

# NUM 7

Łukasz Kowalik

## 1 Polecenie

Rozważmy funkcję  $y(x) = \frac{1}{1+10x^2}$ , zadaną na przedziale  $x \in [-1, 1]$ . Wygeneruj zbiór punktów  $\{(x_i, y_i)\}$ , gdzie  $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) jest jednorodną siatką punktów, a  $y_i \equiv y(x_i)$ . Dla tych danych wygeneruj:

- (a) wielomian interpolacyjny stopnia  $\leq n$ ,
- (b) funkcję sklejaną stopnia trzeciego,  $s(x)$ , spełniającą warunki  $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ .

Wyniki porównaj z zaproponowaną funkcją  $y(x)$  na wykresie, dla różnej ilości punktów  $n$ . W szczególności interesujące są różnice  $y(x) - W_n(x)$  oraz  $y(x) - s(x)$  pomiędzy węzłami interpolacji. Przeprowadź również podobną analizę dla innych funkcji; czy nasuwają się jakieś wnioski?

**Uwaga:** Nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do interpolacji (chyba, że do sprawdzenia wyniku). Algorytm należy zaimplementować samodzielnie.

## 2 Wstęp i opis problemu

Celem zadania była interpolacja funkcji  $y(x) = \frac{1}{1+10x^2}$  oraz trzech dodatkowych funkcji testowych:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 12x^5 - 5x^3, \\f_2(x) &= \frac{\sin(2e \cdot x^2)}{2 + \pi \cdot x^2}, \\f_3(x) &= -\frac{\ln(|\sin(\pi x) + 0.1|)}{4}.\end{aligned}$$

Interpolacji dokonano na przedziale  $x \in [-1, 1]$  przy użyciu dwóch metod:

1. wielomianu interpolacyjnego metodą Lagrange'a,
2. funkcji sklepanej stopnia trzeciego

Dla różnych liczb węzłów  $n$  ( $n = 10, 20, 30$ ) porównano uzyskane wyniki interpolacji z wartościami rzeczywistymi funkcji oraz obliczono błędy.

## 3 Interpolacja wielomianowa i funkcje sklepane

### 3.1 Interpolacja Lagrange’a

Interpolacja Lagrange’a opiera się na skonstruowaniu wielomianu  $W_n(x)$  stopnia  $\leq n$ , który przechodzi przez zadane punkty  $(x_i, y_i)$ . Wielomian ten przyjmuje postać:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x),$$

gdzie wielomiany bazowe  $\ell_i(x)$  są zdefiniowane wzorem:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Metoda ta jest efektywna dla niewielkiej liczby punktów, jednak dla większych  $n$  może prowadzić do niestabilności numerycznych.

### 3.2 Funkcje sklepane stopnia trzeciego

Funkcje sklepane to metoda interpolacji oparta na dopasowaniu wielomianów trzeciego stopnia  $s_i(x)$  do każdego przedziału  $[x_i, x_{i+1}]$ . Przyjęto warunki brzegowe:

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0.$$

Każdy wielomian ma postać:

$$s_i(x) = A_i(x - x_i)^3 + B_i(x - x_i)^2 + C_i(x - x_i) + D_i,$$

gdzie współczynniki  $A_i, B_i, C_i, D_i$  zależą od wartości funkcji  $y_i$  i drugich pochodnych  $\xi_i$  w węzłach.

#### 3.2.1 Wyznaczanie $\xi$

Aby wyznaczyć  $\xi_i$ , rozwiązano układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_{n-3} \\ \xi_{n-2} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix},$$

gdzie  $h = x_{i+1} - x_i$  to stała odległość między węzłami.

#### 3.2.2 Rozwiązanie układu

Macierz powyższego układu jest macierzą trójdziagonalną, co pozwala na jej efektywne rozwiązanie. Wyznaczone wartości  $\xi$  są następnie używane do obliczenia współczynników  $A, B, C, D$  dla każdego przedziału, zgodnie z poniższymi wzorami:

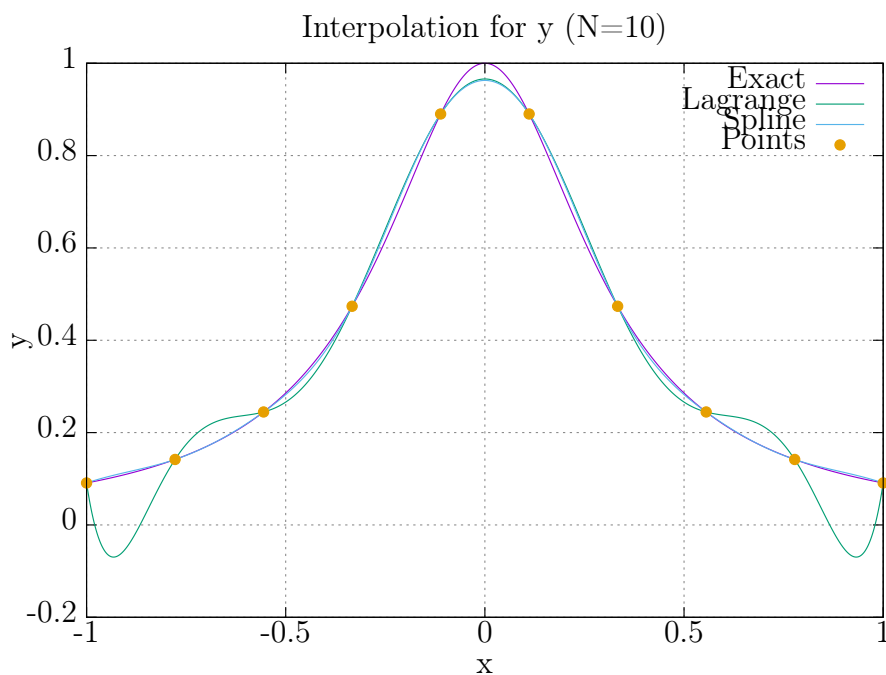
$$A = \frac{x_{i+1} - x}{h}, \quad B = \frac{x - x_i}{h}, \quad C = \frac{h^2}{6}(A^3 - A), \quad D = \frac{h^2}{6}(B^3 - B).$$

Wyniki interpolacji funkcjami sklejanymi zapewniają ciągłość funkcji, pierwszej i drugiej pochodnej, dzięki czemu metoda ta jest stabilna i precyzyjna nawet dla większej liczby węzłów.

