

# NUM4

Łukasz Kowalik

## 1 Zadanie NUM4: Rozwiązanie układu równań liniowych

Zadana jest macierz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

oraz wektor:

$$b \equiv (2, 2, \dots, 2)^T$$

Macierz  $A$  ma liczby 5 na diagonalu, 3 na pierwszej pozycji nad diagonalą, a pozostałe elementy są równe 1. Wymiar macierzy ustalamy na  $N = 120$ .

- Rozwiąż numerycznie równanie  $Ay = b$ , stosując odpowiednią metodę. Uwaga: algorytm należy zaimplementować samodzielnie.
- Sprawdź swój wynik przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej.
- Potraktuj  $N$  jako zmienną i zmierz czas potrzebny do uzyskania rozwiązania w funkcji  $N$ . Wynik przedstaw na wykresie. Czy wykres jest zgodny z oczekiwaniami?

## 2 Opis zadania i metody obliczeń

W ramach zadania NUM4 obliczono rozwiązanie układu równań liniowych  $Ay = b$ , gdzie:

- Macierz  $A$  to macierz symetryczna z liczbą 5 na przekątnej, liczbą 3 na pierwszej nadprzekątnej oraz liczbą 1 w pozostałych miejscach.
- Wektor  $b$  to wektor stałych o wartościach 2.

Obliczenia przeprowadzono dla różnych wymiarów macierzy  $A$ , począwszy od małych rozmiarów ( $N = 10$ ) do dużych ( $N = 30000$ ).

## 3 Metody obliczeniowe i ich zastosowanie

W ramach zadania NUM4 zastosowano różne metody numeryczne do rozwiązania układu równań liniowych  $Ay = b$ . Wybór metod został podyktowany specyfiką macierzy  $A$  oraz chęcią porównania efektywności różnych algorytmów. Opis poszczególnych metod znajduje się poniżej:

### 3.1 Metoda Sherman-Morrison

Metoda Sherman-Morrison została zastosowana ze względu na specyficzną strukturę macierzy  $A$ . Macierz ta jest trójdzielna i bliska macierzy o stałych wartościach. Metoda opiera się na iteracyjnym podejściu, które pozwala na szybkie rozwiązanie układu równań bez konieczności pełnej dekompozycji macierzy. Działanie metody można podsumować następująco:

- Macierz  $A$  jest dekomponowana na macierz główną (przekatna i pierwsze elementy nad przekatną) oraz pozostałe elementy.
- Obliczany jest wektor pomocniczy  $q$ , który jest rozwiązaniem układu równań dla zredukowanej macierzy.
- Obliczany jest wektor  $w$ , który odpowiada reakcji macierzy na dodatkowe perturbacje w strukturze.
- Wynik końcowy  $y$  jest sumą wektora  $q$  oraz korekty wynikającej z wektora  $w$ .

Dzięki zastosowaniu tej metody liczba operacji obliczeniowych jest znacząco mniejsza niż w klasycznych algorytmach, co pozwala na szybkie rozwiązanie nawet dla dużych wymiarów  $N$ .

### 3.2 Metody z biblioteki Eigen

Do porównania wyników wykorzystano zaawansowane procedury numeryczne z biblioteki Eigen:

- **fullPivLu**: Uniwersalny rozkład LU, zapewniający stabilność obliczeń dzięki pełnemu pivotowaniu. Metoda ta była stosowana jako odniesienie ze względu na dokładność i szerokie zastosowanie.
- **householderQr**: Rozkład QR, szczególnie efektywny dla macierzy gęstych. Dzięki stabilności numerycznej stanowi doskonałą alternatywę dla LU.
- **colPivHouseholderQr**: Modyfikacja eliminacji Gaussa z pivotowaniem kolumnowym, która poprawia dokładność wyników przy zachowaniu relatywnie niskiej złożoności.

### 3.3 Pomiar czasu i generowanie wykresów

Każda z metod została oceniona pod względem szybkości obliczeń w zależności od rozmiaru macierzy  $N$ . W tym celu:

- Przeprowadzono pomiary czasu wykonania każdej z metod dla różnych wartości  $N$ , zapisując wyniki do plików.
- Wygenerowano wykresy w Gnuplot, które ilustrują porównanie czasów wykonania dla metod Sherman-Morrison, LU, QR i Gaussa.
- Dodatkowo, dla dużych rozmiarów macierzy ( $N > 500$ ), przedstawiono wykres dedykowany metodzie Sherman-Morrison, aby ukazać jej wyjątkową wydajność.

