\sqsubset\mathcal{R} \;=\; A$$

czyli

$$\forall\, a \in A \quad \exists b \;\in B\colon \qquad (a,b) \;\in\; gr\mathcal{R}$$

[7, Definicja 1.2.16]

Definicja 1.1.7. Relację

$$\mathcal{R} \;=\; (A,\, gr\mathcal{R},\, B)$$

nazywamy **surjektywną**, *jeżeli*

$$\reflectbox{D}\mathcal{R} \;=\; B$$

czyli

$$\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A\colon \qquad (a, b) \;\in\; gr\mathcal{R}$$

[7, Definicja 1.2.17]

Definicja 1.1.8. Relację

$$\mathcal{R} \;=\; (A,\, gr\mathcal{R},\, B)$$

nazywamy **injektywną** *(różnowartościową), jeżeli*

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad \forall\, b \in B\colon$$

$$(a_1, b) \in gr\mathcal{R} \;\wedge\; (a_2, b) \in gr\mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2$$

[7, Definicja 1.2.18]

Definicja 1.1.9. Relację $\mathcal{R}$ *nazywamy* **bijektywną**, *jeżeli jest*

- ***suriektywna***
- *i* ***injektywna***.

1.2 Funkcja

Definicja 1.2.1. *Relację*

$$\mathcal{R} \;=\; (A,\; gr\mathcal{R},\; B)$$

nazywamy **funkcją**, *jeżeli*

$\forall\, a \in A \quad \forall\, b_1, b_2 \in B:$

$$(a, b_1) \in gr\mathcal{R} \;\wedge\; (a, b_2) \in gr\mathcal{R} \quad\Rightarrow\quad b_1 = b_2$$

[7, Definicja 1.2.20]

Twierdzenie 1.2.1. *Relacja* ***odwrotna*** *(Def. 1.1.5, str. 3) do relacji* ***injektywnej*** *(Def. 1.1.8, str. 4) jest* ***funkcją****.*

1.3 Odwzorowanie

Definicja 1.3.1. ***Funkcję***

$$\mathcal{R} \;=\; (A,\; gr\mathcal{R},\; B)$$

wszędzie określoną *(Def. 1.1.6, str. 3) nazywamy* **odwzorowaniem** *i oznaczmy*

$$\mathcal{R}\colon\; A \to B$$

[7, Definicja 1.2.21] [10, Rozdział V]

1.4 Funkcje. Odwzorowania

Niech będą dane

- zbiór X
- zbiór Y

- relacja (Def. 1.1.1, str. 2)

$$f \;=\; (X,\, gr\, f,\, Y)$$

W przypadku gdy ***relacja*** f jest ***funkcją*** (Def. 1.2.1, str. 5) lub ***odwzorowaniem*** (Def. 1.3.1, str. 5), zamiast mówić

$$x \text{ pozostaje w relacji } f \text{ z } y$$

mówimy:

- x-owi odpowiada y,
- x przechodzi w y,
- x odwzorowuje się w y,
- y jest wartością f w x, co zapisujemy

  $$y = f(x)$$

  lub

  $$x \to y = f(x)$$

Zapis $f \;=\; (X,\, gr\, f,\, Y)$, jeśli jest

- **odwzorowaniem** zapisujemy przez

  $$f\colon\; X \ni x \to y \quad = \quad f(x) \in Y$$

  lub krótko

  $$f\colon\; X \to Y$$

  i czytamy f *odworowuje zbiór* X *w zbiór* Y

- **funkcją** to piszemy

  $$f\colon\; X \supset \mathcal{D}f \ni x \to y \quad = \quad f(x) \in Y$$

  lub krótko

  $$f\colon\; X \supset \mathcal{D}f \to Y$$

  i czytamy f *odwzorowuje swoją dziedzinę zawartą w zbiorze* X *w zbiór* Y

Jeżeli $x \to y = f(x)$ to

- element y nazywamy
  - ***obrazem*** elementu x poprzez funkcję (odwzorowanie) f
  - ***wartością*** funkcji (odwzorowania) f w punkcie x
- element x nazywamy
  - ***przeciwobrazem*** elementu y poprzez funkcję (odwzorowanie) f
  - ***argumentem*** funkcji (odwzorowania) f

1.4.1 Dziedzina. Przeciwdziedzina

Zgodnie z definicją ***dziedziny relacji*** (Def. 1.1.3, str. 2) otrzymujemy

$$\mathrm{D} f \;=\; \{x \in X\colon \quad \exists_{y \in Y} \quad y \;=\; f(x)\}$$

jak również zgodnie z definicją ***przeciwdziedziny relacji*** (Def. 1.1.4, str. 3) otrzymujemy

$$\reflectbox{D} f \;=\; \{y \in Y\colon \quad \exists_{x \in X} \quad y \;=\; f(x)\}$$

W przypadku

- ***odwzorowania***

$$\mathrm{D} f \;=\; X$$

  wówczas zbiór X nazywamy ***zbiorem argumentów***

- ***funkcji*** na ogół (gdy nie jest odwzorowaniem)

$$\mathrm{D} f \;\neq\; X, \qquad \mathrm{D} f \;\subset\; X$$

  wówczas zbiór X nazywamy ***naddziedziną funkcji***.

Zbiór Y nazywamy ***zapasem*** funkcji (odwzorowania).

[7, Definicja 1.3.1]

1.4.2 Wykres

Definicja 1.4.1. **Wykresem** *funkcji (odwzorowania) f jest zbiór*

$$gr\, f \;=\; \{(x, y) \;\in\; X \times Y : \quad x \to y \;=\; f(x)\}$$

[7, Definicja 1.3.2]

1.4.3 Surjekcja. Injekcja. Bijekcja

Definicja 1.4.2. ***Funkcję (odwzorowanie)*** *nazywamy* **surjekcją**

$$\textit{zbioru}\ \ \mathrm{D} f \subset X \ \ \textit{na}\ Y,$$

jeżeli

$$f \textit{ jest relacją surjektywną (Def. 1.1.7, str. 4).}$$

[7, Definicja 1.3.2]

Definicja 1.4.3. ***Funkcję (odwzorowanie)*** *nazywamy* **injekcją**

$$\textit{zbioru}\ \ \mathrm{D} f \subset X \ \ \textit{w}\ Y,$$

jeżeli

$$f \textit{ jest relacją injektywną (Def. 1.1.8, str. 4).}$$

[7, Definicja 1.3.2]

Definicja 1.4.4. ***Odwzorowanie*** *jest* **bijekcją**

$$\textit{zbioru}\ X\ \textit{na}\ Y,$$

jeżeli jest ***równocześnie***

- *surjekcją*
- *i injekcją.*

[7, Definicja 1.3.2]

1.4.4 Obraz zbioru. Przeciwobraz zbioru

Definicja 1.4.5. Obrazem zbioru A *poprzez funkcję (odwzorowanie)*

$$f\colon\ X \supset \mathcal{D}f \ \to\ Y$$

nazywamy zbiór

$$f[A] \ = \ \{y \in Y: \quad \exists_{x \in A} \quad x \ \to \ y \ = \ f(x)\}$$

[7, Definicja 1.3.3]

Definicja 1.4.6. Przeciwobrazem zbioru B *poprzez funkcję (odwzorowanie)*

$$f\colon\ X \supset \mathcal{D}f \ \to\ Y$$

nazywamy zbiór

$$f^{-1}[B] \ = \ \{x \in X: \quad \exists_{y \in B} \quad x \ \to \ y \ = \ f(x)\}$$

[7, Definicja 1.3.3]

Rozdział 2

Struktury algebraiczne

Literatura do tego działu: [1] - 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1
Zadania do tego działu: [1] - 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1

Definicja 2.0.7. Działaniem wewnętrznym *(lub krótko* **działaniem***) w zbiorze A nazywamy dowolne odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5) produktu kartezjańskiego (Def. 1.0.2, str. 1)*

$$A \times A \text{ w zbiór } A.$$

[1, Definicja 3, rozdział 1.1.1]

Definicja 2.0.8. *Mówimy, że działanie $\circ$ w zbiorze A jest* **przemienne***, jeśli*

$$\forall\, a, b \in A: \qquad a \circ b \;=\; b \circ a$$

[1, Definicja 5, rozdział 1.1.2]

Definicja 2.0.9. *Mówimy, że działanie $\circ$ w zbiorze A jest* **łączne***, jeśli*

$$\forall a, b, c \in A: \qquad (a \circ b) \circ c \;=\; a \circ (b \circ c)$$

[1, Definicja 6, rozdział 1.1.2]

Definicja 2.0.10. *Mówimy, że element $e \in A$ jest* **elementem neutralnym** *działania $\circ$ określonego w A, jeśli*

$$\forall a \in A: \qquad a \circ e \;=\; e \circ a \;=\; a$$

Element neutralny w notacji

- *multiplikatywnej nazywa się elementem jednostkowym lub* **jedynką** *i oznacza się go często symbolem* $\mathbf{1}$.
- *addytywnej nazywamy* **zerem** *i oznaczamy go symbolem* $\mathbf{0}$.

[1, Definicja 7, rozdział 1.1.2]

Definicja 2.0.11. *Niech*

- *działanie $\circ$ w zbiorze A* ***ma element neutralny*** *e*
- $a \in A$.

Każdy element $b \in A$ spełniający równość

$$a \circ b \;=\; b \circ a \;=\; e$$

nazywamy **elementem odwrotnym do** *a.*

Jeśli istnieje ***dokładnie jeden*** *element odwrotny do a, to oznaczamy go symbolem a^{-1}.*

W notacji addytywnej element odwrotny do a nazywamy ***elementem przeciwnym*** *do a i zamiast a^{-1} piszemy $-a$.*

[1, Definicja 8, rozdział 1.1.2]

Definicja 2.0.12. *Niech w zbiorze A określone będą działania $\odot$ oraz $\oplus$.*

Mówimy, że działanie $\odot$ jest **rozdzielne** *względem działania $\oplus$, jeśli*

$$\forall\, a, b, c \in A: \qquad a \odot (b \oplus c) \;=\; (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

oraz

$$\forall\, a, b, c \in A: \qquad (a \oplus b) \odot c \;=\; (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$

[1, Definicja 9, rozdział 1.1.2]

Definicja 2.0.13. *Niech A i F będą dowolnymi zbiorami niepustymi.*

Działaniem zewnętrznym *w zbiorze A nazywamy dowolne odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5) produktu kartezjańskiego (Def. 1.0.2, str. 1)*

$$F \times A \text{ w zbiór } A.$$

Zbiór F nazywamy zbiorem operatorów*.*

[1, Definicja 10, rozdział 1.1.3].

Definicja 2.0.14. Strukturą algebraiczną *określoną na zbiorze A nazywamy zespół*

$$(A; \quad F_1, \ldots, F_m; \quad \circ_1, \ldots, \circ_n; \quad \bullet_1, \ldots, \bullet_m),$$

gdzie

$F1, \ldots, F_m$	*są zbiorami,*
$\circ_1, \ldots, \circ_n$	*są działaniami wewnętrznymi (Def. 2.0.7, str. 11) w zbiorze A*
$\bullet_1, \ldots, \bullet_m$	*są takimi działaniami zewnętrznymi (Def. 2.0.13, str. 13) w A, że*
	$\bullet_1 : \quad F_1 \times A \to A, \quad \ldots, \quad F_m \times A \to A.$

[1, Definicja 11, rozdział 1.2.1]

2.1 Grupa

Definicja 2.1.1. Grupą *nazywamy parę (Def. 1.0.1, str. 1)*

$$(G, \cdot),$$

składającą się

- *ze zbioru G*

- *oraz z takiego działania* $\cdot$ *(Def. 2.0.7, str. 11) określonego w zbiorze* G

$$\forall\, a, b \in G: \qquad G \times G \in\ (a, b)\ \rightarrow\ a + b\ \in G$$

które spełnia warunki:

1. *Działanie* $\cdot$ *jest* **łączne** *(Def. 2.0.9, str. 11)*
2. *Działanie* $\cdot$ *ma* **element neutralny** *(Def. 2.0.10, str. 12)*
3. *Dla każdego elementu zbioru* G *istnieje* **element odwrotny** *(Def. 2.0.11, str. 12)*

[1, Definicja 19, rozdział 2.1.1]

Definicja 2.1.2. *Grupę* $(G, \cdot)$ *nazywamy* **grupą abelową** *(***przemienną***), jeśli działanie* $\cdot$ *jest* **przemienne** *(Def. 2.0.8, str. 11).*

Definicja 2.1.3. Elementem neutralnym grupy G *nazywamy* **element neutralny działania** *(Def. 2.0.10, str. 12), względem którego* G *jest grupą.*

Element neutralny grupy nazywamy w notacji

- *multiplikatywnej - jedynką grupy* G*,*
- *addytywnej - zerem grupy* G*.*

[1, Definicja 21, rozdział 2.1.1]

2.2 Pierścień

Definicja 2.2.1. *Trójkę uporządkowaną (Def. 1.0.1, str. 1)*

$$(A,\ +,\ \cdot)$$

składający się z

- *niepustego zbioru A,*
- *działania $+$ określonego w A (Def. 2.0.7, str. 11)*
- *oraz działania $\cdot$ określonego w A (Def. 2.0.7, str. 11)*

nazywamy **pierścieniem**, *jeśli spełnione są warunki:*

1. $(A, +)$ *jest* **grupą abelową** *(Def. 2.1.2, str. 14)*
2. *działanie $\cdot$ jest* **łączne** *(Def. 2.0.9, str. 11)*
3. *działanie $\cdot$ jest* **rozdzielne** *(Def. 2.0.12, str. 12) względem $+$*

[1, Definicja 78, rozdział 3.1.1]

Definicja 2.2.2. *Jeśli działanie $\cdot$ jest* **przemienne** *(Def. 2.0.8, str. 11), to pierścień nazywamy* **pierścieniem przemiennym**.

[1, Definicja 79, rozdział 3.1.1]

Definicja 2.2.3. Element neutralny dodowania *(Def. 2.0.10, str. 12) w pierścieniu A nazywamy* **zerem pierścienia** *A.*

[1, Definicja 80, rozdział 3.1.1]

Definicja 2.2.4. *Jeśli mnożenie $\cdot$ w pierścieniu A ma jedynkę (Def. 2.0.10, str. 12), to jedynkę tę nazywamy* **jedynką pierścienia** *A i mówimy wtedy, że A jest* **pierścieniem z jedynką**.

[1, Definicja 81, rozdział 3.1.1]

Definicja 2.2.5. *O pierścieniu A mówimy, że jest* **pierścieniem zerowym**, *jeśli zbiór A jest* ***jednoelementowy***.

W przeciwnym przypadku o pierścieniu A mówimy, że jest **pierścieniem niezerowym**.

[1, Definicja 82, rozdział 3.1.1]

2.3 Ciało

Definicja 2.3.1. **Ciałem** *nazywamy* **pierścień z jedynką** *(Def. 2.2.4, str. 15) spełniający warunki:*

1. *zbiór K ma przynajmniej dwa elementy*

2. *dla każdego elementu zbioru K różnego od zera grupy $(K, +)$ istnieje element* **odwrotny** *(Def. 2.0.11, str. 12):*

$$\forall\, x \in K,\, x \neq \mathbf{0} \quad \exists\, x^{-1}: \qquad x \cdot x^{-1} \;=\; x^{-1} \cdot x \;=\; \mathbf{1}$$

[1, Definicja 86, rozdział 3.1.4]

Rozdział 3

Przestrzeń liniowa (wektorowa)

Literatura do tego działu: [1] - 2.1.1, 3.1.1, 3.1.4, [4] - 3, [6] - 1.1, 1.2, [3] - 9.1, 9.2
Zadania do tego działu: [1] - 2.1.1, 3.1.1, 3.1.4, [4] - 3.1, 3.2, [3] - 9

Definicja 3.0.2. Przestrzenią wektorową *(***przestrzenią liniową***) nad ciałem (Def. 2.3.1, str. 16)* $(F, +, \cdot)$ *nazywamy strukturę algebraiczną (Def. 2.0.14, str. 13)*

$$(V, F, \oplus, \odot)$$

złożoną z:

- *zbioru* V *- zwanego* zbiorem wektorów*,*
- *zbioru* F *- zwanego* zbiorem skalarów*,*
- *działania* $\oplus\colon V \times V \to V$ *wewnętrznego (Def. 2.0.7, str. 11) w zbiorze* V
- *i działania zewnętrznego (Def. 2.0.13, str. 13)* $\odot\colon F \times V \to V$*,*

która spełnia następujące warunki:

1. $(V, \oplus)$ *jest grupą abelową*
2. $\forall \alpha \in F \quad \forall x, y \in V\colon \qquad \alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$
3. $\forall \alpha, \beta \in F \quad \forall x \in V\colon \qquad (\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$
4. $\forall \alpha, \beta \in F \quad \forall x \in V\colon \qquad \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x$
5. $\forall x \in V\colon \qquad \mathbf{1} \odot x = x$

[4, Rozdział 3]

3.0.1 Kombinacja liniowa wektorów

Niech $T = 1, \ldots, n$ oznacza zbiór wskaźników.

Definicja 3.0.3. *Element $x \in V$ przestrzeni $(V, F, \oplus, \odot)$ nazywamy* **kombinacją liniową wektorów** $(x_t)_{t \in T}$*, jeśli istnieje układ skalarów $(\alpha_t)_{t \in T}$ z ciała F, taki, że*

$$x = \sum_{t \in T} \alpha_t x_t$$

Skalary α_t nazywamy **współczynnikami** *tej kombinacji liniowej.*
[4, Rozdział 3]

Definicja 3.0.4. *Układ $(x_t)_{t \in T}$ wektorów przestrzeni $(V, F, \oplus, \odot)$ nazywamy* **układem wektorów liniowo niezależnych***, jeśli dla dowolnego układu $(\alpha_t)_{t \in T}$ skalarów jest spełniony warunek*

$$\sum_{t \in T} \alpha_t x_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall t \in T\colon \quad \alpha_t = 0$$

[4, Rozdział 3]

Definicja 3.0.5. *Układ, który nie jest układem wektorów liniowo niezależnych nazywamy* **układem wektorów liniowo zależnych***.*
[4, Rozdział 3]

3.0.2 Baza przestrzeni liniowej

Definicja 3.0.6. **Bazą przestrzeni** $(V, F, \oplus, \odot)$ *nazywamy układ wektorów liniowo niezależnych* $(e_1, \dots, e_n)$, *które generują całą przestrzeń, tzn.*

$$\forall x \in V \quad \exists \alpha_i \in F: \qquad x = \sum_{i}^{n} \alpha_i e_i$$

[4, Rozdział 3]

3.0.3 Wymiar przestrzeni liniowej

Definicja 3.0.7. *Moc (liczbę wektorów) bazy nazywamy* **wymiarem przestrzeni** $(V, F, \oplus, \odot)$ *i oznaczamy*

$$\dim V$$

[4, Rozdział 3]

3.1 Odwzorowania w przestrzeni linowej

Niech $X, Y, V_1, \dots V_n$ oraz Z będą przestrzeniami wektorowymi (Def. 3.0.2, str. 17) nad ciałem (Def. 2.3.1, str. 16) K.

Niech W oraz V będą przestrzeniami wektorowymi (Def. 3.0.2, str. 17) nad ciałem liczb zespolonych (Def. 5.0.1, str. 37) $\mathbb{C}$.

3.1.1 Odwzorowanie linowe

Definicja 3.1.1. *Odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5)*

$$f: X \to Y$$

nazywamy **liniowym**, *jeżeli:*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X \quad &: \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \alpha \in K \quad \forall x \in X \quad &: \quad f(\alpha\, x) = \alpha\, f(x) \end{aligned}$$

[7, Definicja 3.4.1]

3.1.2 Endomorfizm

Definicja 3.1.2. *Jeżeli*

$$X = Y$$

to odwzorowanie liniowe (Def. 3.1.1, str. 20) nazywamy **endomorfizmem**.
[7, Definicja 3.4.1]

3.1.3 Odwzorowanie antylinowe

Definicja 3.1.3. *Odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5)*

$$f \colon W \to V$$

nazywamy **antyliniowym** *(***półliniowym***), jeżeli:*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in W \quad &: \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall x \in W \quad &: \quad f(\alpha\, x) = \overline{\alpha}\, f(x) \end{aligned}$$

Liczba $\overline{\alpha}$ oznacza liczbę sprzężoną (Def. 5.4.1, str. 42) z α.

3.1.4 Odwzorowanie półtoraliniowe

Definicja 3.1.4. *Odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5)*

$$f\colon X \times Y \to W$$

nazywamy **półtoraliniowym**, *jeżeli jest*

- ***odwzorowaniem liniowym*** *(Def. 3.1.1, str. 20) ze względu na pierwszy argument*
- *i* ***odwzorowaniem półliniowym*** *(Def. 3.1.3, str. 20) ze względu na drugi argument*

czyli

$$\begin{aligned}
\forall x, x' \in X \quad y \in Y \quad &: \quad f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y) \\
\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad &: \quad f(\alpha\, x, y) = \alpha\, f(x, y) \\
\forall x \in X \quad y, y' \in Y \quad &: \quad f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y') \\
\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad &: \quad f(x, \alpha\, y) = \overline{\alpha}\, f(x, y)
\end{aligned}$$

Liczba $\overline{\alpha}$ oznacza liczbę sprzężoną (Def. 5.4.1, str. 42) z α.
[6, Rozdział 3.2.1]

3.1.5 Odwzorowanie dwuliniowe

Definicja 3.1.5. *Odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5)*

$$f\colon X \times Y \to Z$$

nazywamy **dwuliniowym**, *jeżeli jest* ***odwzorowaniem liniowym*** *(Def. 3.1.1, str. 20) ze względu na* ***każdą zmienną***, *czyli*

$$\begin{aligned}
\forall x, x' \in X \quad y \in Y \quad &: \quad f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y) \\
\forall \alpha \in K \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad &: \quad f(\alpha\, x, y) = \alpha\, f(x, y) \\
\forall x \in X \quad y, y' \in Y \quad &: \quad f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y') \\
\forall \alpha \in K \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad &: \quad f(x, \alpha\, y) = \alpha\, f(x, y)
\end{aligned}$$

[7, Definicja 3.9.1] [9, Rozdział 0.2]

3.1.6 Odwzorowanie wieloliniowe

Definicja 3.1.6. *Odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5)*

$$f\colon V_1 \times V_2 \times \ldots V_n \to Z$$

nazywamy **wieloliniowym** *(*n**-liniowym***), jeżeli jest* ***odwzorowaniem liniowym*** *(Def. 3.1.1, str. 20) ze względu na* ***każdą zmienną****.*

[6, Paragraf 1.4.1]

3.2 Formy w przestrzeni linowej

3.2.1 Forma półtoraliniowa

Definicja 3.2.1. **Formą półtoraliniową** *na iloczynie kartezjańskim (Def. 1.0.2, str. 1)* $X \times Y$ *nazywamy* ***odwzorowanie półtoraliniowe*** *(Def. 3.1.4, str. 21)*

$$f\colon\ X \times Y \to \mathbb{C}$$

[6, Rozdział 3.2.1]

3.2.2 Forma dwuliniowa

Definicja 3.2.2. **Formą dwuliniową** *na iloczynie kartezjańskim (Def. 1.0.2, str. 1)* $X \times Y$ *nazywamy* ***odwzorowanie dwuliniowe*** *(Def. 3.1.5, str. 21)*

$$f\colon\ X \times Y \to K$$

[9, Rozdział 0.2]

Postać analityczna forma dwuliniowej

Jeżeli $\dim X = m$ *i* $\dim Y = n$ *(Def. 3.0.7, str. 19), to formę możemy zapisać w postaci analitycznej*

$$f(x,y) = a_{ij}\, x^i\, y^j \qquad a_{ij} \in K,\ x \in X,\ y \in Y,$$
$$i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}$$

[9, Rozdział 0.2]

Postać macierzowa forma dwuliniowej

Jeżeli $\dim X = m$ *i* $\dim Y = n$ *(Def. 3.0.7, str. 19), to formę możemy zapisać w postaci macierzowej (Def. 7.0.3, str. 57)*

$$f(x,y) = \left[x^1,\dots,x^m\right] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

lub przy oznaczeniach kolumnowych

- $x = \left[x^1,\dots,x^m\right]$,
- x^T *(Def. 7.2.4, str. 59)*,
- $y = \left[y^1,\dots,y^n\right]$
- *oraz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$$f(x,y) = x^T\, A\, y$$

Macierz A *nazywamy* ***macierzą formy dwulinowej*** f.

