Równanie różniczkowe zupełne. Czynnik całkujący.

Natalia Citak

Uniwersytet Rolniczy im. Hugona Kołłątaja w Krakowie

2 marzec 2010

Notatki

Obszar jednospójny - definicja

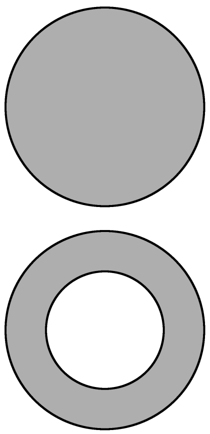
Obszar jednospójny

Obszar jednospójny, to zbiór

- otwarty,
- spójny,
- ograniczony
- i taki, że uzupełnienie do całej przestrzeni jest zbiorem spójnym.

Koło jest obszarem jednospójnym

Pierścień nie jest obszarem jednospójnym



Notatki

Różniczka zupełna - definicja

Założenia

Funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^0 w obszarze D.
Funkcja $F(x,y)$ jest klasy C^1 w obszarze D

Różniczka zupełna

Wyrażenie

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{1}$$

jest **różniczką zupełną** funkcji $F(x,y)$ jeżeli zachodzą związki

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \tag{2}$$

w każdym punkcie obszaru D.

Notatki

Różniczka zupełna - warunek konieczny i wystarczający

Założenie

Funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D.

Warunek konieczny i wystarczający

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wyrażenie (1) było **różniczką zupełną** w tym obszarze, jest spełnienie równości

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3}$$

w każdym punkcie obszaru D.

Notatki

Równanie różniczkowe zupełne - definicja

Założenie

Wyrażenie

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{4}$$

jest **różniczką zupełną** pewnej funkcji dwóch zmiennych $F(x, y)$ określonej w obszarze D

Równanie różniczkowe zupełne

Równaniem różniczkowym zupełnym nazywamy równanie różniczkowe rzędu pierwszego postaci

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5}$$

Notatki

Rozwiązania równania zupełnego

Założenia

- C jest stałą dowolną całkowania
- punkty (x, y) należą do obszaru D
- wyrażenie (1) jest przy podanych założeniach **różniczką zupełną** funkcji $F(x, y)$

Rozwiązania równania zupełnego

Jeżeli spełnione są założenia, to równanie

$$F(x, y) = C \tag{6}$$

określa **wszystkie rozwiązania równania zupełnego** (5).

Notatki

Równanie różniczkowe zupełne - Przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie

$$4x^3 + 6xy^3 + \left(9x^2y^2 + 3\right)\ y' = 0 \tag{7}$$

Sprawdzamy, czy równanie (7) jest **różniczką zupełną**.

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 4x^3 + 6xy^3 \\ Q(x,y) &= 9x^2y^2 + 3 \end{aligned}$$

Skąd

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 18xy^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 18xy^2$$

a więc **warunek (3) jest spełniony** dla każdej pary liczb (x, y), tzn. obszarem D może być każdy jednospójny obszar płaski, w szczególności cała płaszczyzna.

Notatki

Równanie różniczkowe zupełne - Przykład

Z pierwszego z warunków (2) mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^3$$

skąd

$$F(x,y) = \int \left(4x^3 + 6xy^3\right) dx$$

to znaczy

$$F(x,y) = x^4 + 3x^2y^3 + \varphi(y)$$

gdzie zamiast stałej dowolnej całkowania C (liczbowej) użyliśmy dowolnej różniczkowalnej funkcji $\varphi(y)$.

Notatki

Równanie różniczkowe zupełne - Przykład

Funkcję $\varphi(y)$ wyznaczamy z drugiego z warunków (2); mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 9x^2y^2 + \varphi'(y) \quad \equiv \quad 9x^2y^2 + 3 = Q(x,y)$$

skąd $\varphi'(y) = 3$, tzn. $\varphi(y) = 3y$.

Otrzymaliśmy

$$F(x,y) = x^4 + 3x^2y^3 + 3y$$

a więc wszystkie krzywe całkowe równania (7) tworzą rodzinę linii

$$x^4 + 3x^2y^3 + 3y = C$$

Notatki

Równanie różniczkowe sprowadzalne do zupełnego

Wróćmy do równania (5)

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (8)$$

i przyjmijmy, że

funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D

oraz, że **niespełniony** jest **warunek (3)**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

w każdym punkcie obszaru D.

czyli **niespełnione** jest **założenie (4)**, więc

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

nie jest różniczką zupełną funkcji $F(x,y)$.

W tym przypadku równanie postaci (8) **nie jest** równaniem różniczkowym **zupełnym**.

