



Wyższa Szkoła Oficerska Sił Powietrznych

Katedra Nauk Ogólnokształcących

SPRAWOZDANIE

z ćwiczenia przeprowadzonego w zintegrowanym laboratorium fizyki, mechaniki i termodynamiki.

Temat ćwiczenia: **Badanie drgań harmoniczných sprężyny spiralnej. Wyznaczanie stałej sprężystości k .**

Sluchacz: **Igor Buhaj, Łukasz Kusek, Patryk Łudzik**

Grupa: **C9D**

Ćwiczenie zaliczono:

.....

Spis rysunków

- | | | |
|---|--|---|
| 1 | Wykres zaobserwowanego ruchu harmonicznego (wychylenia, prędkości i przyspieszenia) dla zawieszanej na sprężynie masy $m = 60\text{ g}$ | 6 |
| 2 | Wykres zaobserwowanego ruchu harmonicznego (wychylenia, prędkości i przyspieszenia) dla zawieszanej na sprężynie masy $m = 80\text{ g}$ | 6 |
| 3 | Wykres zaobserwowanego ruchu harmonicznego (wychylenia, prędkości i przyspieszenia) dla zawieszanej na sprężynie masy $m = 100\text{ g}$ | 8 |

Spis tablic

1	Odczyty długości okresów dla zawieszanej masy $m = 60g$	5
2	Odczyty długości okresów dla zawieszanej masy $m = 80g$	6
3	Odczyty długości okresów dla zawieszanej masy $m = 100g$	7

1 Opis ćwiczenia

Każdy ruch powtarzający się w regularnych odstępach czasu nazywamy *ruchem okresowym*.

Jedną z ważnych własności opisujących taki ruch jest jego *częstość (częstotliwość)* f , czyli liczba pełnych drgań (cykli) wykonanych w ciągu jednej sekundy.

Z częstością związany jest *okres ruchu* T , czyli czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie.

Częstość związana jest okresem wzorem

$$T = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Szczególnym rodzajem ruchu okresowego opisany wzorem

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Jest to *ruch harmoniczny*, czyli ruch okresowy opisany sinusoidalną funkcją czasu.

Wyrażenia we wzorze [2], to

- A - *amplituda* - wartość bezwzględna maksymalnego przemieszczenia ciała w obu kierunkach,
- ω - *częstość kołowa (kątowna)* dana wzorem

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (3)$$

- $\omega t + \varphi$ - *faza*
- φ - *faza początkowa* - wartość fazy, gdy $t = 0$

Przyspieszenie w takim ruchu wyprowadzamy z

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (4)$$

czyli

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \quad (5)$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona otrzymujemy zależność siły od wychylenia

$$F(t) = m a(t) = -(\omega^2 m) x(t) \quad (6)$$

Przyjmując stałą sprężystości k

$$k = m \omega^2 \quad (7)$$

otrzymujemy prawo Hooke'a

$$F = -k x \quad (8)$$

Układ opisany prawem Hooke'a tworzy *oscylator harmoniczny (liniowy)*.

W rzeczywistości jeżeli ruch oscylatora słabnie na skutek działania sił zewnętrznych, to taki oscylator nazywamy *oscylatorem tłumionym*, a jego drgania nazywamy **tłumionymi**.

Gdy założymy, że ruch odbywa się z niewielką prędkością w kierunku drgań, to siłę oporu można opisać wzorem

$$F_0 = -b v \quad (9)$$

gdzie b jest *stałą tłumienia*.

Układ drgający działa siłą $F_S = -k x$. Jeżeli założymy, że **siła ciężkości** działająca na układ drgający jest *znikomo mała* w porównaniu z F_0 i F_S . Wówczas drugą zasadę dynamiki Newtona dla składowej wzdłuż osi x ($F_x = m a_x$) zapisujemy w postaci

$$-b v - k x = m a \quad (10)$$

Przekształcając równanie [10] otrzymujemy równanie różniczkowe

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (11)$$

którego rozwiązaniem jest równanie opisujące wychylenie od czasu oscylatora tłumionego

$$x(t) = A e^{\frac{-bt}{2m}} \cos(\omega' t + \varphi) \quad (12)$$

Częstość kołowa oscylatora tłumionego

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (13)$$

Gdy

- $b = 0$, to otrzymujemy wzór na częstość kołową oscylatora nietłumionego

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14)$$

- $b \ll \sqrt{k m}$, to

$$\omega' \approx \omega \quad (15)$$

Przyjmując założenia

- **siła ciężkości** działająca na układ drgający jest **znikomo mała** w porównaniu z F_0 i F_S
- $b \ll \sqrt{k m}$

możemy wyznaczyć **stałą sprężystości** k sprężyny mierząc **okres drgań** T oraz **masę** m zawieszonego na sprężynie odważnika.

