Sprawozdanie z zadania NUM2

Łukasz Kowalik

1 Polecenie

Zadanie numeryczne NUM2:

Dane sa macierze

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5.8267103432 & 1.0419816676 & 0.4517861296 & -0.2246976350 & 0.7150286064 \\ 1.0419816676 & 5.8150823499 & -0.8642832971 & 0.6610711416 & -0.3874139415 \\ 0.4517861296 & -0.8642832971 & 1.5136472691 & -0.8512078774 & 0.6771688230 \\ -0.2246976350 & 0.6610711416 & -0.8512078774 & 5.3014166511 & 0.5228116055 \\ 0.7150286064 & -0.3874139415 & 0.6771688230 & 0.5228116055 & 3.5431433879 \end{pmatrix}$$

oraz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5.4763986379 & 1.6846933459 & 0.3136661779 & -1.0597154562 & 0.0083249547 \\ 1.6846933459 & 4.6359087874 & -0.6108766748 & 2.1930659258 & 0.9091647433 \\ 0.3136661779 & -0.6108766748 & 1.4591897081 & -1.1804364456 & 0.3985316185 \\ -1.0597154562 & 2.1930659258 & -1.1804364456 & 3.3110327980 & -1.1617171573 \\ 0.0083249547 & 0.9091647433 & 0.3985316185 & -1.1617171573 & 2.1174700695 \end{pmatrix}$$

Zdefiniujmy wektor

$$b = \begin{pmatrix} -2.8634904630 \\ -4.8216733374 \\ -4.2958468309 \\ -0.0877703331 \\ -2.0223464006 \end{pmatrix}$$

Używajac wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiaż równania macierzowe $A_i y = b$ dla $i = 1, 2$. Ponadto, rozwiaż analogiczne równania z zaburzonym wektorem wyrazów wolnych, $A_i y = b + \Delta b$. Zaburzenie Δb wygeneruj jako losowy wektor o małej normie euklidesowej (np. $||\Delta b||_2 \approx 10^{-6}$). Przeanalizuj jak wyniki dla macierzy A_1 i A_2 zależa od Δb i interpretuj zaobserwowane różnice.

2 Przedstawienie problemu

Celem ćwiczenia jest analiza stabilności numerycznej rozwiazań układów równań liniowych pod wpływem zaburzeń wektora wyrazów wolnych. Dla danej macierzy A oraz wektora wyrazów wolnych b, rozwiazujemy układ równań liniowych $A \cdot y = b$. Nastepnie wprowadzamy niewielkie zaburzenie Δb do wektora b i ponownie rozwiazujemy układ, analizujac, jak zaburzenie wpływa na wynik y.

3 Wstep

Uwarunkowanie macierzy jest miara wrażliwości rozwiazania układu równań na zmiany danych wejściowych, takich jak drobne zaburzenia wektora wyrazów wolnych. Macierz dobrze uwarunkowana powoduje niewielkie zmiany w wynikach przy zastosowaniu takich zaburzeń, co zapewnia stabilność numeryczna rozwiazania. Natomiast macierz źle uwarunkowana może prowadzić do dużych zmian w wynikach w odpowiedzi na drobne zaburzenia, co skutkuje niestabilnościa obliczeń.

Uwarunkowanie macierzy można wyrazić za pomoca współczynnika uwarunkowania, zdefiniowanego jako iloczyn normy macierzy oraz normy jej pseudoodwrotności. Wysoki współczynnik uwarunkowania oznacza, że macierz jest źle uwarunkowana i rozwiazania sa bardziej podatne na błedy. W kontekście naszego zadania, badanie stabilności rozwiazań dla różnych macierzy pozwala na ocene ich podatności na zaburzenia oraz na analize, jak uwarunkowanie wpływa na wyniki.