Dzięki różnorodności zastosowanych metod możliwa była dokładna analiza ich efektywności oraz porównanie z punktu widzenia dokładności i szybkości obliczeń.

## 4 Opis metody Sherman-Morrison

Metoda Sherman-Morrison jest technika używana do efektywnego rozwiązywania układów równań liniowych w przypadku macierzy, które można zapisać w formie modyfikacji prostszej macierzy. Podstawa metody jest wzór Sherman-Morrison, który dotyczy odwracania macierzy w przypadku jej rank-one update. W szczególnym przypadku macierzy o specyficznej strukturze, takich jak w zadaniu NUM4, metoda ta pozwala znacznie zredukować liczbę operacji arytmetycznych.

## 4.1 Ogólny wzór Sherman-Morrison

Dla macierzy  $A$ , która jest odwracalna, oraz wektorów  $u$  i  $v$ , wzór Sherman-Morrison wyraża odwrotność macierzy  $A + uv^T$  jako:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u},$$

o ile  $1 + v^T A^{-1}u \neq 0$ .

W naszym przypadku macierz  $A$  jest specyficzna: trójdzielna z liczbą 5 na przekątnej, 3 na pierwszej nadprzekątnej i 1 w pozostałych miejscach. Dzięki temu wzór Sherman-Morrison można uprościć i dostosować do tej szczególnej struktury.

## 4.2 Dostosowanie metody do zadania

W zadaniu NUM4 macierz  $A$  można opisać jako:

$$A = T + vv^T,$$

gdzie:

- $T$  to macierz trójdzielna z 5 na przekątnej i 3 na pierwszej nadprzekątnej,
- $v$  to wektor jedynekowy ( $v = (1, 1, \dots, 1)^T$ ).

Rozwiązanie układu  $Ay = b$  odbywa się w następujących krokach:

1. Rozwiązany jest układ równań dla  $T$ , co można zrobić iteracyjnie dzięki trójdzielnej strukturze macierzy.
2. Obliczany jest dodatkowy składnik wynikający z modyfikacji macierzy przez  $vv^T$  za pomocą iteracyjnych wzorów na wektory pomocnicze  $q$  i  $w$ :

$$q_i = \frac{b_i - a_{i,i+1}q_{i+1}}{a_{i,i}}, \quad w_i = \frac{1 - a_{i,i+1}w_{i+1}}{a_{i,i}}.$$

3. Końcowe rozwiązanie obliczane jest jako:

$$y = q - \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{1 + \sum_{i=1}^N w_i} \cdot w,$$

gdzie  $\sum$  oznacza sumę elementów wektora.

## 4.3 Zalety metody

- Złożoność obliczeniowa wynosi  $O(N)$ , co jest znacznie bardziej efektywne niż klasyczne metody dekompozycji macierzy ( $O(N^3)$ ).
- Metoda jest szczególnie dobrze dostosowana do macierzy o strukturze bliskiej diagonalnej, co pozwala na oszczędność pamięci i czasu.

Metoda Sherman-Morrison okazała się w tym zadaniu kluczowa do efektywnego rozwiązania układu równań dla dużych rozmiarów macierzy ( $N$ ).

## 5 Rozwiązania i analiza wyników

W tej sekcji przedstawiono wyniki obliczeń dla rozmiaru macierzy  $N = 120$  oraz analizie dokładności metod. Dla każdej metody obliczono czas wykonania, rozwiązanie układu równań oraz maksymalny błąd w stosunku do metody Sherman-Morrison.

## 5.1 Czas wykonania dla różnych metod

- **Sherman-Morrison:**  $1.923 \times 10^{-6} \text{ s}$
- **Eigen (LU):** 0.000711363 s
- **Eigen (Gauss):** 0.000455794 s
- **Eigen (QR):** 0.000424034 s

Jak widać, metoda Sherman-Morrison jest znacznie szybsza od pozostałych metod, co potwierdza jej efektywność dla specyficznych struktur macierzy.

## 6 Rozwiązania i analiza wyników

W tej sekcji przedstawiono wyniki obliczeń dla rozmiaru macierzy  $N = 120$  oraz analizie dokładności metod. Dla każdej metody obliczono czas wykonania, rozwiązanie układu równań oraz maksymalny błąd w stosunku do metody Sherman-Morrison.

