NUM8

Łukasz Kowalik

1 Polecenie

Zapropounuj wielomian uogólniony w postaci

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x),$$

gdzie ilość parametrów $m \geq 3$, a $\phi_j(x)$ sa pewnymi funkcjami. Zdefiniuj siatke punktów x_i oraz (dla pewnego ustalonego zestawu parametrów a_j) wygeneruj dane w postaci $\{(x_i, y_i)\}$, gdzie $i = 1, \ldots, n$, a $y_i = F(x_i) + \delta y_i$. Zaburzenia δy_i należy losować z rozkładu normalnego z odchyleniem standardowym σ.

(a) Znajdź wartości współczynników a_j, dla których funkcja $F(x)$ najlepiej opisuje zaburzone dane w sensie metody najmniejszych kwadratów. Rezultat przedstaw graficznie dla kilku wyborów wielkości siatki, n, oraz odchylenia standardowego, σ.

(b) Przeanalizuj różnice pomiedzy wcześniej ustalonymi współczynnikami, a ich wartościami uzyskanymi w procedurze aproksymacji przeprowadzonej dla zaburzonych danych.

UWAGA: Rozwiazujac to zadanie nie można korzystać z procedur bibliotecznych służacych do aproksymacji. Poza tym, użycie procedur z zakresu algebry liniowej jest dozwolone.

2 Przedstawienie problemu

W ramach zadania wybrano kilka interesujacych funkcji bazowych $\phi_j(x)$, które zostały użyte w wielomianie uogólnionym. Funkcje te stanowia podstawe modelu i maja kluczowe znaczenie dla jakości uzyskiwanych wyników aproksymacji.

Nastepnie wygenerowano siatke punktów x_i $(i = 1, \ldots, n)$, gdzie n jest parametrem definiowanym przez użytkownika. Siatka ta umożliwia określenie wartości funkcji w zadanych punktach, zarówno dla modelu idealnego, jak i zaburzonego. Przyjeto również ustalone wartości współczynników a_j, które definiuja rzeczywisty kształt funkcji $F(x)$. Te współczynniki beda później wykorzystywane jako punkt odniesienia do oceny jakości uzyskanej aproksymacji.

Idealne wartości funkcji $F(x)$ obliczono na podstawie zależności:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x_i),$$

a nastepnie dodano do nich losowe zaburzenia δy_i, generowane zgodnie z rozkładem normalnym o średniej 0 i odchyleniu standardowym σ. Otrzymane wartości y_i opisano jako:

$$y_i = F(x_i) + \delta y_i.$$

Celem zadania jest odzyskanie współczynników a_j na podstawie wygenerowanych par (x_i, y_i). W tym celu zastosowano metode najmniejszych kwadratów, która minimalizuje funkcje błedu:

$$E(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x_i) \right)^2.$$

3 Metoda najmniejszych kwadratów i dekompozycja SVD

3.1 Metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów (ang. *Least Squares Method*) jest klasycznym podejściem do dopasowania modelu do danych w taki sposób, aby minimalizować sume kwadratów błedów. W przypadku zadania aproksymacji, chcemy znaleźć współczynniki a_j funkcji $F(x)$, które minimalizuja funkcje błedu:

$$E(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x_i) \right)^2.$$

Aby rozwiazać to zadanie, można zapisać problem w formie macierzowej. Niech:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_m(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \cdots & \phi_m(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Wówczas problem minimalizacji można zapisać jako:

$$E(\mathbf{a}) = \|\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{y}\|^2.$$

Optymalne współczynniki $\mathbf{a}$ spełniaja układ równań normalnych:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}.$$

3.2 Dekompozycja SVD

W praktyce, szczególnie gdy macierz $\mathbf{A}$ jest źle uwarunkowana lub niekwadratowa, układ równań normalnych może prowadzić do błednych wyników. W takich przypadkach stosuje sie dekompozycje SVD (ang. *Singular Value Decomposition*), która zapewnia bardziej stabilne rozwiazanie.

Dekompozycja SVD rozkłada macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn trzech macierzy:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

gdzie:

- $\mathbf{U}$ jest macierza ortogonalna ($\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$),
- $\mathbf{\Sigma}$ jest macierza diagonalna zawierajaca wartości singularne σ_i,
- $\mathbf{V}$ jest macierza ortogonalna ($\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$).