4 Opis problemu i zastosowany algorytm

Układ równań $A \cdot y = b$ rozwiazano przy użyciu dekompozycji QR z pivotowaniem kolumnowym, która zapewnia stabilność numeryczna przy rozwiazywaniu układów równań z macierzami kwadratowymi. Wektory zaburzeń Δb wygenerowano losowo i skalowano do normy równej 10^{-6}, aby zbadać reakcje układu na niewielkie zmiany wektora b. Nastepnie porównano rozwiazania dla wektora b oraz $b + \Delta b$, analizujac różnice miedzy rozwiazaniami.

5 Wyniki

Poniżej przedstawiono wyniki dla dwóch różnych macierzy A_1 i A_2.

Analiza dla macierzy A_1

- **Rozwiazanie dla $A_1 \cdot y = b$ (bez zaburzeń)**:

$$y = \begin{bmatrix} 0.0255619456 \\ -1.3571428341 \\ -3.9407575215 \\ -0.4889362931 \\ 0.1009780537 \end{bmatrix}$$

- **Rozwiazanie dla $A_1 \cdot y = b + \Delta b$ (z zaburzeniem)**:

$$y_{\text{perturbed}} = \begin{bmatrix} 0.0255620038 \\ -1.3571428369 \\ -3.9407572355 \\ -0.4889361703 \\ 0.1009781392 \end{bmatrix}$$

- **Różnica miedzy rozwiazaniami**:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0.0000000581 \\ -0.0000000028 \\ 0.0000002860 \\ 0.0000001228 \\ 0.0000000855 \end{bmatrix}$$

- **Norma różnicy**: $||\Delta y||_2 = 3.2797385629 \times 10^{-7}$

Analiza dla macierzy A_2

- **Rozwiazanie dla $A_2 \cdot y = b$ (bez zaburzeń)**:

$$y = \begin{bmatrix} -0.4087612698 \\ -0.5602964870 \\ -4.1120013043 \\ -1.5242075087 \\ -0.7752067775 \end{bmatrix}$$

- **Rozwiazanie dla $A_2 \cdot y = b + \Delta b$ (z zaburzeniem)**:

$$y_{\text{perturbed}} = \begin{bmatrix} -745.9027252427 \\ 1367.1863971114 \\ -298.0433448242 \\ -1778.5152013238 \\ -1504.7024195809 \end{bmatrix}$$

- **Różnica miedzy rozwiazaniami**:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} -745.4939639729 \\ 1367.7466935984 \\ -293.9313435199 \\ -1776.9909938151 \\ -1503.9272128034 \end{bmatrix}$$

- **Norma różnicy**: $||\Delta y||_2 = 2.8164484651 \times 10^3$

6 Dyskusja

Dla macierzy A_1 uzyskano niewielka zmiane rozwiazania po zaburzeniu wektora b, co jest zgodne z oczekiwaniami dla macierzy dobrze uwarunkowanej. Wynikowe zmiany w wektorze y sa proporcjonalne do wielkości zaburzenia, a norma różnicy wynosi $3.2797385629 \times 10^{-7}$, co jest bliskie normie zaburzenia wektora b.

Dla macierzy A_2, która jest źle uwarunkowana, uzyskano znaczna różnice w wynikach po zastosowaniu tego samego zaburzenia. Norma różnicy $||\Delta y|| \approx 2.8164484651 \times 10^3$ jest bardzo duża, co wskazuje, że macierz A_2 amplifikuje nawet drobne zaburzenia danych wejściowych. Wyniki te pokazuja, jak uwarunkowanie macierzy wpływa na stabilność numeryczna obliczeń, gdzie źle uwarunkowane macierze prowadza do niestabilnych wyników.

7 Wnioski

Analiza potwierdziła, że stabilność numeryczna układu równań liniowych zależy od uwarunkowania macierzy A. Macierze dobrze uwarunkowane, jak A_1, sa odporne na niewielkie zaburzenia w wektorze b, natomiast macierze źle uwarunkowane, jak A_2, wykazuja silna reakcje na te zaburzenia. Zastosowanie dekompozycji QR okazało sie skuteczne w obliczeniu wyników, lecz dla źle uwarunkowanych macierzy rozwiazania moga być niestabilne.