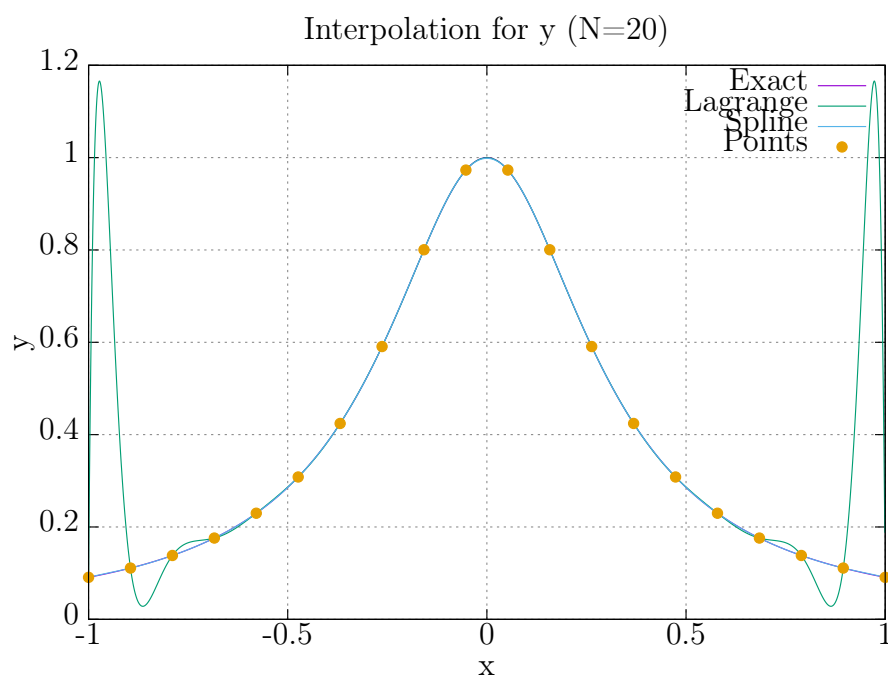
## 4 Wyniki

Wyniki interpolacji dla funkcji  $y(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  oraz różnych liczby węzłów ( $N = 10, 20, 30$ ) przedstawiono na poniższych wykresach. Dla każdej funkcji zaprezentowano wykresy interpolacji oraz błędów.