Rozwiazanie problemu najmniejszych kwadratów za pomoca SVD wyraża sie jako:

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T\mathbf{y},$$

gdzie $\mathbf{\Sigma}^+$ jest macierza pseudoodwrotna do $\mathbf{\Sigma}$, otrzymywana poprzez odwrócenie jej niezerowych elementów diagonalnych.

3.3 Zalety zastosowania SVD

Zastosowanie dekompozycji SVD ma nastepujace zalety:

- Jest stabilne numerycznie, szczególnie w przypadku źle uwarunkowanych macierzy.
- Umożliwia łatwa identyfikacje i eliminacje najmniejszych wartości singularnych, co pomaga w redukcji efektów błedów zaokragleń i szumów w danych.
- Daje rozwiazanie nawet w przypadku układów równań nadokreślonych (gdy $n > m$) lub niedookreślonych (gdy $n < m$).

Podsumowujac, metoda najmniejszych kwadratów w połaczeniu z dekompozycja SVD jest skutecznym narzedziem do aproksymacji danych w obecności szumów, zapewniajac wysoka dokładność i stabilność obliczeń.

4 Wybrany wielomian uogólniony

W zadaniu zdecydowano sie na użycie wielomianu uogólnionego z $m = 6$ parametrami. Funkcje bazowe $\phi_j(x)$ zostały dobrane w taki sposób, aby zachować różnorodność i złożoność zachowania funkcji w przedziale $x \in (-1, 1)$. Wybrane funkcje bazowe to:

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \sin(x \cdot e^x), \\
\phi_2(x) &= \cos(\log(x^2) \cdot \tanh(x)), \\
\phi_3(x) &= \exp(x^2 \cdot \sin(x^2)), \\
\phi_4(x) &= \sin(\cos(e^x)), \\
\phi_5(x) &= \cos\left(\frac{1}{1+|x|} \cdot e^x\right).
\end{aligned}
$$

Współczynniki a_j zostały ustalone na nastepujace wartości:

$$
a_1 = -0.5, \quad a_2 = 1.0, \quad a_3 = -0.5, \quad a_4 = 1.5, \quad a_5 = -0.5, \quad a_6 = -2.5.
$$

Taki dobór współczynników został dokonany z zamiarem uzyskania ciekawego zachowania funkcji $F(x)$ w zadanym przedziale. Wartości te pozwalaja na generowanie danych charakteryzujacych sie duża zmiennościa i złożonymi zależnościami miedzy wartościami x_i i y_i, co sprzyja dokładnemu sprawdzeniu skuteczności metody aproksymacji.

Analiza funkcji bazowych

Wybrane funkcje bazowe sa nieliniowe i wprowadzaja różne cechy do modelu:

- $\phi_1(x) = \sin(x \cdot e^x)$ – generuje oscylacje, których amplituda rośnie wykładniczo.
- $\phi_2(x) = \cos(\log(x^2) \cdot \tanh(x))$ – wprowadza funkcje logarytmiczna w połaczeniu z hiperboliczna.
- $\phi_3(x) = \exp(x^2 \cdot \sin(x^2))$ – zwieksza nieliniowość, wprowadzajac funkcje wykładnicza skomponowana z sinusoida.
- $\phi_4(x) = \sin(\cos(e^x))$ – łaczy funkcje trygonometryczne i wykładnicze.
- $\phi_5(x) = \cos\left(\frac{1}{1+|x|} \cdot e^x\right)$ – wprowadza funkcje wymierna, wzmacniajac różnorodność.

Przyjete funkcje i współczynniki maja na celu stworzenie ciekawego i wymagajacego przypadku testowego, umożliwiajacego dokładne sprawdzenie skuteczności metody najmniejszych kwadratów.

5 Wyniki dla różnych poziomów zaburzeń i liczby punktów

Wyniki aproksymacji zostały przeanalizowane dla różnych wartości odchylenia standardowego zaburzeń (σ) oraz liczby punktów (N). Poniżej przedstawiono wyznaczone współczynniki aproksymacji oraz wizualizacje funkcji.

