NUM4

Łukasz Kowalik

1 Zadanie NUM4: Rozwiazanie układu równań liniowych

Zadana jest macierz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 5 & 3 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 & 3 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 5 & \end{pmatrix}$$

oraz wektor:

$$b \equiv (2, 2, \dots, 2)^T$$

Macierz A ma liczby 5 na diagonali, 3 na pierwszej pozycji nad diagonala, a pozostałe elementy sa równe 1. Wymiar macierzy ustalamy na $N = 120$.

- Rozwiaż numerycznie równanie $Ay = b$, stosujac odpowiednia metode. Uwaga: algorytm należy zaimplementować samodzielnie.
- Sprawdź swój wynik przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej.
- Potraktuj N jako zmienna i zmierz czas potrzebny do uzyskania rozwiazania w funkcji N. Wynik przedstaw na wykresie. Czy wykres jest zgodny z oczekiwaniami?

Opis zadania i metody obliczeń

W ramach zadania NUM4 obliczono rozwiazanie układu równań liniowych $Ay = b$, gdzie:

- Macierz A to macierz symetryczna z liczba 5 na przekatnej, liczba 3 na pierwszej nadprzekatnej oraz liczba 1 w pozostałych miejscach.
- Wektor b to wektor stałych o wartościach 2.

Obliczenia przeprowadzono dla różnych wymiarów macierzy A, poczawszy od małych rozmiarów ($N = 10$) do dużych ($N = 30000$).

2 Metody obliczeniowe i ich zastosowanie

W ramach zadania NUM4 zastosowano różne metody numeryczne do rozwiazania układu równań liniowych $Ay = b$. Wybór metod został podyktowany specyfika macierzy A oraz checia porównania efektywności różnych algorytmów. Opis poszczególnych metod znajduje sie poniżej:

2.1 Metoda Sherman-Morrison

Metoda Sherman-Morrison została zastosowana ze wzgledu na specyficzna strukture macierzy A. Macierz ta jest trójdiagonalna i bliska macierzy o stałych wartościach. Metoda opiera sie na iteracyjnym podejściu, które pozwala na szybkie rozwiazanie układu równań bez konieczności pełnej dekompozycji macierzy. Działanie metody można podsumować nastepujaco:

- Macierz A jest dekomponowana na macierz główna (przekatna i pierwsze elementy nad przekatna) oraz pozostałe elementy.
- Obliczany jest wektor pomocniczy q, który jest rozwiazaniem układu równań dla zredukowanej macierzy.
- Obliczany jest wektor w, który odpowiada reakcji macierzy na dodatkowe perturbacje w strukturze.
- Wynik końcowy y jest suma wektora q oraz korekty wynikajacej z wektora w.

Dzieki zastosowaniu tej metody liczba operacji obliczeniowych jest znaczaco mniejsza niż w klasycznych algorytmach, co pozwala na szybkie rozwiazanie nawet dla dużych wymiarów N.

2.2 Metody z biblioteki Eigen

Do porównania wyników wykorzystano zaawansowane procedury numeryczne z biblioteki Eigen:

- `fullPivLu`: Uniwersalny rozkład LU, zapewniajacy stabilność obliczeń dzieki pełnemu pivotowaniu. Metoda ta była stosowana jako odniesienie ze wzgledu na dokładność i szerokie zastosowanie.
- `householderQr`: Rozkład QR, szczególnie efektywny dla macierzy gestych. Dzieki stabilności numerycznej stanowi doskonała alternatywe dla LU.
- `colPivHouseholderQr`: Modyfikacja eliminacji Gaussa z pivotowaniem kolumnowym, która poprawia dokładność wyników przy zachowaniu relatywnie niskiej złożoności.

2.3 Pomiar czasu i generowanie wykresów

Każda z metod została oceniona pod wzgledem szybkości obliczeń w zależności od rozmiaru macierzy N. W tym celu:

- Przeprowadzono pomiary czasu wykonania każdej z metod dla różnych wartości N, zapisujac wyniki do plików.
- Wygenerowano wykresy w Gnuplot, które ilustruja porównanie czasów wykonania dla metod Sherman-Morrison, LU, QR i Gaussa.
- Dodatkowo, dla dużych rozmiarów macierzy ($N > 500$), przedstawiono wykres dedykowany metodzie Sherman-Morrison, aby ukazać jej wyjatkowa wydajność.