[9, Rozdział 0.2]

3.2.3 Forma hermitowska

Definicja 3.2.3. *Formę półtoraliniową (Def. 3.2.1, str. 22)*

$$f\colon\; X \times X \to \mathbb{C}$$

nazywamy **hermitowską**, *jeśli*

$$f(x,y) \;=\; \overline{f(y,x)}$$

[6, Paragraf 1.4.4]

3.2.4 Forma dwuliniowa symetryczna

Definicja 3.2.4. *Formę dwuliniową (Def. 3.2.2, str. 22)*

$$f\colon\; X \times X \to K$$

nazywamy **symetryczną**, *jeśli*

$$f(x,y) \;=\; f(y,x)$$

[6, Paragraf 1.4.4]

3.2.5 Forma dwuliniowa antysymetryczna

Definicja 3.2.5. *Formę dwuliniową (Def. 3.2.2, str. 22)*

$$f\colon\; X \times X \to K$$

nazywamy **antysymetryczną**, *jeśli*

$$f(x,y) \;=\; -f(y,x)$$

[6, Paragraf 1.4.4]

3.2.6 Forma kwadratowa

Definicja 3.2.6. *Odwzorowanie $g\colon X \to K$ nazywamy* **formą kwadratową** *generowaną przez formę dwuliniową f jeżeli:*

$$\forall x \in X\colon \quad g(x) = f(x,x)$$

[7, Definicja 4.1.1]

3.2.7 Forma dwuliniowa biegunowa

Definicja 3.2.7. *Jedyną formę dwuliniową (Def.* **??***, str.* **??***), symetryczną (Def.* **??***, str.* **??***) generującą formę kwadratową (Def. 3.2.6, str. 25) g nazywamy* **formą biegunową dla** g.

[7, Definicja 4.1.2]

3.2.8 Forma wieloliniowa

Definicja 3.2.8. Formą wieloliniową *(*n**-liniową***) na iloczynie kartezjańskim (Def. 1.0.2, str. 1) $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ nazywamy* ***odwzorowanie wieloliniowe*** *(*n***-liniowe****) (Def. 3.1.6, str. 22)*

$$f\colon \ V_1 \times V_2 \times \ldots V_n \to K$$

[6, Paragraf 1.4.1]

3.2.9 Forma wieloliniowa symetryczna

Definicja 3.2.9. *Formę wieloliniową (n-liniową) (Def. 3.2.8, str. 25)*

$$f\colon \ X^n \to K$$

nazywamy **symetryczną***, jeśli*

$$f(x_{i_1 1}, x_{i_2 2}, \ldots, x_{i_n n}) \ = \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

[6, Paragraf 1.4.1]

3.2.10 Forma wieloliniowa antysymetryczna

Definicja 3.2.10. *Formę wieloliniową (n-liniową) (Def. 3.2.8, str. 25)*

$$f\colon\ X^n \to K$$

nazywamy **antysymetryczną**, *jeśli*

$$f(x_{i_1 1}, x_{i_2 2}, \dots, x_{i_n n}) \ = \ \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n)\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje (Def. **??**, *str.* **??**) $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ *zbioru* $\{1, 2, \dots, n\}$.

[6, Paragraf 1.4.1]

3.3 Przestrzeń unitarna. Iloczyn skalarny

3.3.1 Iloczyn skalarny

Definicja 3.3.1. *Niech*

- V *będzie* ***przestrzenią wektorową*** *(Def. 3.0.2, str. 17) nad* ***ciałem liczb zespolonych*** *(Def. 5.0.1, str. 37)* $\mathbb{C}$
- $g\colon V \to \mathbb{C}$ *pewną* ***formą kwadratową*** *(Def. 3.2.6, str. 25)* ***określoną dodatnio***

Formę hermitowską *(Def. 3.2.3, str. 24)* f *generującą formę kwadratową* g *nazywamy* **iloczynem skalarnym** *określonym w* V.

Wartość formy $f(x, y)$ *oznaczamy* $(x|y)$ *lub* $x \circ y$.

[6, Paragraf 3.2.1]

Własności iloczynu skalarnego

1. $\forall x, y \in V \quad : \quad (x|y) = \overline{(y|x)}$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in V \quad : \quad (\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
3. $\forall x_1, x_2, y \in V \quad : \quad (x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$
4. $\forall x \in V \quad : \quad re(x|x) \geq 0 \qquad \text{oraz} \qquad (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

[4, Rozdział 6] [6, Paragraf 3.2.1]

3.3.2 Przestrzeń unitarna

Definicja 3.3.2. *Przestrzeń V nad ciałem $\mathbb{C}$, w której określono iloczyn skalarny nazywamy* **przestrzenią unitarną**.

[4, Rozdział 6] [6, Paragraf 3.2.1, Definicja 2]

3.3.3 Norma wektora

Definicja 3.3.3. Długością *lub* **normą** *wektora $v \in V$ nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną*

$$\|v\| \ = \ \sqrt{(v|v)}$$

[6, Rozdział 3.2.1]

3.4 Przestrzeń euklidesowa. Iloczyn skalarny

3.4.1 Iloczynu skalarny

Definicja 3.4.1. *Niech*

- *V będzie **przestrzenią wektorową** (Def. 3.0.2, str. 17) nad **ciałem liczb rzeczywistych** $\mathbb{R}$ (TODO ciało liczb rzeczywistych?)*

- *$g\colon V \to \mathbb{R}$ pewną* ***formą kwadratową*** *(Def. 3.2.6, str. 25)* ***określoną dodatnio***

Formę dwuliniową *f* ***biegunową*** *(Def. 3.2.7, str. 25) dla g nazywamy* **iloczynem skalarnym** *określonym w V.*

Wartość formy $f(x, y)$ oznaczamy $(x|y)$ lub $x \circ y$.

[7, Definicja 4.1.6] [6, Paragraf 3.2.1]

Własności iloczynu skalarnego

1. $\forall x, y \in V \quad : \quad (x|y) = (y|x)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in V \quad : \quad (\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
3. $\forall x_1, x_2, y \in V \quad : \quad (x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$
4. $\forall x \in V \quad : \quad (x|x) \geq 0 \qquad \text{oraz} \qquad (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

[4, Rozdział 6] [6, Paragraf 3.2.1]

3.4.2 Przestrzeń euklidesowa

TODO która definicja bardziej prawdziwa?

Definicja 3.4.2. *Przestrzeń V nad ciałem $\mathbb{R}$, w której określono iloczyn skalarny, nazywamy* **przestrzenią euklidesową**.

[4, Rozdział 6]

Definicja 3.4.3. *Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z*

- *iloczynem skalarnym (Def. 3.4.1, str. 28)*

$$(x|y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

- *i normą wektora (Def. 3.4.6, str. 29)*

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$$

nazywamy **przestrzenią euklidesową** *i oznaczamy* $\overrightarrow{E_n}$

[7, Definicja 4.1.7]

3.4.3 Baza ortogonalna, baza ortonormalna przestrzeni euklidesowej

Definicja 3.4.4. *Bazę (Def. 3.0.6, str. 19)*

$$(e_1, \ldots, e_n)$$

przestrzeni euklidesowej V nazywamy **ortogonalną**, *jeśli*

$$(e_i|e_j) = 0$$

dla dowolnych $i \neq j \quad (i, j = 1, \ldots, n)$.

[6, Definicja 4, rozdział 3.1]

Definicja 3.4.5. *Bazę* ***ortogonalną*** *(Def. 3.4.4, str. 29)*

$$(e_1, \ldots, e_n)$$

przestrzeni euklidesowej V nazywamy **ortonormalną**, *jeśli*

$$(e_i|e_i) = 1$$

dla każdego i.

[6, Definicja 4, rozdział 3.1]

3.4.4 Norma wektora

Definicja 3.4.6. Długością *lub* **normą** *wektora $v \in V$ nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną*

$$\|v\| \ = \ \sqrt{(v|v)}$$

[6, Definicja 2, rozdział 3.1]

3.5 Przestrzeń afiniczna

TODO sprawdzic czy χ czy X jest przestrzenią afiniczna (jesli X to zmienic w geometrii analitycznej)

Definicja 3.5.1. *Uporządkowaną trójkę*

$$\chi = (X, V, +)$$

nazywać będziemy **przestrzenią afiniczną** *jeżeli*

- *X będzie pewnym zbiorem*
- *V - przestrzenią wektorową (Def. 3.0.2, str. 17)*
- *$+$ - działaniem zewnętrznym (Def. 2.0.13, str. 13) w X*

$$X \times Y \ni (x, v) \quad \to \quad x + v \in X$$

spełniającym warunki:

1. $\forall x \in X \quad : \quad x + \mathbf{0} = x \qquad (\mathbf{0} \in V)$
2. $\forall x, y \in X \quad \exists v \in V \quad : \quad x + v = y$
3. $\forall x \in X \quad \forall v_1, v_2 \in V \quad : \quad x + v_1 = x + v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$ *TODO sprawdzic*
4. $\forall x \in X \quad \forall u, v \in V \quad : \quad x + (u + v) = (x + u) + v$

[7, Definicja 3.5.1]

3.5.1 Przestrzeń wektorów swobodnych

Definicja 3.5.2. *Przestrzeń wektorową V przestrzeni afinicznej χ nazywamy* ***przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni afinicznej*** *X i oznaczać będziemy*

$$\vec{X}$$

TODO sprawdzić 'przestrzeni afinicznej X'
[7, Definicja 3.5.1]

3.5.2 Różnica punktów

Definicja 3.5.3. **Różnicą punktów** *x i y ($x, y \in X$) lub* **wektorem łączącym punkty** *x i y nazywamy* ***jedyny wektor*** *spełniający aksjomat 2 definicji przestrzeni afinicznej (Def. 3.5.1, str. 30).*

Oznaczmy

$$y - x \qquad \text{lub} \qquad \overrightarrow{xy}$$

[7, Definicja 3.5.1]

3.5.3 Układ współrzędnych

Definicja 3.5.4. **Układem współrzędnych** *w n-wymiarowej (Def. 3.0.7, str. 19) przestrzeni afinicznej χ (Def. 3.5.1, str. 30) nazywamy parę*

$$(o;\ e_1, \ldots, e_n)$$

złożoną z

- *punktu $o \in X$*
- *i bazy (Def. 3.0.6, str. 19) $(e_1, \ldots, e_n)$ w V*

[6, Paragraf 4.1.3, Definicja 3]

Definicja 3.5.5. **Współrzędnymi**

$$x_1, \ldots, x_n$$

punktu *p w układzie $(o;\ e_1, \ldots, e_n)$ nazywamy współrzędne wektora $\overrightarrow{op}$ w bazie $(e_1, \ldots, e_n)$*

$$\overrightarrow{op} \ = \ x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

[6, Paragraf 4.1.3, Definicja 3]

Rozdział 4

Algebra Boole'a

Definicja 4.0.6. **Algebra Boole'a** *to struktura algebraiczna (Def. 2.0.14, str. 13)*

$$\mathbb{B} = \left(\mathbf{B}, \cup, \cap, \overline{}, 0, 1\right),$$

w której

- $\cup$ *i* $\cap$ *są działaniami dwuargumentowymi,*
- $\overline{}$ *jest działaniem jednoargumentowym,*
- *a* 0 *i* 1 *są* wyróżnionymi, różnymi *elementami zbioru* **B**,

spełniająca następujące warunki:

1. *działanie* $\cup$ *jest* ***przemienne*** *(Def. 2.0.8, str. 11)*
2. *działanie* $\cup$ *jest* ***łączne*** *(Def. 2.0.9, str. 11)*
3. *aksjomat Huntingtona:*

$$\forall\, x, y \in B \qquad \Rightarrow \qquad \overline{(\overline{x} \cup \overline{y})} \cup \overline{(\overline{x} \cup y)} \;=\; x$$

Definicja 4.0.7. **Elementem jednostkowym** *nazywamy element* **1** *taki, że:*

$$\forall\, x \in B\colon \qquad x \cup \overline{x} \;=\; \mathbf{1}$$

Definicja 4.0.8. **Elementem zerowym** *nazywamy element* **0** *taki, że:*

$$\forall\, x \in B: \qquad \overline{x \cup \overline{x}} \;=\; \mathbf{0}$$

Definicja 4.0.9. **Działanie** $\cap$*:*

$$\forall\, x, y \in B: \qquad x \cap y \;=\; \overline{\overline{x} \cup \overline{y}}$$

4.1 Tabela działań

α, β - zdania (formy zdaniowe, którym można przypisać wartość)

α	β	$\overline{\alpha}$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

4.2 Twierdzenia dla Algebry Boole'a

Twierdzenie 4.2.1 (o unikalności)**.** *Jest* ***tylko jeden*** *element jednostkowy* **1** *(Def. 4.0.7, str. 33).*

Jest ***tylko jeden*** *element zerowy* **0** *(Def. 4.0.8, str. 34).*

Twierdzenie 4.2.2 (o dopełnianiu)**.**

$$x \cup \overline{x} \;=\; \mathbf{1}$$

$$x \cap \overline{x} \;=\; \mathbf{0}$$

Twierdzenie 4.2.3 (o podwójnej negacji)**.**

$$\overline{\overline{x}} \;=\; x$$

Twierdzenie 4.2.4 (prawa De Morgana)**.**

$$\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$$

$$\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$$

Twierdzenie 4.2.5.

$$x \cap x = x \quad x \cup x = x \quad x \cup \mathbf{0} = x \quad x \cup \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad x \cap \mathbf{1} = x \quad x \cap \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

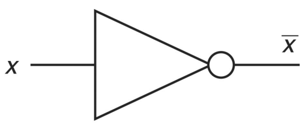
Twierdzenie 4.2.6 (o rozdzielności)**.**

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

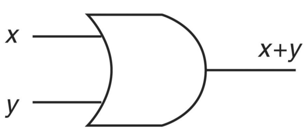
4.3 Funktory w elektrotechnice. Bramki logiczne

4.3.1 Bramka NOT



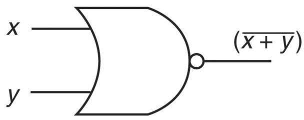
x	$\overline{x}$
0	1
1	0

4.3.2 Bramka OR



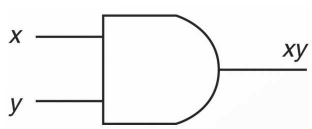
x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4.3.3 Bramka NOR



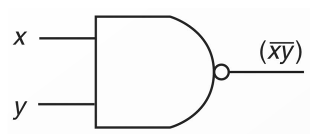
x	y	$\overline{x \vee y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4.3.4 Bramka AND



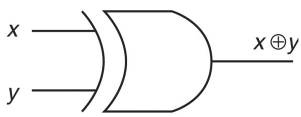
x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4.3.5 Bramka NAND



x	y	$\overline{x \wedge y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4.3.6 Bramka XOR



x	y	$x \underline{\vee} y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Rozdział 5

Ciało liczb zespolonych

Literatura do tego działu: [4] - 2, [3] - 3.3, [5] - 5.1
Zadania do teog działu: [2] - 8.1, [4] - 2, [3] - 3

Definicja 5.0.1. *Ciałem* **liczb zespolonych** *nazywamy ciało (Def. 2.3.1, str. 16)* $(C, \oplus, \odot)$*, w którym* $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, a działania* $\oplus$ *oraz* $\odot$ *są określone następująco:*

1. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: \qquad (a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d)$
2. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: \qquad (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

[4, Rozdział 2]

Właściwości:

- elementem neutralnym (Def. 2.0.10, str. 12) działania $\oplus$ jest liczba $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$
- elementem neutralnym działania $\odot$ jest liczba $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$
- elementem przeciwnym (Def. 2.0.11, str. 12) do liczby (a, b) jest liczba

$$-(a, b) = (-a, -b)$$

- elementem odwrotnym (Def. 2.0.11, str. 12) do liczby (a, b) jest liczba

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Definicja 5.0.2. Częścią rzeczywistą *liczby zespolonej* $z = (a, b)$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* a *i oznaczamy*

$$Re\, z \quad = \quad a$$

Definicja 5.0.3. Częścią urojoną *liczby zespolonej* $z = (a, b)$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* b *i oznaczamy*

$$Im\, z \quad = \quad b$$

Definicja 5.0.4. Odejmowaniem *liczb zespolonych nazywamy dodawanie pierwszego argumentu działania i elementu przeciwnego do drugiego argumentu działania.*

$$(a, b) \oplus -(c, d)$$

co oznaczamy

$$(a, b) \ominus (c, d)$$

Liczba (x, y) jest wynikiem odejmowania $(a, b) \ominus (c, d)$, gdy:

$$\begin{array}{rcl} (a, b) \ominus (c, d) & = & (x, y) \\ (a, b) \oplus -(c, d) & = & (x, y) \\ (a, b) \oplus (-c, -d) & = & (x, y) \end{array}$$

Z definicji dodawania i równości liczb zespolonych wynika, że $a - c = x$ i $b - d = y$, stąd

$$(a, b) \ominus (c, d) = (a - c, b - d)$$

Definicja 5.0.5. Dzieleniem *liczb zespolonych nazywamy mnożenie pierwszego argumentu i elementu odwrotnego do drugiego argumentu działania.*

$$(a, b) \odot (c, d)^{-1}$$

co oznaczamy

$$\cdot \frac{(a, b)}{(c, d)}$$

Lizcba (x, y) jest wynikiem dzielenia $\cdot\frac{(a,b)}{(c,d)}$, gdy:

$$\begin{aligned} \cdot\frac{(a,b)}{(c,d)} &= (x,y) \\ (a,b)\odot(c,d)^{-1} &= (x,y) \\ (a,b)\odot\left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right) &= (x,y) \end{aligned}$$

Z definicji mnożenia i równości liczb zespolonych wynika, że:

$$\begin{cases} a\cdot\frac{c}{c^2+d^2} - b\cdot\frac{-d}{c^2+d^2} = x \\ \\ a\cdot\frac{-d}{c^2+d^2} + b\cdot\frac{c}{c^2+d^2} = y \end{cases}$$

stąd

$$\cdot\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

5.1 Interpretacja geometryczna

Liczby zespolone i działania na nich można interpretować geometrycznie. Wykorzystując twierdzenie z geometrii analitycznej o istnieniu wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między punktami płaszczyzny i uporządkowanymi parami ortokartezjańskich współrzędnych punktu będziemy ***liczbę zespoloną*** $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ interpretować jako ***punkt*** o współrzędnych $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Każdej więc liczbie zespolonej odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny, zwanej wtedy ***płaszczyzną zespoloną***.

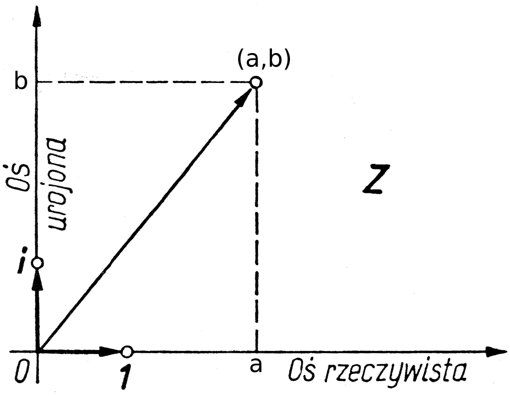
Osie układu nazywać będziemy

- ***osią rzeczywistą*** - oś, na której leżą punkty odpowiadające liczbom zespolonym o części urojonej (Def. 5.0.3, str. 38) równej zeru
- ***osią urojoną*** - oś, na której leżą punkty odpowiadające liczbom zespolonym o części rzeczywistej (Def. 5.0.2, str. 38) równej zeru

Analogicznie jak to czyniliśmy w układzie ortokartezjańskim na płaszczyźnie euklidesowej punktowi $z = a+bi$ będziemy przypisywać wektor wodzący punktu, oznaczany także przez z

$$z = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot i$$

gdzie przez **1** oznaczyliśmy wersor osi rzeczywistej, a przez i wersor osi urojonej. [9, Rozdział 1.2]



5.2 Postać algebraiczna

Definicja 5.2.1. *Parę* $(0, 1)$ *oznaczamy symbolem* i *oraz nazywamy* **jednostką urojoną**. *[4, Rozdział 2]*

Definicja 5.2.2. *Każdą liczbę zespoloną* (a, b) *można zapisać w postaci* $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ *(gdzie* i *to jednostka urojona). Zapis taki nazywamy* **postacią algebraiczną** *liczby zespolonej. [4, Rozdział 2]*

5.2.1 Dodawanie i odejmowanie

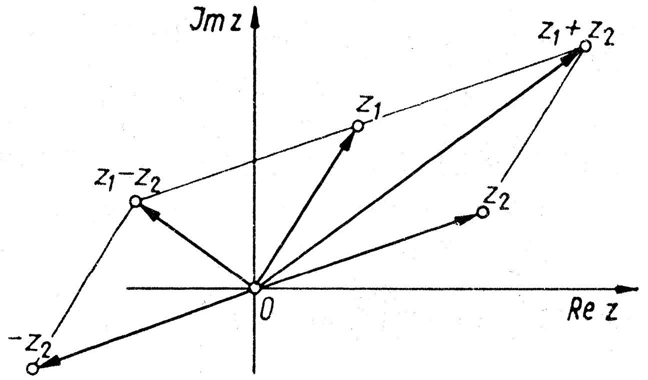
Dodawanie dwóch liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ postaci $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$ możemy zapisać w następujący sposób

$$z_1 \oplus z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

a odejmowanie

$$z_1 \ominus z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

Dodawanie liczb zespolonych interpretujemy geometrycznie jako dodawanie przyporządkowanych im wektorów, zaś odejmowanie jako odejmowanie wektorów [9, Rozdział 1.2]



5.2.2 Mnożenie

Mnożenie dwóch liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ postaci $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$ możemy zapisać w następujący sposób

$$z_1 \odot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i$$

5.2.3 Dzielenie

Dzielenie dwóch liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ postaci $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$ możemy zapisać w następujący sposób

$$\cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

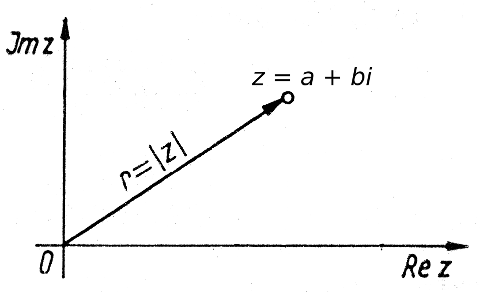
5.3 Moduł liczby zespolonej

Definicja 5.3.1. **Modułem** *liczby zespolonej* $z = a + bi$ *nazywamy rzeczywistą liczbę nieujemną*

$$|z| \quad = \quad \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moduł liczby zespolonej interpretujemy geometrycznie jako długość wektora wodzącego punktu odpowiadającego tej liczbie i oznaczamy r

$$r \quad = \quad |z|$$



5.4 Liczba zespolona sprzężona

Definicja 5.4.1. **Liczbą sprzężoną** *z liczbą*

$$z \; = \; a + bi$$

nazywamy liczbę

$$a - bi$$

i oznaczamy $\overline{z}$

$$\overline{z} \; = \; a - bi$$

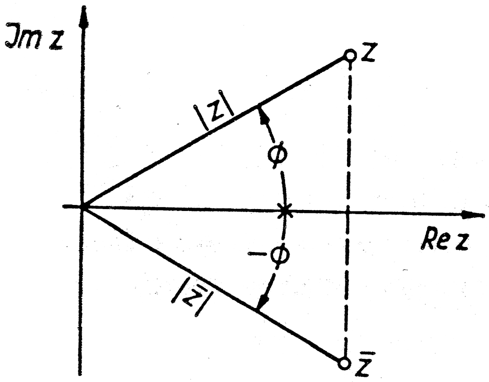
[9, Rozdział 1.1]

Definicja 5.4.2. *Dwie liczby, z których jedna jest sprzężona z drugą, nazywamy* **liczbami sprzężonymi**.