5.1 Zaburzenie $\sigma = 0.1$

- Liczba punktów $N = 10$:

$$a = \{-0.587054, 1.02244, -0.482905, 1.4313, -0.618955, -2.39197\}.$$

- Liczba punktów $N = 25$:

$$a = \{-0.524002, 0.986735, -0.503234, 1.41216, -0.573481, -2.30794\}.$$

- Liczba punktów $N = 70$:

$$a = \{-0.419742, 1.21583, -0.565099, 1.43645, -0.376014, -2.67486\}.$$

- Liczba punktów $N = 100$:

$$a = \{-0.502208, 0.75287, -0.44646, 1.39498, -0.503609, -2.08698\}.$$

5.2 Zaburzenie $\sigma = 0.5$

- Liczba punktów $N = 10$:

$$a = \{0.171659, 4.36458, -1.35513, 4.16532, 0.0422072, -10.9065\}.$$

- Liczba punktów $N = 25$:

$$a = \{0.304039, 1.4799, -0.546012, 3.10255, 0.527213, -6.82663\}.$$

- Liczba punktów $N = 70$:

$$a = \{-0.564114, 0.507845, -0.365722, 1.37339, -0.611113, -1.74082\}.$$

- Liczba punktów $N = 100$:

$$a = \{-1.32073, 0.636297, -0.518278, 0.812597, -1.23661, -0.061968\}.$$

5.3 Zaburzenie $\sigma = 1.5$

- Liczba punktów $N = 10$:

$$a = \{0.515271, 0.0198563, 0.685153, 0.663381, 1.8435, -4.97215\}.$$

- Liczba punktów $N = 25$:

$$a = \{-2.11554, -1.55792, 0.00921909, 0.108171, -2.39021, 3.8261\}.$$

- Liczba punktów $N = 70$:

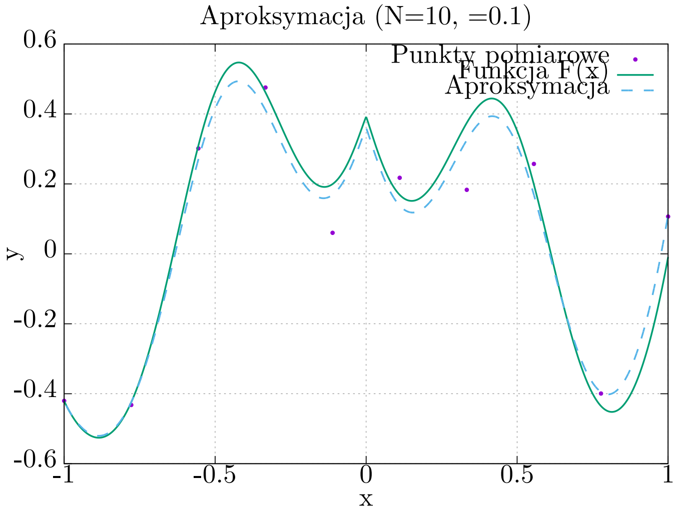
$$a = \{-3.1152, 4.56663, -2.18418, 1.46649, -2.95888, -1.5162\}.$$

- Liczba punktów $N = 100$:

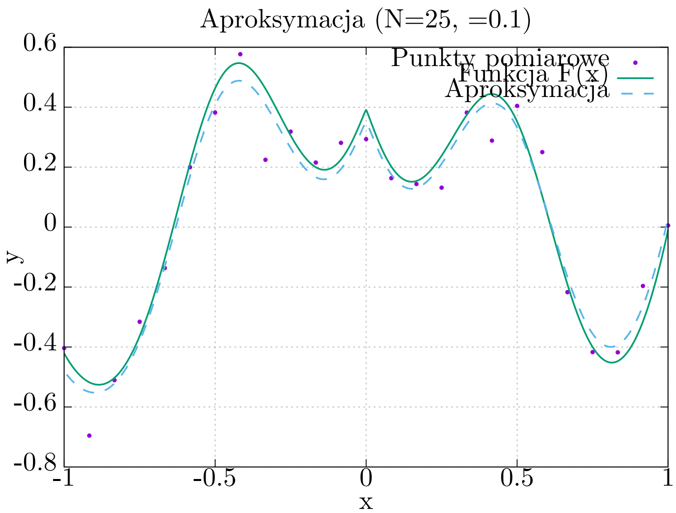
$$a = \{-1.62989, -0.617211, -0.801978, -1.74618, -1.79915, 7.46054\}.$$