Notatki

Czynnik całkujący

Można wykazać, że dla każdego równania różniczkowego postaci (8) **istnieje nieskończenie wiele funkcji**

$$\mu(x,y) \not\equiv 0$$

w rozpatrywanym obszarze, że jeżeli **pomnożymy** przez tą **funkcję obie strony równania (8)**, to otrzymane w ten sposób równanie

$$\mu(x,y)\,P(x,y) + \mu(x,y)\,Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{9}$$

jest równaniem **zupełnym**, tzn. spełniony jest warunek (3) dla równania (8), tzn.

$$\frac{\partial\,(\mu\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu\,Q)}{\partial x} \tag{10}$$

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego

Znalezienie czynników całkujących w ogólnym przypadku prowadzi do rozwiązania równania różniczkowego (10)

$$\frac{\partial\,(\mu\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu\,Q)}{\partial x}$$

rzędu pierwszego o pochodnych cząstkowych, z funkcją niewiadomą $\mu(x,y)$, które jest na ogół trudniejsze do rozwiązania niż równanie (8).

W pewnych specjalnych przypadkach jednak łatwo jest znaleźć czynnik całkujący.

Na kolejnych slajdach przedstawione zostanie kilka najprostszych.

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przypadek I

Założenia

- Funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D
- $Q(x, y) \neq 0$
- wyrażenie
$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$
jest **funkcją tylko jednej zmiennej** x

Jeżeli spełnione są założenia, to istnieje **czynnik całkujący** $\mu(x)$ równania (8), który jest **funkcją tylko zmiennej** x, określony równością

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}$$

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przypadek II

Założenia

- Funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D
- $P(x, y) \neq 0$
- wyrażenie
$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$
jest **funkcją tylko jednej zmiennej** y

Jeżeli spełnione są założenia, to istnieje **czynnik całkujący** $\mu(y)$ równania (8), który jest **funkcją tylko zmiennej** y, określony równością

$$\mu(y) = \exp\left\{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}$$

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przypadek III

Założenia

- Funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D
- istnieją takie dwie funkcje $f(x)$ i $g(y)$ spełniające tożsamościowo równość

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv Q(x, y)\, f(x) - P(x, y)\, g(y)$$

Jeżeli spełnione są założenia, to istnieje **czynnik całkujący** $\mu(x, y)$ będący **iloczynem dwóch funkcji** $\varphi(x)$ **i** $\psi(x)$ określonych równościami

$$\varphi(x) = \exp\left(\int f(x)dx\right)$$

$$\psi(y) = \exp\left(\int g(y)dy\right)$$

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przykład

Zadanie

Rozwiązać równanie

$$(1 - x^2 y) + x^2(y - x)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{11}$$

Mamy

$$P(x, y) = 1 - x^2 y, \qquad Q(x, y) = x^2(y - x)$$

skąd

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2$$

zatem równanie (11) **nie jest** równaniem **zupełnym**.

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przykład

Badamym czy istnieje czynnik całkujący zależny tylko od jednej zmiennej. Obliczamy

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{x^2(y-x)}(-x^2-2xy+3x^3)=-\frac{2}{x}$$

Powyższe wyrażenie **zależy tylko od** x, a więc czynnik całkujący istnieje i wyraża się równością

$$\mu(x)=\exp\left\{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx\right\}=\frac{1}{x^2}$$

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przykład

Mnożąc równanie (11) stronami przez czynnik całkujący $\mu(x)$ otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)+(y-x)\frac{dy}{dx}=0 \tag{12}$$

Mamy

$$P(x,y)=\frac{1}{x^2}-y,\qquad Q(x,y)=y-x$$

skąd

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

zatem równanie (12) **jest** równaniem różniczkowym **zupełnym**.

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przykład

Z pierwszego z warunków (2) mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y$$

skąd

$$F(x,y) = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx$$

to znaczy

$$F(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + \varphi(y)$$

Notatki

Znajdowanie czynnika całkującego - przykład

Funkcję $\varphi(y)$ wyznaczamy z drugiego z warunków (2); mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'(y) \quad \equiv \quad y - x = Q(x,y)$$

skąd $\varphi'(y) = y$, tzn. $\varphi(y) = \frac{1}{2}y^2$.

Otrzymaliśmy

$$F(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + \frac{1}{2}y^2$$

a więc wszystkie krzywe całkowe równania (11) tworzą rodzinę linii

$$-\frac{1}{x} - xy + \frac{1}{2}y^2 = C$$

Notatki

Dziękuję za uwagę.

Notatki

Notatki