ŁUKASZ STANISZEWSKI, **NR INDEKSU: 304098**

WPROWADZENIE DO MULTIMEDIÓW

SPRAWOZDANIE Z LABORATORIUM 1 – SYGNAŁY I WIDMA

I. Polecenie 1.

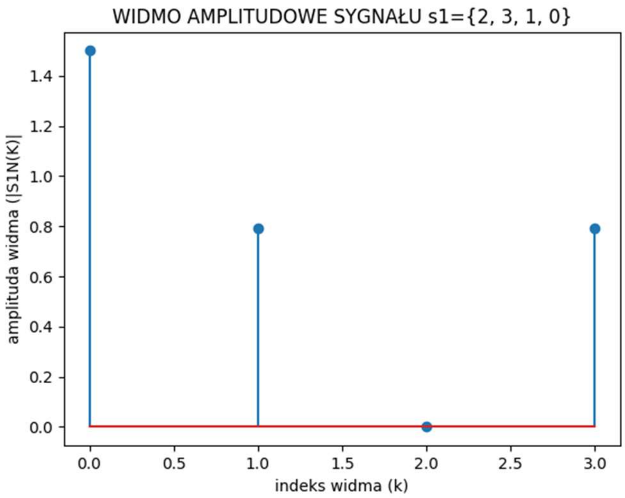
Dane są dwa sygnały o okresie podstawowym $\boldsymbol{N} = \mathbf{4}$: $\boldsymbol{s1} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ i $\boldsymbol{s2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$:

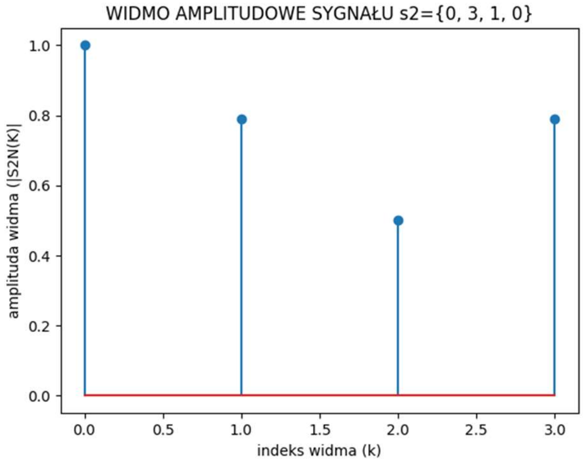
- Dla każdego sygnału wyznaczyć i wykreślić widmo amplitudowe i fazowe, obliczyć moc sygnału i sprawdzić słuszność twierdzenia Parsevala.
- Sprawdzić słuszność twierdzenia o dyskretnej transformacji Fouriera splotu kołowego sygnałów $\boldsymbol{s_1}$ i $\boldsymbol{s_2}$: wyznaczyć ręcznie splot kołowy sygnałów $\boldsymbol{s_1}$ i $\boldsymbol{s_2}$, a następnie wyznaczyć ten splot ponownie za pomocą dyskretnej transformacji Fouriera.

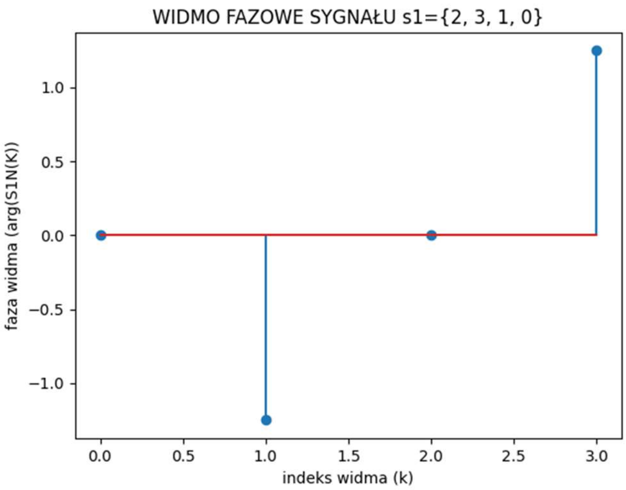
UWAGA: ROZWIĄZANIE POLECENIA NR 1 ZNAJDUJE SIĘ W PLIKU **zad1.py**.