5.4 Wizualizacja wyników

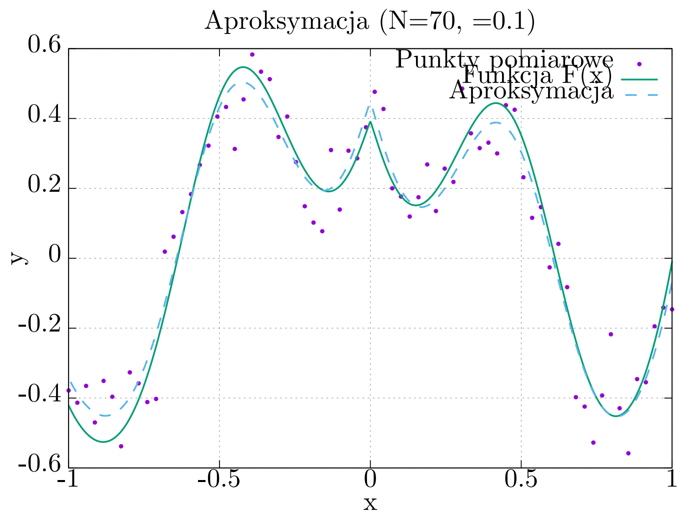
Dla wybranych parametrów σ i N przygotowano wykresy aproksymowanych funkcji:



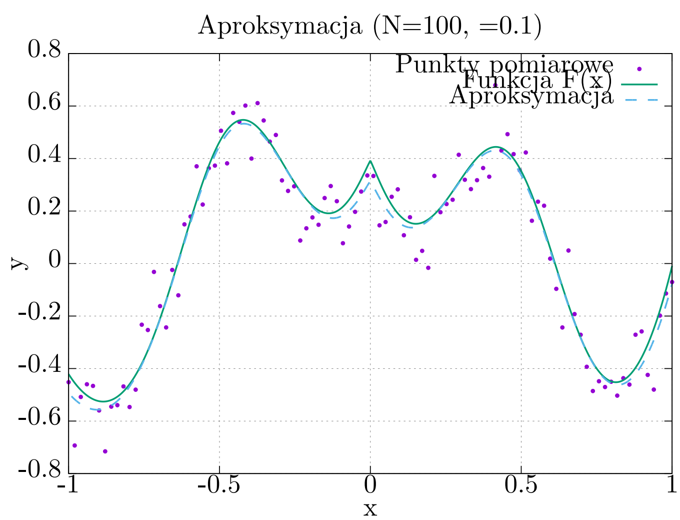
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.1$ i $N = 10$.



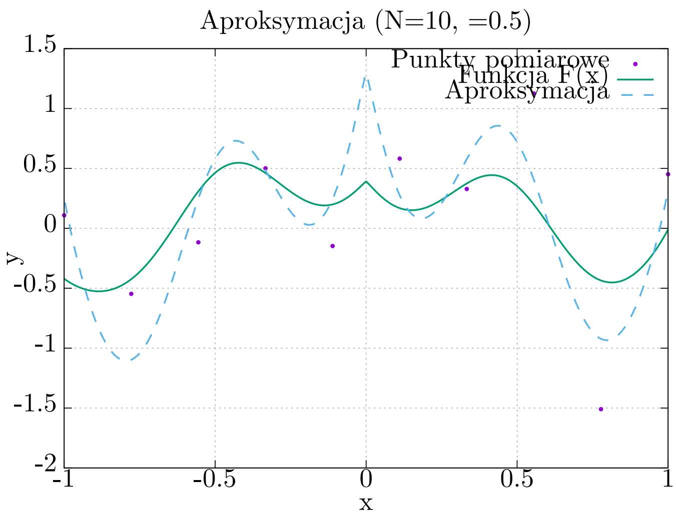
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.1$ i $N = 25$.