Korzystamy ze wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (16)$$

otrzymujemy

$$k(m, T) = \frac{4 \pi^2 m}{T^2} \quad (17)$$

2 Tabela odczytów i pomiarów

m [g]	T [s]	k $\left[\frac{N}{m} \right]$
60	$0,875 \pm 0,000$	$3,09 \pm 0,51$
80	$1,010 \pm 0,018$	$3,1 \pm 0,6$
100	$1,222 \pm 0,007$	$3,13 \pm 0,41$

3 Opracowanie pomiarów i wyniki. Ocena błędów

Po przeprowadzeniu pomiarów otrzymaliśmy wyniki w postaci wykresów oraz danych liczbowych dla zawieszonych mas 60 g, 80 g i 100 g.

Odczytaliśmy długości okresów dla pomiaru przy zawieszonej masie 60 g, które umieszczone są w tabeli [1]. Zamieściliśmy poglądowy wykres dla tego pomiaru [1].

Dla tego pomiaru otrzymaliśmy okres

$$T = (0,875 \pm 0,000) [s]$$

Wykorzystując wzór [17], metodę różniczeki zupełnej

Początek drgania [s]	Koniec drgania [s]	Długość okresu [s]
10,6750	11,5500	0,8750
11,5500	12,4250	0,8750
12,4250	13,3000	0,8750
13,3000	14,1750	0,8750
14,1750	15,0500	0,8750
15,0500	15,9250	0,8750
16,8500	17,7250	0,8750

Tablica 1: Odczyty długości okresów dla zawieszanej masy $m = 60g$

$$\Delta k = \left| \frac{\partial k}{\partial m} \cdot \Delta m \right| + \left| \frac{\partial k}{\partial T} \cdot \Delta T \right| \quad (18)$$

$$\frac{\partial k}{\partial m} = \frac{4 \pi^2}{T^2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial T} = \frac{-8 \pi^2 m}{T^3}$$

średni błąd kwadratowy wartości średniej

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} \quad (19)$$

współczynnik rozkładu Studenta dla poziomu ufności 95%

oraz przyjmując

$$\Delta m = 0,005$$

obliczyliśmy stałą sprężystości dla tego pomiaru

$$k = (3,09 \pm 0,51) \left[\frac{N}{m} \right]$$

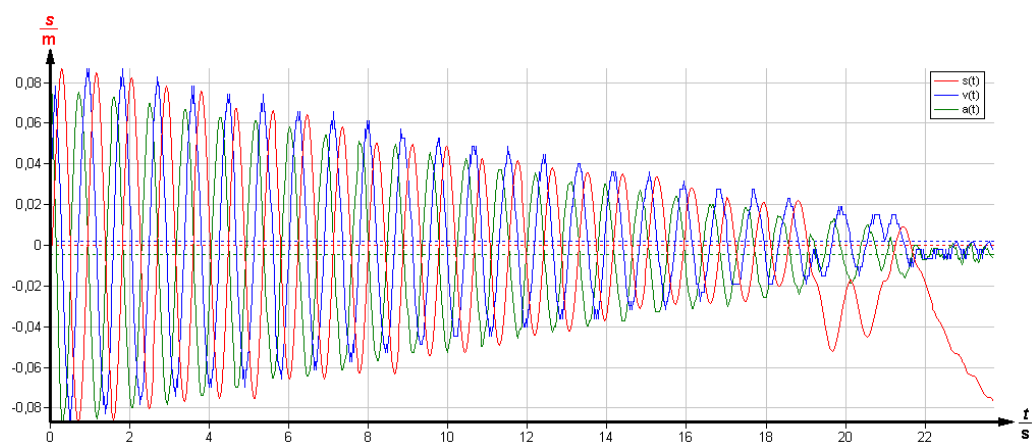
Długości okresów dla pomiaru przy zawieszanej masie 80g umieszczone zostały w tabeli [2], a wykres dla tego pomiaru [2].

Dla tego pomiaru otrzymaliśmy okres

$$T = (1,010 \pm 0,018) [s]$$

oraz stałą sprężystości

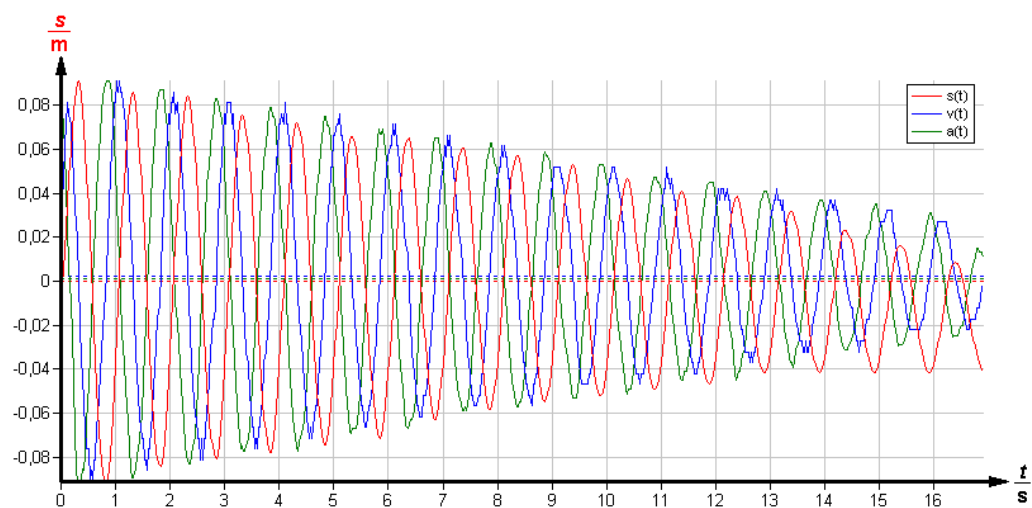
$$k = (3,1 \pm 0,6) \left[\frac{N}{m} \right]$$