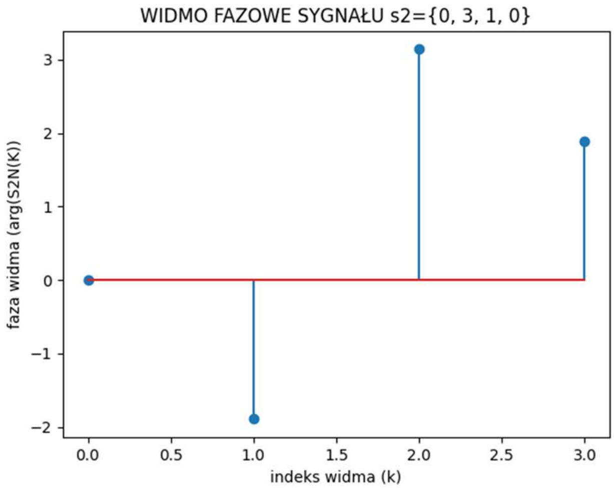
1. WYZNACZENIE WIDM SYGNAŁÓW

W rozwiązaniu skorzystałem z funkcji **fft()** z modułu **np.fft**, obliczającej szybką transformatę Fouriera. Następnie wyniki podzieliłem przez długość okresu **N**, aby wzór był zgodny z przekształceniem **DFT** prezentowanym na wykładzie. Następnie skorzystałem z funkcji **np.abs()** oraz **np.angle()** w celu otrzymania odpowiednio: widma amplitudowego i widma fazowego sygnałów. W wyniku tego działania otrzymałem 4 następujące wykresy:









UWAGA: należy pamiętać, że każde z powyższych widm jest ***4-okresowe***.

2. Sprawdzenie twierdzenia Parsevala

Twierdzenie Parsevala określa, że moc średnia dla okresowego sygnału czasu dyskretnego może zostać obliczona jako suma widm amplitudowych podniesionych do kwadratu (widm mocy):

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

Dlatego też w pliku z rozwiązaniem powstały dwie funkcje: **px_okr_syg_dysk(syg, okresN)** oraz **parseval_dft(SYG)** obliczające odpowiednio lewą i prawą stronę powyższego równania:

```
Moc s1 na podstawie sygnału: 3.5
Moc s1 na podstawie widma mocy:  3.5
Moc s2 na podstawie sygnału:  2.5
Moc s2 na podstawie widma mocy: 2.5
```

Jak można zauważyć porównując wyniki, otrzymane wyniki się zgadzają co potwierdza słuszność twierdzenia Parsevala.

3. Sprawdzenie twierdzenia o DFT splotu kołowego sygnałów

Należy udowodnić, że:

$$\frac{1}{N}s_1(n) \otimes s_2(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} S_1(k)S_2(k)$$

W tym celu najpierw obliczona została ręcznie wartość $s_1(n)\otimes s_2(n)$ z użyciem wzoru $s_1(n)\otimes s_2(n) = \sum_m^{N-1} s_1(m)s_2(n-m)_N$:

- dla n = 0: $\boldsymbol{s_1(0) \otimes s_2(0) = s_1(0)s_2(0) + s_1(1)s_2(-1) + s_1(2)s_2(-2) + s_1(3)s_2(-3) = 2*0 + 3*0 + 1*1 + 0*0 = 1}$
- dla n = 1: $\boldsymbol{s_1(1) \otimes s_2(1) = s_1(0)s_2(1) + s_1(1)s_2(0) + s_1(2)s_2(-1) + s_1(3)s_2(-2) = 2*3 + 3*0 + 1*0 + 0*1 = 6}$
- dla n = 2: $\boldsymbol{s_1(2) \otimes y(2) = s_1(0)s_2(2) + s_1(1)s_2(1) + s_1(2)s_2(0) + s_1(3)s_2(-1) = 2*1 + 3*3 + 0*1 + 0*0 = 11}$
- dla n = 3: $\boldsymbol{s_1(3) \otimes y(3) = s_1(0)s_2(3) + s_1(1)s_2(2) + s_1(2)s_2(1) + s_1(3)s_2(0) = 2*0 + 3*1 + 1*3 + 0*0 = 6}$

Następnie sploty podzielono przez długość okresu **N**, a wynikiem jest zbiór: $\{\boldsymbol{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{4}, \frac{3}{2}}\}$. Wartość tą należy teraz porównać z przemnożonymi przez siebie widmami **S_1(k)** i **S_2(k)**, następnie iloczyn ten przekształcić z użyciem **np.fft.ifft()** oraz przemnożyć wynik przez **N** (dla uzgodnienia wzoru na **DFT**). Otrzymane wyniki:

```
s[0] = (0.25+0j)
s[1] = (1.5+0j)
s[2] = (2.75+0j)
s[3] = (1.5+0j)
```

Wyniki te (porównane z obliczeniami) potwierdzają słuszność powyższego twierdzenia.