Własności:

- Liczby sprzężone mają równe moduły
$$|z| \quad = \quad |\overline{z}|$$
- Ilocznyn liczb sprzężonych jest równy kwadratowi ich wspólnego modułu
$$z \cdot \overline{z} \quad = \quad |z|^2$$

Geometrycznie liczba sprzężona z liczbą z jest symetrycznym odbiciem względem osi rzeczywistej (Def. 5.1, str. 39).



5.5 Postać trygonometryczna

5.5.1 Argument liczby zespolonej

Definicja 5.5.1. **Argumentem** *liczby zespolonej* $z = a + bi \neq \mathbf{0}$ *nazywamy każdą liczbę rzeczywistą* φ *spełniającą warunki*

$$\begin{cases} cos\,\varphi & = \dfrac{a}{|z|} \\ sin\,\varphi & = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

gdzie $|z|$ *jest modułem (Def. 5.3.1, str. 42) liczby zespolonej* z*. Argument liczby zespolonej* z *oznaczamy*

$$Arg\, z$$

[9, Rozdział 1.2]

Definicja 5.5.2. Argumentem głównym *liczby zespolonej* z *nazywamy ten spośród argumentów liczby zespolonej* z*, który należy do przedziału* $\langle 0, 2\pi)$ *i oznaczamy*

$$arg\, z$$

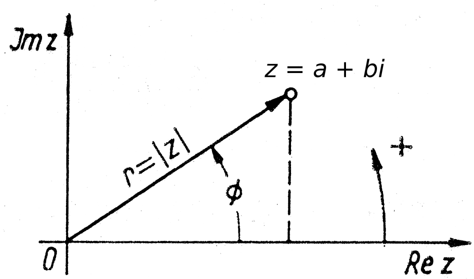
[9, Rozdział 1.2]

Pomiędzy argumentem główny a argumentem liczby zespolonej z zachodzi zależność

$$Arg\, z \quad = \quad arg\, z + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Dla liczby $(0, 0)$ nie określa się argumentu.

Geometrycznie, argument liczby zespolonej jest miarą względną kąta, jaki tworzy wektor wodzący punktu z z osią rzeczywistą (Def. 5.1, str. 39).



5.5.2 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Definicja 5.5.3. *Każdą liczbę zespoloną można zapisać w postaci*

$$r\ (cos\, \varphi + i\ sin\, \varphi)$$

zwanej **postacią trygonometryczną** *liczby zespolonej. Czynnik* r *jest modułem (Def. 5.3.1, str. 42) liczby zaś* φ *jest dowolnym jej argumentem (Def. 5.5.1, str. 43).*

5.5.3 Mnożenie

Niech będą dane dwie liczby zespolone w postaci trygonometrycznej

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1\ (cos\, \varphi_1 + i\ sin\, \varphi_1) \\ z_2 &= r_2\ (cos\, \varphi_2 + i\ sin\, \varphi_2) \end{aligned}$$

Ich iloczynem będzie liczba

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1\ (cos\, \varphi_1 + i\ sin\, \varphi_1)]\, [r_2\ (cos\, \varphi_2 + i\ sin\, \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2\, [(cos\, \varphi_1 cos\, \varphi_2 - sin\, \varphi_1 sin\, \varphi_2) + i\, (cos\, \varphi_1 sin\, \varphi_2 + sin\, \varphi_1 cos\, \varphi_2)] \end{aligned}$$

lub po zastosowaniu wzorów trygonometrycznych

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\, [cos\, (\varphi_1 + \varphi_2) + i\ sin\, (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Wnioski:

- moduł iloczynu liczb zespolonych jest równy iloczynowi ich modułów

$$|z_1 z_2| = |z_1|\, |z_2|$$

- argument iloczynu liczb zespolonych jest równy sumie ich argumentów

$$Arg\, (z_1 z_2) = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$$

5.5.4 Dzielenie

Niech będą dane dwie liczby zespolone w postaci trygonometrycznej

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1\ (cos\, \varphi_1 + i\ sin\, \varphi_1) \\ z_2 &= r_2\ (cos\, \varphi_2 + i\ sin\, \varphi_2) \end{aligned}$$

Ich ilorazem będzie liczba

$$\begin{aligned} \cdot \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\ (cos\, \varphi_1 + i\ sin\, \varphi_1)}{r_2\ (cos\, \varphi_2 + i\ sin\, \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \frac{(cos\, \varphi_1 + isin\, \varphi_1)\, (cos\, \varphi_2 - isin\, \varphi_2)}{cos^2\, \varphi_2 + cos^2\, \varphi_2} \end{aligned}$$

lub po zastosowaniu wzorów trygonometrycznych

$$\cdot\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\, sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$$

Wnioski:

- moduł ilorazu liczb zespolonych jest równy ilorazowi ich modułów

$$\left|\cdot\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

- argument ilorazu liczb zespolonych jest równy różnicy ich argumentów

$$Arg\ \cdot\frac{z_1}{z_2} = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$$

5.5.5 Potęgowanie

Niech będzie dana liczba zespolona w postaci trygonometrycznej

$$z \quad = \quad r\ (cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi)$$

Jej potęgą o wykładniku naturalnym będzie

$$z^n \quad = \quad r^n\ (cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi)$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$

Wyprowadzanie wzorów trygonometrycznych

Niech będzie dana liczba zespolona z o module równym 1 ($|z| = 1$)

$$z \quad = \quad cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi$$

Chcemy policzyć z^2.

Ze wzoru na potęgę liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej mamy

$$z^2 = cos\,2\varphi + i\,sin\,2\varphi$$

Możemy także skorzystać z takiego równania

$$\begin{aligned} z^2 &= (cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)^2 = \\ &= cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi + i\,2\,sin\,\varphi cos\,\varphi \end{aligned}$$

Z równości liczb zespolonych wynika, że

$$\begin{cases} cos\,2\varphi = cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi \\ sin\,2\varphi = 2\,sin\,\varphi cos\,\varphi \end{cases}$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób wzory na $cos\,2\varphi$ i $sin\,2\varphi$. W ogólności, dla dowolnego n, otrzymyjemy wzór Moivre'a.

Definicja 5.5.4. Wzorem Moivre'a *nazywamy równanie*

$$(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)^n = cos\,(n\varphi) + i\,sin\,(n\varphi)$$

5.5.6 Pierwiastkowanie

Definicja 5.5.5. *Jeżeli* $z_0 = r_0\,(cos\,\varphi_0 + i\,sin\,\varphi_0) \neq 0$*, przy czym* $\varphi_0 = arg\,z_0$*, to liczba* $\omega = R\,(cos\,\psi + i\,sin\,\psi)$ *jest* **pierwiastkiem stopnia** n *z* z_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$R^n = r_0$$

oraz

$$n\,\psi = \varphi_0 + 2k\pi$$

gdzie k jest liczbą całkowitą. [9, Rozdział 1.3]

Stąd

$$R = \sqrt[n]{r_0}$$

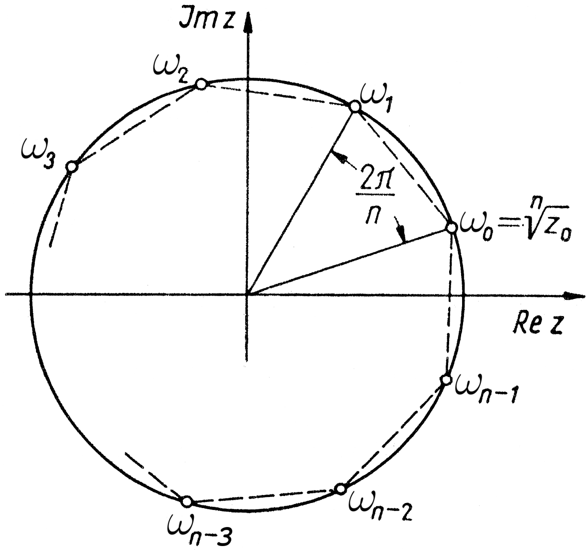
oraz

$$\psi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Wszystkie różne pierwiastki stopnia n z liczby z_0 można zapisać wzorem

$$\omega_k = \sqrt[n]{r_0}\left[cos\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\,sin\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right]$$

Na rysunku zostało przedstawionych n pierwiastków stopnia n liczby $z_0 \neq 0$. Odcinki przerywane łączące kolejne pierwiastki tworzą wielobok foremny wpisany w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r_0}$.



5.6 Wzór Eulera

Definicja 5.6.1. *Potęgę e^z o podstawie e i wykładniku $z = a + bi$, należącym do ciała liczb zespolonych, określamy w sposób następujący*

$$\begin{aligned} e^{ib} &= cos\, b + i\, sin\, b \\ e^z &= e^a\, e^{ib} \end{aligned}$$

Definicja 5.6.1 wprowadza nowy symbol $e^{i\varphi}$ na oznaczenie liczby o module równym 1 i argumencie φ, mianowicie

$$e^{i\varphi} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi$$

Równość ta umożliwia zapisanie dowolnej liczby zespolonej $a+ib = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$ w tzw. ***postaci wykładniczej***.

$$r\,e^{i\varphi}$$

Rozdział 6

Wielomiany. Funkcje wymierne

6.1 Pierścień całkowity wielomianów

Niech

- x oznacza *zmienną zespoloną*, tzn. zmienną należącą do ciała $\mathbb{C}$ liczb zespolonych,
- $\mathbb{K}$ zaś jedno z ciał liczbowych:
  - $\mathbb{C}$ - liczb zespolonych lub
  - $\mathbb{R}$ - liczb rzeczywistych

Definicja 6.1.1. Wielomianem *nad ciałem liczbowym* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję zmiennej zespolonej* x*, określoną wzorem*

$$f(x) \ = \ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie

- *liczby* a_k *należą do ciała* $\mathbb{K}$ *i nazywane są* **współczynnikami wielomianu** *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*)*
- n *jest liczbą całkowitą nieujemną*

- *a_0 nazywamy* **wyrazem wolnym**
- *jeżeli $a_n \neq 0$, to liczbę n nazywamy* **stopniem wielomianu**.

Twierdzenie 6.1.1. *Dwa wielomiany*

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & a_n x^n + \ldots + a_0 & a_n \neq 0 \\ g(x) & = & b_m x^m + \ldots + b_0 & b_m \neq 0 \end{array}$$

- *dla których $m \leq n$*
- *które w $n+1$ różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przybierają równe wartości*
- *są tego samego stopnia*
- *mają odpowiednie współczynniki równe*

*są **identyczne**.*

Definicja 6.1.2. Pierwiastkiem *niezerowego wielomianu $f(x)$ nazywamy liczbę a, gdy*

$$f(a) = 0$$

Pierwiastek niezerowego wielomianu nazywamy także

- **miejscem zerowym**
- **zerem wielomianu**

Twierdzenie 6.1.2 (Bézout)**.** *Wielomian $f(x)$ naturalnego stopnia jest wtedy i tylko wtedy podzielny przez dwumian $x - a$, gdy liczba a jest zerem tego wielomianu.*

Definicja 6.1.3. k-krotnym pierwiastkiem *niezerowego wielomianu $f(x)$ nazywamy liczbę a gdy $(x-a)^k$ jest dzielnikiem tego wielomianu, zaś $(x-a)^{k+1}$ nie jest jego dzielnikiem.*

Liczbę k nazywamy **krotnością** *tego pierwiastka.*

[9, Rozdział 9.1]

6.2 Wielomiany nad ciałem liczb zespolonych

Niech $W_n(z)$ będzie wielomianem naturalnego stopnia n o współczynnikach rzeczywistych

$$W_n \quad = \quad a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0$$

gdzie

$$a_i \in R \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

Twierdzenie 6.2.1. *Jeżeli $W_n(z)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to*

$$\overline{W_n(z)} \quad = \quad W_n(\overline{z})$$

[9, Rozdział 9.2]

Twierdzenie 6.2.2. *Jeżeli a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W_n(z)$, to liczba $\overline{a}$, sprzężona z pierwiastkiem a, jest także k-krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.*

$$W_n(a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W_n\,(\overline{a}) = 0$$

[9, Rozdział 9.2]

6.3 Ciało funkcji wymiernych

Definicja 6.3.1. Funkcją wymierną *nad ciałem liczbowym $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję zmiennej zespolonej x, określoną wzorem postaci*

$$f(x) \;=\; \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \qquad Q \neq 0$$

gdzie $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ są wielomianami zmiennej zespolonej x nad ciałem liczbowym K.

Funkcję wymierną nazywamy

- **właściwą** *gdy $n < m$*
- **niewłaściwą**, *gdy $m \geq n$*

Twierdzenie 6.3.1. *Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.*

$$\frac{P_p(x)}{Q_q(x)} = W_w(x) + \frac{R_r(x)}{Q_q(x)}$$

przy czym

- $w = 0$ *lub* $w = p - q$ *gdy* $P_p(x)/Q_q(x)$ *jest funkcją wymierną niewłaściwą*
- $r < q$

[9, Rozdział 9.3]

6.3.1 Ułamki proste

Definicja 6.3.2. Ułamkiem prostym *nad ciałem* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję wymierną nad tym ciałem:*

$$\frac{P_n(x)}{[Q_m(x)]^n}, \qquad Q \neq 0$$

przy czym

- Q *jest wielomianem* ***nierozkładalnym*** *w tym ciele*
- $n < m$
- n *jest liczbą naturalną*

Ułamki proste nad ciałem

- $\mathbb{C}$ liczb zespolonych mają postać

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \text{gdzie } A, a \text{ - liczby zespolone}$$

- $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych mają postać
  - ułamki proste pierwszego rodzaju

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \text{gdzie } A, a \text{ - liczby rzeczywiste}$$

– ułamki proste drugiego rodzaju

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \qquad \text{gdzie } A, B, p, q \text{ - liczby rzeczywiste, } p^2-4q<0$$

Twierdzenie 6.3.2. ***Każdą funkcję wymierną właściwą*** *(Def. 6.3.1, str. 53) w ciele $\mathbb{C}$ liczb zespolonych ($\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych) można przedstawić w postaci* ***sumy ułamków prostych****.*

Każdemu czynnikowi w rozkładzie jej ***mianownika*** *typu*

- $(x-a)^n$ *(w ciele $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$) odpowiada składnik postaci*

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}$$

- $(x^2+px+q)^n$, $p^2-4q<0$ *(w ciele $\mathbb{R}$) odpowiada składnik postaci*

$$\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}+\frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}$$

[9, Rozdział 9.3]

Rozdział 7

Macierze

Definicja 7.0.3. *Niech K będzie pewnym zbiorem.* **Macierzą** *nazywamy odwzorowanie postaci:*

$$\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \ni (i, j) \to a_{ij} \in K$$

Element a_{ij} nazywać będziemy wyrazem macierzy. Macierz będziemy zapisywać w postaci $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ lub:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[7, Definicja 3.8.1]

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nazywamy i-tym ***wierszem***, ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{jm}$ nazywamy j-tą ***kolumną*** macierzy.

Gdy $m \neq n$ macierz A nazywamy macierzą ***prostokątną***.
Gdy $m = n$ macierz A nazywamy macierzą ***kwadratową***.

Definicja 7.0.4. *Wiersz (kolumnę) macierzy, której wszystkie elementy są zerami nazywamy* **wierszem (kolumną) zerowym**. *[9, Rozdział 2.3]*

7.1 Działania na macierzach

Niech K będzie pewnym ciałem (Def. 2.3.1, str. 16). Niech A i B będą macierzami o m wierszach i n kolumnach i $\alpha \in K$. [7, Definicja 3.8.2]

7.1.1 Suma macierzy

Definicja 7.1.1. Sumą macierzy *A i B nazywamy macierz*

$$A + B \quad := \quad [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

7.1.2 Iloczyn skalara i macierzy

Definicja 7.1.2. Iloczynem skalara α **i macierzy** *A nazwiemy macierz*

$$\alpha A \quad := \quad [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$$

7.1.3 Iloczyn macierzy

Niech teraz macierz A będzie macierzą o m wierszach i n ***kolumnach***, a macierz B macierzą o n ***wierszach*** i p kolumnach.

Definicja 7.1.3. Iloczynem macierzy *A i B nazywamy macierz*

$$AB \quad := \quad [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}]_{m \times p}$$

7.2 Szczególne rodzaje macierzy

7.2.1 Macierz jednostkowa

Definicja 7.2.1. *Macierz kwadratową (Def. 7, str. 57) nazywamy macierzą* **jednostkową** *gdy*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Macierz jednostkową będziemy oznaczać I.

7.2.2 Macierz nieosobliwa

Definicja 7.2.2. *Macierz kwadratową A nazywamy* **nieosobliwą** *(odwracalną), jeżeli istnieje macierz kwadratowa B taka, że*

$$AB = BA = I$$

[7, Definicja 3.8.4]

7.2.3 Macierz diagonalna

Definicja 7.2.3. *Macierz kwadratową $[a_{ij}]$ (Def. 7, str. 57) nazywamy macierzą* **diagonalną** *gdy*

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

7.2.4 Macierz transponowana

Definicja 7.2.4. Macierzą transponowaną *do macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy taką macierz $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, że dla każdego (i, j) zachodzi $a_{ij} = b_{ji}$. [7, Definicja 3.11.3]*

Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy przez A^T.

7.2.5 Macierz symetryczna

Definicja 7.2.5. *Jeżeli $A = A^T$, to macierz A nazywamy* **macierzą symetryczną**. *[4, Rozdział 4]*

7.2.6 Macierz antysymetryczna

Definicja 7.2.6. *Macierz kwadratową $[a_{ij}]$ nazywamy* **macierzą antysymetryczną** *jeżeli*

$$a_{ij} = -a_{ij} \qquad i \neq j$$

7.3 Rząd macierzy

Definicja 7.3.1. **Rzędem** $r(W)$ **macierzy** W *nazywamy największy stopień wyjętego z niej różnego od zera minora (Def. 8.1.1, str. 65), przy czym jeżeli wszystkie elementy macierzy są równe zero, to przyjmujemy, że rząd jej jest równy zero. [2, Rozdział 9.6]*

Wniosek. Macierz $A = [a_{ij}]_{m\times n} \qquad rzA \leq min(m,n)$

Wniosek. rzA nazywamy maksymalną ilość liniowo niezależnych wierszy (kolumn).

7.3.1 Własności

1. Wiersz lub kolumna zerowa (Def. 7.0.4, str. 57) nie zwiększa rzędu macierzy.
2. Jeśli 2 wiersze lub 2 kolumny są proporcjonalne to skreślenie jednego/jednej z nich nie zmienia rzędu macierzy.
3. Jeżeli wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn), to taki wiersz (kolumna) nie zwiększa rzędu macierzy.

7.4 Wartości i wektory własne

Niech V będzie przestrzenią wektorową (Def. 3.0.2, str. 17) nad ciałem (Def. 2.3.1, str. 16) K i f endomorfizmem (Def. 3.1.2, str. 20) w V.

Definicja 7.4.1. *Skalar $\lambda \in K$ nazywamy* **wartością własną** *endomorfizmu f, jeżeli*

$$\exists\, v \in V,\ v \neq 0: \qquad f(v) = \lambda v$$

Definicja 7.4.2. *Jeżeli λ jest własnością własną endomorfizmu f, to każdy niezerowy wektor v spełniający*

$$f(v) = \lambda v$$

nazywamy **wektorem własnym** *endomorfizmu f odpowiadającym λ.*

Definicja 7.4.3. Wartością własną *macierzy A o elementach K nazywamy taki skalar λ, że*

$$det\,(A - \lambda I) = 0$$

[7, Definicja 3.14.7]

Definicja 7.4.4. Wektorem własnym *macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ nazywamy niezerowy wektor $v \in K^n$ spełniający równanie*

$$(A - \lambda I)\,v = \bar{0}$$

[7, Definicja 3.14.7]

Definicja 7.4.5.

$$\Delta\,(\lambda) = det\,(\lambda I - A)$$

nazywamy **wielomianem charakterystycznym** *macierzy A. [7, Definicja 3.14.7]*

Definicja 7.4.6. *Równanie*

$$\Delta\,(\lambda) = 0$$

nazywamy **równaniem charakterystycznym** *macierzy A. [7, Definicja 3.14.7]*

Twierdzenie 7.4.1. *Jeśli macierz A jest symetryczna, to wszystkie wartości własne są rzeczywiste.*

Twierdzenie 7.4.2. *Jeśli macierz A jest symetryczna, to wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne (Def. 3.4.4, str. 29).*

Twierdzenie 7.4.3. *Jeśli dla wartości własnej λ istnieją dwa wektory własne $v, u \in K^n$ to ich kombinacja liniowa (Def. 3.0.3, str. 18) jest też wektorem własnym.*

Dowód. Niech $f(v) = \lambda v$ oraz $f(u) = \lambda u$. Zbadamy czy

$$f(\alpha u + \beta v) \stackrel{?}{=} \lambda(\alpha u + \beta v)$$

Z definicji odwzorowania liniowego (Def. 3.1.1, str. 20)

$$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Z założenia

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha\lambda u + \beta\lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$$

□

Twierdzenie 7.4.4. *Jeżeli λ jest wartością własną endomorfizmu f, to zbiór V_λ (wektorów własnych odpowiadających λ) jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V. [7, Twierdzenie 3.14.1]*

Rozdział 8

Wyznacznik macierzy kwadratowej

Definicja 8.0.7. *Niech*

- X *będzie* ***przestrzenią wektorową*** *(Def. 3.0.2, str. 17) nad ciałem* K *(Def. 2.3.1, str. 16)*

  $\dim X = n$ *(Def. 3.0.7, str. 19)*
- $f_0 = X^n \to K$ *będzie* ***formą*** n***-liniową antysymetryczną*** *(Def. 3.2.10, str. 26) taką, że* $f_0 \neq 0$
- u *jest* ***endomorfizmem*** *(Def. 3.1.2, str. 20) na* X
- *odwzorowanie*

$$g\Big(x_1, \ldots, x_n\Big) = f_0\Big(u(x_1), \ldots, u(x_n)\Big)$$

jest ***formą*** n***-liniową antysymetryczną***

Wyznacznikiem *endomorfizmu* u *nazywamy skalar*

$$\alpha \in K$$

że dla dowolnego $x_1, \ldots, x_n$ *zachodzi*

$$g \;=\; \alpha\, f_0$$

czyli

$$f_0\Big(u(x_1), \ldots, u(x_n)\Big) \;=\; \alpha\, f_0\Big(x_1, \ldots, x_n\Big)$$

[7, Definicja 3.11.1]

Definicja 8.0.8. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej A *(Def. 7, str. 57) nazywamy wyznacznik endomorfizmu (Def. 3.1.2, str. 20) przestrzeni* X *odpowiadającego danej macierzy przy wybranej bazie rozpatrywanej przestrzeni.*

[4, Rozdział 5] [7, Definicja 3.11.2]

Wyznacznik oznaczamy

$$\det A \quad , \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wartość wyznacznika macierzy jest niezależna od wyboru przestrzeni X i wyboru bazy tej przestrzeni.

