Analiza Przybliżania Pochodnych Numerycznych
Metoda Różnicy Jednostronnej i Centralnej

Łukasz Kowalik

1 Wprowadzenie

Celem tego zadania jest przybliżenie pochodnej funkcji $f(x) = \sin(x^3)$ w punkcie $x = 0.2$ za pomoca dwóch metod różnicowych: różnicy jednostronnej oraz różnicy centralnej. Problem polega na uzyskaniu dokładnego przybliżenia pochodnej dla różnych wartości kroku h, przy jednoczesnym uwzglednieniu błedów numerycznych wynikajacych z ograniczeń precyzji zmiennoprzecinkowej ('float' i 'double'). Porównanie tych dwóch metod pozwala na analize dokładności, a także wpływu doboru typu danych na wielkość błedu.

Numeryczne obliczanie pochodnych jest kluczowe w sytuacjach, gdy pochodna analityczna jest trudna do uzyskania lub gdy funkcja jest określona tylko przez zbiór punktów. Analiza wpływu wyboru metody oraz typu zmiennoprzecinkowego może być kluczowa dla uzyskania dokładnych wyników.

2 Opis Metod

2.1 Różnica jednostronna (Forward Difference)

Przybliżenie pochodnej metoda różnicy jednostronnej jest realizowane według wzoru:

$$D_h f(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

gdzie h jest mała wartościa kroku. Metoda ta uwzglednia wartości funkcji po jednej stronie punktu x, co może wpływać na dokładność przybliżenia w porównaniu do metody centralnej.

2.2 Różnica centralna (Central Difference)

W przypadku różnicy centralnej, pochodna jest przybliżana według wzoru:

$$D_h f(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{2}$$

Ta metoda uwzglednia wartości funkcji po obu stronach punktu x, co zwieksza dokładność przybliżenia, ponieważ próbuje zrównoważyć efekty błedów numerycznych poprzez symetryczne próbki funkcji.

3 Implementacja Programów

Dwa programy zostały napisane w jezyku C++:

- Program `NUM1a` implementuje róźnice jednostronna, porównujac wyniki dla typów ‘float‘ i ‘double‘.
- Program `NUM1b` wykorzystuje róźnice centralna, również dla typów ‘float‘ i ‘double‘.

Obliczane sa błedy przybliżonej pochodnej w porównaniu do pochodnej analitycznej, a wyniki sa wizualizowane w postaci wykresów log-log za pomoca narzedzia `gnuplot`. Oba programy zapisuja wyniki błedów dla kolejnych wartości kroku h w plikach, które nastepnie sa wykorzystywane do generowania wykresów.

4 Analiza Błedu

Ze wzgledu na ograniczona precyzje reprezentacji zmiennoprzecinkowej, każdy wynik obliczeń numerycznych jest obarczony błedem. Przy użyciu skończonego kroku h, błedy te staja sie bardziej wyraźne. Błedy wynikaja zarówno z przybliżenia samej pochodnej, jak i z efektów numerycznych zwiazanych z precyzja typu danych.

Przybliżony bład dla każdej z metod jest obliczany jako:

$$E(h) = |D_h f(x) - f'(x)| \tag{3}$$

gdzie $f'(x)$ jest pochodna analityczna, a $D_h f(x)$ to przybliżenie numeryczne.

Dla typu ‘float‘ (32-bitowego) wartości h wahaja sie od 10^{-9} do 10^{-1}, podczas gdy dla ‘double‘ (64-bitowego) możliwe sa mniejsze wartości h od 10^{-17} do 10^{-1}.

5 Wyniki

Dla każdej z metod przeprowadzono eksperymenty, zmieniajac krok h w zadanych zakresach. Wyniki pokazuja, że:

- Dla metody różnicy jednostronnej, błedy wykazuja minimalne wartości przy określonych krokach h, po czym zaczynaja rosnać przy bardzo małych wartościach h, szczególnie dla typu ‘float‘.
- Metoda różnicy centralnej wykazuje mniejsze błedy niż różnica jednostronna przy tych samych wartościach h, co jest zgodne z oczekiwaniami, ponieważ metoda ta efektywniej balansuje błedy numeryczne przy małych wartościach kroku.
- Typ ‘double‘ umożliwia uzyskanie dokładniejszych wyników dla mniejszych wartości h niż ‘float‘, co potwierdza jego wieksza precyzje.

6 Dyskusja

Wyniki sa zgodne z oczekiwaniami. Metoda różnicy centralnej, dzieki swojemu symetrycznemu charakterowi, zapewnia wyższy poziom dokładności niż różnica jednostronna przy małych wartościach h. Typ ‘double‘, ze wzgledu na wieksza precyzje, lepiej radzi sobie z bardzo małymi wartościami h, podczas gdy ‘float‘ szybciej osiaga granice swojej precyzji, co skutkuje wzrostem błedów numerycznych.