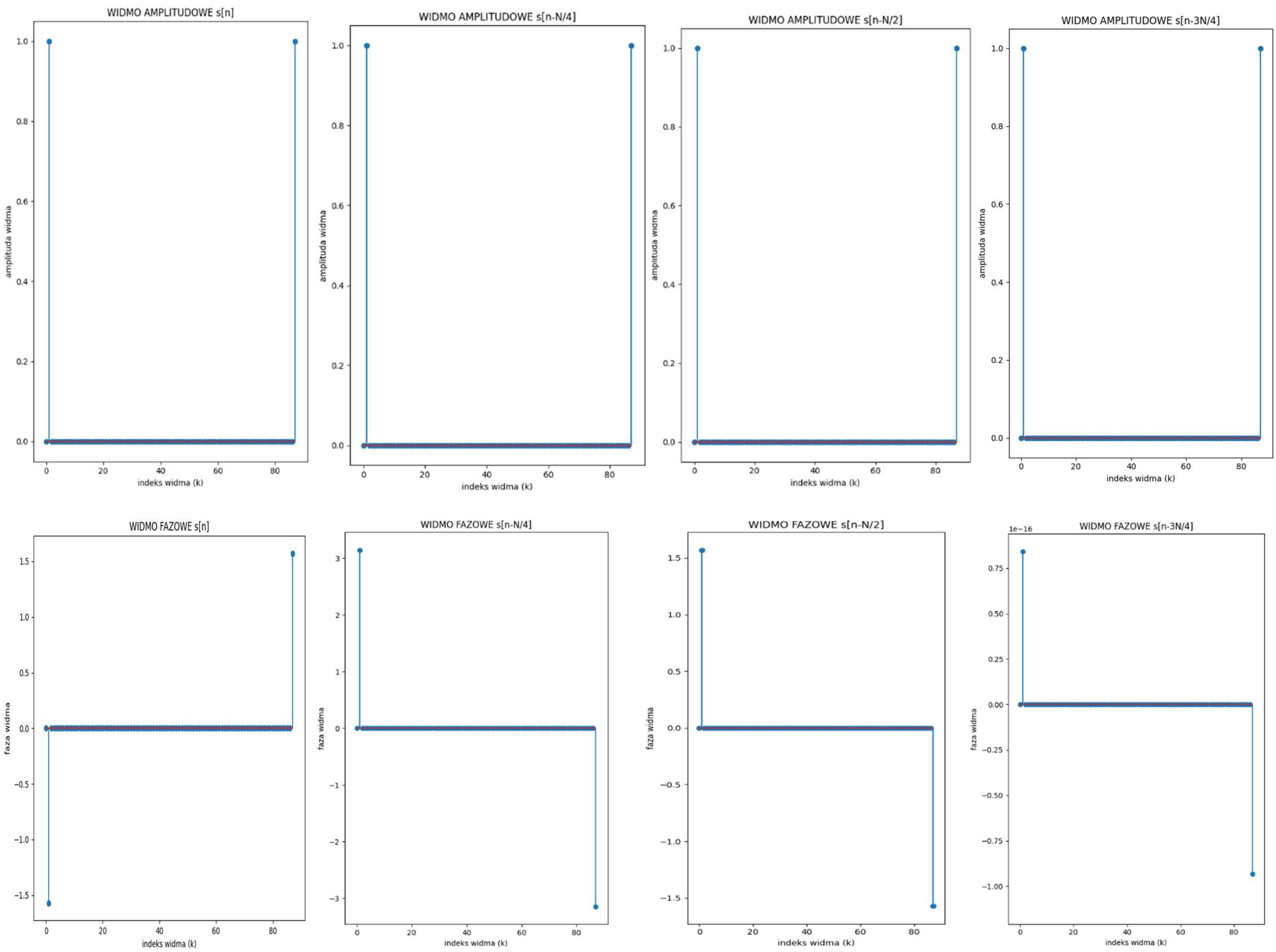
II. POLECENIE II.

Zbadać wpływ przesunięcia w czasie na postać widma amplitudowego i widma fazowego dyskretnego sygnału harmonicznego $\boldsymbol{s[n] = Asin(2\pi \frac{n}{N})}$ o amplitudzie $\boldsymbol{A = 2}$ i okresie podstawowym $\boldsymbol{N = 88}$. W tym celu dla każdej wartości $\boldsymbol{n_0 \in \{0, \frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3N}{4}\}}$ wykreślić widmo amplitudowe i fazowe przesuniętego sygnału $\boldsymbol{s[n-n_0]}$. Skomentować otrzymane wyniki.