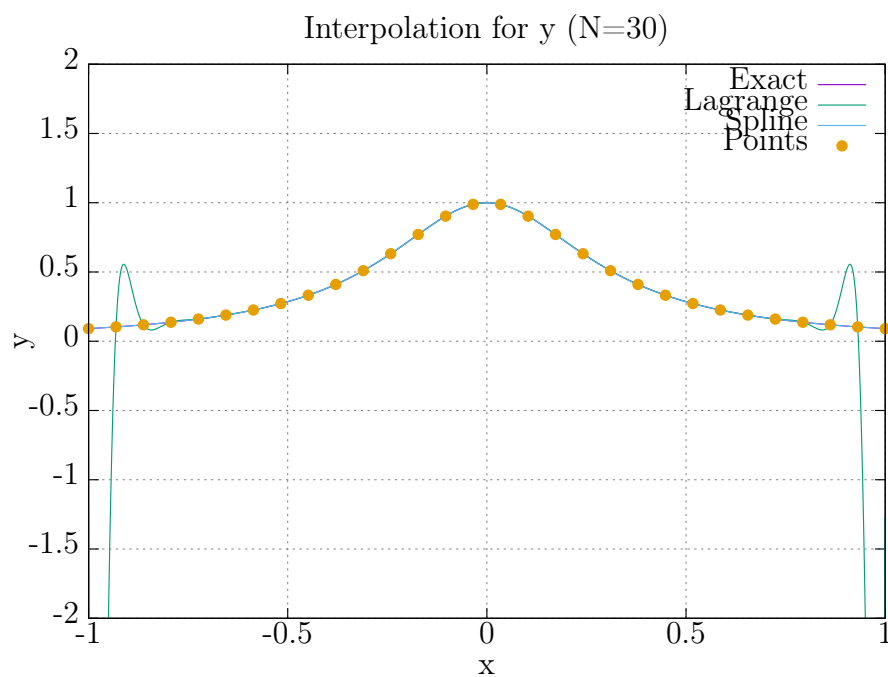
### 4.1 Funkcja $y(x)$



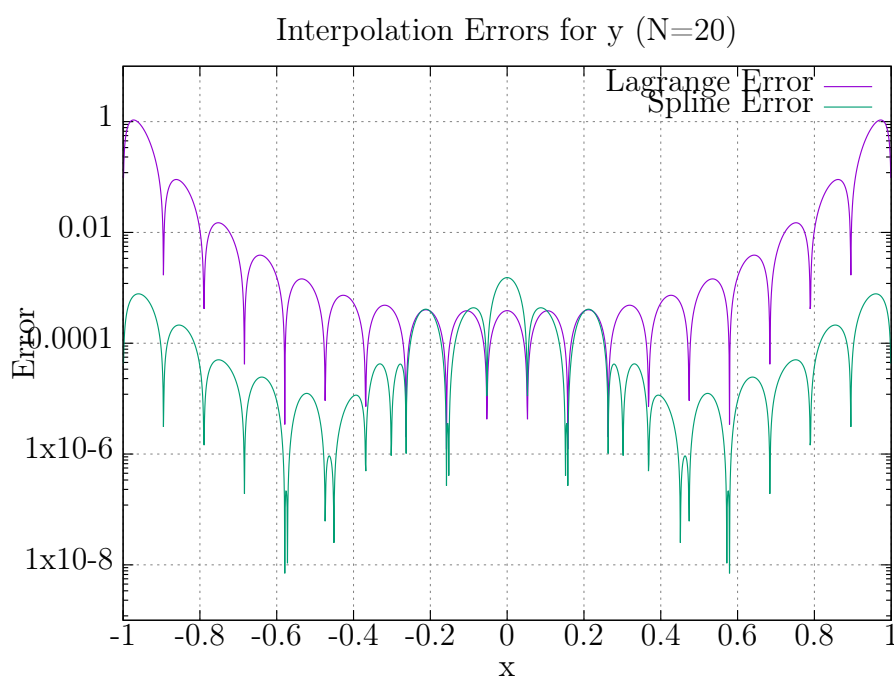
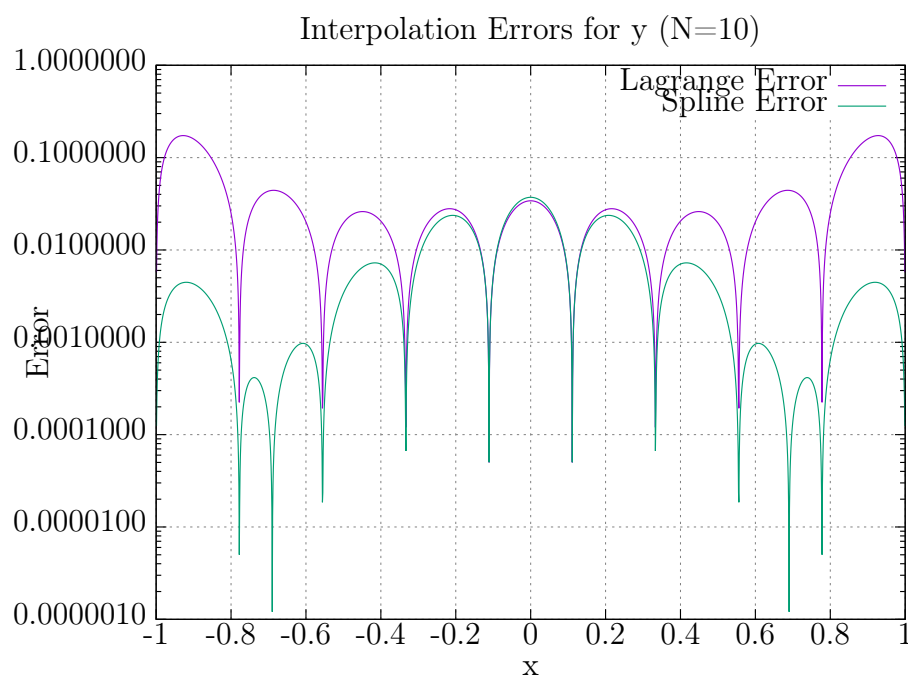
Interpolacja funkcji  $y(x)$  dla  $N = 10$ .

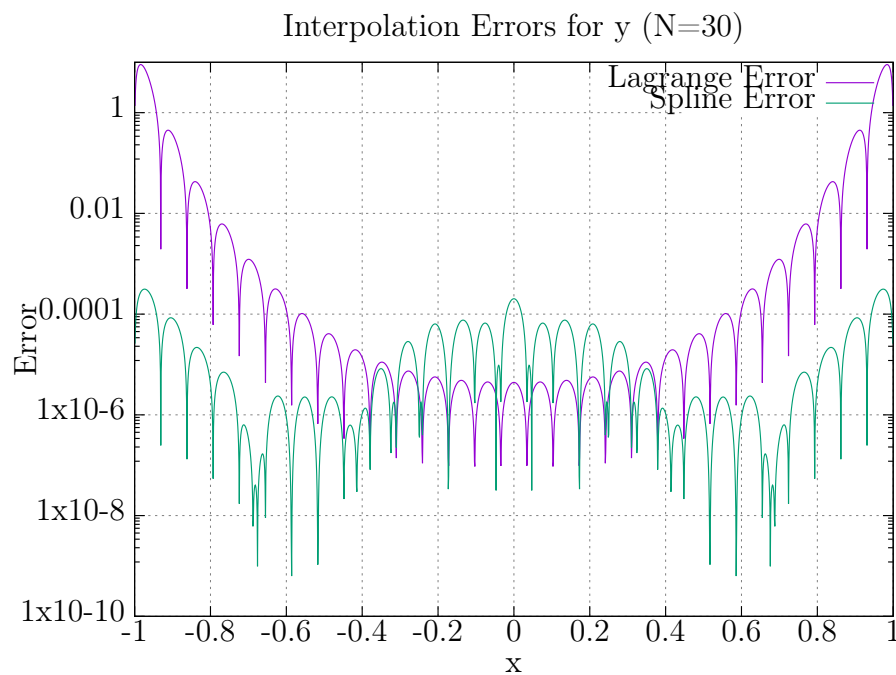


Interpolacja funkcji  $y(x)$  dla  $N = 20$ .