Analizujac wyniki, zauważono, że bład pozostaje wzglednie stabilny w zakresie średnich wartości h i gwałtownie wzrasta przy bardzo małych wartościach h, co jest skutkiem zaokragleń i ograniczeń precyzji reprezentacji zmiennoprzecinkowej.

7 Wizualizacja Wyników

Na poniższych wykresach przedstawiono zależność błedu $E(h)$ od wartości kroku h dla obu metod (różnicy jednostronnej i centralnej) oraz dla typów ‘float‘ i ‘double‘.

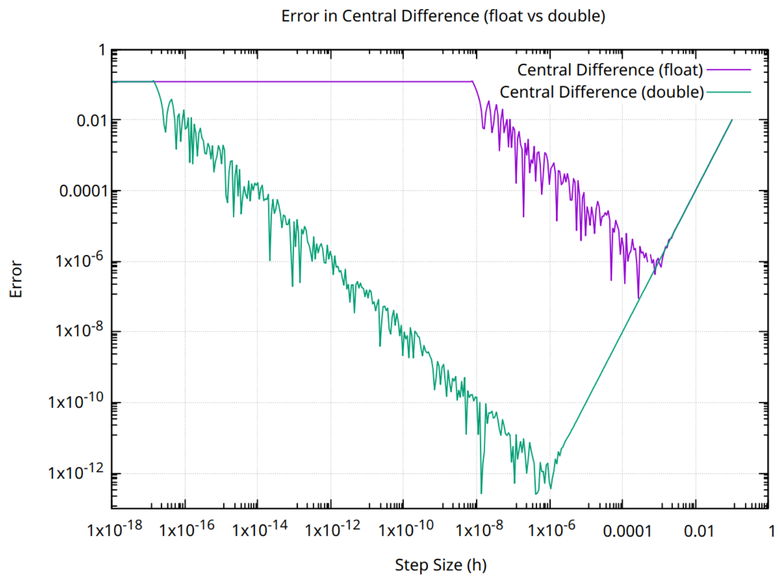

Figure 1: Zależność błedu od kroku h dla różnicy centralnej (float vs. double)

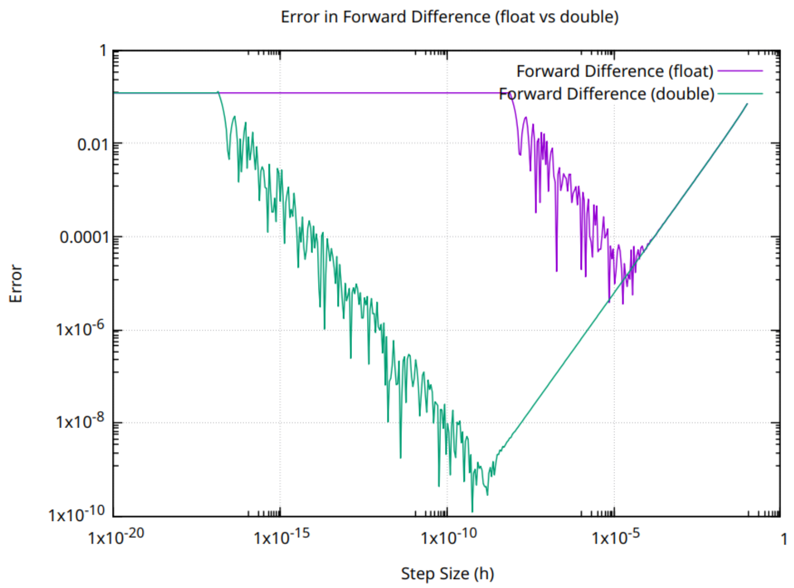

Figure 2: Zależność błedu od kroku h dla różnicy jednostronnej (float vs. double)

8 Wnioski

- Różnica centralna jest bardziej dokładna niż różnica jednostronna, szczególnie przy małych wartościach h, ze wzgledu na symetryczne wykorzystanie wartości funkcji.
- Typ ‘double‘ jest bardziej odpowiedni dla obliczeń wymagajacych mniejszego kroku h, zapewniajac mniejsze błedy niż ‘float‘.
- Istnieje optymalna wartość h dla każdej z metod, przy której bład jest minimalny; zarówno zbyt małe, jak i zbyt duże wartości h prowadza do wiekszych błedów.

Obie metody maja swoje zastosowania w zależności od wymagań precyzji oraz dostepnych zasobów obliczeniowych. Wyniki te podkreślaja znaczenie właściwego doboru metody różnicowej oraz typu zmiennoprzecinkowego w obliczeniach numerycznych.