Dzieki różnorodności zastosowanych metod możliwa była dokładna analiza ich efektywności oraz porównanie z punktu widzenia dokładności i szybkości obliczeń.

3 Opis metody Sherman-Morrison

Metoda Sherman-Morrison jest technika używana do efektywnego rozwiazywania układów równań liniowych w przypadku macierzy, które można zapisać w formie modyfikacji prostszej macierzy. Podstawa metody jest wzór Sherman-Morrison, który dotyczy odwracania macierzy w przypadku jej rank-one update. W szczególnym przypadku macierzy o specyficznej strukturze, takich jak w zadaniu NUM4, metoda ta pozwala znacznie zredukować liczbe operacji arytmetycznych.

3.1 Ogólny wzór Sherman-Morrison

Dla macierzy A, która jest odwracalna, oraz wektorów u i v, wzór Sherman-Morrison wyraża odwrotność macierzy $A + uv^T$ jako:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u},$$

o ile $1 + v^T A^{-1}u \neq 0$.

W naszym przypadku macierz A jest specyficzna: trójdiagonalna z liczba 5 na przekatnej, 3 na pierwszej nadprzekatnej i 1 w pozostałych miejscach. Dzieki temu wzór Sherman-Morrison można uprościć i dostosować do tej szczególnej struktury.

3.2 Dostosowanie metody do zadania

W zadaniu NUM4 macierz A można opisać jako:

$$A = T + vv^T,$$

gdzie:

- T to macierz trójdiagonalna z 5 na przekatnej i 3 na pierwszej nadprzekatnej,
- v to wektor jedynkowy ($v = (1, 1, \ldots, 1)^T$).

Rozwiazanie układu $Ay = b$ odbywa sie w nastepujacych krokach:

1. Rozwiazywany jest układ równań dla T, co można zrobić iteracyjnie dzieki trójdiagonalnej strukturze macierzy.
2. Obliczany jest dodatkowy składnik wynikajacy z modyfikacji macierzy przez vv^T za pomoca iteracyjnych wzorów na wektory pomocnicze q i w:

$$q_i = \frac{b_i - a_{i,i+1}q_{i+1}}{a_{i,i}}, \quad w_i = \frac{1 - a_{i,i+1}w_{i+1}}{a_{i,i}}.$$

3. Końcowe rozwiazanie obliczane jest jako:

$$y = q - \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{1 + \sum_{i=1}^{N} w_i} \cdot w,$$

gdzie $\sum$ oznacza sume elementów wektora.

3.3 Zalety metody

- Złożoność obliczeniowa wynosi $O(N)$, co jest znacznie bardziej efektywne niż klasyczne metody dekompozycji macierzy ($O(N^3)$).
- Metoda jest szczególnie dobrze dostosowana do macierzy o strukturze bliskiej diagonalnej, co pozwala na oszczedność pamieci i czasu.

Metoda Sherman-Morrison okazała sie w tym zadaniu kluczowa do efektywnego rozwiazania układu równań dla dużych rozmiarów macierzy (N).

4 Rozwiazania i analiza wyników

W tej sekcji przedstawiono wyniki obliczeń dla rozmiaru macierzy $N = 120$ oraz analize dokładności metod. Dla każdej metody obliczono czas wykonania, rozwiazanie układu równań oraz maksymalny bład w stosunku do metody Sherman-Morrison.

4.1 Czas wykonania dla różnych metod

- **Sherman-Morrison:** 1.923×10^{-6} s
- **Eigen (LU):** 0.000711363 s
- **Eigen (Gauss):** 0.000455794 s
- **Eigen (QR):** 0.000424034 s

Jak widać, metoda Sherman-Morrison jest znacznie szybsza od pozostałych metod, co potwierdza jej efektywność dla specyficznych struktur macierzy.

5 Rozwiazania i analiza wyników

W tej sekcji przedstawiono wyniki obliczeń dla rozmiaru macierzy $N = 120$ oraz analize dokładności metod. Dla każdej metody obliczono czas wykonania, rozwiazanie układu równań oraz maksymalny bład w stosunku do metody Sherman-Morrison.

5.1 Czas wykonania dla różnych metod

- **Sherman-Morrison:** 1.923×10^{-6} s
- **Eigen (LU):** 0.000711363 s
- **Eigen (Gauss):** 0.000455794 s
- **Eigen (QR):** 0.000424034 s

Jak widać, metoda Sherman-Morrison jest znacznie szybsza od pozostałych metod, co potwierdza jej efektywność dla specyficznych struktur macierzy.