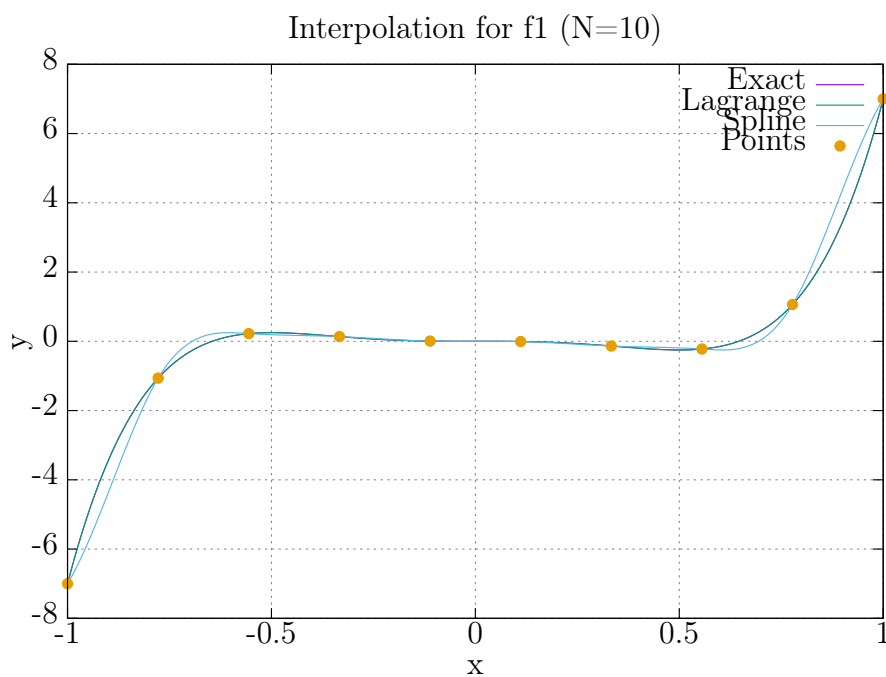


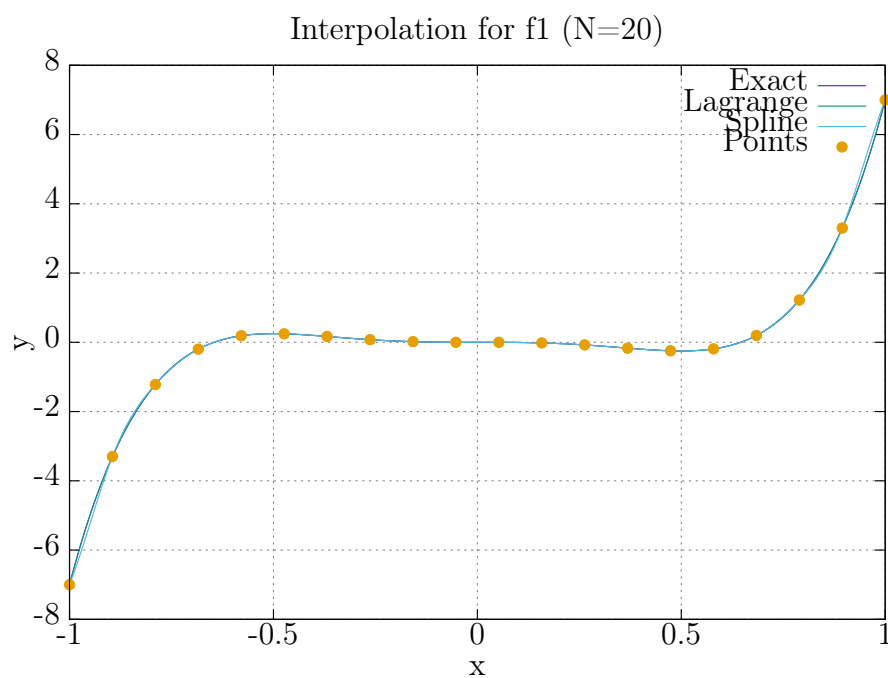
Interpolacja funkcji  $y(x)$  dla  $N = 30$ .