Twierdzenie 8.0.5 (wartość wyznacznika)**.** *Jeśli jest dana macierz*

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

to wartość wyznacznika $\det A$ *oblicza się ze wzoru*

$$\det A \quad = \quad \sum \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n)\ a_{i_1 1}\, a_{i_2 2}\, \ldots\, a_{i_n n}$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje (Def. **??***, str.* **??***)* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *zbioru* $\{1, 2, \ldots, n\}$*.*

[4, Rozdział 5]

W szczególnych przypadkach mamy

dla $n = 1$

$$det\,[a_{11}] \quad = \quad a_{11}$$

dla $n = 2$

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad = \quad a_{11}\,a_{22} \; - \; a_{21}\,a_{12}$$

dla $n = 3$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{array}{l} a_{11}\;a_{22}\;a_{33} \quad + \quad a_{21}\;a_{32}\;a_{13} \\ + \; a_{31}\;a_{12}\;a_{23} \quad - \quad a_{21}\;a_{12}\;a_{33} \\ - \, a_{11}\,a_{32}\,a_{23} \; - \; a_{31}\,a_{22}\,a_{13} \end{array}$$

8.1 Podwyznaczniki

Definicja 8.1.1. Minorem (podwyznacznikiem) *elementu* a_{ij} *macierzy* A *nazywamy* ***wyznacznik*** *macierzy powstałej z* A *przez* ***skreślenie*** **i**-*tego* ***wiersza*** *oraz* **j**-*tej* ***kolumny****.*

Minor oznaczmy M_{ij}.

8.2 Twierdzenie Laplace'a

Definicja 8.2.1. Dopełnieniem algebraicznym *elementu* a_{ij} *nazywamy wartość*

$$A_{ij} \quad = \quad (-1)^{i+j}\,M_{ij}$$

Twierdzenie 8.2.1 (Laplace'a)**.** *Dla każdej macierzy* A *o wymiarach* $n \times n$ *wyznacznik* $\det A$ *spełnia regułę*

$$\det A \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

gdzie **i** *oznacza* ***numer*** *dowolnie wybranego* ***wiersza*** *lub*

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

gdzie **j** *oznacza* ***numer*** *dowolnie wybranej* ***kolumny***.

8.3 Własności wyznacznika

[9, Rozdział 2.3]

- Wyznacznik macierzy kwadratowej jest równy wyznacznikowi macierzy transponowanej.

$$\det A = \det A^T$$

- Przestawienie dwóch wierszy (kolumn) w macierzy wyznacznika jest równoważne pomnożeniu wyznacznika przez -1
- Wyznacznik macierzy o dwóch jednakowych wierszach (kolumnach) jest równy zero.
- Mnożąc wiersz (kolumnę) macierzy przez liczbę mnożymy przez tę liczbę cały wyznacznik tej macierzy.
- Wyznacznik o dwóch proporcjonalnych wierszach (kolumnach) jest równy zeru.
- Wyznacznik macierzy mającej wiersz (kolumnę) zerowy (Def. 7.0.4, str. 57) jest równy zeru.
- Jeżeli w macierzy jeden z wierszy (lub jedna z kolumn) jest kombinacją liniową pozostałych wierszy (lub kolumn), to wyznacznik tej macierzy jest równy zeru.
- Wyznacznik nie zmieni wartości, jeżeli do wiersza (kolumny) jego macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn).
- W macierzy o wyznaczniku równym zeru wiersze (kolumny) są liniowo zależne.

8.4 Wyznacznik układu wektorów

Definicja 8.4.1. *Jeżeli*

- $B = (b_1, \ldots, b_n)$ *jest bazą (Def. 3.0.6, str. 19) w przestrzeni* X *(Def. 3.0.2, str. 17)*
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$
- *oraz*

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i \, b_i$$

to **wyznacznikiem układu wektorów** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *nazywamy* ***wyznacznik macierzy****, której* ***kolumny*** *stanowią* ***współrzędne*** *wektorów względem bazy* B *i zapisujemy*

$$\det{}_B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

[7, Definicja 3.11.4]

Rozdział 9

Układy równań

9.1 Równania liniowe

Niech

- f będzie przekształceniem liniowym (Def. 3.1.1, str. 20) przestrzeni (Def. 3.0.2, str. 17) X w Y
- $b \in Y$

Definicja 9.1.1. **Równaniem liniowym** *nazywamy równanie postaci*

$$f(x) \quad = \quad b$$

gdzie x jest ***szukanym wektorem****.*

[7, Definicja 3.13.1]

Definicja 9.1.2. *Równanie liniowe*

$$f(x) = b$$

gdzie

$$b \neq 0$$

nazywamy **równaniem liniowym niejednorodnym**.

Definicja 9.1.3. *Równanie liniowe*

$$f(x) \quad = \quad 0$$

nazywamy **równaniem jednorodnym stowarzyszonym** *z równaniem*

$$f(x) \quad = \quad b$$

9.1.1 Układy równań

Definicja 9.1.4. *Jeżeli*

- $\dim X \; = \; m$
- $\dim Y \; = \; n$

to otrzymujemy **układ równań**

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \ddots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

lub równoważną postać macierzową (Def. 7.0.3, str. 57)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Definicja 9.1.5. Kolumną wyrazów wolnych *układu równań nazywamy ciąg, którego kolejnymi wyrazami są*

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

[9, Rozdział 2.5]

Definicja 9.1.6. Układem równań niejednorodnym *nazywamy układ złożony z równań niejednorodnych (Def. 9.1.2, str. 70).*

Definicja 9.1.7. Układem równań jednorodnym *nazywamy układ złożony z równań jednorodnych (Def. 9.1.3, str. 70).*

Twierdzenie 9.1.1. *Układ równań jednorodnych przy*

$$m = n$$

posiada **tylko jedno rozwiązanie zerowe** *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det [a_{ij}] \neq 0$$

[7, Wniosek 3.13.5]

Twierdzenie 9.1.2. *Układ równań jednorodnych przy*

$$m = n$$

ma **rozwiązania niezerowe** *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det [a_{ij}] = 0$$

[7, Wniosek 3.13.5]

9.2 Układ Cramera

Definicja 9.2.1. *Jeżeli*

- $f : X \to X$ *jest endomorfizmem (Def. 3.1.2, str. 20)*
- *macierz* $[a_{ij}]_{n\times n}$ *jest macierzą* f
- $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

to układ nazywamy **układem Cramera**.

[7, Twierdzenie 3.13.6] [9, Rozdział 2.5]

9.2.1 Rozwiązywanie układów równań metodą Cramera

Niech

- $A = [a_{ij}]_{n\times n}$
- D_k będzie macierzą powstałą przez **zastąpienie** k-tej **kolumny** macierzy A **kolumną wyrazów wolnych** układu.

$$D_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Twierdzenie 9.2.1 (Cramera)**.** *Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie, dane wzorami Cramera*

$$x_1 = \frac{\det\ D_1}{\det\ A}, \quad x_2 = \frac{\det\ D_2}{\det\ A}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det\ D_n}{\det\ A}$$

[9, Rozdział 2.5]

9.3 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Twierdzenie 9.3.1 (Kroneckera-Capellego)**.** *Układ równań* ***ma rozwiązanie*** *wtedy i tylko wtedy, gdy* ***rząd macierzy współczynników***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

równa się rzędowi *tzw.* macierzy uzupełnionej

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

Co oznaczamy

$$rz\, A = rz\, U$$

[7, Twierdzenie 3.13.3]

Twierdzenie 9.3.2 (o liczbie rozwiązań)**.** *Jeśli*

- $rz A = rz U = m$ *(ilości kolumn macierzy A), to układ ma* **dokładnie jedno** *rozwiązanie*
- $rz\, A = rz\, U = r < m$*, to układ ma* **nieskończenie wiele** *rozwiązań zależnych od* $n - r$ *parametrów*

Rozdział 10

Geometria analityczna

Definicja 10.0.1. *Niech*

- χ *będzie przestrzenią afiniczną (Def. 3.5.1, str. 30)*
- *przestrzeń euklidesowa* $\vec{E_n}$ *(Def. 3.4.2, str. 28) będzie przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni afinicznej* χ *(Def. 3.5.2, str. 30)*

Przestrzeń χ *nazywamy, wówczas,* **afiniczną przestrzenią euklidesową** *i oznaczamy*

$$E_n$$

[7, Definicja 5.1.1]

10.1 Układy współrzędnych

10.1.1 Kartezjański układ współrzędnych

Definicja 10.1.1. *Niech*

- E_3 *będzie trójwymiarową (Def. 3.0.7, str. 19) afiniczną przestrzenią euklidesową*

- *$(0;\ e_1, e_2, e_3)$ będzie układem współrzędnych (Def. 3.5.4, str. 31) w przestrzeni E_3*
- *wektory e_1, e_2, e_3 tworzą bazę* ***ortonormalną*** *(Def. 3.4.5, str. 29) i wyznaczają osie liczbowe X, Y, Z przez punkt 0*

Wówczas prostokątny układ współrzędnych o początku w punkcie 0 i osiach X, Y, Z

$$(0;\ e_1, e_2, e_3)$$

nazywamy **układem kartezjańskim**.

[7, Definicja 5.1.1]

Wektory stanowiące bazę układu kartezjańskiego

$$e_1,\ e_2,\ e_3$$

oznacza się przez

$$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$$

Wektor

$$v \ = \ x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \quad \in \quad \vec{E_3}$$

dany w E_3 przy zadanym kartezjańskim układzie współrzędnych będziemy zapisywać

$$v \ = \ [x, y, z]$$

[7, Definicja 5.1.1]

10.1.2 Biegunowy układ współrzędnych

TODO

[9, Rozdział 5.C.1]

10.1.3 Walcowy układ współrzędnych

TODO

[9, Rozdział 5.C.1]

10.1.4 Sferyczny układ współrzędnych

TODO

[9, Rozdział 5.C.1]

10.2 Orientacja przestrzeni wektorowej rzeczywistej

Definicja 10.2.1. *Niech*

- *V będzie* ***przestrzenią wektorową*** *(Def. 3.0.2, str. 17) rzeczywistą n-wymiarową (Def. 3.0.7, str. 19)*
- *B i B' będą dwiema* ***bazami*** *(Def. 3.0.6, str. 19) w przestrzeni V*

Mówimy, że bazy B i B' są **zgodnie zorientowane**, *jeżeli*

$$\det{}_B(B') > 0$$

Mówimy, że bazy B i B' są **przeciwnie zorientowane**, *jeżeli*

$$\det{}_B(B') < 0$$

(Def. 8.4.1, str. 67)

[7, Definicja 5.1.3]

Definicja 10.2.2. *TODO Przestrzen wektorowa zorientowana*

[7, Definicja 5.1.4]

Definicja 10.2.3. *TODO Przestrzen afiniczna zorientowana*

[7, Definicja 5.1.4]

10.3 Iloczyn skalarny

Twierdzenie 10.3.1. *Niech*

- E_3 *będzie trójwymiarową (Def. 3.0.7, str. 19) afiniczną przestrzenią euklidesową (Def. 10.0.1, str. 75)*
- $(0;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *będzie* ***kartezjańskim*** *układem współrzędnych (Def. 10.1.1, str. 76) w przestrzeni* E_3
- $u, v \ \in \ \vec{E}_3$
- $u = [x_1, y_1, z_1]$
- $v = [x_2, y_2, z_2]$

Wówczas ***iloczyn skalarny*** *(Def. 3.4.1, str. 28) wektorów u i v wyraża się wzorem*

$$(u|v) \ = \ x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$$

lub korzystając z innego oznaczenia iloczynu skalarnego

$$u \circ v \ = \ x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$$

Dowód. Wektory u i v zapisujemy przy użyciu wektorów $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ bazy (Def. 3.0.6, str. 19) przestrzeni $\vec{E}_3$

$$\begin{aligned} u &= x_1\, \vec{i} + y_1\, \vec{j} + z_1\, \vec{k} \\ v &= x_2\, \vec{i} + y_2\, \vec{j} + z_2\, \vec{k} \end{aligned}$$

Obliczamy iloczyn skalarny wektorów u i v

$$(u|v) \ = \ (x_1\, \vec{i} + y_1\, \vec{j} + z_1\, \vec{k} \mid x_2\, \vec{i} + y_2\, \vec{j} + z_2\, \vec{k})$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego (Wł. 3.4.1, str. 28)

$$
\begin{aligned}
(u|v) &= (x_1\,\vec{i} \mid x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}) \\
&\quad + (y_1\,\vec{j} \mid x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}) \\
&\quad + (z_1\,\vec{k} \mid x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(u|v) &= (x_1\,\vec{i} \mid x_2\,\vec{i}) + (x_1\,\vec{i} \mid y_2\,\vec{j}) + (x_1\,\vec{i} \mid z_2\,\vec{k}) \\
&\quad + (y_1\,\vec{j} \mid x_2\,\vec{i}) + (y_1\,\vec{j} \mid y_2\,\vec{j}) + (y_1\,\vec{j} \mid z_2\,\vec{k}) \\
&\quad + (z_1\,\vec{k} \mid x_2\,\vec{i}) + (z_1\,\vec{k} \mid y_2\,\vec{j}) + (z_1\,\vec{k} \mid z_2\,\vec{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(u|v) &= x_1\,x_2\,(\vec{i} \mid \vec{i}) + x_1\,y_2\,(\vec{i} \mid \vec{j}) + x_1\,z_2\,(\vec{i} \mid \vec{k}) \\
&\quad + y_1\,x_2\,(\vec{j} \mid \vec{i}) + y_1\,y_2\,(\vec{j} \mid \vec{j}) + y_1\,z_2\,(\vec{j} \mid \vec{k}) \\
&\quad + z_1\,x_2\,(\vec{k} \mid \vec{i}) + z_1\,y_2\,(\vec{k} \mid \vec{j}) + z_1\,z_2\,(\vec{k} \mid \vec{k})
\end{aligned}
$$

Ponieważ wektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tworzą bazę ortonormalną (Def. 3.4.5, str. 29), to

$$
\begin{aligned}
(\vec{i} \mid \vec{i}) &= 1 \\
(\vec{j} \mid \vec{j}) &= 1 \\
(\vec{k} \mid \vec{k}) &= 1 \\
(\vec{i} \mid \vec{j}) &= 0 \\
(\vec{i} \mid \vec{k}) &= 0 \\
(\vec{j} \mid \vec{i}) &= 0 \\
(\vec{j} \mid \vec{k}) &= 0 \\
(\vec{k} \mid \vec{i}) &= 0 \\
(\vec{k} \mid \vec{j}) &= 0
\end{aligned}
$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$
(u|v) = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2
$$

□

[7, Twierdzenie 5.1.1]

10.3.1 Długość wektora

Twierdzenie 10.3.2. *Niech*

- E_3 *będzie trójwymiarową (Def. 3.0.7, str. 19) afiniczną przestrzenią euklidesową (Def. 10.0.1, str. 75)*
- $(0;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *będzie* ***kartezjańskim*** *układem współrzędnych (Def. 10.1.1, str. 76) w przestrzeni* E_3
- $u \ \in \ \vec{E}_3$
- $u = [x, y, z]$

Długość *(Def. 3.4.6, str. 29) tego wektora oznaczamy*

$$|u|$$

a wyraża się wzorem

$$|u| \ = \ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Dowód. Zgodnie z definicją długości wektora (Def. 3.4.6, str. 29) mamy

$$\|v\| \ = \ \sqrt{(v|v)}$$

Zgodnie z twierdzeniem (Tw. 10.3.1, str. 78) mamy

$$(v|v) \ = \ x\,x + y\,y + z\,z$$

czyli

$$(v|v) \ = \ x^2 + y^2 + z^2$$

Wstawiając do długości wektora mamy

$$\|v\| \;=\; \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

i korzystając z nowego oznaczenia

$$|v| \;=\; \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

□

[7, Wniosek 5.1.1]

Twierdzenie 10.3.3. *Niech*

- *E_3 będzie trójwymiarową (Def. 3.0.7, str. 19) afiniczną przestrzenią euklidesową (Def. 10.0.1, str. 75)*
- *$(0;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ będzie* ***kartezjańskim*** *układem współrzędnych (Def. 10.1.1, str. 76) w przestrzeni E_3*
- *$A(x_1, y_1, z_1)$ będzie dowolnym punktem przestrzeni E_3*
- *$B(x_2, y_2, z_2)$ będzie dowolnym punktem przestrzeni E_3*

Odległość punktów *A i B wyraża się wzorem*

$$|AB| \;=\; \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Dowód. Korzystając z różnicy punktów (Def. 3.5.3, str. 31) otrzymujemy **wektor łączący punkty** A i B

$$\overrightarrow{AB}$$

Przy zadanym kartezjańskim układzie współrzędnych możemy zapisać (TODO poszukać definicji dla wyprowadzenia ponizej)

$$\overrightarrow{AB} \;=\; [x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1]$$

Długość tego wektora wynosi

$$|\overrightarrow{AB}| \;=\; \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

□

[7, Definicja 5.1.2]

10.3.2 Związek iloczynu skalarnego, długości wektorów oraz kąta zawartego między nimi

Twierdzenie 10.3.4. *Niech*

- E_3 *będzie trójwymiarową (Def. 3.0.7, str. 19) afiniczną przestrzenią euklidesową (Def. 10.0.1, str. 75)*
- $(0;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *będzie kartezjańskim układem współrzędnych (Def. 10.1.1, str. 76) w przestrzeni* E_3
- $x, y, z \ \in \ \vec{E}_3$
- $z = y - x$
- $\varphi \ = \ \angle(x, y)$

TODO rysunek

Związek *między* ***iloczynem skalarnym*** *wektorów* x*,* y*, ich* ***długościami*** $|x|$*,* $|y|$*, oraz* ***kątem*** *zawartym między tymi wektorami* $\angle(x, y)$ *wyraża się wzorem*

$$(x \mid y) \ = \ |x| \, |y| \ \cos\varphi$$

Dowód. **Wzór kosinusów** z geometrii elementarnej zastosowany do utworzonego z wektorów x, y, z trójkąta, gdzie długości boków, to długości wektorów (Tw. 10.3.2, str. 80), przyjmuje postać

$$|z|^2 \;=\; |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos\varphi$$

Z drugiej strony, korzystając z **definicji długości wektora** (Def. 3.4.6, str. 29) mamy

$$|z|^2 \;=\; |y - x|^2 \;=\; \left(\sqrt{(y - x \mid y - x)}\right)^2$$

Ponieważ **iloczyn skalarny** jest **określony dodatnio** (Def. 3.4.1, str. 28), to

$$|z|^2 \;=\; (y - x \mid y - x)$$

Wykorzystując **dwuliniowość** (Def. 3.2.2, str. 22) i **symetryczność** (Def. 3.2.4, str. 24) iloczynu skalarnego, otrzymujemy

$$|z|^2 \;=\; (y \mid y) + (x \mid x) - 2\,(x \mid y)$$

Z definicji długości wektora (Def. 3.4.6, str. 29) wstawiamy do równania i otrzymujemy

$$|z|^2 \;=\; |y|^2 + |x|^2 - 2\,(x \mid y)$$

Porównując wyrażenia na $|z|^2$, otrzymujemy ostatecznie

$$(x \mid y) \;=\; |x|\,|y|\,\cos\varphi$$

□

[6, Paragraf 3.1.1]

10.4 Iloczyn wektorowy

Niech $\vec{E}_3$ będzie **zorientowaną** (Def. 10.2.2, str. 77) przestrzenią euklidesową (Def. 3.4.2, str. 28).

Definicja 10.4.1. **Iloczynem wektorowym** *w* $\vec{E}_3$ *nazywamy odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5)*

$$\times : \ \vec{E}_3 \times \vec{E}_3 \to \vec{E}_3$$

określone

1. *jeżeli* $v_1, v_2 \in \vec{E}_3$ *są* ***liniowo zależne*** *(Def. 3.0.5, str. 18), to*

$$v_1 \times v_2 \ = \ 0$$

2. *jeżeli* $v_1, v_2 \in \vec{E}_3$ *są* ***liniowo niezależne*** *(Def. 3.0.4, str. 18), to*

$$v_1 \times v_2 \ = \ v$$

   gdzie v *spełnia warunki:*

   - $v \perp v_1$
   - $v \perp v_2$
   - $|v| \ = \ |v_1|\,|v_2|\,\sin\angle(v_1, v_2), \qquad \angle(v_1, v_2) \in (0, \pi)$
   - *trójka* (v_1, v_2, v) *jest* ***zgodnie zorientowana*** *(Def. 10.2.1, str. 77) z przyjętą w* $\vec{E}_3$ *bazą (Def. 3.0.6, str. 19)*

[7, Definicja 5.1.8]

10.4.1 Własności iloczynu wektorowego

Jeżeli

- $v_1, v_2, v_3 \in \vec{E}_3$
- $\alpha \in \mathbb{R}$

to

1. $v_1 \times v_2 = -v_2 \times v_1$
2. $v_1 \times (v_2 + v_3) = (v_1 \times v_2) + (v_1 \times v_3)$
3. $\alpha (v_1 \times v_2) = (\alpha v_1) \times v_2$

[7, Twierdzenie 5.1.3]

10.4.2 Interpretacja geometryczna

TODO rysunek

Twierdzenie 10.4.1. *Jeżeli*

- v_1, v_2 *są niezerowymi wektorami* *to* ***długość*** *wektora*

$$v_1 \times v_2$$

liczbowo ***równa*** *się* ***polu równoległoboku*** *zbudowanego na tych wektorach.*

$$P = |v_1 \times v_2|$$

[7, Wniosek 5.1.2]

10.4.3 Iloczyn wektorowy w układzie kartezjańskim

Twierdzenie 10.4.2. *Jeżeli*

- *w* E_3 *dany jest kartezjański układ współrzędnych* $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *(Def. 10.1.1, str. 76)*
- $v_1 = [x_1, y_1, z_1]$
- $v_2 = [x_2, y_2, z_2]$

to

$$v_1 \times v_2 = [y_1\, z_2 - z_1\, y_2,\ z_1\, x_2 - x_1\, z_2,\ x_1\, y_2 - y_1\, x_2]$$

lub

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

lub

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Dowód. Obliczamy iloczyn wektorowy wektorów v_1 i v_2

$$v_1 \times v_2 = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

Korzystając z własności iloczynu wektorowego (Wł. 10.4.1, str. 85)

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= (x_1 \vec{i}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &+ (y_1 \vec{j}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &+ (z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= (x_1 \vec{i}) \times (x_2 \vec{i}) + (x_1 \vec{i}) \times (y_2 \vec{j}) + (x_1 \vec{i}) \times (z_2 \vec{k}) \\ &+ (y_1 \vec{j}) \times (x_2 \vec{i}) + (y_1 \vec{j}) \times (y_2 \vec{j}) + (y_1 \vec{j}) \times (z_2 \vec{k}) \\ &+ (z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i}) + (z_1 \vec{k}) \times (y_2 \vec{j}) + (z_1 \vec{k}) \times (z_2 \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= x_1 x_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) \\ &+ z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \times \vec{k}) \end{aligned}$$

Ponieważ wektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tworzą bazę ortonormalną (Def. 3.4.5, str. 29), to

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 \\ \vec{j} \times \vec{j} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 = & \ (y_1\, z_2 - z_1\, y_2)\, \vec{i} \\ & + (z_1\, x_2 - x_1\, z_2)\, \vec{j} \\ & + (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)\, \vec{k} \end{aligned}$$

□

[7, Twierdzenie 5.1.4]

10.5 Iloczyn mieszany

Niech $\vec{E}_3$ będzie **zorientowaną** (Def. 10.2.2, str. 77) przestrzenią euklidesową (Def. 3.4.2, str. 28).