6 Rozwiazania i analiza wyników

W tej sekcji przedstawiono wyniki obliczeń dla rozmiaru macierzy $N = 120$ oraz analize dokładności metod. Dla każdej metody obliczono czas wykonania, rozwiazanie układu równań oraz maksymalny bład w stosunku do metody Sherman-Morrison.

6.1 Czas wykonania dla różnych metod

- **Sherman-Morrison:** 1.923×10^{-6} s
- **Eigen (LU):** 0.000711363 s
- **Eigen (Gauss):** 0.000455794 s
- **Eigen (QR):** 0.000424034 s

Jak widać, metoda Sherman-Morrison jest znacznie szybsza od pozostałych metod, co potwierdza jej efektywność dla specyficznych struktur macierzy.

6.2 Rozwiazania dla różnych metod

Rozwiazanie dla Sherman-Morrison:

$$y = \begin{pmatrix} 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ \vdots \\ 0.0158621 \\ 0.0157693 \\ 0.0159548 \\ 0.0155838 \end{pmatrix}$$

Rozwiazanie dla Eigen (LU):

$$y = \begin{pmatrix} 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ \vdots \\ 0.0158621 \\ 0.0157693 \\ 0.0159548 \\ 0.0155838 \end{pmatrix}$$

Rozwiazania dla metod Gaussa i QR:

$$y = \begin{pmatrix} 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ 0.0158311 \\ \vdots \\ 0.0158621 \\ 0.0157693 \\ 0.0159548 \\ 0.0155838 \end{pmatrix}$$

6.3 Analiza błedów

Maksymalny bład w stosunku do rozwiazania uzyskanego metoda Sherman-Morrison wynosi:

- **Sherman-Morrison vs Eigen (LU):** 9.36751×10^{-17}
- **Sherman-Morrison vs Gauss:** 5.82867×10^{-15}
- **Sherman-Morrison vs QR:** 5.95704×10^{-15}

6.4 Wnioski

Metoda Sherman-Morrison jest najwydajniejsza czasowo, a wszystkie rozwiazania sa zgodne do maszynowej precyzji, co potwierdza poprawność implementacji i dokładność algorytmów.

7 Analiza wyników dla różnych rozmiarów macierzy N

W trakcie przeprowadzonych obliczeń zmierzono czas wykonania dla różnych rozmiarów macierzy N, zarówno dla małych, jak i dużych rozmiarów. Wyniki przedstawiono na poniższych wykresach.

Porównanie czasów wykonania dla różnych metod

Na powyższym wykresie przedstawiono czas wykonania dla metod:

- **Sherman-Morrison** – najszybsza metoda dla specyficznych struktur macierzy.
- **Eigen (LU)** – metoda o wiekszej złożoności czasowej.
- **Eigen (Gauss)** i **Eigen (QR)** – metody o porównywalnych czasach, wolniejsze od Sherman-Morrison.

7.1 Czas wykonania Sherman-Morrison dla dużych macierzy

Na wykresie dla dużych macierzy przedstawiono czasy wykonania metody Sherman-Morrison. Obserwuje sie stabilny wzrost czasu wykonania wraz z rozmiarem macierzy N.