*UWAGA: ROZWIĄZANIE POLECENIA NR 2 ZNAJDUJE SIĘ W PLIKU **zad2.py**.*

1. Implementacja

W rozwiązaniu została zaimplementowana funkcja **signal**() wyliczająca wartość funkcji $\boldsymbol{s[n] = Asin(2\pi \frac{n-n_0}{N})}$. Za jej pomocą zostały policzone wartości przesuniętego sygnału $\boldsymbol{s[n-n_0]}$, a następnie przetransformatowane z użyciem funkcji **np.fft.fft()** wraz z podzieleniem przez długość okresu **N**. W wyniku otrzymane zostały następujące wykresy:



2. Wnioski

- Na podstawie otrzymanych wykresów amplitud widm można zauważyć, że **przesunięcie w czasie zupełnie nie wpływa na charakterystykę widma amplitudowego danego sygnału**.
- Zmiany można zauważyć zaś w przypadku widm fazowych, mianowicie **zmieniają się wartości faz w zależności od przesunięcia**. Jako, że zbiór wartości widma fazowego to $(-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi} >$, tak więc można wywnioskować, że każde z kolejnych przesunięć zmniejsza – w przypadku takich okresów - wartość fazy o kolejno $\{\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{\pi}, \frac{3\pi}{2}\}$ dla przesunięć $\{\frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3N}{4}\}$ dla dwóch skrajnych prążków (u pozostałych by również było to widoczne, jednak w programie zostało zastosowane zerowanie wartości w wektorze transformat dla tych elementów, których amplituda była bardzo bliska 0 w celu **odszumienia widm fazowych**).
- Wnioski te można wysunąć również wzorując się na wzorze:

$$\boldsymbol{x(n-n_0)_N \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X(k)e^{-\frac{2\pi jkn_0}{N}}},$$

widać tu mianowicie, że przesunięcie powoduje zmianę argumentu liczby zespolonej, a moduł się nie zmienia, co zgadza się z wysuniętymi wnioskami na podstawie wykresów.

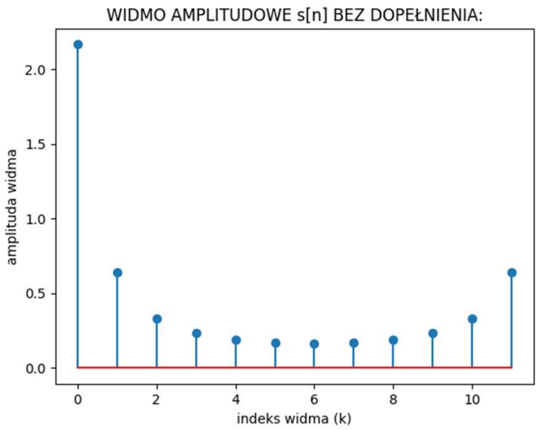
III. Polecenie III.

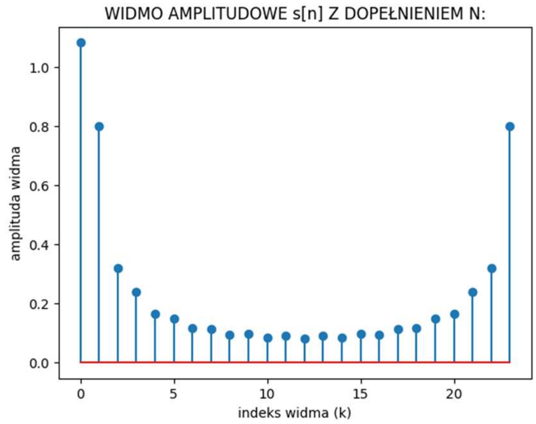
Zbadać wpływ dopełnienia zerami na postać widma amplitudowego i widma fazowego dyskretnego sygnału $\boldsymbol{s}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{A}(\mathbf{1} - \frac{n \bmod N}{N})$ o amplitudzie $\boldsymbol{A} = \mathbf{4}$ i okresie podstawowym $\boldsymbol{N} = \mathbf{12}$. W tym celu dla każdej wartości $\boldsymbol{N_0} \in \{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\boldsymbol{N},\ \mathbf{4}\boldsymbol{N},\ \mathbf{9}\boldsymbol{N}\}$ wykreślić widmo amplitudowe i fazowe sygnału $\boldsymbol{s}[\boldsymbol{n}]$ dopełnionego $\boldsymbol{N_0}$ zerami. Skomentować otrzymane wyniki.