### 6.1 Czas wykonania dla różnych metod

- **Sherman-Morrison:**  $1.923 \times 10^{-6} \text{ s}$
- **Eigen (LU):** 0.000711363 s
- **Eigen (Gauss):** 0.000455794 s
- **Eigen (QR):** 0.000424034 s

Jak widać, metoda Sherman-Morrison jest znacznie szybsza od pozostałych metod, co potwierdza jej efektywność dla specyficznych struktur macierzy.

## 7 Rozwiązania i analiza wyników

W tej sekcji przedstawiono wyniki obliczeń dla rozmiaru macierzy  $N = 120$  oraz analizie dokładności metod. Dla każdej metody obliczono czas wykonania, rozwiązanie układu równań oraz maksymalny błąd w stosunku do metody Sherman-Morrison.

### 7.1 Czas wykonania dla różnych metod

- **Sherman-Morrison:**  $1.923 \times 10^{-6} \text{ s}$
- **Eigen (LU):** 0.000711363 s
- **Eigen (Gauss):** 0.000455794 s
- **Eigen (QR):** 0.000424034 s

Jak widać, metoda Sherman-Morrison jest znacznie szybsza od pozostałych metod, co potwierdza jej efektywność dla specyficznych struktur macierzy.

### 7.2 Rozwiązania dla różnych metod

Rozwiązanie dla Sherman-Morrison:

$$y = \begin{pmatrix} 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ \vdots \\ 0.0158621 \\ 0.0157693 \\ 0.0159548 \\ 0.0155838 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie dla Eigen (LU):

$$y = \begin{pmatrix} 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ \vdots \\ 0.0158621 \\ 0.0157693 \\ 0.0159548 \\ 0.0155838 \end{pmatrix}$$

Rozwiązania dla metod Gaussa i QR:

$$y = \begin{pmatrix} 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ \vdots \\ 0.0158621 \\ 0.0157693 \\ 0.0159548 \\ 0.0155838 \end{pmatrix}$$

### 7.3 Analiza błędów

Maksymalny błąd w stosunku do rozwiązania uzyskanego metoda Sherman-Morrison wynosi:

- **Sherman-Morrison vs Eigen (LU):**  $9.36751 \times 10^{-17}$
- **Sherman-Morrison vs Gauss:**  $5.82867 \times 10^{-15}$
- **Sherman-Morrison vs QR:**  $5.95704 \times 10^{-15}$

### 7.4 Wnioski

Metoda Sherman-Morrison jest najwydajniejsza czasowo, a wszystkie rozwiązania są zgodne do maszynowej precyzji, co potwierdza poprawność implementacji i dokładność algorytmów.

## 8 Analiza wyników dla różnych rozmiarów macierzy $N$

W trakcie przeprowadzonych obliczeń zmierzono czas wykonania dla różnych rozmiarów macierzy  $N$ , zarówno dla małych, jak i dużych rozmiarów. Wyniki przedstawiono na poniższych wykresach.

### Porównanie czasów wykonania dla różnych metod

Na powyższym wykresie przedstawiono czas wykonania dla metod:

- **Sherman-Morrison** – najszybsza metoda dla specyficznych struktur macierzy.
- **Eigen (LU)** – metoda o większej złożoności czasowej.
- **Eigen (Gauss)** i **Eigen (QR)** – metody o porównywalnych czasach, wolniejsze od Sherman-Morrison.

### 8.1 Czas wykonania Sherman-Morrison dla dużych macierzy

Na wykresie dla dużych macierzy przedstawiono czasy wykonania metody Sherman-Morrison. Obserwuje się stabilny wzrost czasu wykonania wraz z rozmiarem macierzy  $N$ .