Definicja 10.5.1. Iloczynem mieszanym *w* $\vec{E}_3$ *nazywamy odwzorowanie (Def. 1.3.1, str. 5)*

$$\vec{E}_3 \times \vec{E}_3 \times \vec{E}_3 \to \mathbb{R}$$

takie, że

$$(v_1, v_2, v_3) \ \to \ (v_1 \ \times \ v_2) \ \circ \ v_3$$

[7, Definicja 5.1.9]

10.5.1 Własności iloczynu mieszanego

Jeśli $v_1, v_2, v_3 \in \vec{E}_3$, to

- $(v_1 \ \times \ v_2) \ \circ \ v_3 \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ v_1, v_2, v_3$ są **liniowo zależne** (Def. 3.0.5, str. 18) Dla wektorów niezerowych v_1, v_2, v_3 oznacza to, że są równoległe do pewnej płaszczyzny.
- $(v_1 \ \times \ v_2) \ \circ \ v_3 \ = \ v_1 \ \circ \ (v_2 \ \times \ v_3)$

[7, Twierdzenie 5.1.5]

10.5.2 Interpretacja geometryczna

Twierdzenie 10.5.1. *Jeżeli*

- *w* E_3 *dany jest kartezjański układ współrzędnych* $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *(Def. 10.1.1, str. 76)*
- $v_1 = [x_1, y_1, z_1]$
- $v_2 = [x_2, y_2, z_2]$
- $v_3 = [x_3, y_3, z_3]$

to

$$(v_1 \times v_2) \circ v_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

[7, Twierdzenie 5.1.6]

10.5.3 Iloczyn mieszany w układzie kartezjańskim

TODO rysunek

Twierdzenie 10.5.2. *Jeżeli*

- *v_1, v_2, v_3 są niezerowymi wektorami*

*to **wartość bezwzględna** iloczynu mieszanego*

$$(v_1 \times v_2) \circ v_3$$

***równa** się **objętości równoległościanu** zbudowanego na tych wektorach.*

$$V = \left|(v_1 \times v_2) \circ v_3\right|$$

[7, Wniosek 5.1.3]

10.6 Płaszczyzna w przestrzeni

Niech

- w E_3 dany będzie kartezjański układ współrzędnych $(0;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (Def. 10.1.1, str. 76)
- $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$
- $P\ (x, y, z)$
- $v = [v_1, v_2, v_3]$
- $u = [u_1, u_2, u_3]$
- v i u są **liniowo niezależne** (Def. 3.0.4, str. 18)
- $\vec{n} = v \times u$
- dana będzie **płaszczyzna** π
- $P_0 \in \pi$
- $P \in \pi$
- $v \,||\, \pi$
- $u \,||\, \pi$
- $\vec{n} \perp \pi$

10.6.1 Postać ogólna

Tworzymy wektor łączący punkty P i P_0 (Def. 3.5.3, str. 31) (Tw. 10.3.3, str. 81)

$$\overrightarrow{P_0\,P} \;=\; [x - x_0,\; y - y_0,\; z - z_0]$$

Przyjmujemy współrzędne wektora $\vec{n}$

$$\vec{n} \;=\; [A,\; B,\; C]$$

Równanie płaszczyzny π **przechodzącej** przez punkt P_0 i **prostopadłej** do $\vec{n}$ ($\vec{n}$ nazywamy **wektorem normalnym** płaszczyzny π) wyraża się wzorem

$$\overrightarrow{P_0\,P} \circ \vec{n} \;=\; 0$$

Z twierdzenia o iloczynie skalarnym w $\vec{E}_3$ (Def. 10.3.1, str. 78) z kartezjańskim układem współrzędnych (Def. 10.1.1, str. 76) otrzymujemy równanie płaszczyzny w następującej postaci

$$A\,(x - x_0) \;+\; B\,(y - y_0) \;+\; C\,(z - z_0) \;=\; 0$$

Przyjmując, że

$$D \;=\; -A\,x_0 \;-\; B\,y_0 \;-\; C\,z_0$$

otrzymujemy ***postać ogólną*** równania płaszczyzny π

$$A\,x \;+\; B\,y \;+\; C\,z \;+\; D \;=\; 0$$

[7, Równanie 5.2.4]

10.6.2 Postać odcinkowa

Niech

- π będzie płaszczyzną o równaniu ogólnym $Ax \;+\; By \;+\; Cz \;+\; D = 0$
- π **nie przechodzi** przez **początek** układu współrzędnych ($D \neq 0$)

- π **nie jest równoległa** do żadnej **osi** układu współrzędnych ($A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$)

Równanie płaszczyzny π możemy, wtedy zapisać w ***postaci odcinkowej***

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} \ = \ 1$$

lub, przyjmując oznaczenia $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{b} \ = \ 1$$

Punkty

$$(a, 0, 0) \quad (0, b, 0) \quad (0, 0, c)$$

są punktami przecięcia płaszczyzny π z osiami układu współrzędnych.

[7, Równanie 5.2.6]

10.6.3 Postać parametryczna

$$\pi \, : \ P \ = \ P_0 + t\,v + s\,u, \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

[7, Równanie 5.2.1]

10.7 Prosta w przestrzeni

Niech

- w E_3 dany będzie kartezjański układ współrzędnych $(0;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (Def. 10.1.1, str. 76)
- $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$
- $v \ = \ [v_1, v_2, v_3]$
- dana będzie **prosta** l
- $P_0 \ \in \ l$
- $v \,||\, l$

10.7.1 Postać kanoniczna

$$l: \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}, \qquad v_1\, v_2\, v_3 \neq 0$$

[9, Rozdział 5.2]

10.7.2 Postać parametryczna

$$l: P = P_0 + t\,v, \qquad t \in \mathbb{R}$$

[7, Równanie 5.2.1]

10.7.3 Postać krawędziowa

Jeżeli

- π_1 będzie płaszczyzną o równaniu

$$\pi_1: A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0$$

- π_2 będzie płaszczyzną o równaniu

$$\pi_2: A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0$$

- płaszczyzny π_1 i π_2 **nie są równoległe**, czyli wektory

$$\vec{n}_1 = [A_1,\, B_1,\, C_1]$$

  oraz

$$\vec{n}_2 = [A_2,\, B_2,\, C_2]$$

  są **liniowo niezależne** (Def. 3.0.4, str. 18) to układ równań (Def. 9.1.4, str. 70)

$$\begin{cases} A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z + D_1 & = & 0 \\ A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z + D_2 & = & 0 \end{cases}$$

nazywamy ***postacią krawędziową*** prostej l.

[7, Rozdział 5.2]

10.8 Wzajemne położenie w przestrzeni

10.8.1 Wzajemne położenie dwóch prostych

Niech

- l_1 będzie prostą o równaniu

$$l_1 \,:\, P \;=\; P_1 + t\, v_1$$

- l_2 będzie prostą o równaniu

$$l_2 \,:\, P \;=\; P_2 + t\, v_2$$

Proste mogą być w stosunku do siebie

- ***pokrywające*** się

  Proste l_1 i l_2 pokrywają się, jeżeli wektory v_1, v_2 oraz $\overrightarrow{P_0\, P}$ są parami **liniowo zależne** (Def. 3.0.5, str. 18), czyli są **równoległe**.

- ***równoległe*** (nie mają punkty wspólnego i leżą w jednej płaszczyźnie)

  Proste l_1 i l_2 są równoległe, jeżeli **nie są pokrywające** się, a wektory v_1 i v_2 są **liniowo zależne** (Def. 3.0.5, str. 18), czyli są **równoległe**.

- ***przecinające*** się

  Proste l_1 i l_2 przecinają się, jeżeli układ równań (Def. 9.1.4, str. 70) tych prostych posiada **dokładnie jedno rozwiązanie**.

- ***skośne*** (nie leżą w jednej płaszczyźnie)

  Proste l_1 i l_2 są skośne, jeżeli wektory v_1, v_2 oraz $\overrightarrow{P_0\,P}$ są parami **liniowo niezależne** (Def. 3.0.4, str. 18).

[7, Rozdział 5.2]

10.8.2 Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Niech

- π_1 będzie płaszczyzną o równaniu

$$\pi_1 \; : \; \overrightarrow{P_1\,P} \circ \vec{n}_1 \;=\; 0$$

- π_2 będzie płaszczyzną o równaniu

$$\pi_2 \; : \; \overrightarrow{P_2\,P} \circ \vec{n}_2 \;=\; 0$$

Dwie płaszczyzny π_1 i π_2 mogą znajdować się w następujących położenia względem siebie

- Płaszczyzny π_1 i π_2 ***pokrywają*** się

  Warunki

  - wektory $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ są **równoległe**
  - wektory $\vec{n}_1$ i $\overrightarrow{P_1\,P_2}$ ($\vec{n}_2$ i $\overrightarrow{P_1\,P_2}$) są **prostopadłe**

- Płaszczyzny π_1 i π_2 są ***równoległe***

  Warunki

  - płaszczyzny π_1 i π_2 **nie pokrywają** się
  - wektory $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ są **równoległe**

- Płaszczyzny π_1 i π_2 są ***przecinają*** się

  Warunek

  - wektory $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ są **nie są równoległe**

[7, Rozdział 5.2]

10.8.3 Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Niech

- l będzie prostą o równaniu

$$l : \; P \; = \; P_1 + t\, v$$

- π będzie płaszczyzną o równaniu

$$\pi : \; \overrightarrow{P_0\, P} \circ \vec{n} \; = \; 0$$

Prosta l oraz płaszczyzna π mogą znajdować się w następujących położenia względem siebie

- Prosta l ***leży*** na płaszczyźnie π
  Warunki

$$v \circ \vec{n} \; = \; 0$$

  i

$$\overrightarrow{P_0\, P_1} \circ \vec{n} \; = \; 0$$

- Prosta l jest ***równoległa*** do płaszczyzny π
  Warunki

$$v \circ \vec{n} \; = \; 0$$

  i

$$\overrightarrow{P_0\, P_1} \circ \vec{n} \; \neq \; 0$$

- Prosta l ***przebija*** płaszczyznę π
  Warunek

$$v \circ \vec{n} \; \neq \; 0$$

[7, Rozdział 5.2]

10.8.4 Pęk płaszczyzn

Niech

- dana będzie prosta l opisana równaniem w postaci krawędziowej (Def. 10.7.3, str. 94)

$$\begin{cases} \pi_1 \; : \; A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 \; = \; 0 \\ \pi_2 \; : \; A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 \; = \; 0 \end{cases}$$

- płaszczyzny π_1 i π_2 **nie są równoległe**, czyli wektory

$$\vec{n}_1 \; = \; [A_1,\, B_1,\, C_1]$$

oraz

$$\vec{n}_2 \; = \; [A_2,\, B_2,\, C_2]$$

są **liniowo niezależne** (Def. 3.0.4, str. 18)

Definicja 10.8.1. **Pękiem płaszczyzn** *o krawędzi l nazywamy* ***zbiór wszystkich*** *płaszczyzn, na których leży prosta l.*

[9, Rozdział 5.3]

Pęk płaszczyzn tworzy rodzinę płaszczyzn

$$\lambda_1\,\pi_1 \; + \; \lambda_2\,\pi_2 \; = \; 0 \qquad \lambda_1^2 \; + \; \lambda_2^2 \; > \; 0$$

czyli

$$\lambda_1\,(A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1) \; + \; \lambda_2\,(A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2) \; = \; 0$$

[9, Rozdział 5.3]

10.9 Obszary na płaszczyźnie

TODO

10.9.1 Obszar normalny

10.9.2 Obszar regularny

10.9.3 Twierdzenie Fubiniego

10.10 Powierzchnie stopnia drugiego

[7, Rozdział 5.3]

Niech

- E_3 będzie trójwymiarową (Def. 3.0.7, str. 19) afiniczną przestrzenią euklidesową (Def. 10.0.1, str. 75)
- $(0;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ będzie **kartezjańskim** układem współrzędnych (Def. 10.1.1, str. 76) w przestrzeni E_3

Definicja 10.10.1. Powierzchnią stopnia drugiego *w* E_3 *nazywamy zbiór wszystkich punktów spełniających równanie*

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c = 0$$

Powierzchnie drugiego stopnia można opisać równaniami w postaci kanonicznej

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{elipsoida} \\ 0 & \text{punkt} \\ -1 & \text{zbiór pusty} \end{cases}$$

TODO rysunek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{hiperboloida jednopowłokowa} \\ 0 & \text{stożek eliptyczny} \\ -1 & \text{hiperboloida dwupowłokowa} \end{cases}$$

TODO rysunek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 2z & \text{paraboloida eliptyczna} \\ 1 & \text{walec eliptyczny} \\ 0 & \text{prosta (oś } OZ\text{)} \\ -1 & \text{zbiór pusty} \end{cases}$$

TODO rysunek

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 2z & \text{paraboloida hiperboliczna} \\ 1 & \text{walec hiperboliczny} \\ 0 & \text{dwie płaszczyzny przecinające się} \end{cases}$$

TODO rysunek

$$y^2 = \begin{cases} 2px & \text{walec paraboliczny} \\ a^2 & \text{dwie płaszczyzny równoległe} \\ 0 & \text{płaszczyzna} \\ -a^2 & \text{zbiór pusty} \end{cases}$$

TODO rysunek

Rozdział 11

Ciąg liczbowy

Definicja 11.0.2. **Ciągiem** *liczb rzeczywistych nazywamy dowolną funkcję (Def. 1.2.1, str. 5)*

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Będziemy pisać a_n *zamiast* $a(n)$

oraz

- $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$
- $(a_n) \subset \mathbb{R}$

zamiast $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

[3, Rozdział 4.1]

Definicja 11.0.3. *Liczby* $a_1, a_2, \ldots$ *nazywamy* **wyrazami ciągu** (a_n).

[2, Paragraf 2.1]

Definicja 11.0.4. *Symbol* a_n *nazywamy* **wyrazem ogólnym** *ciągu* (a_n).

[2, Paragraf 2.1]

11.1 Ciąg ograniczony

Definicja 11.1.1. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **ograniczonym od góry**, *jeśli*

$$\textit{istnieje } M \in \mathbb{R} \textit{ takie, że } a_n \leq M \textit{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

czyli

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad a_n \leq M$$

[3, Definicja 4.1]

Definicja 11.1.2. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **ograniczonym od dołu**, *jeśli*

$$\textit{istnieje } M \in \mathbb{R} \textit{ takie, że } a_n \geq M \textit{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

czyli

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad a_n \geq M$$

[3, Definicja 4.1]

Definicja 11.1.3. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **ograniczonym**, *jeśli*

$$\textit{istnieje } M \in \mathbb{R} \textit{ takie, że } |a_n| \leq M \textit{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

czyli

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad |a_n| \leq M$$

[3, Definicja 4.1]

11.2 Ciąg monotoniczny

Definicja 11.2.1. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **rosnącym**, *jeśli*

$$a_n \leq a_{n+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

[3, Definicja 4.3]

Definicja 11.2.2. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **silnie rosnącym**, *jeśli*

$$a_n < a_{n+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

[3, Definicja 4.3]

Definicja 11.2.3. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **malejącym**, *jeśli*

$$a_n \geq a_{n+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

[3, Definicja 4.3]

Definicja 11.2.4. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **silnie malejącym**, *jeśli*

$$a_n > a_{n+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

[3, Definicja 4.3]

Definicja 11.2.5. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **monotonicznym**, *jeśli jest ciągiem*

- **rosnącym**
- *lub* **malejącym**.

[3, Definicja 4.3]

Definicja 11.2.6. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* **silnie monotonicznym**, *jeśli jest ciągiem*

- **silnie rosnącym**
- *lub* **silnie malejącym**.

[3, Definicja 4.3]

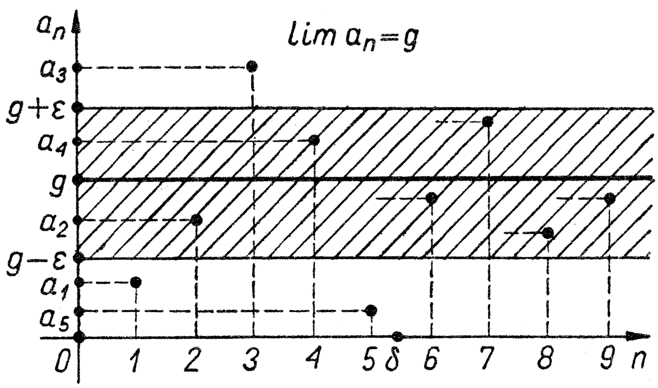
11.3 Ciąg zbieżny. Granica ciągu

Definicja 11.3.1 (Cauchy'ego)**.** *Mówimy, że ciąg* (a_n) *jest* **zbieżny** *do* $g \in \mathbb{R}$ *(*g *jest* **granicą ciągu***) jeśli*

dla dowolnego $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta \in \mathbb{R}$ *takie, że dla dowolnego* $n > \delta$ *zachodzi*
$$|a_n - g| < \varepsilon,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad lub \quad a_n \to g \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta\in\mathbb{R} \quad \forall\, n>\delta \quad |a_n - g| < \varepsilon$$



[3, Definicja 4.4]

Definicja 11.3.2. *Mówimy, że ciąg* (a_n) *jest* **rozbieżny do plus nieskończoności** *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, M \quad \exists\, \delta \quad \forall\, n > \delta \qquad a_n > M$$

[8, Rozdział 2.1]

Definicja 11.3.3. *Mówimy, że ciąg* (a_n) *jest* **rozbieżny do minus nieskończoności** *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, M \quad \exists\, \delta \quad \forall\, n > \delta \qquad a_n < M$$

[8, Rozdział 2.1]

11.4 Twierdzenia o ciągach

Twierdzenie 11.4.1 (Zbieżność ciągów a działania). *Niech*

- $\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; a \;\in\; \mathbb{R}$,
- $\lim_{n\to\infty} b_n \;=\; b \;\in\; \mathbb{R}$
- *oraz* $\lambda \;\in\; \mathbb{R}$.

Wtedy

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) \;=\; a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (\lambda\, a_n) \;=\; \lambda\, a_n$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \;=\; a_n \cdot b_n$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \;=\; \frac{a}{b}, \qquad b_n \neq 0, \quad b \neq 0$

[3, Twierdzenie 4.14]

Twierdzenie 11.4.2. *Jeśli ciąg (a_n) jest **zbieżny** (Def. 11.3.1, str. 106), to jest **ograniczony** (Def. 11.1.3, str. 104).*

[3, Twierdzenie 4.18]

Twierdzenie 11.4.3 (o trzech ciągach)**.** *Niech będą dane trzy ciągi*

$$(a_n), (b_n), (c_n)$$

takie, że

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

dla każdego $n > \delta \in \mathbb{N}$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

to (b_n) jest **zbieżny***, a*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g$$

[3, Twierdzenie 4.21]

Twierdzenie 11.4.4. *Każdy ciąg*

- ***rosnący** (Def. 11.2.1, str. 105)*
- *i **ograniczony od góry** (Def. 11.1.1, str. 104)*

*jest **zbieżny** (Def. 11.3.1, str. 106).*

[3, Twierdzenie 4.23]

Twierdzenie 11.4.5. *Każdy ciąg*

- ***malejący** (Def. 11.2.3, str. 105)*
- *i **ograniczony od dołu** (Def. 11.1.2, str. 104)*

*jest **zbieżny** (Def. 11.3.1, str. 106).*

[3, Twierdzenie 4.23]

Rozdział 12

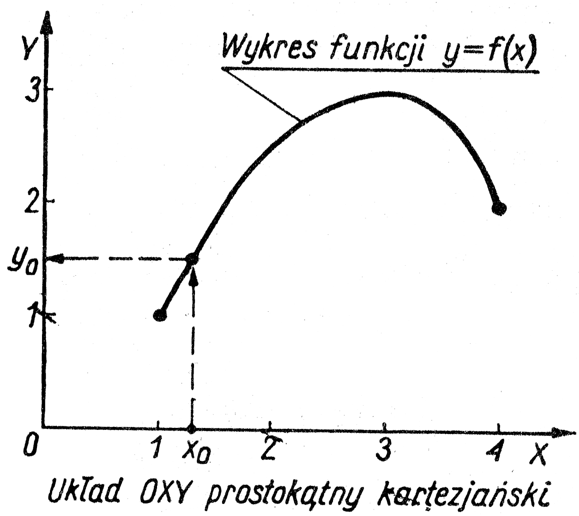
Funkcje

Definicję funkcji Czytelnik znajdzie na stronie 5, a podstawowe definicje związane z nią na stronie 5.

12.1 Wykres funkcji

Funkcję liczbową można interpretować geometrycznie sporządzając tzw. ***wykres funkcji*** (Def. 1.4.1, str. 8).

Na płaszczyźnie kartezjańskiego układu współrzędnych zaznaczamy punkty o współrzędnych $(x, f(x))$, których zbiór, gdy x przyjmuje wszystkie wartości dziedziny funkcji (Def. 1.4.1, str. 7) f, stanowi wykres funkcji.



[8, Rozdział 1.7]

12.2 Wykres funkcji odwrotnej

Niech

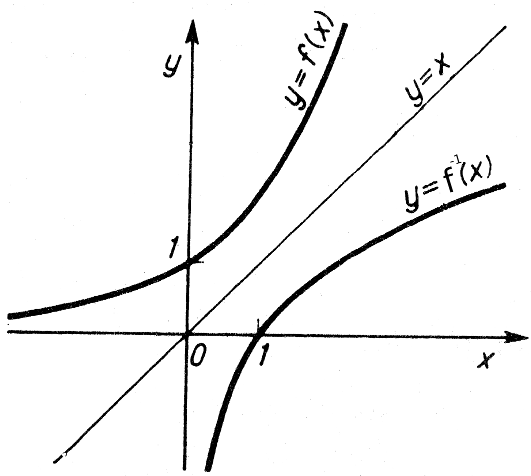
$$y = f(x)$$

oraz

$$y = f^{-1}(x)$$

(Def. 1.1.5, str. 3)

Wykres funkcji f i wykres funkcji odwrotnej f^{-1} są symetrycznie położone względem dwusiecznej kąta zawartego między dodatnimi półosiami współrzędnych



[2, Paragraf 4.7]

12.3 Parzystość. Nieparzystość

TODO Df

Definicja 12.3.1. *Funkcję* $f\colon \mathbb{R} \supset Df \to \mathbb{R}$ *nazywamy* **parzystą**, *jeśli*

$$\forall x \in Df\colon \qquad -x \in Df \quad \wedge \quad f(-x) = f(x)$$

Definicja 12.3.2. *Funkcję* $f\colon \mathbb{R} \supset Df \to \mathbb{R}$ *nazywamy* **nieparzystą**, *jeśli*

$$\forall x \in Df\colon \qquad -x \in Df \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)$$

[3, Rozdział 5.2]

12.4 Granice funkcji

12.4.1 Granica lewostronna funkcji

Definicja 12.4.1 (Cauchy'ego)**.** *Mówimy, że liczba* g *jest* **granicą lewostronną funkcji** $f(x)$ *w punkcie* $x = x_0$*, co zapisujemy*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$|f(x) - g| < \varepsilon \qquad \text{dla} \qquad x_0 - \delta < x < x_0$$

Lub symbolicznie

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \qquad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

[2, Paragraf 5.1]

Definicja 12.4.2 (Heinego)**.** *Mówimy, że fukcja $f(x)$ ma w punkcie x_0* **granicę lewostronną** *i piszemy*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall (x_n) \subset \{x_n \subset Df, x_n < x_0\}: \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

[8, Rozdział 2.3] [3, Twierdzenie 5.33] [2, Paragraf 5.1]

12.4.2 Granica prawostronna funkcji

Definicja 12.4.3 (Cauchy'ego)**.** *Mówimy, że liczba g jest* **granicą prawostronną funkcji** *$f(x)$ w punkcie $x = x_0$, co zapisujemy*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$$

jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$|f(x) - g| < \varepsilon \qquad \text{dla} \qquad x_0 < x < x_0 + \delta$$

Lub symbolicznie

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \; = \; g$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \qquad x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

[2, Paragraf 5.1]

Definicja 12.4.4 (Heinego)**.** *TODO Df Mówimy, że fukcja $f(x)$ ma w punkcie x_0* **granicę prawostronną** *i piszemy*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \; = \; g$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x_n) \subset \{x_n \subset Df, x_n > x_0\}: \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

[8, Rozdział 2.3] [3, Twierdzenie 5.33] [2, Paragraf 5.1]

12.4.3 Granica funkcji

Definicja 12.4.5 (Cauchy'ego)**.** *Mówimy, że liczba g jest* **granicą funkcji** *$f(x)$ w punkcie $x = x_0$, co zapisujemy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \; = \; g$$

jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$|f(x) - g| < \varepsilon \qquad \text{dla} \qquad |x - x_0| < \delta$$

Lub symbolicznie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \; = \; g$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

[2, Paragraf 5.1]

Definicja 12.4.6 (Heinego)**.** *TODO (Df) Mówimy, że fukcja $f(x)$ ma w punkcie x_0* **granicę** *i piszemy*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x_n) \subset Df \setminus \{x_0\}: \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

[8, Rozdział 2.3] [3, Twierdzenie 5.33] [2, Paragraf 5.1]

12.4.4 Interpretacja geometryczna granic

Zapis

$$\lim_{x\to x_0^-}$$

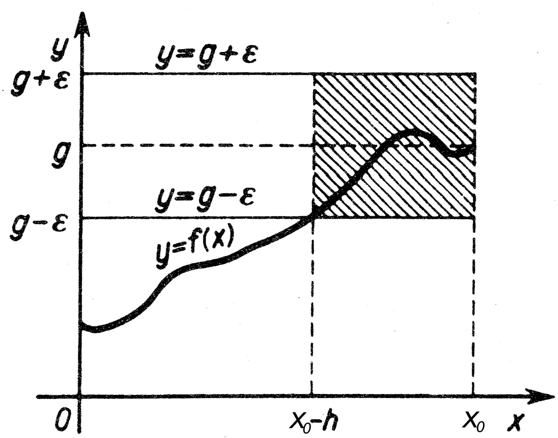
geometrycznie oznacza, że jakikolwiek weźmiemy wąski pasek

$$g-\varepsilon < y < g+\varepsilon \tag{12.1}$$

to musi istnieć takie *otoczenie lewostronne* punktu $x = x_0$, czyli taki przedział

$$x_0 - h < x < x_0, \qquad gdzie \quad h > 0 \tag{12.2}$$

że cały wykres funkcji dla x z przedziału (12.2) znajduje się w pasku (12.1).