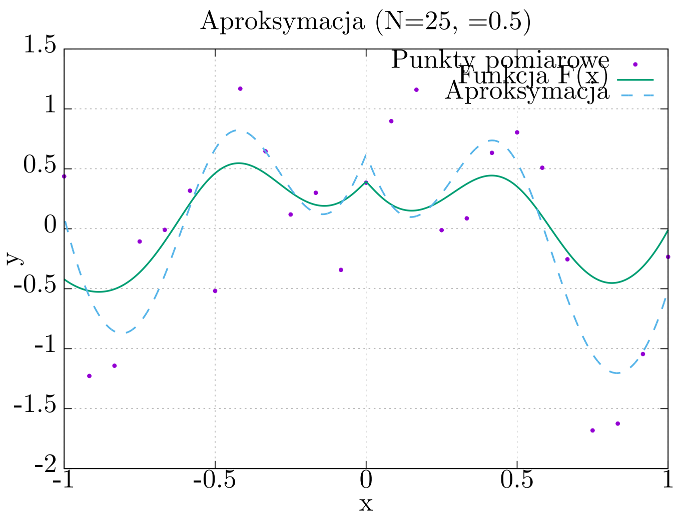
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.1$ i $N = 70$.



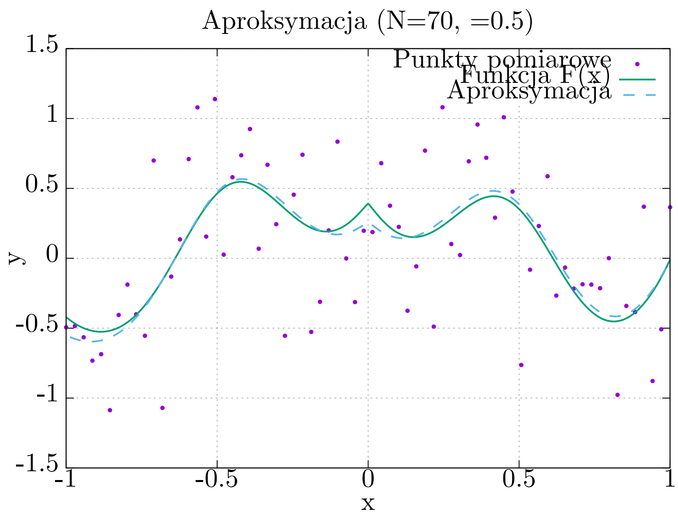
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.1$ i $N = 100$.



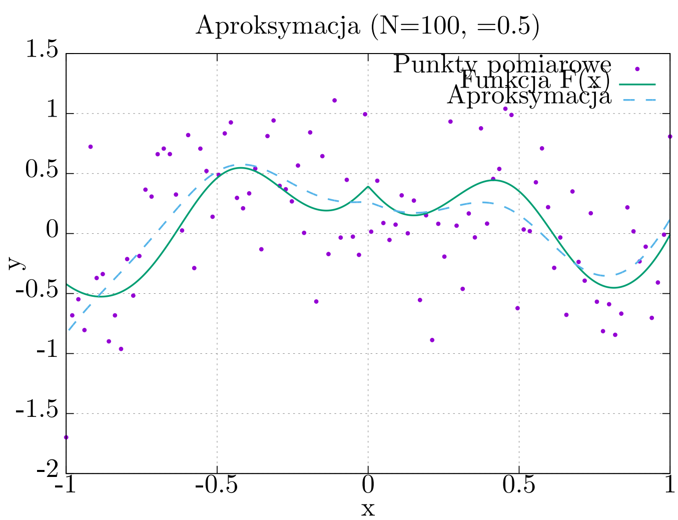
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.5$ i $N = 10$.