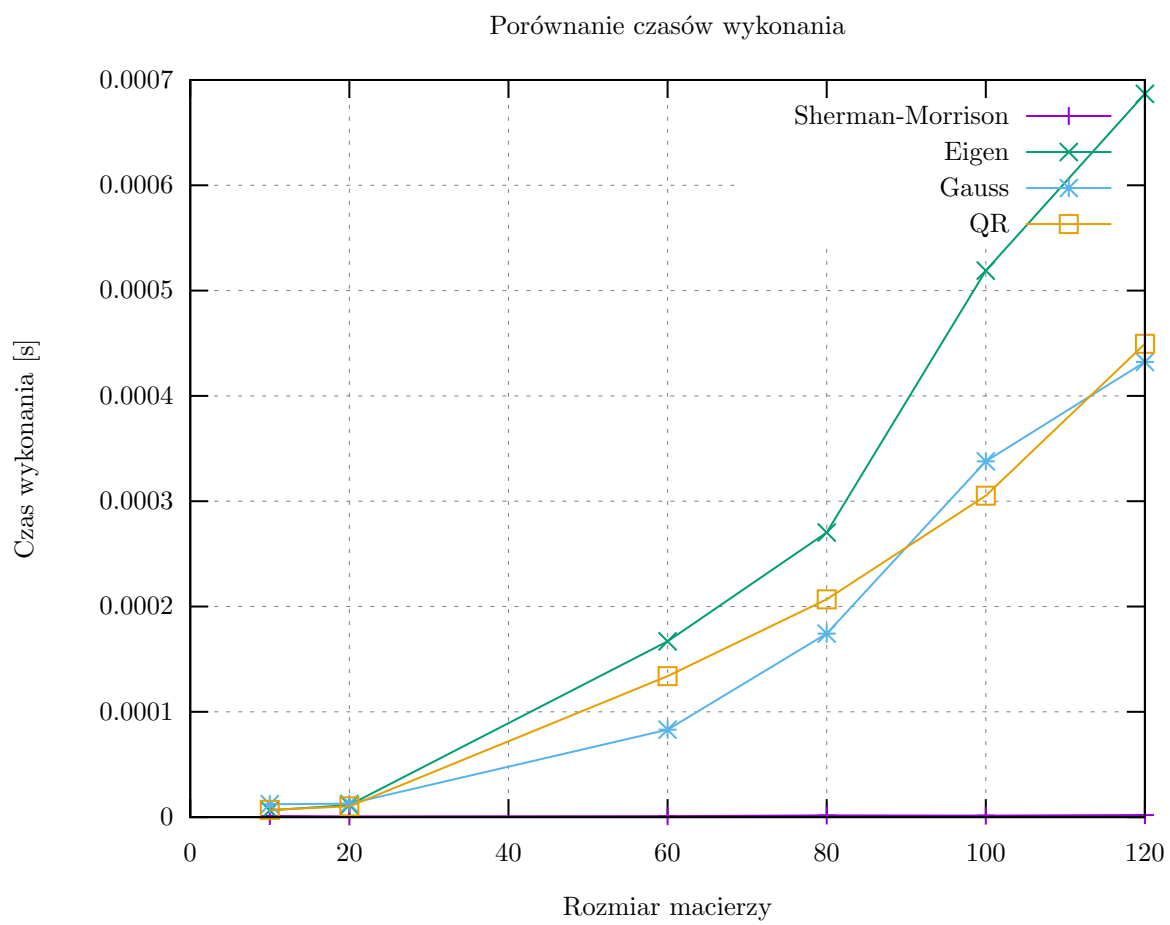


Figure 1: Porównanie czasów wykonania dla różnych metod

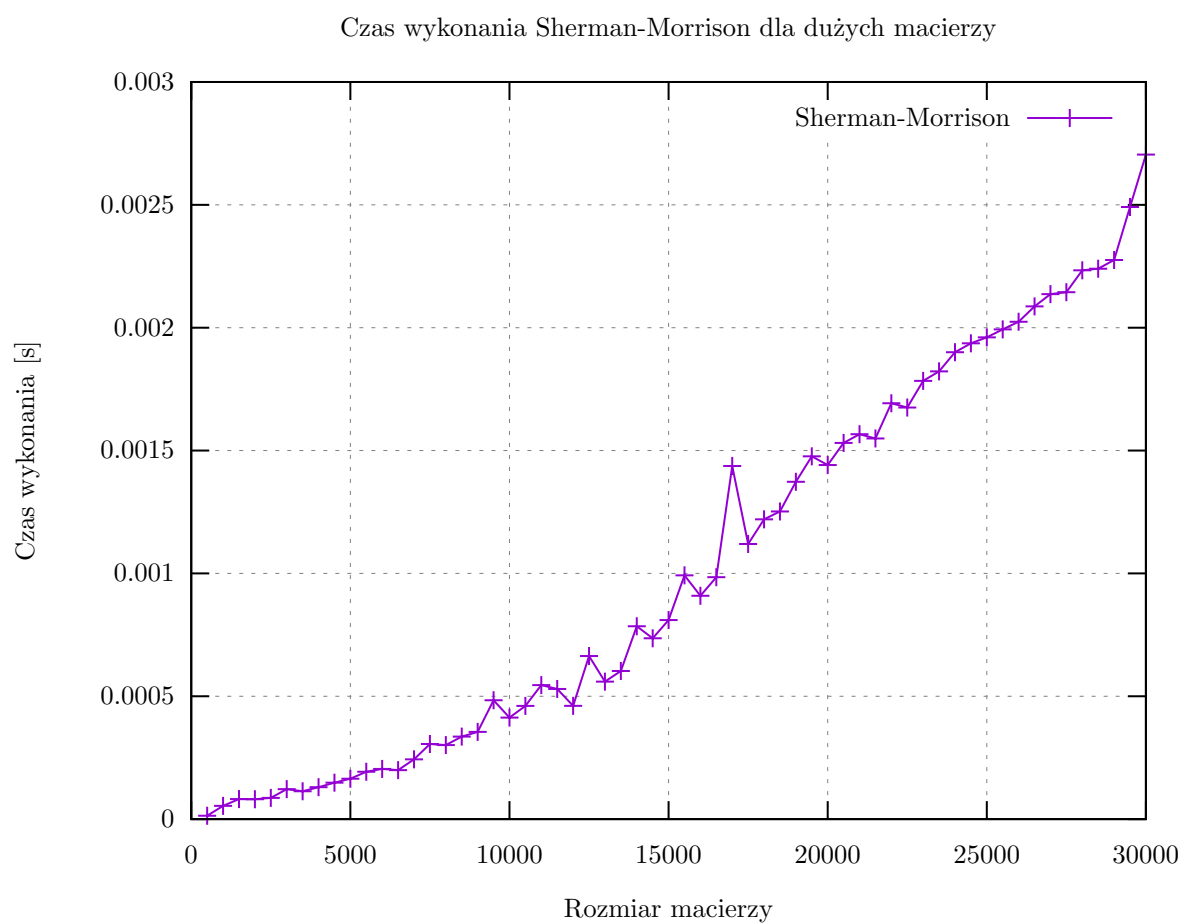


Figure 2: Czas wykonania Sherman-Morrison dla dużych macierzy

## 8.2 Problemy dla bardzo dużych macierzy

Podczas prób wykonania obliczeń dla macierzy o rozmiarach większych niż 30000, terminal ulegał wyłączeniu. Prawdopodobnym powodem jest brak dostępnej pamięci RAM w systemie, co ograniczyło możliwość dalszych eksperymentów.

## 9 Wnioski

W przeprowadzonych obliczeniach zbadano efektywność metody Sherman-Morrison w porównaniu do metod opartych na bibliotece Eigen, takich jak LU, Gauss i QR. Wyniki pozwoliły na sformułowanie następujących wniosków:

- **Wydażność metody Sherman-Morrison:** Metoda Sherman-Morrison okazała się zdecydowanie najszybsza, szczególnie dla dużych rozmiarów macierzy. Dla macierzy o rozmiarze  $N = 30000$ , czas jej wykonania wynosił zaledwie 0.00234545 s.
- **Zgodność wyników:** Rozwiązania uzyskane metodą Sherman-Morrison były niemal identyczne z wynikami uzyskanymi za pomocą metod LU, Gauss i QR, z maksymalnym błędem rzędu  $10^{-15}$ , co jest zgodne z maszynową precyzją.