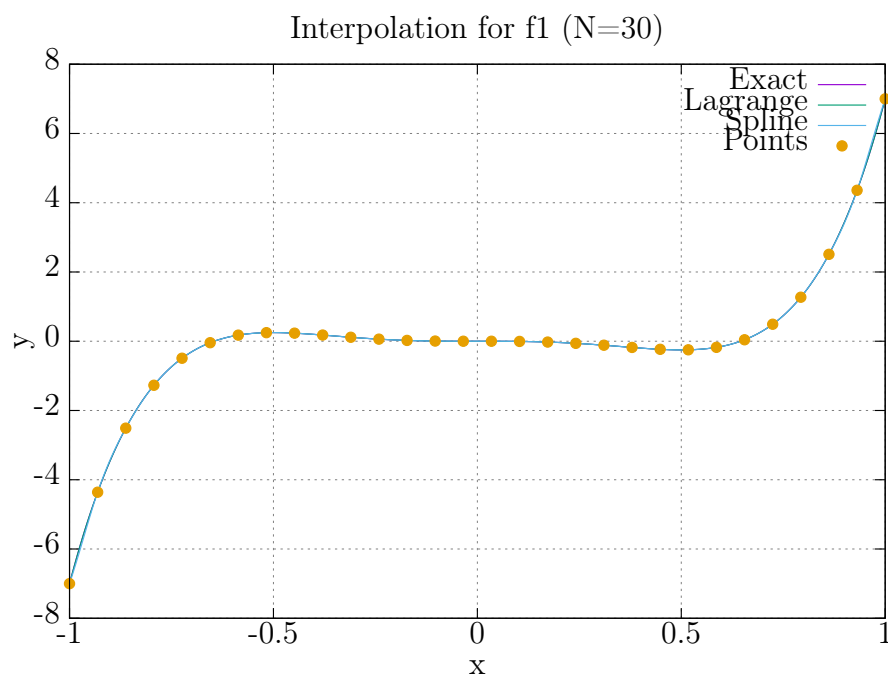


## 4.2 Funkcja $f_1(x)$

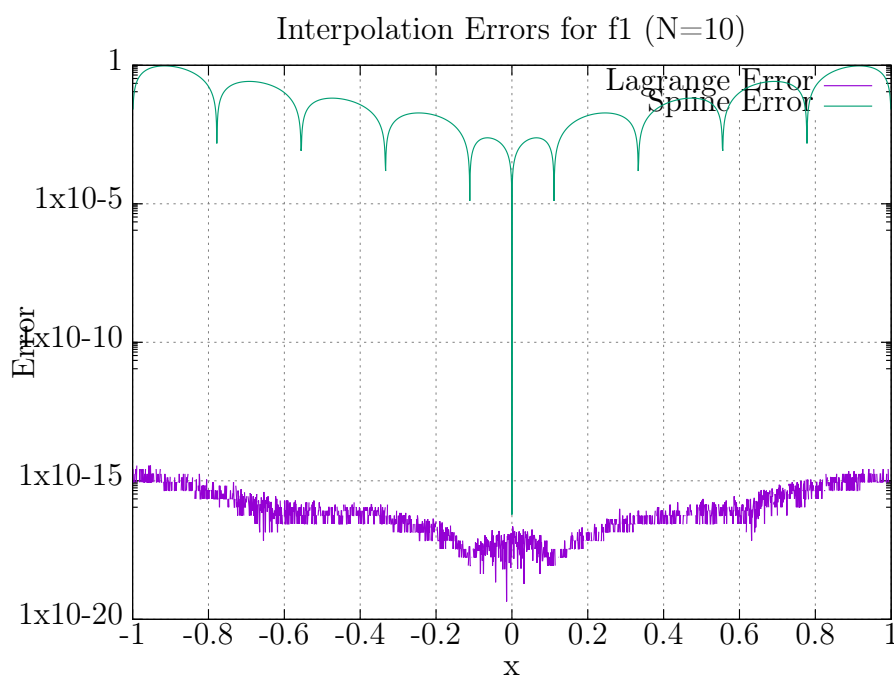




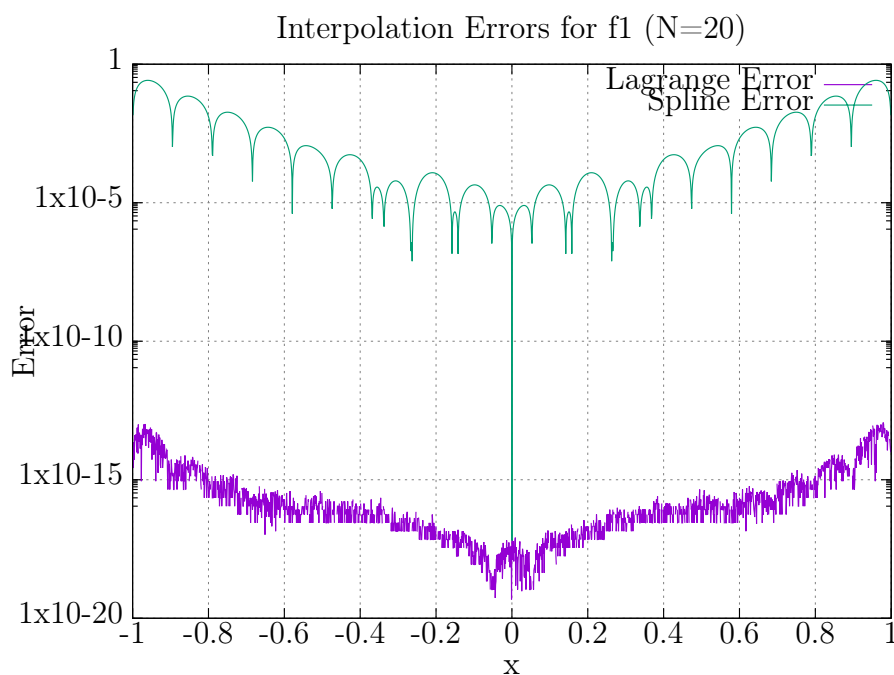
Interpolacja funkcji  $f_1(x)$  dla  $N = 20$ .



Interpolacja funkcji  $f_1(x)$  dla  $N = 30$ .

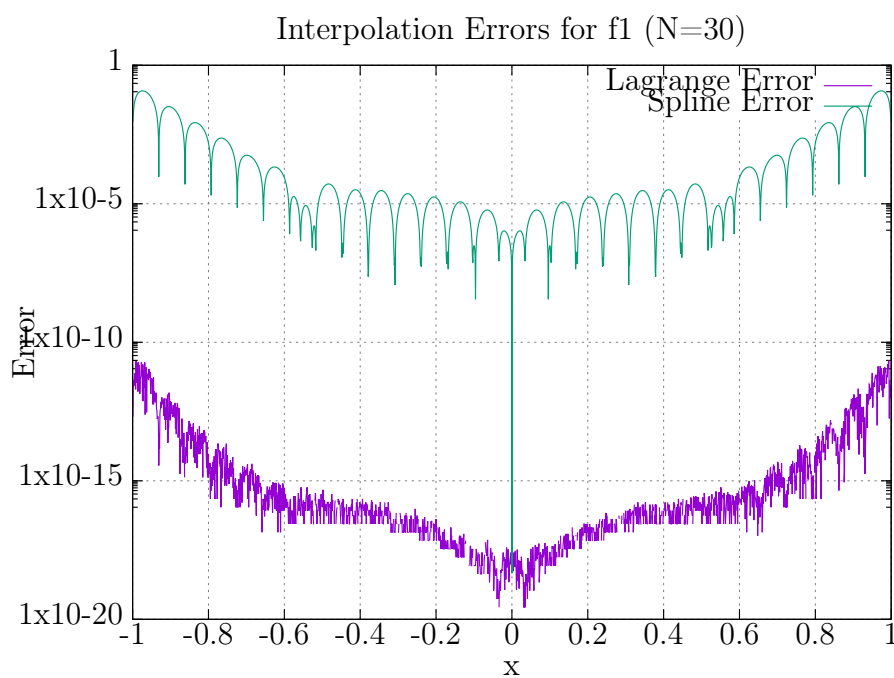


Błędy interpolacji funkcji  $f_1(x)$  dla  $N = 10$ .



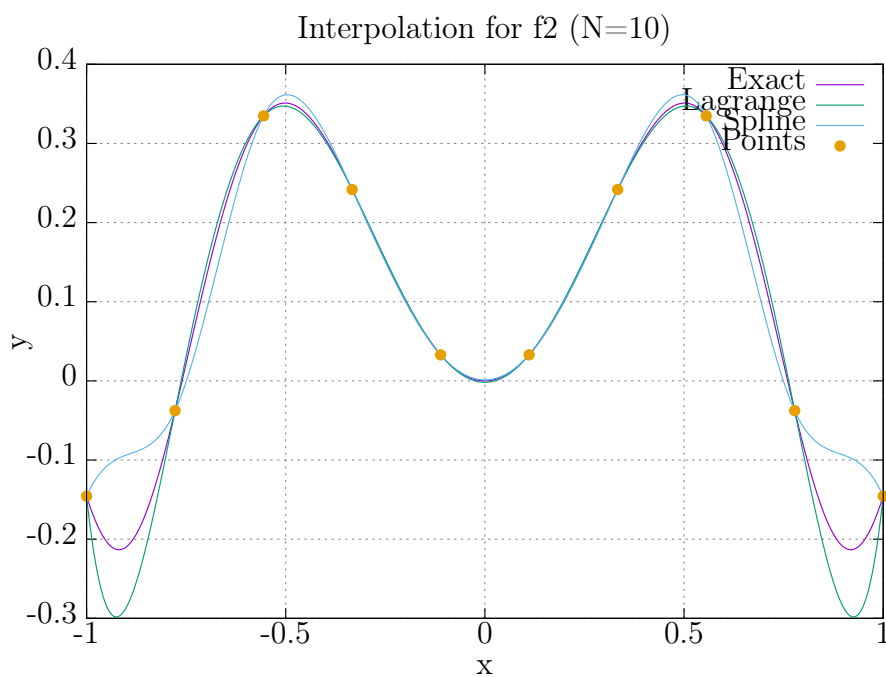
Błędy interpolacji funkcji  $f_1(x)$  dla  $N = 20$ .