Zapis

$$\lim_{x\to x_0^+}$$

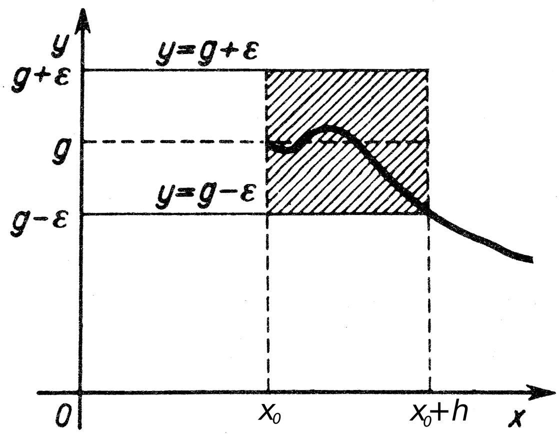
geometrycznie oznacza, że jakikolwiek weźmiemy wąski pasek

$$g-\varepsilon \ < \ y \ < \ g+\varepsilon \tag{12.3}$$

to musi istnieć takie *otoczenie prawostronne* punktu $x = x_0$, czyli taki przedział

$$x_0 \ < \ x \ < \ x_0+h, \qquad \textit{gdzie} \quad h>0 \tag{12.4}$$

że cały wykres funkcji dla x z przedziału (12.4) znajduje się w pasku (12.3).



[2, Paragraf 5.2]

12.4.5 Twierdzenia o granicach

Twierdzenie 12.4.1 (granice a działania)**.** *Niech* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ *oraz* $a,\ b,\ \lambda\ \in \mathbb{R}$*. Wtedy*

- $\lim_{x\to x_O} (f(x) \pm g(x)) \ = \ a \pm b$
- $\lim_{x\to x_O} \lambda f(x) \ = \ \lambda a$
- $\lim_{x\to x_O} (f(x)\cdot g(x)) \ = \ ab$

- $\lim_{x \to x_O} \dfrac{(f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *jeśli* $b \neq 0$

[3, Twierdzenie 5.37]

Twierdzenie 12.4.2 (l'Hôspitala)**.** *TODO*

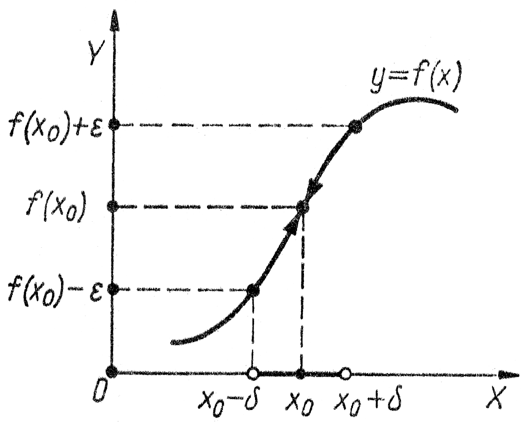
12.5 Ciągłość

12.5.1 Definicja Cauchy'ego

Definicja 12.5.1 (Cauchy'ego)**.** *Mówimy, że funkcja f jest* **ciągła w punkcie** x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy (TODO Df)*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



[8, Rozdział 2.4]

12.5.2 Definicja za pomocą granicy

Twierdzenie 12.5.1. *Funkcję $f(x)$ nazywamy* **ciągłą** *w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

oraz

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad = \quad f(x_0)$$

[3, Twierdzenie 5.36] [2, Paragraf 5.4]

12.5.3 Funkcja ciągła

Definicja 12.5.2. *Mówimy, że* **funkcja** *f jest* **ciągła** *wtedy i tylko wtedy, gdy jest* ***ciągła w każdym punkcie*** *(Def. 12.5.1, str. 116) swej* ***dziedziny****.*

[8, Rozdział 2.4]

12.5.4 Funkcja ciągła na zbiorze

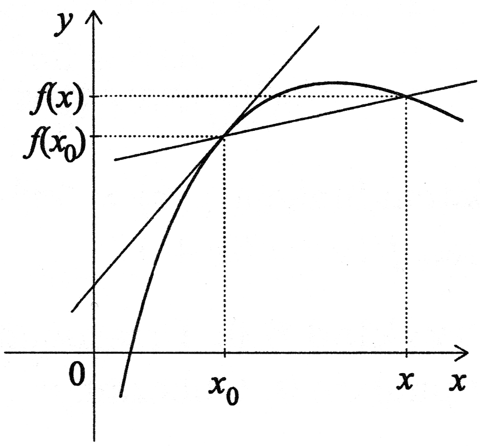
Definicja 12.5.3. *Mówimy, że* **funkcja** *f jest* **ciągła na zbiorze** *$A \subset D_f$ (TODO Df) wtedy i tylko wtedy, gdy jest* ***ciągła w każdym punkcie*** *(Def. 12.5.1, str. 116)* ***zbioru*** *A.*

[8, Rozdział 2.4]

Rozdział 13

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

13.1 Pochodna funkcji



Definicja 13.1.1. *Funkcja*

$$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$$

ma **pochodną w punkcie** x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pochodną funkcji oznaczamy

$$y', \quad f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \dot{y}$$

czyli

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

lub używając $h = x - x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

[3, Definicja 6.1]

13.1.1 Pochodna wyższego rzędu

Definicja 13.1.2. *Niech funkcja* $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *będzie* ***różniczkowalna*** *w* (a, b), *a* $x_0 \in (a, b)$.

Mówimy, że

- f *jest* **dwukrotnie różniczkowalna** *w punkcie* x_0,

lub że

- f *ma* **pochodną drugiego rzędu** *w punkcie* x_0,

jeśli

funkcja $f'\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest* ***różniczkowalna*** *w* x_0,

co oznacza, że

$$\exists \left(f'\right)'(x_0) \quad : \quad f''(x_0) = \left(f'\right)'(x_0)$$

[3, Definicja 6.36] [8, Rozdział 2.9]

Definicja 13.1.3. *Niech funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie **$(n-1)$-krotnie różniczkowalna** w (a,b), a $x_0 \in (a,b)$.*

Mówimy, że

- *f jest **n-krotnie różniczkowalna** w punkcie x_0,*

lub że

- *f ma **pochodną n-tego rzędu** w punkcie x_0,*

jeśli

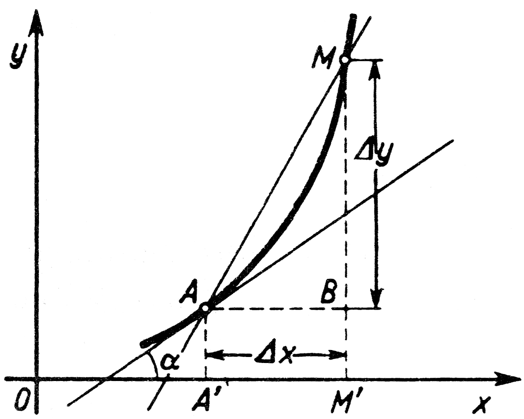
$$\text{funkcja } f^{(n-1)}\colon (a,b) \to \mathbb{R} \text{ jest } \textbf{różniczkowalna} \text{ w } x_0,$$

co oznacza, że

$$\exists \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \quad : \quad f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$

[3, Definicja 6.37] [8, Rozdział 2.9]

13.1.2 Interpretacja geometryczna



Geometrycznie ***pochodna*** funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 równa się **współczynnikowi kątowemu stycznej** (tangensowi kąta α, który prosta tworzy z dodatnim zwrotem osi Ox) do wykresu funkcji w tym punkcie.

[2, Paragraf 6.1]

Twierdzenie 13.1.1. *Jeżeli funkcja $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest **różniczkowalna** w $x_0 \in (a, b)$, to **styczna** do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ wyraża się wzorem:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

[3, Wniosek 6.2]

13.1.3 Obliczanie pochodnej

TODO marginesy

$(c)'$	$=$	0	c - *stała*
$(x)'$	$=$	1	
$(x^a)'$	$=$	$a\, x^{a-1}$	$x > 0, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
$(x^n)'$	$=$	$n\, x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^+$
$(\sqrt{x})'$	$=$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'$	$=$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(\sqrt[n]{x})'$	$=$	$\dfrac{1}{n\, \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	n - *nieparzyste*, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(\sqrt[n]{x})'$	$=$	$\dfrac{1}{n\, \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	n - *parzyste*, $x > 0$
$(\sin x)'$	$=$	$\cos x$	
$(\cos x)'$	$=$	$-\sin x$	
$(\tan x)'$	$=$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$
$(\cot x)'$	$=$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$
$(\arcsin x)'$	$=$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)'$	$=$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arctan x)'$	$=$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$(\operatorname{arc\,ctg} x)'$	$=$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in (0, \pi)$
$(\mathrm{e}^x)'$	$=$	e^x	
$(\mathrm{a}^x)'$	$=$	$\mathrm{a}^x\ \ln a$	$a > 0$
$(\ln x)'$	$=$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$

[2, Paragraf 6.1] [3, Twierdzenie 6.13] [8, Rozdział 2.8, tabela 2.2a, 2.2b]

Twierdzenie 13.1.2 (o działaniach arytemtycznych na pochodnych)**.** *Niech funkcje* $f, g \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *będą różniczkowalne (Def. 13.2.1, str. 127) w* x_0*, a* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Wtedy*

TODO odstepy

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \\
(f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \\
(\lambda \cdot f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

[3, Twierdzenie 6.9] [8, Rozdział 2.8]

Twierdzenie 13.1.3 (o pochodnej funkcji złożonej)**.** *Niech będą dane dwie funkcje:*

$$\begin{aligned}
f\colon \quad (a,b) &\to (c,d) \\
g\colon \quad (c,d) &\to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Załóżmy, że funkcja

- *f jest **różniczkowalna** (Def. 13.2.1, str. 127) w punkcie x_0*
- *g jest **różniczkowalna** w punkcie $y_0 = f(x_0)$*

*Wtedy funkcja $g \circ f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest **różniczkowalna** w punkcie x_0*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\Big(f(x_0)\Big) \cdot f'(x_0)$$

albo

$$\Big(g\Big(f(x_0)\Big)\Big)' = g'\Big(f(x_0)\Big) \cdot f'(x_0)$$

[3, Twierdzenie 6.10] [8, Rozdział 2.8]

Twierdzenie 13.1.4 (o pochodnej funkcji odwrotnej)**.** *Niech będą dane funkcje*

$$\begin{aligned}
f\colon \quad (a,b) &\to (c,d) \\
f^{-1}\colon \quad (c,d) &\to (a,b)
\end{aligned}$$

Załóżmy, że funkcja

- *f jest odwracalna*
- *f^{-1} jest funkcją odwrotną (Def. 1.1.5, str. 3) do f*
- *f jest **różniczkowalna** (Def. 13.2.1, str. 127) w punkcie x_0*
- *f^{-1} jest **ciągła** w punkcie $y_0 = f(x_0)$*

*Wtedy funkcja f^{-1} jest **różniczkowalna** w punkcie y_0 oraz*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

[3, Twierdzenie 6.11] [8, Rozdział 2.8]

Definicja 13.1.4. Pochodną logarytmiczną *funkcji f nazywamy pochodną jej logarytmu naturalnego*

$$\Big(\ln f(x_0)\Big)' = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

Znając już pochodną logarytmiczną funkcji możemy obliczyć jej pochodną

$$f'(x_0) = f(x_0) \cdot \Big(\ln f(x_0)\Big)'$$

[8, Rozdział 2.8]

13.1.4 Twierdzenia o pochodnych

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$

Twierdzenie 13.1.5 (różniczkowalność a ciągłość)**.** *Jeżeli funkcja f jest **różniczkowalna** w $x_0 \in (a,b)$, to f jest **ciągła** w x_0.*

Twierdzenie 13.1.6 (o związku między monotonicznością o pochodną)**.** *TODO*

13.2 Różniczka funkcji

[8][Rozdział 2.7]

13.2.1 Twierdzenie o przedstawieniu przyrostu funkcji

Twierdzenie 13.2.1 (o przedstawieniu przyrostu funkcji)**.** *Jeżeli dziedzina funkcji f zawiera pewne otoczenie Q punktu x_0 oraz istnieje pochodna $f'(x_0)$, to dla każdego przyrostu Δx takiego, że $x_0 + \Delta x \in Q$, przyrost funkcji*

$$\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$$

można przedstawić następująco

$$\Delta f = f'\left(x_0\right)\Delta x + \alpha \Delta x$$

przy czym $\alpha \to 0$, gdy Δx dąży do zera w dowolny sposób.

Dowód. Jeżeli przyjmiemy

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) & dla \quad \Delta x \neq 0 \\ 0 & dla \quad \Delta x = 0 \end{cases}$$

to dla każdego (dodatniego, ujemnego, bądź równego zeru) przyrostu Δx takiego, że $x_0 + \Delta x \in Q$, przedstawienie $\Delta f = f'\left(x_0\right)\Delta x + \alpha \Delta x$ jest prawdziwe.

Jeżeli $\Delta x \to 0$, to ponieważ istnieje granica

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'\left(x_0\right)$$

więc wobec przyjętego α, $\alpha \to 0$, cnd. □

13.2.2 Funkcja różniczkowalna

Definicja 13.2.1. *Funkcję f nazywamy* **różniczkowalną** *w punkcie x_0, jeżeli jej przyrost*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

można dla każdego Δx dostatecznie bliskiego zeru przedstawić w postaci

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$$

gdzie

- *A jest stałą,*
- *a $o(\Delta x)$ jest nieskończenie małą (Def.* **??***, str.* **??***) rzędu wyższego niż Δx, gdy $\Delta x \to 0$.*

Wniosek. Z twierdzenia o przedstawieniu przyrostu funkcji wynika, że jeżeli **istnieje** $f'(x_0)$, to funkcja f jest w punkcie x_0 **różniczkowalna**, przy czym $A = f'(x_0)$.

Na odwrót, jeżeli funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0, to **istnieje** $f'(x_0) = A$.

Wniosek. Funkcja f ma więc **pochodną** w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie **różniczkowalna**, przy czym wówczas

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

dla każdego Δx dostatecznie bliskiego zeru.

13.2.3 Różniczka funkcji

Definicja 13.2.2. **Różniczką funkcji** *f w punkcie x_0 i dla przyrostu Δx zmiennej niezależnej x nazywamy iloczyn*

$$f'(x_0)\Delta x$$

Różniczkę oznaczamy symbolem $df(x_0)$, bądź też krótko df lub dy.

Mamy więc

$$df(x_0) \stackrel{df}{=} f'(x_0)\Delta x$$

lub krótko

$$dy \stackrel{df}{=} f'(x_0)\Delta x$$

Interpretacja geometryczna

TODO 2.24 str 106

Rozdział 14

Badanie przebiegu zmienności funkcji

14.1 Ekstrema funkcji

[8][Rozdział 2.13]

Definicja 14.1.1. *Mówimy, że funkcja* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *ma w punkcie* $x_0 \in (a,b)$

- **maksimum lokalne**, *jeśli istnieje otoczenie punktu* x_0 *(Def.* **??**, *str.* **??***) takie, że dla każdego* x *z tego otoczenia mamy*

$$f(x_0) \geq f(x)$$

- **mocne maksimum lokalne**, *jeśli istnieje otoczenie punktu* x_0 *(Def.* **??**, *str.* **??***) takie, że dla każdego* x *z tego otoczenia oraz* $x \neq x_0$ *mamy*

$$f(x_0) > f(x)$$

- **minimum lokalne**, *jeśli istnieje otoczenie punktu* x_0 *(Def.* **??**, *str.* **??***) takie, że dla każdego* x *z tego otoczenia mamy*

$$f(x_0) \leq f(x)$$

- **mocne minimum lokalne**, *jeśli istnieje otoczenie punktu x_0 (Def.* **??**, *str.* **??***) takie, że dla każdego x z tego otoczenia oraz $x \neq x_0$ mamy*

$$f(x_0) < f(x)$$

TODO rysunek 2.29, 2.30

[3][Definicja 6.45]

14.1.1 Warunek konieczny istnienia ekstremum

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna (Def. 13.2.1, str. **??**) w $x_0 \in (a,b)$.

Twierdzenie 14.1.1 (warunek konieczny istnienia ekstremum)**.** *Jeśli funkcja f ma* ***maksimum*** *lokalne (****minimum*** *lokalne) w punkcie x_0, to*

$$f'(x_0) = 0$$

(Def. 13.1.1, str. 119).

Dowód. Załóżmy, że f osiąga **maksimum** lokalne w punkcie x_0.

Wtedy dla x z otoczenia punktu x_0 (Def. **??**, str. **??**) zachodzi nierówność:

$$f(x) - f(x_0) \neq 0$$

Zatem dla $x_0 - \delta < x < x_0$ zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Ponieważ funkcja jest różniczkowalna (Def. 13.2.1, str. **??**) w punkcie x_0, więc z twierdzenia o zachowaniu nierówności w granicy (Tw. **??**, str. **??**) otrzymujemy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Analogicznie, dla $x_0 < x < x_0 + \delta$ mamy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Rozumując podobnie jak wyżej, otrzymujemy

$$f'(x_0) \leq 0$$

czyli

$$f'(x_0) = 0$$

Dowód w przypadku **minimum** przebiega w taki sam sposób. □

[3][Twierdzenie 6.47]

TODO rys. 2.32 str 132

14.1.2 Warunek wystarczający istnienia ekstremum I

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^{(2)}$ oraz $x_0 \in (a,b)$

Twierdzenie 14.1.2 (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego I)**.** *Jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz*

- *$f''(x_0) < 0$, to f ma mocne **maksimum** lokalne (Def. 14.1.1, str. 129) w punkcie x_0,*
- *$f''(x_0) > 0$, to f ma mocne **minimum** lokalne (Def. 14.1.1, str. 130) w punkcie x_0,*

Dowód. TODO sprawdzic, czy byl dowod na wykladzie □

[3][Twierdzenie 6.49]

14.1.3 Warunek wystarczający istnienia ekstremum II

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^{(1)}$ oraz $x_0 \in (a,b)$.

Twierdzenie 14.1.3 (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego II)**.** *Jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że:*

- $$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{dla} & x \in (\ x_0 - \delta\ ,\ x_0\ ) \\ f'(x) < 0 & \text{dla} & x \in (\ x_0\ ,\ x_0 + \delta\ ) \end{array}$$

  *(w skrócie mówimy, że **pochodna** funkcji **zmienia znak** z **dodatniego** na **ujemny**), to f ma mocne **maksimum** lokalne (Def. 14.1.1, str. 129) w punckie x_0.*

- $$\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \text{dla} & x \in (\ x_0 - \delta\ ,\ x_0\ ) \\ f'(x) > 0 & \text{dla} & x \in (\ x_0\ ,\ x_0 + \delta\ ) \end{array}$$

  *(w skrócie mówimy, że **pochodna** funkcji **zmienia znak** z **ujemnego** na **dodatni**), to f ma mocne **minimum** lokalne (Def. 14.1.1, str. 130) w punckie x_0.*

Dowód. TODO sprawdzic czy byl dowod na wykladzie □

TODO rys. 2.33 str 134

[3][Twierdzenie 6.50]

14.2 Twierdzenie Rolle'a

14.3 Twierdzenie Weierstrassa

14.4 Twierdzenie Lagrange'a

14.5 Twierdzenie Taylora

14.6 Twierdzenie Maclaurina

14.7 Wklęsłość i wypukłość wykresu funkcji

14.8 Punkt przegięcia

14.8.1 Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia

14.8.2 Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia

14.9 Asymptoty

14.9.1 Pionowa

14.9.2 Pozioma

14.9.3 Ukośna

14.10 Schemat badania przebiegu zmienności funkcji

Rozdział 15

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

15.1 Funkcja pierwotna

Definicja 15.1.1. Funkcją pierwotną *funkcji $f(x)$ w przedziale $a < x < b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, że*

$$F'(x) = f(x)$$

dla każdego x z przedziału $a < x < b$.
[2, Paragraf 15.1] [8, Rozdział 3.4]

Twierdzenie 15.1.1. *Jeżeli $F(x)$ i $G(x)$ są funkcjami pierwotnymi $f(x)$, to*

$$F(x) - G(x) = const$$

*(Dwie funkcje mające w danym przedziale tę samą skończoną pochodną **mogą się różnić co najwyżej o stałą**)*
[2, Paragraf 15.1]

Twierdzenie 15.1.2 (o istnieniu funkcji pierwotnej)**.** *Jeżeli funkcja f jest **ciągła** (jest klasy C^0) (Def. 12.5.3, str. 117) na pewnym przedziale, to **posiada** na tym przedziale **funkcję pierwotną**.*
[8, Rozdział 3.4]

15.2 Całka nieoznaczona

Definicja 15.2.1. Całką nieoznaczoną *funkcji $f(x)$, oznaczoną symbolem*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazywamy wyrażenie

$$F(x) + C$$

gdzie

- *$F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji f(x) (Def. 15.1.1, str. 137)*
- *a C jest dowolną stałą.*

Jest więc

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(x) + C, \quad \text{gdzie} \quad F'(x) = f(x)$$

[2, Paragraf 15.1] [8, Rozdział 3.5]

Jeżeli funkcja posiada na pewnym przedziale **funkcję pierwotną**, to mówimy, że **jest** ona na tym przedziale **całkowalna** (w sensie Newtona).
[8, Rozdział 3.4]

Z powyższego oraz twierdzenia [15.1.2, str. 137] wynika, że

jeżeli funkcja f jest **ciągła** (Def. 12.5.3, str. 117) na pewnym przedziale to jest **całkowalna** na tym przedziale.