- **Zależność czasu wykonania od rozmiaru macierzy:** Dla metody Sherman-Morrison obserwuje się liniowy wzrost czasu wykonania wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy  $N$ . W przypadku metod Eigen wzrost ten jest szybszy, co wynika z ich większej złożoności czasowej.
- **Problemy z pamięcią dla bardzo dużych macierzy:** Przy rozmiarach macierzy większych niż  $N = 30000$ , terminal ulegał wyłączeniu. Sugeruje to problem z dostępnością pamięci RAM w systemie, który uniemożliwił dalsze eksperymenty.
- **Przydatność metody Sherman-Morrison:** Metoda Sherman-Morrison jest szczególnie efektywna dla macierzy trójdzielnych lub takich, które można zapisać jako modyfikacje macierzy prostszej. W takich przypadkach przewyższa metody ogólne pod względem wydajności.
- **Ograniczenia:** Metoda Sherman-Morrison nie jest uniwersalna i wymaga odpowiednich warunków strukturalnych macierzy. W przypadku macierzy o bardziej skomplikowanej strukturze konieczne byłoby zastosowanie innych metod.

Podsumowując, metoda Sherman-Morrison jest doskonałym narzędziem dla specyficznych typów macierzy, oferując znakomitą wydajność i wysoką dokładność. W połączeniu z innymi metodami (LU, QR, Gauss) może stanowić kompletny zestaw narzędzi do rozwiązywania układów równań liniowych w zależności od struktury macierzy i wymagań obliczeniowych.