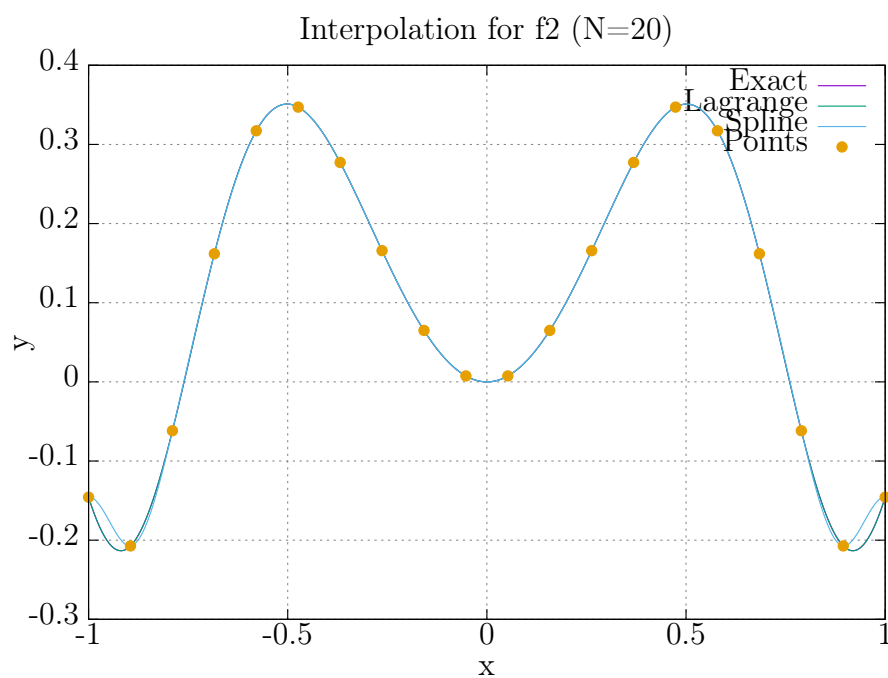


Błędy interpolacji funkcji  $f_1(x)$  dla  $N = 30$ .

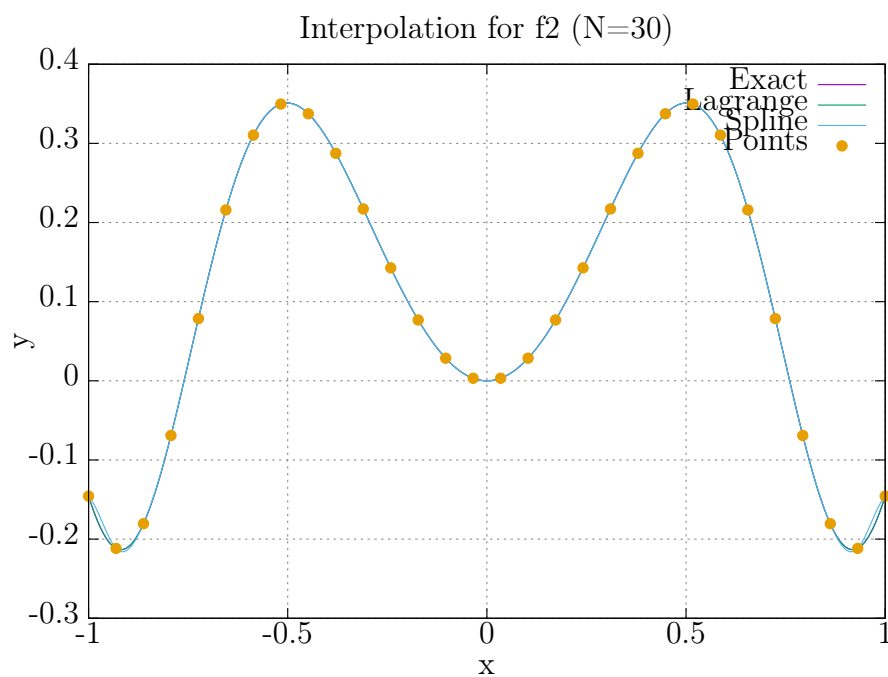
### 4.3 Funkcja $f_2(x)$



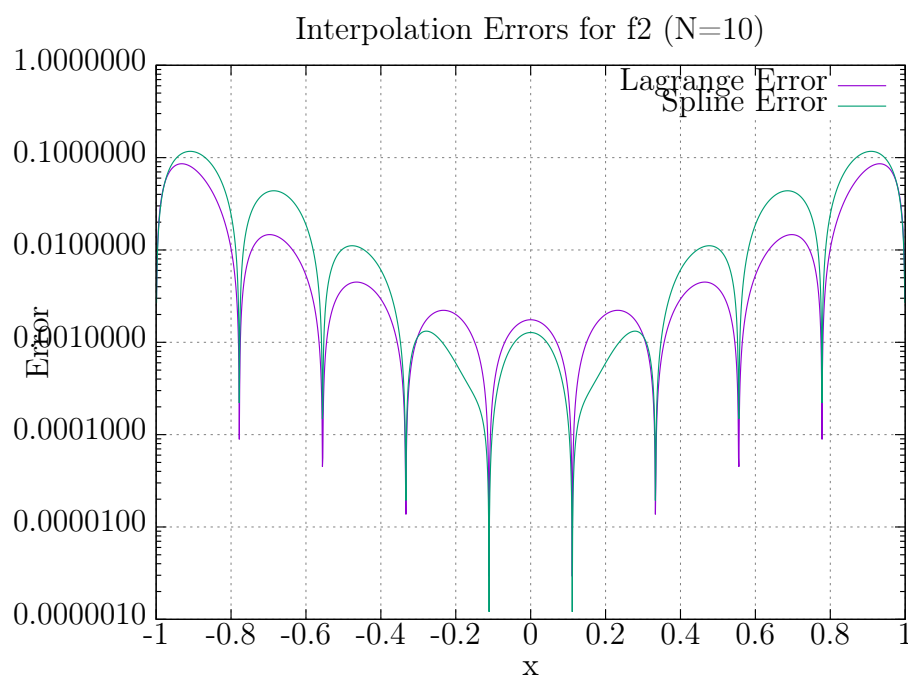
Interpolacja funkcji  $f_2(x)$  dla  $N = 10$ .