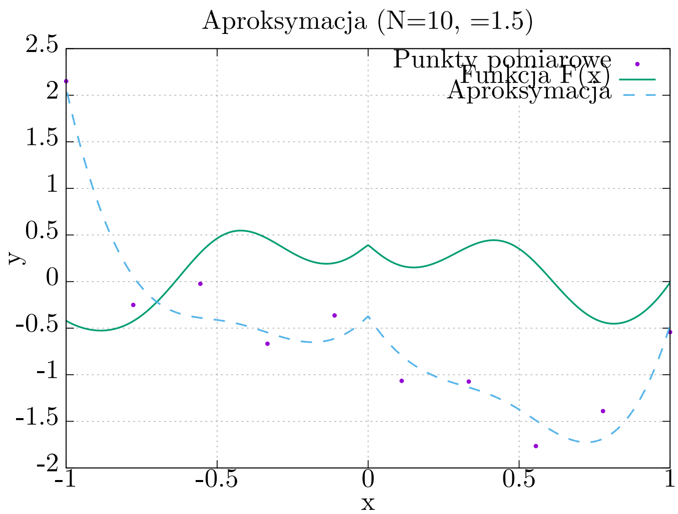
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.5$ i $N = 25$.



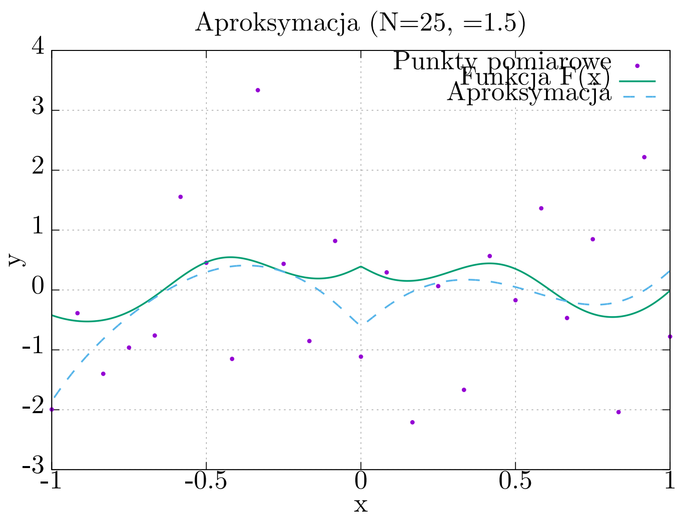
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.5$ i $N = 70$.



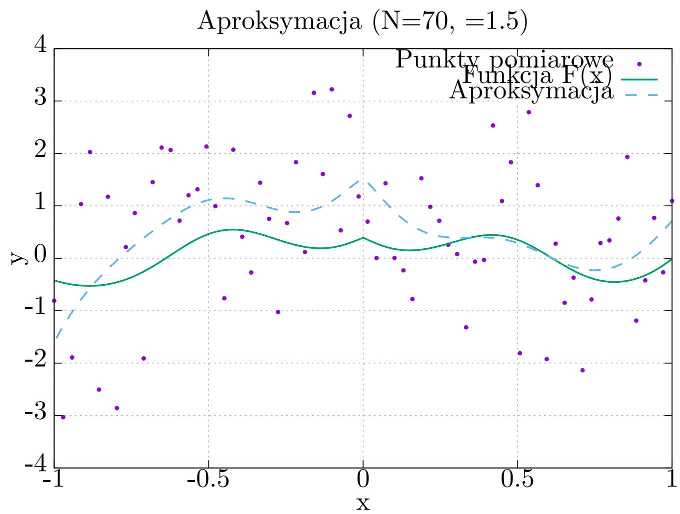
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 0.5$ i $N = 100$.



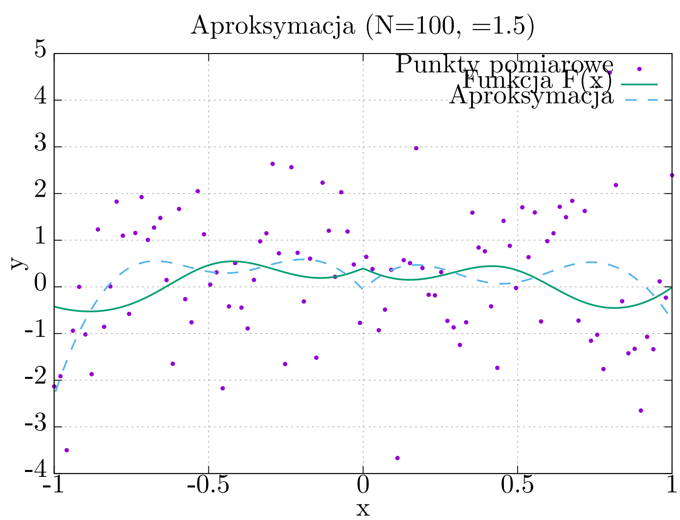
Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 1.5$ i $N = 10$.



Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 1.5$ i $N = 25$.



Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 1.5$ i $N = 70$.



Wykres funkcji $F(x)$ dla $\sigma = 1.5$ i $N = 100$.

6 Dyskusja

Wyniki aproksymacji funkcji $F(x)$ w obecności różnych poziomów zaburzeń (σ) oraz liczby punktów (N) pozwalaja na wyciagniecie kilku istotnych wniosków dotyczacych stabilności i dokładności metody najmniejszych kwadratów.

6.1 Wpływ liczby punktów (N)

Wraz ze wzrostem liczby punktów (N), wyniki aproksymacji staja sie bardziej stabilne i dokładniejsze. Dla mniejszych wartości N, takich jak $N = 10$, współczynniki a_j znaczaco odbiegaja od wartości oryginalnych. Wynika to z ograniczonej ilości informacji dostarczanej przez dane, co prowadzi do niestabilności w procesie aproksymacji. Z kolei dla wiekszych wartości N, takich jak $N = 70$ lub $N = 100$, wyznaczone współczynniki sa bliższe oryginalnym wartościom, nawet przy wyższym poziomie zaburzeń ($\sigma = 0.5$).

6.2 Wpływ poziomu zaburzeń (σ)

Zwiekszenie poziomu zaburzeń (σ) prowadzi do wiekszych odchyleń współczynników aproksymacji od ich rzeczywistych wartości. Dla $\sigma = 0.1$, uzyskane współczynniki sa stosunkowo bliskie pierwotnym wartościom nawet przy niewielkiej liczbie punktów N. Natomiast dla $\sigma = 1.5$, nawet przy $N = 100$, aproksymacja jest znaczaco zaburzona, co wskazuje na ograniczenia metody najmniejszych kwadratów w obecności dużego szumu.

6.3 Porównanie wyników

Analizujac wyniki dla różnych kombinacji N i σ, można zauważyć, że metoda najmniejszych kwadratów działa najlepiej przy umiarkowanym poziomie szumu ($\sigma \leq 0.5$) oraz odpowiednio dużej liczbie punktów ($N \geq 70$). W takich przypadkach uzyskane współczynniki a_j sa zbliżone do rzeczywistych wartości, a wykresy funkcji dobrze odwzorowuja oryginalna funkcje $F(x)$.

Z kolei przy dużych zaburzeniach ($\sigma = 1.5$) metoda staje sie mniej efektywna, co jest szczególnie widoczne dla mniejszych N. W takich sytuacjach konieczne może być zastosowanie bardziej zaawansowanych metod aproksymacji, takich jak regularizacja (np. metoda grzbietowa) lub metody odpornościowe (ang. *robust methods*), które lepiej radza sobie z szumem.

6.4 Ograniczenia i potencjalne ulepszenia

Metoda najmniejszych kwadratów, mimo swojej prostoty i efektywności w wielu przypadkach, ma ograniczenia w sytuacjach, gdy dane sa mocno zaburzone. Wyniki pokazuja, że dla wiekszych wartości σ, szczególnie przy niewielkim N, uzyskane współczynniki moga być niestabilne i znacznie odbiegać od rzeczywistych wartości. W takich sytuacjach potencjalne ulepszenia mogłyby obejmować:

- Zastosowanie regularizacji, aby zmniejszyć wpływ szumu na proces aproksymacji.
- Wykorzystanie metod odpornościowych, które sa mniej wrażliwe na wartości odstajace.

- Analize właściwego doboru funkcji bazowych $\phi_j(x)$, aby lepiej dostosować je do charakteru danych.

6.5 Wnioski końcowe

Przeprowadzona analiza pokazuje, że metoda najmniejszych kwadratów jest skuteczna przy niskim poziomie szumu i wystarczajaco dużej liczbie punktów. Jednak w przypadku wiekszych zaburzeń konieczne jest rozważenie bardziej zaawansowanych metod, które zapewnia lepsza odporność na szum i wieksza stabilność wyników.