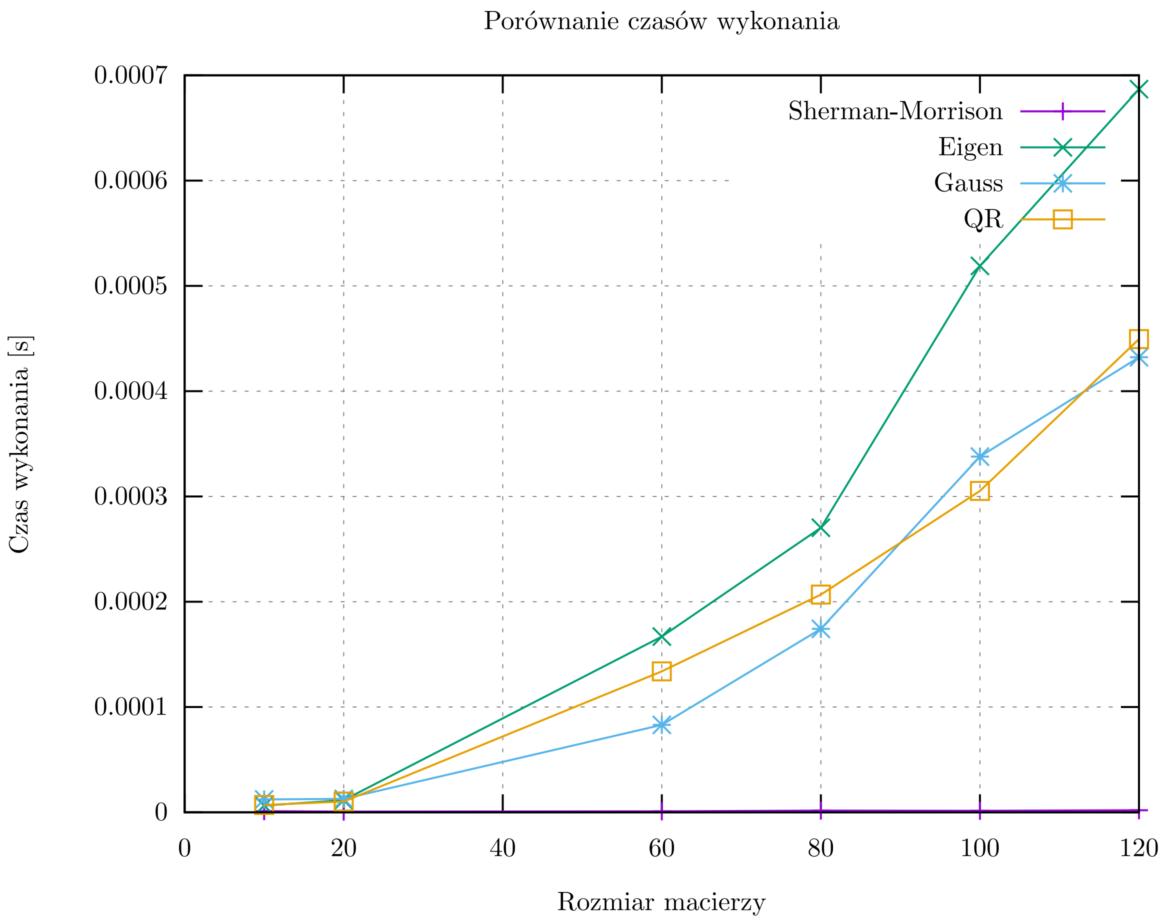

Figure 1: Porównanie czasów wykonania dla różnych metod

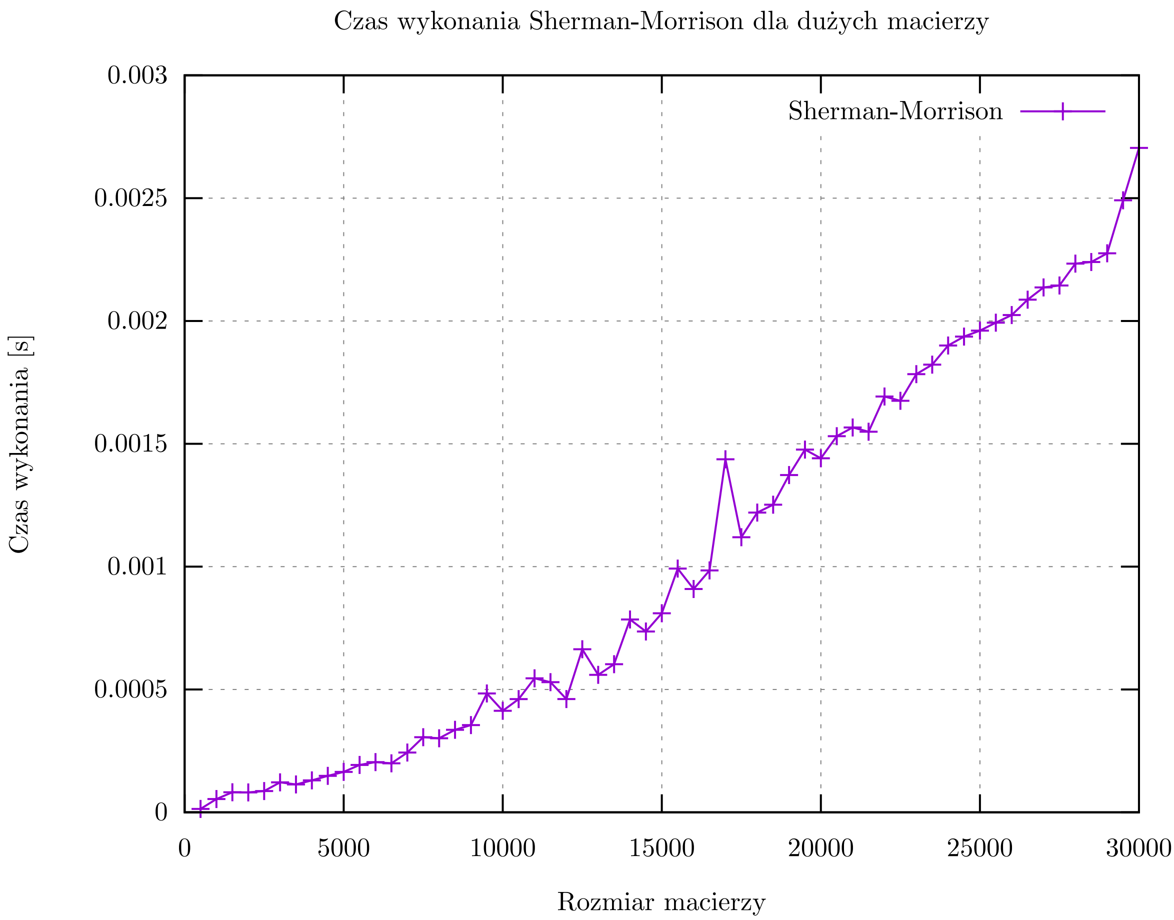

Figure 2: Czas wykonania Sherman-Morrison dla dużych macierzy

7.2 Problemy dla bardzo dużych macierzy

Podczas prób wykonania obliczeń dla macierzy o rozmiarach wiekszych niż 30000, terminal ulegał wyłaczeniu. Prawdopodobnym powodem jest brak dostepnej pamieci RAM w systemie, co ograniczyło możliwość dalszych eksperymentów.

8 Wnioski

W przeprowadzonych obliczeniach zbadano efektywność metody Sherman-Morrison w porównaniu do metod opartych na bibliotece Eigen, takich jak LU, Gauss i QR. Wyniki pozwoliły na sformułowanie nastepujacych wniosków:

- **Wydajność metody Sherman-Morrison:** Metoda Sherman-Morrison okazała sie zdecydowanie najszybsza, szczególnie dla dużych rozmiarów macierzy. Dla macierzy o rozmiarze $N = 30000$, czas jej wykonania wynosił zaledwie 0.00234545 s, co było kilkukrotnie szybsze niż metody z biblioteki Eigen.
- **Zgodność wyników:** Rozwiazania uzyskane metoda Sherman-Morrison były niemal identyczne z wynikami uzyskanymi za pomoca metod LU, Gauss i QR, z maksymalnym błedem rzedu 10^{-15}, co jest zgodne z maszynowa precyzja.