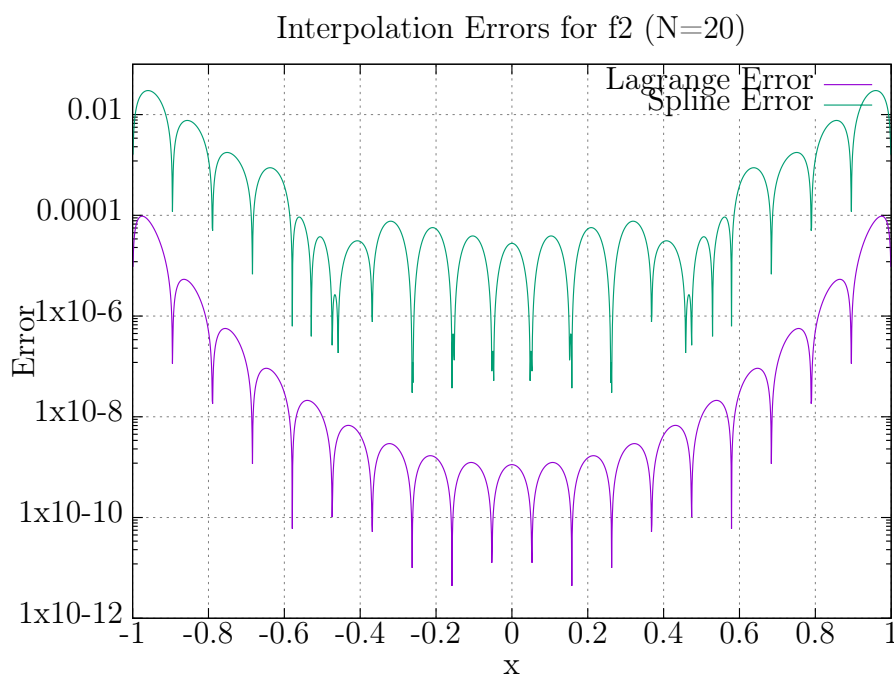
Interpolacja funkcji  $f_2(x)$  dla  $N = 20$ .



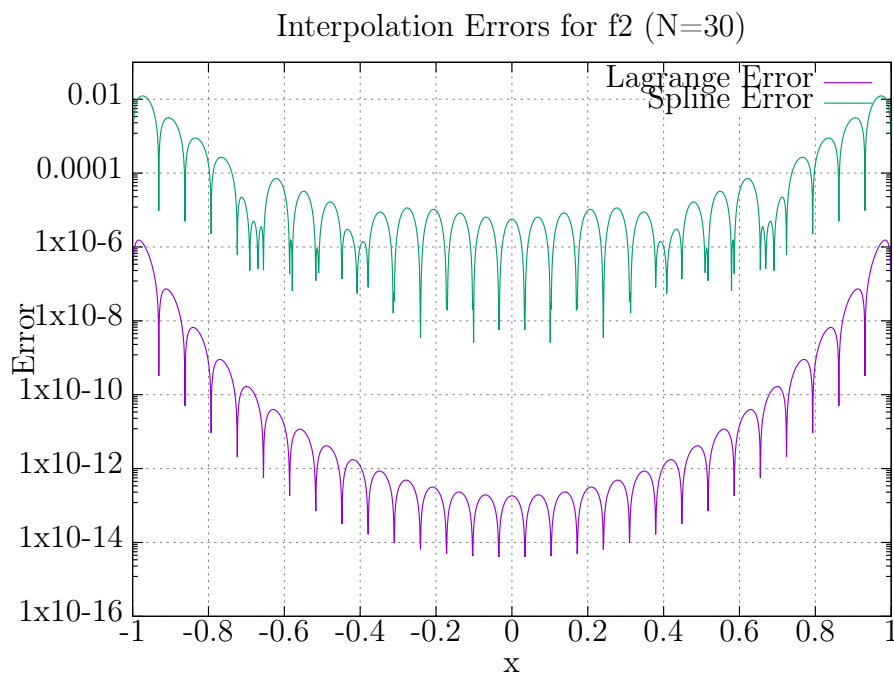
Interpolacja funkcji  $f_2(x)$  dla  $N = 30$ .



Błędy interpolacji funkcji  $f_2(x)$  dla  $N = 10$ .

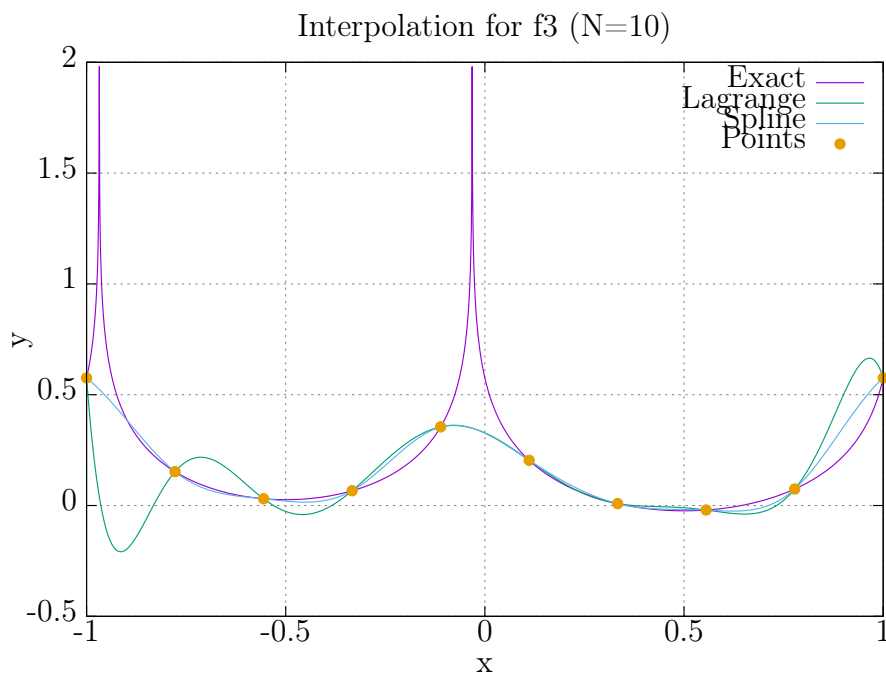


Błędy interpolacji funkcji  $f_2(x)$  dla  $N = 20$ .