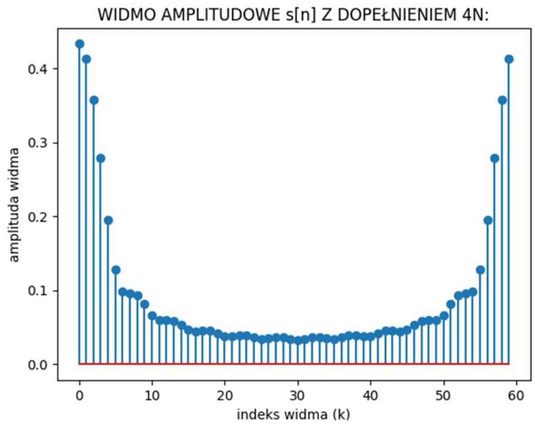
*UWAGA: ROZWIĄZANIE POLECENIA ZNAJDUJE SIĘ W PLIKU **zad3.py**.*

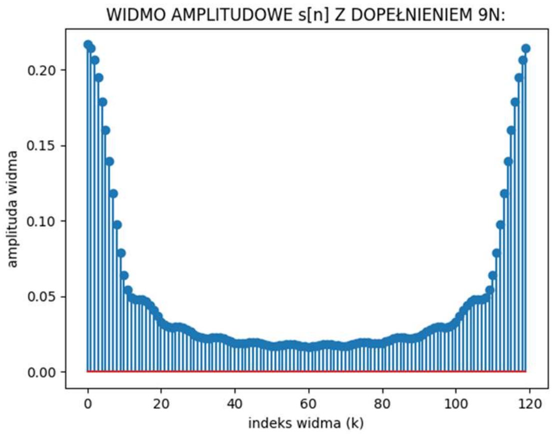
1. **Implementacja**:

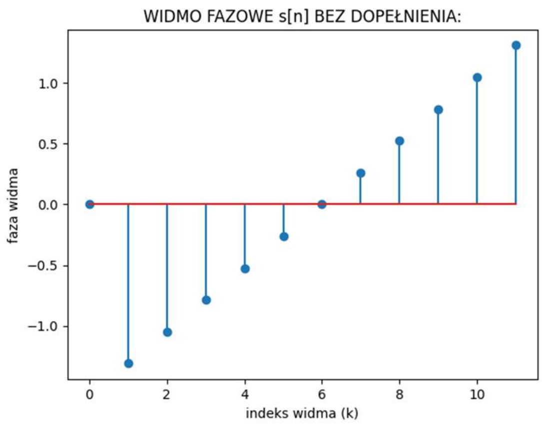
W rozwiązaniu została zaimplementowana funkcja **signal()** wyliczająca wartość funkcji $\boldsymbol{s}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{A}(\mathbf{1} - \frac{n \bmod N}{N})$ oraz funkcja **normalize()**, która „zeruje" każdy składnik wektora transformat, dla którego amplituda jest bardzo bliska 0 (w celu odszumienia widma fazowego). Funkcja **signal()** została wywołana dla 12 pierwszych próbek, tworząc wektor próbek, który następnie w kolejnych etapach jest dopełniany odpowiednią liczbą zer. Następnie została zastosowana transformata **fft()** z biblioteki **np.fft**, wyniki zostały podzielone przez nowe długości okresów, a wektory transformat znormalizowane wg amplitudy widma. Końcowym wynikiem jest zbiór wykresów opisujący widma amplitud i faz dla odpowiednio dopełnionych zerami sygnałów.

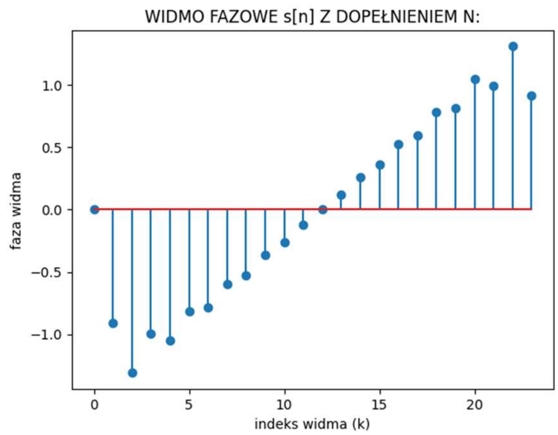

WIDMO AMPLITUDOWE s[n] BEZ DOPEŁNIENIA:
amplituda widma
indeks widma (k)