15.3 Obliczanie całki nieoznaczonej

15.3.1 Podstawowe wzory

$\int 0 \, \mathrm{d}x$	$= C$	
$\int x^a \, \mathrm{d}x$	$= \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$a \neq -1, \; x > 0$
$\int \mathrm{d}x$	$= x + C$	
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$	$= 2\sqrt{x} + C$	$x > 0$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$	$= -\dfrac{1}{x} + C$	$x \neq 0$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$	$= ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
$\int a^x \, \mathrm{d}x$	$= \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, \; a \neq 1$
$\int e^x \, \mathrm{d}x$	$= e^x + C$	
$\int \cos x \, \mathrm{d}x$	$= \sin x + C$	
$\int \sin x \, \mathrm{d}x$	$= -\cos x + C$	
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	$= \operatorname{tg} x + C$	$\cos x \neq 0$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2}$	$= -\operatorname{ctg} x + C$	$\sin x \neq 0$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$= \arcsin x + C$	$-1 < x < 1$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$= -\arccos x + C$	$-1 < x < 1$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$	$= \operatorname{arc\,tg} x + C$	
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$	$= -\operatorname{arc\,ctg} x + C$	
$\int \sinh x \, \mathrm{d}x$	$= \cosh x + C$	
$\int \cosh \, \mathrm{d}x$	$= \sinh + C$	

[2, Paragraf 15.2]

15.3.2 Własności całek nieoznaczonych

Twierdzenie 15.3.1 (o całce sumy)**.** *Całka sumy równa się sumie całek, tzn. (jest to tzw. addytywność całki względem funkcji podcałkowej)*

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big) \mathrm{d}x \quad = \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

[2, Paragraf 15.3, (15.3.1)]

Twierdzenie 15.3.2. *Stały czynnik wolno wynieść przed znak całki, tzn.*

$$\int A\, f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad A \int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad A \neq 0,\ A = const$$

[2, Paragraf 15.3, (15.3.2)]

15.3.3 Całkowanie przez części

Twierdzenie 15.3.3 (o całkowaniu przez części)**.** *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają na pewnym przedziale ciągłe pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$, to*

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

na tym przedziale
[8, Rozdział 3.6]

15.3.4 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie 15.3.4 (o całkowaniu przez podstawienie)**.** *Jeżeli dla* $a \leq x \leq b$

- $g(x) = u$ *jest funkcją mającą* ***ciągłą pochodną***
- *oraz* $A \leq g(x) \leq B$*,*
- *a funkcja* $f(u)$ *jest* ***ciągła*** *w przedziale* $\langle A, B\rangle$

to

$$\int f\Big(g(x)\Big)\, g'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int f(u)\,du$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy w otrzymanym wyniku podstawić $u = g(x)$
[2, Paragraf 15.3, (15.3.4)]

15.3.5 Całki funkcji wymiernych

Całka funkcji wymiernej (Def. 6.3.1, str. 53), to całka postaci

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x$$

Przy obliczaniu powyższej całki należy:

- jeżeli funkcja wymierna jest **niewłaściwa**, czyli $m \geq n$ (Def. 6.3.1, str. 53), to należy **podzielić licznik przez mianownik** i przedstawić tą funkcję jako **sumę wielomianu** oraz **funkcji wymiernej właściwej** (Tw. 6.3.1, str. 54), czyli mamy

$$\int \frac{P_p(x)}{Q_q(x)}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int \left(W_w(x) \;+\; \frac{R_r(x)}{Q_q(x)}\right)\mathrm{d}x$$

  następnie skorzystać z twierdzenia o całce sumy (Tw. 15.3.1, str. 141), stąd mamy

$$\int \frac{P_p(x)}{Q_q(x)}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int W_w(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R_r(x)}{Q_q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Pierwszą całkę obliczamy korzystając z twierdzenia o całce sumy, z twierdzenia o wyniesieniu stałego czynnika przed znak całki (Tw. 15.3.2, str. 141) oraz podstawowych wzorów na obliczanie całki.

Drugą całkę obliczamy w sposób podany poniżej.

- jeżeli funkcja wymierna jest **właściwa**, czyli $n < m$ (Def. 6.3.1, str. 53), to przedstawiamy ją jako **sumę ułamków prostych** (Tw. 6.3.2, str. 55).

[2, Paragraf 16.1]

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

Ułamki proste pierwszego rodzaju (Def. 6.3.1, str. 54) całkujemy korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie (Tw. 15.3.4, str. 142) i podstawienia

$$u \quad = \quad x - a$$

stąd

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \quad = \quad A \int \frac{1}{u^n}\,du$$

i w końcu

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \begin{cases} A & \ln|x-a| + C, \quad gdy\ r = 1 \\ \dfrac{A}{1-r} & (x-a)^{1-r} + C, \quad gdy\ TODO\ ??\ \text{-¿}r \geq 2 \end{cases}$$

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Ułamki proste drugiego rodzaju (Def. 6.3.1, str. 55) całkujemy korzystając, w pierwszej kolejności, z twierdzenia o całce sumy (Tw. 15.3.1, str. 141), z twierdzenia o wyniesieniu stałego czynnika przed znak całki (Tw. 15.3.2, str. 141), z czego uzyskujemy dwie całki

- pierwszą postaci

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

  gdzie licznik podcałkowej funkcji wymiernej ma postać pochodnej funkcji mianownika będącej w potędze

- drugą postaci

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

Aby otrzymać te całki licznik $Ax+B$ ułamka prostego przekształcamy, w ogólnym przypadku, następująco

$$Ax+B \;=\; \frac{A}{2}\cdot 2x+B \;=\; \frac{A}{2}(2x+p-p)+B \;=\; \frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}$$

Stąd do scałkowania ułamka prostego drugiego rodzaju zastosujemy następujące przekształcenie

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \;&=\; \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x \;+\\ &+\;\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pierwszą całkę

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

obliczamy stosując podstawienie

$$t = x^2+px+q$$

stąd

$$\mathrm{d}t = (2x+p)\,\mathrm{d}x$$

Otrzymujemy więc

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$$

Dalsze całkowanie przebiega tak, jak w przypadku ułamka prostego.

Drugą całkę

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

przekształcamy tak, aby otrzymać

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

w ogólnym przypadku stosując podstawienie

$$t = \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}$$

[8, Rozdział 3.8]

Całkę

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

dla

- $n = 1$ rozwiązujemy korzystając z podstawowych wzorów całkowania

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \;=\; \operatorname{arc\,tg} t + C$$

- $n > 1$ rozwiązujemy korzystając ze **wzoru redukującego** (lub **rekurencyjnego**)

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1}, \qquad \textit{gdzie } I_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

którego wyprowadzenie znajduje się poniżej.

Wyprowadzenie

Aby obliczyć całkę

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

zastosujemy przekształcenie

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t \;=\; \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t \;=$$

$$= \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}t \;-\; \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

czyli mamy

$$I_n \;=\; I_{n-1} \;-\; \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

Drugą całkę zapisujemy jako

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t \;=\; \int t \cdot \frac{t}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

i całkujemy przez części (Tw. 15.3.3, str. 141). Stąd otrzymujemy

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2n-2} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\, I_{n-1}$$

Po podstawieniu do wzoru na I_n otrzymujemy zapisany wyżej **wzór redukcyjny**.

[2, Zadanie 16.21]

15.3.6 Całki funkcji trygonometrycznych

Całki trygonometryczne obliczamy stosując podstawienia charakterystyczne dla danych typów.

- $$\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

  $$\begin{aligned} t &= \sin x \\ \mathrm{d}t &= \cos x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- $$\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

  $$\begin{aligned} t &= \cos x \\ -\mathrm{d}t &= \sin x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- $$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,\mathrm{d}x$$

  $$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg} x \\ \operatorname{arc\,tg} t &= x \\ \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{1} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t}{1+t^2}$$

- $$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \operatorname{arc\,tg} t &= \frac{x}{2} \\ \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

15.3.7 Całki funkcji niewymiernych

Całki funkcji zawierających pierwiastki z wyrażenia liniowego

[2, Paragraf 17.1]

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną potęg zmiennej x o wykładnikach postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi względem siebie pierwszymi, to wykonujemy podstawienie

$$x = t^N$$

gdzie N oznacza wspólny mianownik ułamków postaci $\frac{m}{n}$.

Podstawienia Eulera - Całki funkcji zawierających pierwiastek kwadratowy z trójmianu kwadratowego

Całkę postaci

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$$

możemy obliczyć stosując **podstawienie Eulera**. W zależności od warunków stosujemy podstawienia:

1. gdy $a > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\,x$$

2. gdy $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $\quad \left(ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)\right)$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t$$

lub

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_2)t$$

Równania podnosimy obustronnie do kwadratu. Obliczamy x i wstawiamy do podstawienia. Otrzymujemy w ten sposób podstawienie dla $\sqrt{ax^2+bx+c}$ zależne jedynie od t. Równanie z wyliczonym x różniczkujemy.

Całkowanie przy pomocy metody współczynników nieoznaczonych

[2, Paragraf 17.3, Zadanie 17.46, 17.47]

Metodę współczynników nieoznaczonych stosujemy przy obliczaniu całek postaci

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem (Def. 6.1.1, str. 51) stopnia n (Def. 6.1.1, str. 52). Całka ta równa się wyrażeniu

$$W_{n-1}(x)\,\sqrt{ax^2+bx+c} \;+\; A\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

gdzie $W_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$, a A - pewną stałą.

Aby obliczyć **współczynniki (nieoznaczone) wielomianu** W_{n-1} oraz **A**

1. różniczkujemy obie strony tożsamości

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x \;\equiv\; W_{n-1}(x)\,\sqrt{ax^2+bx+c} + \\ + A\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

otrzymujemy

$$\frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \;\equiv\; W'_{n-1}(x)\,\sqrt{ax^2+bx+c} + \\ + W_{n-1}(x)\,\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \\ + A\,\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

2. mnożymy obie strony tożsamości przez $\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$W_n(x) \equiv W'_{n-1}(x)\,(ax^2+bx+c) + W_{n-1}(x)\,\frac{2ax+b}{2} + A$$

3. korzystając z (Tw. 6.1.1, str. 52) przyrównujemy kolejno odpowiednie współczynniki.

Obliczone współczynniki wstawiamy do pierwotnej tożsamości i obliczamy całkę

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

Otrzymany wynik wstawiamy do tożsamości. W ten sposób otrzymujemy wartość pierwotnej całki.

Inne rodzaje podstawień

- $$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$x = a\,\sin t \quad \vee \quad x = a\,\operatorname{tgh} t$$

- $$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$x = a\,\operatorname{tg} t \quad \vee \quad x = a\,\sinh t$$

- $$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$$

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \vee \quad x = a\,\cosh t$$

15.4 Całka oznaczona

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest ograniczona w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ (Def. **??**, str. **??**)

TODO rysunek konstrukcji

Dokonajmy następującej konstrukcji:

- dokonujemy m różnych podziałów (P_1, P_2, ..., P_m) przedziału $\langle a, b\rangle$ na części (dzielimy w różny sposób przedział $\langle a, b\rangle$ na mniejsze przedziały)
- przyjmujemy, że w wyniku **podziału $\mathbf{P_m}$ otrzymaliśmy przedziały**

  $$\langle x_{i-1}, x_i\rangle, \qquad gdzie\ n = 1, 2, \ldots n_m$$

  gdzie

  - n_m - liczba przedziałów
  - $x_0 = a$
  - $x_{n_m} = b$
  - liczby x_i tworzą ciąg silnie rosnący (Def. 11.2.2, str. 105)

  Przedziały te nazywamy **przedziałami cząstkowymi podziału** P_m.

- oznaczamy długości przedziałów

  $$x_i - x_{i-1} \ = \ \Delta x_i$$

- oznaczamy **długość najdłuższego przedziału cząstkowego** podziału P_m przez $\boldsymbol{\delta_{\mathbf{m}}}$

$$\delta_m \ = \ \sup \Delta x_i$$

- Ciąg (Def. 11.0.2, str. 103) podziałów $\{P_m\}$ nazywamy **normalnym ciągiem podziałów**, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \delta_m = 0$$

- tworzymy **sumę $\mathbf{S_m}$ iloczynów**
  - **wartości funkcji $\mathbf{f(c_i)}$** w dowolnym punkcie c_i przedziału $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$
  - oraz **długości $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x_i}$** tych przedziałów

  przy podziale P_m

$$S_m \ = \ \sum_{i=1}^{n_m} f(c_i)\, \Delta x_i$$

Definicja 15.4.1. *Jeżeli*

- ***ciąg*** $\{\mathbf{S_m}\}$ *dla* $m \to \infty$ *jest* ***zbieżny*** *(Def. 11.3.1, str. 106)*
- ***i****, dodatkowo, jest* ***zbieżny do tej samej granicy*** *przy* ***każdym*** *normalnym normalnym ciągu podziałów* $\{P_m\}$*, niezależnie od wyboru punktów* c_i*,*

to funkcję $f(x)$ *nazywamy* ***funkcją całkowalną w przedziale*** $\langle a, b\rangle$*, a granicę ciągu* S_m *nazywamy* ***całką oznaczoną*** *funkcji* $f(x)$ ***w granicach od*** a ***do*** b *i oznaczamy symbolem*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

[2, Paragraf 19.1]

15.4.1 Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

TODO rysunek

Twierdzenie 15.4.1. *Jeżeli w przedziale $\langle a, b\rangle$ jest*

$$f \geq 0$$

to ***pole obszaru*** *ograniczonego*

- *łukiem krzywej $y = f(x)$,*
- *odcinkiem osi Ox*
- *prostą $x = a$*
- *prostą $x = b$*

równa się całce oznaczonej

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

[2, Paragraf 19.2]

Wniosek
Jeżeli w przedziale $\langle a, b\rangle$ jest

$$f \leq 0$$

to pole równa się

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wniosek

Zawsze pole określonego wyżej obszaru można wyrazić całką oznaczoną

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

[2, Paragraf 19.2]

15.4.2 Własności całki oznaczonej

[2, Paragraf 19.3]

Addytywność całki względem przedziału całkowania

Twierdzenie 15.4.2. *Jeżeli $a \leq b \leq c$, to (TODO niekonieczne założenie)*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Addytywność całki względem funkcji podcałkowej

Twierdzenie 15.4.3. *Całka sumy równa się sumie całek, tzn.*

$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Wynoszenie stałego czynnika przed znak całki oznaczonej

Twierdzenie 15.4.4. *Stały czynnik można wynieść przed znak całki*

$$\int_a^b A\, f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad A \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Parzystość i nieparzystość funkcji podcałkowej

Twierdzenie 15.4.5. *Jeżeli $f(x) \in C^0\Big(\langle -a, a\rangle\Big)$ i jest nieparzysta (Def. 12.3.2, str. 111), to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad 0$$

Twierdzenie 15.4.6. *Jeżeli $f(x) \in C^0\Big(\langle -a, a\rangle\Big)$ i jest parzysta (Def. 12.3.1, str. 111), to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie 15.4.7. *Jeżeli $f(x) \in C^0\Big(\langle a, b\rangle\Big)$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad f(c)(b-a)$$

Związek między całką oznaczoną a nieoznaczoną

Twierdzenie 15.4.8. *Jeżeli przez $F(x)$ oznaczymy funkcję pierwotną (Def. 15.1.1, str. 137) funkcji $f(x) \in C^0\Big(\langle a, b\rangle\Big)$, to*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Oznaczenia

$F(b) - F(a)$ oznaczać można przez

- $\big[F(x)\big]_a^b$
- $F(x)|_a^b$
- $F(x)|_{x=a}^{x=b}$

Całkowanie przez części całek oznaczonych

Twierdzenie 15.4.9. *Jeżeli $f(x), g(x) \in C^1\Big(\langle a, b\rangle\Big)$, to*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Całkowanie przez podstawienie całek oznaczonych

Twierdzenie 15.4.10. *Jeżeli*

- *$g'(x)$ jest funkcją ciągłą (Def. 12.5.2, str. 117),*
- *$g(x)$ jest funkcją silnie rosnącą (Def. **??**, str. **??**) w przedziale $\langle a, b\rangle$*
- *$f(t)$ jest ciągła w przedziale $\Big\langle g(a), g(b)\Big\rangle$ (Def. 12.5.3, str. 117)*

to

$$\int_a^b f\Big(g(x)\Big)\, g'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Podstawienie

$$t = g(x)$$

15.4.3 Zastosowanie całki oznaczonej

Obliczanie pola obszaru płaskiego

TODO

Obliczanie pola obszaru płaskiego, gdy linia ograniczająca określona jest w postaci parametrycznej

[2, Paragraf 20.1]

Jeżeli linia ograniczająca określona jest w **postaci parametrycznej**

$$\begin{aligned} x &= g(t) \\ y &= h(t) \end{aligned}$$

gdzie w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$

- funkcje $g(t)$ i $h(t)$ są **ciągłe** (Def. 12.5.3, str. 117)
- funkcja $g(t)$ jest **rosnąca** (Def. **??**, str. **??**)
- funkcja $g(t)$ ma **pochodną** (Def. 13.1.1, str. 119) **ciągłą**

to, korzystając z (Tw. 15.4.10, str. 157) oraz wniosków z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej (Wn. 15.4.1, str. 155), **pole obszaru** ograniczonego:

- daną linią ograniczającą ($x = g(t)$, $y = h(t)$)
- odcinkiem osi Ox
- prostą $x = x_1$ ($x_1 = g(t_1)$)
- prostą $x = x_2$ ($x_2 = g(t_2)$)

wyraża się wzorem

$$P = \int\limits_{x_1}^{x_2} |y| \, \mathrm{d}x = \int\limits_{t_1}^{t_2} |h(t)| \, g'(t) \, \mathrm{d}t$$

W przypadku, gdy

- założenia są **takie same** jak powyżej
- a funkcja $g(t)$ jest **malejąca**

to **pole obszaru** wyraża się

$$P = \int\limits_{x_1}^{x_2} |y| \, \mathrm{d}x = -\int\limits_{t_1}^{t_2} |h(t)| \, g'(t) \, \mathrm{d}t$$

Obliczanie pola obszaru płaskiego, gdy linia ograniczająca określona jest we współrzędnych biegunowych

[2, Paragraf 20.1]

Jeżeli linia ograniczająca dana jest we współrzędnych biegunowych (Def. **??**, str. **??**)

$$r = f(\theta)$$

gdzie

- $f(\theta)$ jest funkcją **nieujemną** (Def. **??**, str. **??**) **ciągłą** (Def. 12.5.3, str. 117) w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$

- a przy tym $\beta - \alpha \in (0, 2\pi)$

to **pole obszaru** ograniczonego

- linią ograniczającą $r = f(\theta)$
- promieniem wodzącym (Def. **??**, str. **??**) o amplitudzie (Def. **??**, str. **??**) α
- promieniem wodzącym o amplitudzie β

wyraża się wzorem (TODO skąd r^2? - wyprowadzenie)

$$P = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(f(\theta) \Big)^2 \, d\theta$$

Obliczanie długości łuku

[2, Paragraf 20.2]

Jeżeli krzywa dana jest:

- równaniem postaci

  $$y = f(x)$$

  przy czym

  - funkcja $f(x)$ ma w przedziale $\langle a, b \rangle$ **pochodną** (Def. 13.1.1, str. 119) **ciągłą** (Def. 12.5.3, str. 117),

  to **długość łuku** wyraża się wzorem

  $$L = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2} \, \mathrm{d}x$$

  a **różniczka łuku** ma postać

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

- parametrycznie

$$\begin{aligned} x &= g(t) \\ y &= h(t) \end{aligned}$$

przy czym

- funkcje $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$ **pochodne ciągłe**
- łuk **nie ma** części wielokrotnych

to **długość łuku** wyraża się wzorem

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

a **różniczka łuku** ma postać

$$dL = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

- równaniem we współrzędnych biegunowych (Def. **??**, str. **??**)

$$r = f(\theta)$$

przy czym

- funkcje $f(\theta)$ ma w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$ **pochodną ciągłą**
- łuk **nie ma** części wielokrotnych

to **długość łuku** wyraża się wzorem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

a **różniczka łuku** ma postać

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

TODO wyprowadzenia

Obliczanie objętości i pola powierzchni bryły obrotowej

[2, Paragraf 20.3] [8, Rozdział 3.10]

Dla **bryły obrotowej** (Def. **??**, str. **??**) powstałej przez obrót wokół osi Ox krzywej danej

- równaniem

  $$y = f(x)$$

  gdzie $f(x)$ jest w przedziale $\langle a, b\rangle$

  - ciągła
  - nieujemna

  Objętość wyraża się wzorem

  $$V = \pi \int_{a}^{b} y^2 \,\mathrm{d}x$$

  a **pole powierzchni -** wzorem

  $$S = 2\pi \int_{a}^{b} y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x$$

- w postaci parametrycznej

$$\begin{aligned} x &= g(t) \\ y &= h(t) \end{aligned}$$

przy czym w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$

  - funkcje $g(t)$ i $h(t)$ mają **pochodne** (Def. 13.1.1, str. 119) **ciągłe** (Def. 12.5.3, str. 117)
  - funkcja $g(t)$ jest **silnie rosnąca** (Def. **??**, str. **??**) lub **silnie malejąca** (Def. **??**, str. **??**)
  - funkcja $h(t)$ jest **nieujemna** (Def. **??**, str. **??**)

Objętość wyraża się wzorem

$$V = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}x$$

a **pole powierzchni -** wzorem

$$S = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \,\mathrm{d}t$$

TODO wyprowadzenie

15.5 Całka niewłaściwa

Definicja 15.5.1. *Jeżeli funkcja $f(x)$ określona na przedziale $\langle a, b)$, gdzie*

- $b \in \mathbb{R}$
- *lub* $b = +\infty$

jest w tym przedziale ***ciągła*** *(Def. 12.5.3, str. 117) oraz* ***istnieje granica*** *(Def. 12.4.5, str. 113)*

$$\lim_{\alpha \to b^-} \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

i jest to liczba rzeczywista, to granicę tą nazywamy ***całką niewłaściwą funkcji*** *$f(x)$ i oznaczamy*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zatem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to b^-} \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

[3, Definicja 8.27] [2, Paragraf 21.1]

Definicja 15.5.2. *Jeżeli funkcja $f(x)$ określona na przedziale $(a, b\rangle$, gdzie*

- *$a \in \mathbb{R}$*
- *lub $a = -\infty$*

to otrzymujemy w analogiczny sposób do (Def. 15.5.1, str. 164)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

[3, Definicja 8.27] [2, Paragraf 21.1]

15.6 Metody całkowania przybliżonego

[8, Rozdział 3.11] [2, Rozdział XXII]

W tym podrozdziale przedstawione są konstrukcje metod obliczania **przybliżonej wartości całki funkcji** ciągłej (Def. 12.5.3, str. 117) $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

15.6.1 Metoda prostokątów

- **dzielimy przedział** $\langle a, b \rangle$ punktami

  $$x_k = a + \lambda\, k \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

  na n podprzedziałów o jednakowej długości λ

  $$\lambda = \frac{b-a}{n}$$

- początek a i koniec b przedziału oznaczamy

  $$\begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= x_n \end{aligned}$$

- w każdym z podprzedziałów $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ **wybieramy środek** przedziału ξ_k

  $$\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$

- dla każdego środka ξ_k podprzedziału $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ **obliczamy wartość funkcji** $f(x)$ w tym punkcie

  $$y_k = f(\xi_k)$$

- **wartość przybliżoną całki** obliczamy przez **sumowanie pól prostokątów** o bokach λ i y_k

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \approx \quad \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k$$

15.6.2 Metoda trapezów

- **dzielimy przedział** $\langle a, b\rangle$ punktami

$$x_k \;=\; a + \lambda\, k \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

na n podprzedziałów o jednakowej długości λ

$$\lambda \;=\; \frac{b-a}{n}$$

- początek a i koniec b przedziału oznaczamy

$$\begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= x_n \end{aligned}$$

- dla każdego punktu x_k **obliczamy wartość funkcji** $f(x)$ w tym punkcie

$$y_k \;=\; f(x_k) \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

- **wartość przybliżoną całki** obliczamy przez **sumowanie pól trapezów prostokątnych** o podstawach y_{k-1} i y_k oraz wysokości λ

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \approx \quad \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \Big(y_{k-1} + y_k \Big)$$

15.6.3 Metoda Simpsona

- **dzielimy przedział** $\langle a, b\rangle$ punktami

$$x_k \; = \; a + \lambda\, k \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n-1$$

na parzystą $2n$ podprzedziałów o jednakowej długości λ

$$\lambda \; = \; \frac{b-a}{2n}$$

- początek a i koniec b przedziału oznaczamy

$$\begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= x_{2n} \end{aligned}$$

- w każdym punkcie x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ **obliczamy wartość funkcji** podcałkowej $f(x)$

$$y_k \; = \; f(x_k)$$

- dla każdego podprzedziału $\langle x_{2i-2}, x_{2i}\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ **całkę**

$$\int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

zastępujemy całką z funkcji

$$h_i(x) \; = \; a_i\, x^2 + b_i\, x + c_i$$

tak dobranej, aby spełnione były warunki

$$\begin{aligned} h_i(x_{2i-2}) &= y_{2i-2} \\ h_i(x_{2i-1}) &= y_{2i-1} \\ h_i(x_{2i}) &= y_{2i} \end{aligned}$$

czyli mamy

$$\int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} h_i(x)\,\mathrm{d}x$$

- **wartość przybliżoną całki** obliczamy przez **sumowanie wartości całek** określonych powyżej

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \approx \quad \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} h_i(x)\,\mathrm{d}x$$

Rozdział 16

Funkcje wielu zmiennych

16.1 Granica funkcji

16.1.1 Granice iterowane

16.2 Ciągłość

Rozdział 17

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

17.1 Pochodna funkcji

17.1.1 Pochodna cząstkowa

17.1.2 Pochodna kierunkowa

17.1.3 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

17.2 Różniczka funkcji

17.2.1 Twierdzenie o przedstawieniu przyrostu funkcji

17.2.2 Funkcja różniczkowalna

17.2.3 Różniczka funkcji

17.2.4 Różniczka zupełna

[13, Paragraf 11.5, Paragraf 11.6]

Niech

- funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^0 w obszarze D

- funkcja $F(x, y)$ jest klasy C^1 w obszarze D

Definicja 17.2.1. *Wyrażenie*

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

jest **różniczką zupełną** *funkcji $F(x, y)$ jeżeli zachodzą związki*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

w każdym punkcie obszaru D.