Rysunek 1: Wykres zaobserwowanego ruchu harmonicznego (wychylenia, prędkości i przyspieszenia) dla zawieszonej na sprężynie masy $m = 60\text{ g}$

Początek drgania [s]	Koniec drgania [s]	Długość okresu [s]
8,1250	9,1250	1,0000
9,1250	10,1500	1,0250
10,1500	11,1500	1,0000
11,1500	12,1500	1,0000
12,1500	13,1750	1,0250

Tablica 2: Odczyty długości okresów dla zawieszonej masy $m = 80\text{ g}$



Rysunek 2: Wykres zaobserwowanego ruchu harmonicznego (wychylenia, prędkości i przyspieszenia) dla zawieszonej na sprężynie masy $m = 80\text{ g}$

Początek drgania [s]	Koniec drgania [s]	Długość okresu [s]
4,5250	5,6500	1,1250
5,6500	6,7750	1,1250
6,7750	7,9000	1,1250
7,9000	9,0250	1,1250
9,0250	10,1500	1,1250
10,1500	11,2500	1,1000
11,2500	12,3750	1,1250
12,3750	13,5000	1,1250
13,5000	14,6250	1,1250

Tablica 3: Odczyty długości okresów dla zawieszanej masy $m = 100g$

Pomiar przy zawieszanej masie 100 g opisuje tabela [3] oraz wykres [3].

Dla tego pomiaru otrzymaliśmy okres

$$T = (1,122 \pm 0,007) [s]$$

oraz stałą sprężystości

$$k = (3,13 \pm 0,41) \left[\frac{N}{m} \right]$$

Ostatecznie otrzymaliśmy stałą sprężystości korzystając ze średniej arytmetycznej pomiarów stałej sprężystości dla mas $m = 60 g$, $m = 80 g$, $m = 100 g$, średniego błędu kwadratowego wartości średniej [19] oraz prawa przenoszenia błędów

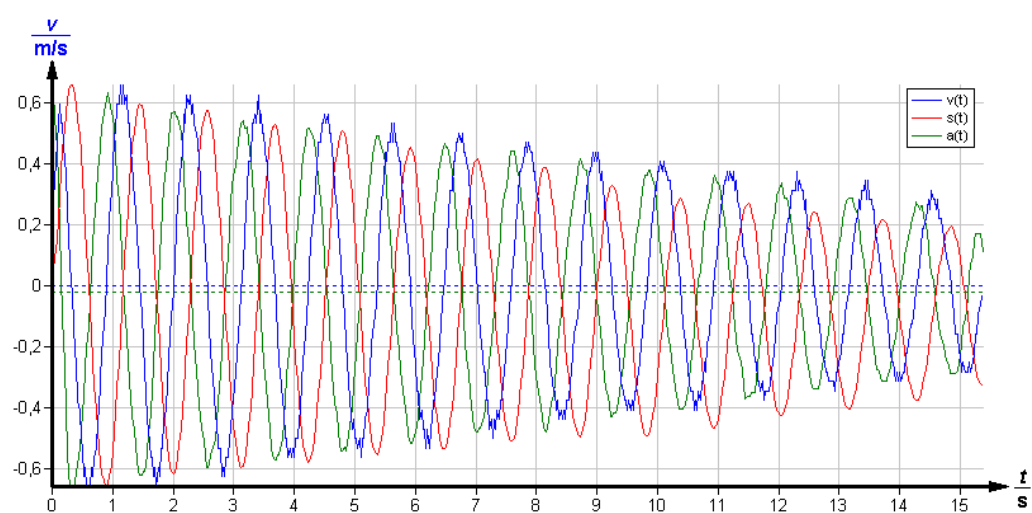
$$\Delta k = \sqrt{\Delta k^2 + \frac{\delta k^2}{3}} \quad (20)$$

$$k = (3,11 \pm 0,35) \left[\frac{N}{m} \right]$$

4 Wnioski i spostrzeżenia

Zbadana stała sprężystości dla badanej sprężyny jest zbliżona do nominalnej stałej tej sprężyny, która wynosiła $3 \frac{N}{m}$.

Na podstawie przeprowadzonego doświadczenia stwierdziliśmy, że stała sprężystości rośnie wraz ze wzrostem zamocowanej masy. Przypuszczamy, że związane jest to z właściwościami materiału, z którego wykonana jest sprężyna, tj. wraz ze wzrostem wydłużenia zwiększa się sztywność sprężyny.



Rysunek 3: Wykres zaobserwowanego ruchu harmonicznego (wychylenia, prędkości i przyspieszenia) dla zawieszonej na sprężynie masy $m = 100\text{ g}$