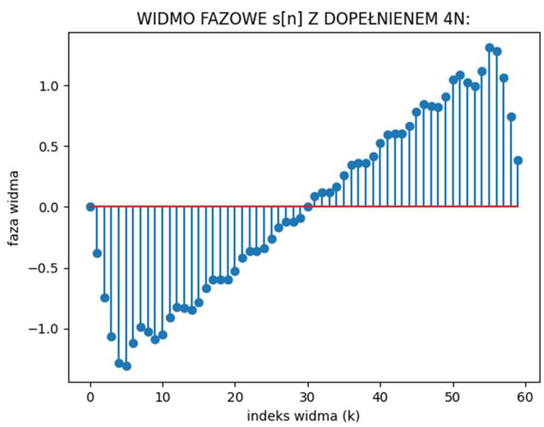

WIDMO AMPLITUDOWE s[n] Z DOPEŁNIENIEM N:
amplituda widma
indeks widma (k)

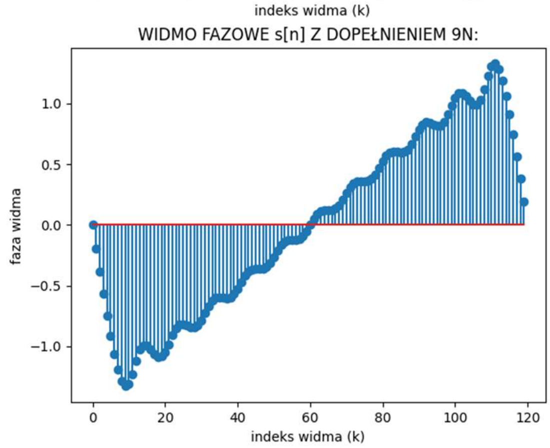

WIDMO AMPLITUDOWE s[n] Z DOPEŁNIENIEM 4N:
amplituda widma
indeks widma (k)


WIDMO AMPLITUDOWE s[n] Z DOPEŁNIENIEM 9N:
amplituda widma
indeks widma (k)


WIDMO FAZOWE s[n] BEZ DOPEŁNIENIA:
faza widma
indeks widma (k)


WIDMO FAZOWE s[n] Z DOPEŁNIENIEM N:
faza widma
indeks widma (k)


WIDMO FAZOWE s[n] Z DOPEŁNIENEM 4N:
faza widma
indeks widma (k)


WIDMO FAZOWE s[n] Z DOPEŁNIENIEM 9N:
faza widma
indeks widma (k)

2. Wnioski

- W tym przypadku zastosowanie dopełnienia zerami ma **znaczący wpływ** zarówno na postać **widma fazowego** jak i **widma amplitudowego** dyskretnego sygnału.
- Można zauważyć, że dopełnienie zerami znacząco **zwiększyło okresy** zarówno sygnału jak i jego widm (kolejno do N=12, 24, 60, 120).
- Na podstawie wykresów można zauważyć, że uzupełnienie dodatkowymi zerami sygnału **zmniejsza różnicę pomiędzy kolejnymi wartościami widma** i **lepiej uwypukla szczegóły widma** (kształt widma się nie zmienia w okresie, rozszerza się on tylko po osi poziomej).
- Własność ta na pewno mogłaby być wykorzystana do rozszerzania liczby próbek sygnału dyskretnego do potęgi liczby 2, aby móc zastosować go do obliczeń algorytmu FFT.
- W tych przypadkach doszło również do zmniejszenia amplitud widma, jest to jednak związane ze zwiększeniem okresów kolejnych sygnałów i zastosowanie dzielenia przez ich długość przy transformacie.

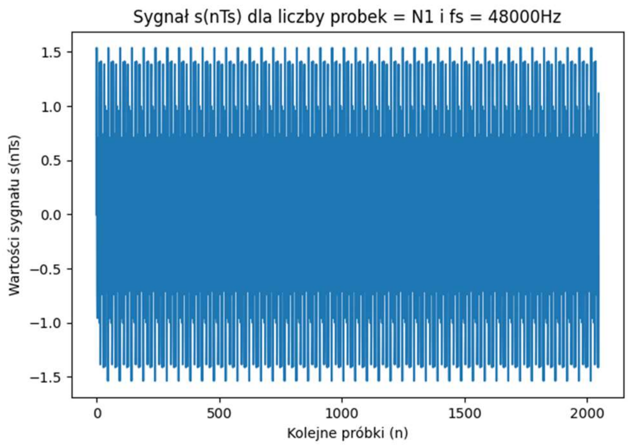
IV. POLECENIE IV.