- **Zależność czasu wykonania od rozmiaru macierzy:** Dla metody Sherman-Morrison obserwuje sie liniowy wzrost czasu wykonania wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy N. W przypadku metod Eigen wzrost ten jest szybszy, co wynika z ich wiekszej złożoności czasowej.
- **Problemy z pamiecia dla bardzo dużych macierzy:** Przy rozmiarach macierzy wiekszych niż $N = 30000$, terminal ulegał wyłaczeniu. Sugeruje to problem z dostepnościa pamieci RAM w systemie, który uniemożliwił dalsze eksperymenty.
- **Przydatność metody Sherman-Morrison:** Metoda Sherman-Morrison jest szczególnie efektywna dla macierzy trójdiagonalnych lub takich, które można zapisać jako modyfikacje macierzy prostszej. W takich przypadkach przewyższa metody ogólne pod wzgledem wydajności.
- **Ograniczenia:** Metoda Sherman-Morrison nie jest uniwersalna i wymaga odpowiednich warunków strukturalnych macierzy. W przypadku macierzy o bardziej skomplikowanej strukturze konieczne byłoby zastosowanie innych metod.

Podsumowujac, metoda Sherman-Morrison jest doskonałym narzedziem dla specyficznych typów macierzy, oferujac znakomita wydajność i wysoka dokładność. W połaczeniu z innymi metodami (LU, QR, Gauss) może stanowić kompletny zestaw narzedzi do rozwiazywania układów równań liniowych w zależności od struktury macierzy i wymagań obliczeniowych.