Warunek konieczny i wystarczający

Niech funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D (Def. **??**, str. **??**).

Twierdzenie 17.2.1. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wyrażenie*

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

było **różniczką zupełną** *w tym obszarze, jest spełnienie równości*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

w każdym punkcie obszaru D.

Rozdział 18

Badanie przebiegu zmienności funkcji wielu zmiennych

18.1 Ekstrema funkcji

18.1.1 Warunek konieczny istnienia ekstremum

18.1.2 Warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jacobian?

Rozdział 19

Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych

Rozdział 20

Elementy teorii pola

20.1 Operator nabla, hamiltona

20.2 Operator gradientu

20.3 Operator dywergencji

20.4 Operator rotacji

20.5 Laplasjan

Rozdział 21

Funkcja zespolona

21.1 Warunek Cauchy-Riemann'a

21.2 Warunek wystarczający istnienia pochodnej

Rozdział 22

Równania różniczkowe zwyczajne

22.0.1 Równanie różniczkowe zwyczajne

Definicja 22.0.1. Równaniem różniczkowym zwyczajnym *nazywamy równanie zawierające*

- *zmienną niezależną* x,
- *nieznaną funkcję* y *(Def. 1.2.1, str. 5),*
- *oraz jej pochodne* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ *(Def. 13.1.1, str. 119).*

$$F\left(x,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}\right)\ =\ 0$$

[11, Definicja 1.1]

22.0.2 Rząd równania różniczkowego

Definicja 22.0.2. Rzędem równania różniczkowego *zwyczajnego nazywamy liczbę równą* ***rzędowi najwyższej pochodnej*** *(Def. 13.1.3, str. 121) występującej w równaniu.*

[11, Definicja 1.2]

22.0.3 Problem początkowy Cauchy'ego

Definicja 22.0.3. **Problemem początkowym Cauchy'ego** *dla równania różniczkowego zwyczajnego nazywamy zagadnienie:*

Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

$$F\left(x,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) \;=\; 0$$

spełniające warunek początkowy

$$\begin{cases} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ \vdots & & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{cases}$$

gdzie

- $x_0 \in (a, b)$
- $y_0, y_1, \ldots, y_{n_1}$ *są zadanymi liczbami.*

[11, Definicja 1.4]

22.0.4 Całka szczególna (rozwiązanie szczególne)

Definicja 22.0.4. **Całką szczególną** *(***rozwiązaniem szczególnym***) równania różniczkowego zwyczajnego nazywamy równanie spełniające warunek początkowy problemu początkowego Cauchy'ego.*

[12, Rozdział 1.1]

22.0.5 Całka ogólna (rozwiązanie ogólne)

Definicja 22.0.5. **Całką ogólną** *(***rozwiązaniem ogólnym***) równania różniczkowego zwyczajnego nazywamy zbiór wszystkich całek szczególnych równania.*

[11, Definicja 1.7]

22.1 Równania różniczkowe zwyczajne rzędu I-go

22.1.1 Równania o zmiennych rozdzielonych

Definicja 22.1.1. *Równanie postaci*

$$X(x)\,\mathrm{d}x \;+\; Y(y)\,\mathrm{d}y \;=\; 0$$

nazywamy **równaniem o zmiennych rozdzielonych***.*

[11, Rozdział 1.3.1]

Całką ogólną (Def. 22.0.5, str. 182) tego równania jest

$$\int X(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int Y(y)\,\mathrm{d}y \;=\; 0$$

lub

$$\int_{x_0}^{x} X(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{y_0}^{y} Y(y)\,\mathrm{d}y \;=\; C$$

Równania sprowadzalne do równania o zmiennych rozdzielonych

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła (Def. 12.5.2, str. 117).

- W równaniu postaci

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; f\left(\frac{y}{x}\right)$$

  wprowadzamy nową zmienną zależną

  $$u \;=\; \frac{y}{x}$$

  skąd

$$y' = u + xu'$$

Po wstawieniu do równania i rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \vee \quad f(u) = u \quad \vee \quad x = 0$$

- W równaniu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$$

wprowadzamy nową zmienną zależną

$$u = ax + by + c$$

i dalej postępujemy jak w pierwszym przypadku.

- W równaniu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

przy założeniu, że

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

(Def. 8.0.8, str. 64)

wprowadzamy nowe zmienne:

  - niezależna ξ
  - zależną η

$$\begin{cases} x &= \xi + \alpha \\ y &= \eta + \beta \end{cases}$$

gdzie α i β spełniają układ równań (Def. 9.1.4, str. 70)

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0 \end{cases}$$

Równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$$

[11, Rozdział 1.3.2]

22.1.2 Równania liniowe

Definicja 22.1.2. *Równanie postaci*

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

nazywamy **równaniem liniowym niejednorodnym** *(Def. 9.1.2, str. 70).*

[11, Rozdział 1.3.3]

Definicja 22.1.3. *Równanie postaci*

$$y' + p(x)\,y = 0$$

nazywamy **równaniem liniowym jednorodnym** *(Def. 9.1.3, str. 70).*

[11, Rozdział 1.3.3]

Całkę ogólną (Def. 22.0.5, str. 182) równania liniowego **jednorodnego** obliczamy, korzystając z równania o zmiennych rozdzielonych i otrzymujemy

$$y_1 = C\,e^{-P(x)}$$

gdzie $P(x)$ jest funkcją pierwotną (Def. 15.1.1, str. 137) do $p(x)$.

Całkę szczególną (Def. 22.0.4, str. 182) równania liniowego **niejednorodnego** obliczamy, korzystając z **metody uzmienniania stałej**.

Przewidujemy, że funkcja

$$y_1 \;=\; C(x)\, e^{-P(x)} \qquad C \in C^1\langle a, b\rangle$$

jest rozwiązaniem równania liniowego jednorodnego.

Obliczamy y_1'

$$y_1' \;=\; C'(x)\, e^{-P(x)} - C(x)\, e^{-P(x)}\, p(x)$$

Wstawiamy y_1 oraz y_1' do równania liniowego niejednorodnego i otrzymujemy

$$C'(x)\, e^{-P(x)} \;=\; q(x)$$

Skąd

$$C(x) \;=\; \int q(x)\, e^{P(x)} \mathrm{d}x$$

Całka ogólna równania liniowego **niejednorodnego** jest **sumą**

- całki **ogólnej** (Def. 22.0.5, str. 182) równania liniowego **jednorodnego**
- i całki **szczególnej** (Def. 22.0.4, str. 182) równania liniowego **niejednorodnego**

Stąd

$$y_0 \;=\; e^{-P(x)} \left[C + \int q(x)\, e^{P(x)} \mathrm{d}x \right]$$

22.1.3 Równanie Bernoulliego

Niech

- $p, q \in C\langle a, b\rangle$
- $r \in \mathbb{R}$

Definicja 22.1.4. *Równanie postaci*

$$y' \ + \ p(x)\, y \ = \ q(x)\, y^r$$

nazywamy **równaniem Bernoulliego***.*

[11, Rozdział 1.3.4]

Dla $r \in \{0, 1\}$ powyższe równanie jest **równaniem liniowym** (Def. 22.1.2, str. 185).

Równanie Bernoulliego rozwiązujemy dzieląc obie strony równania przez y^r, a następnie wprowadzamy nową zmienną zależną $z = y^{1-r}$. Obliczamy z'

$$z' \ = \ (1 - r)\, y^{-r}\, y'$$

Stąd

$$y' \ = \ \frac{y^r\, z'}{1 - r}$$

Po wstawieniu otrzymujemy następujące równanie

$$\frac{1}{1 - r}\, z' \ + \ p(x)\, z \ = \ q(x)$$

Jest to **równanie liniowe niejednorodne** (Def. 22.1.2, str. 185).

22.1.4 Równanie zupełne

[13, Paragraf 11.5, Paragraf 11.6]

Niech wyrażenie

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

jest **różniczką zupełną** (Def. 17.2.1, str. 172) pewnej funkcji dwóch zmiennych $F(x,y)$ (Def. **??**, str. **??**) określonej w obszarze D.

Definicja 22.1.5. Równaniem różniczkowym zupełnym *nazywamy równanie różniczkowe rzędu I-go postaci*

$$P(x,y) \;+\; Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; 0$$

Rozwiązania równania zupełnego

Niech

- C jest stałą dowolną całkowania
- punkty (x,y) należą do obszaru D
- wyrażenie

  $$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

  jest przy podanych założeniach **różniczką zupełną** (Def. 17.2.1, str. 172) funkcji $F(x,y)$

Twierdzenie 22.1.1. *Jeżeli spełnione są założenia, to równanie*

$$F(x,y) \;=\; C$$

określa ***wszystkie rozwiązania równania zupełnego***

$$P(x,y) \;+\; Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; 0$$

22.1.5 Równanie różniczkowe sprowadzalne do zupełnego

Równanie różniczkowe nie spełniające założenia zupełnego

Wróćmy do równania

$$P(x,y)+Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

i przyjmijmy, że

- funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym (Def. **??**, str. **??**) D
- oraz, że **niespełniony** jest **warunek**

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

  w każdym punkcie obszaru D, czyli **niespełnione** jest **założenie** dotyczące różniczki zupełnej, więc

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

  nie jest różniczką zupełną funkcji $F(x,y)$.

W tym przypadku równanie postaci

$$P(x,y)+Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

nie jest równaniem różniczkowym **zupełnym**.

Czynnik całkujący

Można wykazać, że dla każdego równania różniczkowego postaci

$$P(x,y) + Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

istnieje nieskończenie wiele funkcji

$$\mu(x,y) \not\equiv 0$$

w rozpatrywanym obszarze, że jeżeli **pomnożymy** przez tą **funkcję obie strony równania**

$$P(x,y) + Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

to otrzymane w ten sposób równanie

$$\mu(x,y)\,P(x,y) + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

jest równaniem **zupełnym**, tzn. spełniony jest warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

dla otrzymanego równania, tzn.

$$\frac{\partial\,(\mu\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu\,Q)}{\partial x}$$

Znajdowanie czynnika całkującego

Znalezienie czynników całkujących w ogólnym przypadku prowadzi do rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{\partial\,(\mu\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu\,Q)}{\partial x}$$

rzędu I-go o pochodnych cząstkowych, z funkcją niewiadomą $\mu(x, y)$, które jest na ogół trudniejsze do rozwiązania niż równanie

$$P(x, y) + Q(x, y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

W pewnych specjalnych przypadkach jednak łatwo jest znaleźć czynnik całkujący.

Poniżej przedstawione jest kilka najprostszych.

- **Znajdowanie czynnika całkującego** - przypadek **I**

  Niech

  - funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D
  - $Q(x, y) \neq 0$
  - wyrażenie

  $$\frac{1}{Q(x, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

    jest **funkcją tylko jednej zmiennej** x

  Jeżeli spełnione są założenia, to istnieje **czynnik całkujący** $\mu(x)$ równania

  $$P(x, y) + Q(x, y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

  który jest **funkcją tylko zmiennej** x, określony równością

  $$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\right\}$$

- **Znajdowanie czynnika całkującego** - przypadek **II**

  Niech

  - funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D

- $P(x,y) \neq 0$
- wyrażenie

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

  jest **funkcją tylko jednej zmiennej** y

Jeżeli spełnione są założenia, to istnieje **czynnik całkujący** $\mu(y)$ równania

$$P(x,y) + Q(x,y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

który jest **funkcją tylko zmiennej** y, określony równością

$$\mu(y) = \exp\left\{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\right\}$$

- **Znajdowanie czynnika całkującego** - przypadek **III**

  Niech

  - funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D
  - istnieją takie dwie funkcje $f(x)$ i $g(y)$ spełniające tożsamościowo równość

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad\equiv\quad Q(x,y)\,f(x) - P(x,y)\,g(y)$$

  Jeżeli spełnione są założenia, to istnieje **czynnik całkujący** $\mu(x,y)$ będący **iloczynem dwóch funkcji** $\varphi(x)$ **i** $\psi(x)$ określonych równościami

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \exp\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ \psi(y) &= \exp\left(\int g(y)\,\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

22.2 Równania różniczkowe zwyczajne rzędu II-go

22.2.1 Równania rzędu II-go sprowadzalne do rzędu I-go

[12, Rozdział 1.7]

Rozwiązywanie niektórych równań różniczkowych II-go rzędu można sprowadzić za pomocą podstawień do rozwiązywania równań I-go rzędu.

- Równanie typu $F(x,\, y',\, y'') \;=\; 0$.

  Wprowadzamy nową zmienną zależną

  $$u \;=\; y'$$

  Stąd

  $$u' \;=\; y''$$

  Po podstawieniu otrzymujemy równanie różniczkowe I-go rzędu

  $$F(x,\, u,\, u') \;=\; 0$$

- Równanie typu $F(y,\, y',\, y'') \;=\; 0$.

  Wprowadzamy nową zmienną zależną

  $$u(y) \;=\; y'$$

  Stąd

  $$u'y' \;=\; y''$$

  $$u'u \;=\; y''$$

  Po podstawieniu otrzymujemy równanie różniczkowe I-go rzędu

  $$F(y,\, u,\, u'u) \;=\; 0$$

22.2.2 Równania liniowe

[12, Rozdział 1.8] [11, Rozdział 3.1] - równania liniowe rzędu n

Definicja 22.2.1. *Równanie postaci*

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

nazywamy **równaniem liniowym niejednorodnym II-go rzędu** *(Def. 9.1.2, str. 70).*

Definicja 22.2.2. *Równanie postaci*

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

nazywamy **równaniem liniowym jednorodnym II-go rzędu** *(Def. 9.1.3, str. 70).*

22.2.3 Równania liniowe o stałych współczynnikach

Rozważmy problem początkowy

$$y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f(x)$$

$$\begin{cases} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{cases}$$

gdzie

- $x_0 \in (a, b)$
- $a_k \in \mathbb{R}$

Zaczniemy od wyznaczenia całki ogólnej (Def. 22.0.5, str. 182) równania liniowego jednorodnego (Def. 9.1.3, str. 70) stowarzyszonego z równaniem niejednorodnym

$$y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0$$

Wprowadzamy nowe zmienne

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_1(x) & = & y(x) \\ t_2(x) & = & y'(x) \end{array}\right.$$

Problem początkowy przyjmuje postać

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_1'(x) & = & y'(x) \\ & = & t_2(x) \\ & & \\ t_2'(x) & = & y''(x) \\ & = & -\,a_1\,y' \,-\, a_2\,y \\ & = & -\,a_1\,t_2(x) \,-\, a_2\,t_1(x) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_1(x_0) & = & y_0 \\ t_2(x_0) & = & y_1 \end{array}\right.$$

Zapisujemy układ równań (Def. 9.1.4, str. 70) w postaci macierzowej (Def. 7.0.3, str. 57)

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} t_1' \\ t_2' \end{array}\right]$$

Wyznaczamy równanie charakterystyczne (Def. 7.4.6, str. 61) macierzy współczynników tego układu równań

$$\begin{array}{rcl} \det\left(A - \lambda I\right) & = & \det\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{array}\right] - \lambda\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right) \\ & = & \det\left[\begin{array}{cc} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{array}\right] \\ & = & \lambda^2 \,+\, a_1\,\lambda \,+\, a_2 \end{array}$$

Pierwiastki tego równania nazywamy również pierwiastkami charakterystycznymi równania niejednorodnego

Jeżeli $\Delta \;=\; a_1^2 \;-\; 4\,a_2$ równania charakterystycznego jest

- > 0, to rozwiązaniem równania jednorodnego odpowiadającym wartości własnej λ_1 (Def. 7.4.1, str. 60) jest funkcja

  $$y_1 \;=\; e^{\lambda_1\, x}\, C_1$$

  a rozwiązaniem równania jednorodnego odpowiadającym wartości własnej λ_2 (Def. 7.4.1, str. 60) jest funkcja

  $$y_2 \;=\; e^{\lambda_2\, x}\, C_2$$

  Całką ogólną równania jednorodnego jest funkcja

  $$y \;=\; C_1\, e^{\lambda_1\, x} \;+\; C_2\, e^{\lambda_2\, x}$$

- $= 0$, to rozwiązaniem równania jednorodnego odpowiadającym wartości własnej $\lambda_0$jest funkcja

  $$y_0 \;=\; e^{\lambda_0\, x}\; (C_1 \;+\; C_2\, x)$$

  Ponieważ występuje jeden pierwiastek charakterystyczny, to **całka ogólna równania liniowego jednorodnego** jest równa rozwiązaniu równania jednorodnego odpowiadającym wartości własnej λ_0, czyli

  $$y \;=\; (C_1 \;+\; C_2\, x)\; e^{\lambda_0\, x}$$

- < 0, to rozwiązaniem równania jednorodnego odpowiadającym wartości własnej $\lambda \;=\; \alpha \;+\; i\,\beta$ (Def. 5.0.1, str. 37) jest funkcja

  $$y_1 \;=\; e^{(\alpha\, +\, i\, \beta)}$$

  a rozwiązaniem równania jednorodnego odpowiadającym wartości własnej $\overline{\lambda} \;=\; \alpha \;-\; i\,\beta$ sprzężonej z λ (Def. 5.4.1, str. 42) jest funkcja

  $$y_2 \;=\; e^{(\alpha\, -\, i\, \beta)}$$

  Korzystając ze wzoru Eulera (Def. 5.6.1, str. 48) otrzymujemy

$$y_1 \;=\; e^{\alpha\, x}\, \cos\beta\, x \;+\; i\, e^{\alpha\, x}\, \sin\beta\, x$$

Na mocy twierdzenia

Twierdzenie 22.2.1. *Jeżeli funkcja zespolona (Def.* **??**, *str.* **??***) zmiennej rzeczywistej x*

$$w(x) \;=\; u(x) \;+\; i\, v(x)$$

jest ***całką równania***

$$y'' \;+\; p(x)\, y' \;+\; q(x)\, y \;=\; 0$$

z rzeczywistymi współczynnikami $p(x)$ i $q(x)$ w przedziale (a, b), to jej

- *część rzeczywista $u(x)$*
- *i część urojona $v(x)$*

są *także* ***całkami*** *tego* ***równania*** *w przedziale (a, b)*

[12, Rozdział 1.8, Tw. 3]

funkcje

$$y_{11} \;=\; e^{\alpha\, x}\, \cos\beta\, x$$

$$y_{12} \;=\; e^{\alpha\, x}\, \sin\beta\, x$$

są także całkami równania jednorodnego.

Całka ogólna równania jednorodnego wyraża się wzorem

$$y \;=\; e^{\alpha\, x}\, (C_1\, \sin\beta\, x \;+\; C_2\, \cos\beta\, x)$$

22.2.4 Równanie Eulera

Rozdział 23

Szeregi liczbowe

23.1 Szereg liczbowy

23.2 Zbieżność szeregu

23.3 Szereg harmoniczny

23.4 Szereg Dirichleta

23.5 Szereg naprzemienny

23.6 Kryteria zbieżności szeregów

23.6.1 Kryterium porównawcze

23.6.2 Kryterium D'Alamberta

23.6.3 Kryterium Cauchy'ego

23.6.4 Kryterium Leibnitza

23.6.5 Kryterium całkowe

Rozdział 24

Szeregi funkcyjne

24.1 Ciąg funkcyjny

24.2 Szereg funkcyjny

24.3 Zbieżność szeregu

24.4 Kryterium Weierstrassa

Dodatek A

Licencja

Indeks

Bibliografia

[1] Jerzy Rutkowski: *Algebra Abstrakcyjna w zadaniach*, PWN 2005

[2] W. Krysicki, L. Włodarski: *Analiza matematyczna w zadaniach 1*, PWN 2004

[3] Marek Ptak: *Matematyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*, Wydawnictwo AR w Krakowie 2006

[4] Sylwester Przybyło, Andrzej Szlachtowski: *algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach* WNT 2005

[5] Aleksiej I. Kostrykin: *Wstęp do algebry. Podstawy algebry. 1.* PWN 2004

[6] Aleksiej I. Kostrykin: *Wstęp do algebry. Podstawy algebry. 2.* PWN 2004

[7] Zbigniew Furdzik, Janina Maj-Kluskowa, Alicja Kulczycka, Magdalena Sękowska: *Nowoczesna matematyka dla inżynierów. Część I. Algebra.* AGH 1998

[8] W. Żakowski, G. Decewicz: *Matematyka, cz. I.* WNT 1968, 1991

[9] T. Trajdos: *Matematyka, cz. III.* WNT 1971, 1993

[10] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz: *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* PWN 2005

[11] Janina Niedoba, Wiesław Niedoba: *Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe. Zadania z matematyki.* AGH 2001

[12] W. Żakowski, W. Leksiński: *Matematyka, cz. IV.* WNT 1971, 1995

[13] W. Krysicki, L. Włodarski: *Analiza matematyczna w zadaniach 2*, PWN 2000