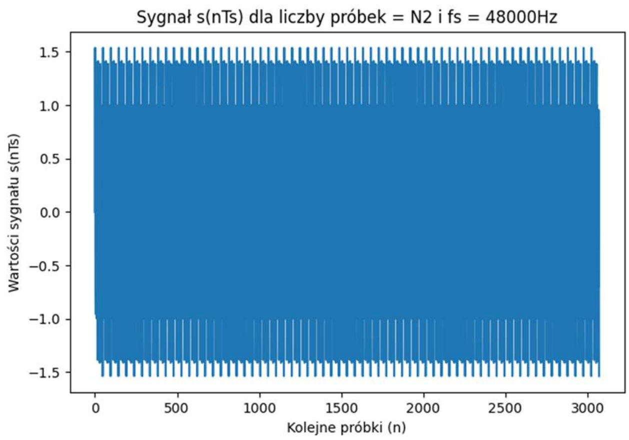
Dany jest sygnał rzeczywisty $s(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t)$, gdzie $A_1 = 0.1$, $f_1 = 3000Hz$, $A_2 = 0.7$, $f_2 = 8000Hz$, $A_3 = 0.9$, $f_3 = 11000Hz$. Przy założeniu, że liczba próbek sygnału wynosi $N_1 = 2048$, przedstawić wykres **widmowej gęstości mocy sygnału $s(t)$**. Czy dla podanej liczby próbek mamy do czynienia ze **zjawiskiem przecieku widma**? Czy sytuacja uległaby zmianie dla liczby próbek $N_2 = \frac{3}{2}N_1$? Odpowiedź uzasadnić.

*UWAGA: rozwiązanie zadania znajduje się w pliku **zad4.py**.*

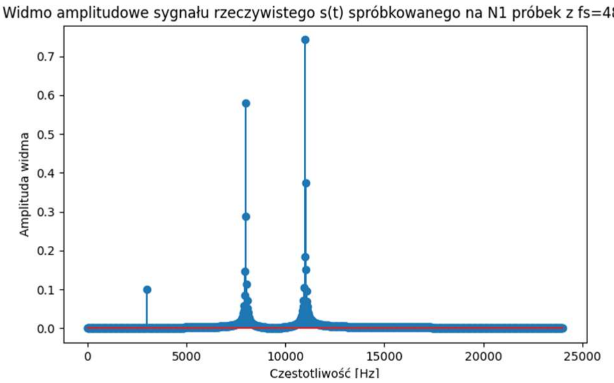
1. Implementacja

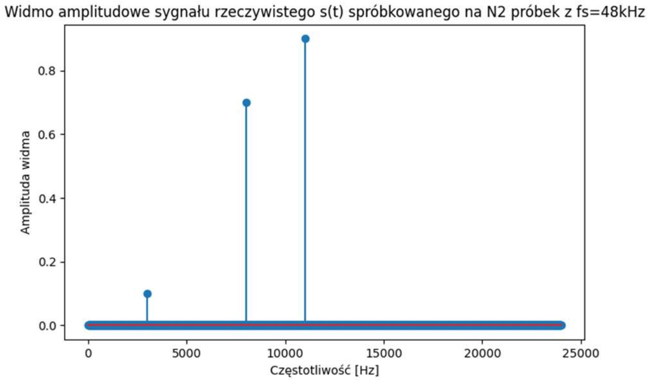
W rozwiązaniu została zaimplementowana funkcja **signal()** zwracająca wartość sygnału **s(t).** Dodatkowo powstały funkcje **przykladN1()** oraz **przykladN2()**, w których zostały wykonane niezbędne badania dla liczby próbek wynoszącej kolejno **N1** oraz **N2**. W celu wyznaczenia spróbkowanego sygnału **zbiór indeksów** próbek został **podzielony** przez **częstotliwość próbkowania**, a także wyznaczony został **wektor wartości sygnałów** dla kolejnych próbek. Następnie zostały narysowane **wykresy reprezentujące sygnały spróbkowane**:



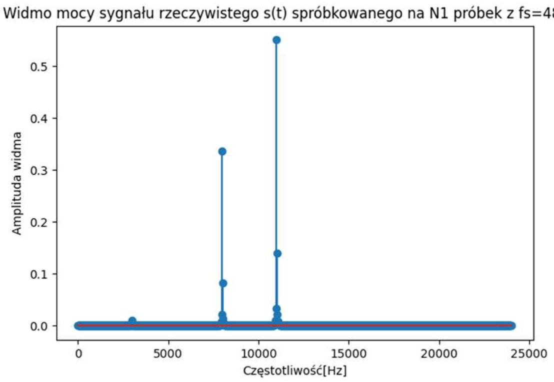


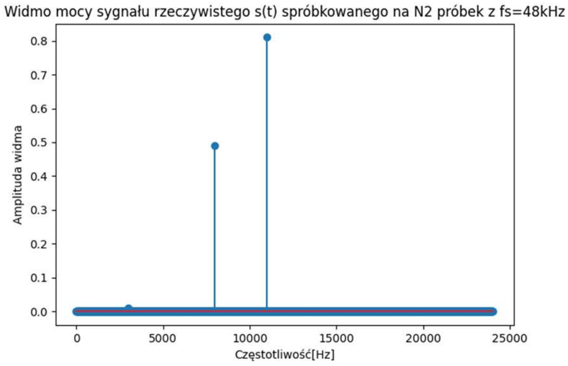
Następnie użyto funkcji **rfft**() oraz **podzielono wynik przez połowę liczby próbek** (widmo jest N-okresowe, jednak dla funkcji **rfft**() obserwowana jest tylko połowa widm, odrzucamy kopie będące lustrzanymi odbiciami) w celu wyznaczenia **widma rzeczywistego**. Następnie wyznaczone zostały **widma amplitudowe** sygnałów. Dodatkowo koniecznym było **przeskalowanie osi na oś częstotliwości**. Gwarantuje to funkcja **rfftfreq**() zwracająca zbiór częstotliwości dla zadanej liczby próbek i odległości w czasie między próbkami. Następnie zostały narysowane **wykresy widm amplitudowych** dla sygnałów:





Dodatkowo zostały wykreślone **wykresy widm gęstości mocy** (poprzez podniesienie widm amplitudowych do kwadratu):





2. Wnioski:

- Na podstawie wykresów można zauważyć, że widma – w przypadku liczby próbek = N_2 - zgadzają się z sygnałem rzeczywistym **s(t)** – na odpowiednich częstotliwościach, będących częstotliwościami sinusów składających się na sygnał, występują prążki widmowe, których amplitudy są równe amplitudom tych składowych sygnału, tzn. dla częstotliwości **3kHz**, **8kHz** oraz **11kHz** wartości prążków widmowych, zgodnie z sygnałem **s(t)**, wynoszą kolejno **0.1**, **0.7** oraz **0.9**.
- Wartości tych prążków nie są jednak idealne w przypadku liczby próbek = N_1. Można zauważyć, sugerując się widmem mocy, że moc zawarta w prążkach rzeczywistych dla sygnału „**rozlała się**" na prążki sąsiadujące z nimi. Efekt ten, zwany „**przeciekiem widma**", pojawił się tylko w przypadku próbkowania dla liczby próbek = N_1, co spowodowało „nieidealną" amplitudę tych prążków.
- Przeciek widma jest efektem ucięcia okresów składowych sygnału analogowego przez blok N próbek. Wystąpienie przecieku widma w przypadku 1. i jego brak w przypadku 2. można więc udowodnić odpowiednimi obliczeniami. Przeciek widma nie będzie występował w przypadku tego próbkowania, gdzie czas trwania próbkowanego sygnału będzie wielokrotnościami czasu trwania okresów składowych tego sygnału. Tak więc wystarczy podzielić iloraz liczby próbek i częstotliwości próbkowania przez okresy sinusów składających się na sygnał, co realizuje funkcja **okresy()**, jej wyniki wskazują na słuszność powyższych punktów (brak liczb całkowitych dla N_1):

```
Liczba okresów sinusa o f=3000Hz dla 2048 probek wynosi: 128.0
Liczba okresów sinusa o f=8000Hz dla 2048 probek wynosi: 341.33
Liczba okresów sinusa o f=11000Hz dla 2048 probek wynosi: 469.3
Liczba okresów sinusa o f=3000Hz dla 3072 probek wynosi: 192.0
Liczba okresów sinusa o f=8000Hz dla 3072 probek wynosi: 512.0
Liczba okresów sinusa o f=11000Hz dla 3072 probek wynosi: 704.0
```