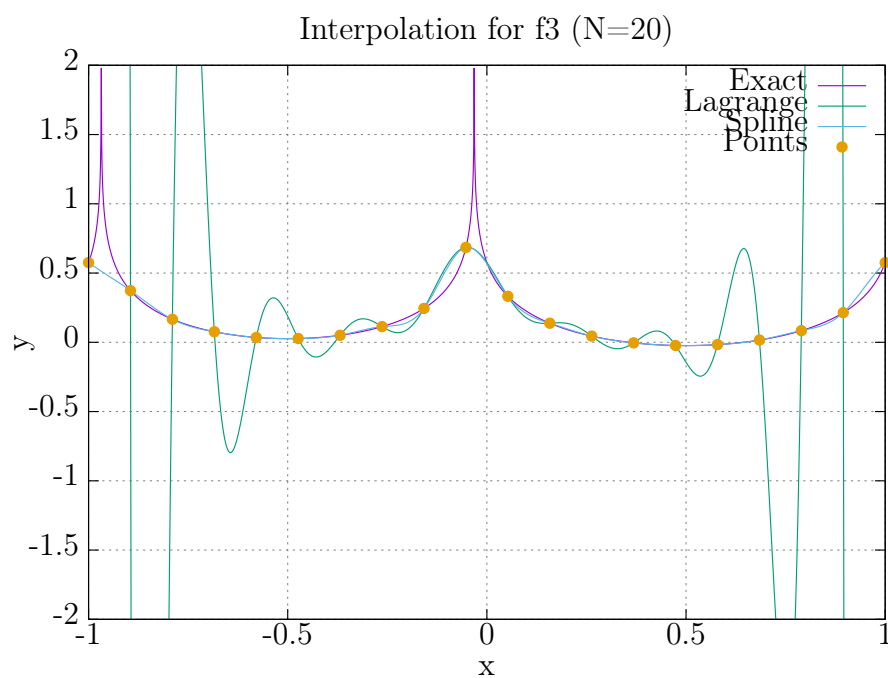


Błędy interpolacji funkcji  $f_2(x)$  dla  $N = 30$ .

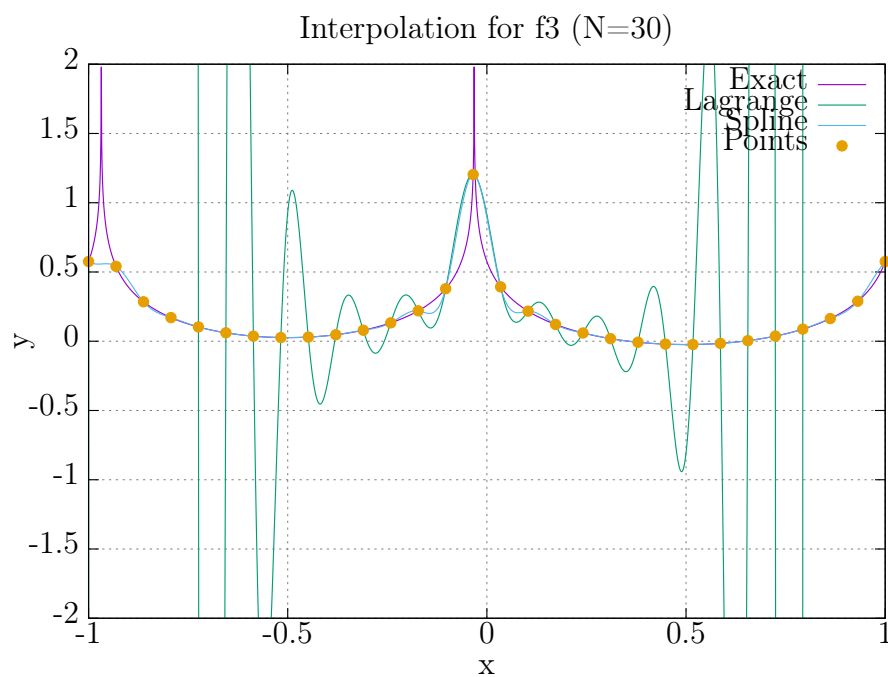
#### 4.4 Funkcja $f_3(x)$



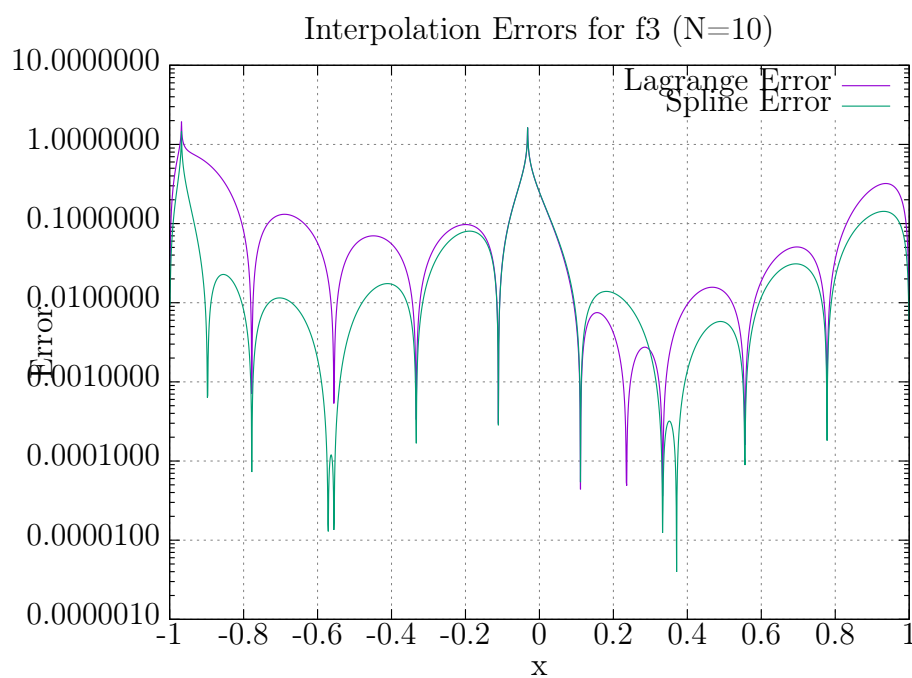
Interpolacja funkcji  $f_3(x)$  dla  $N = 10$ .



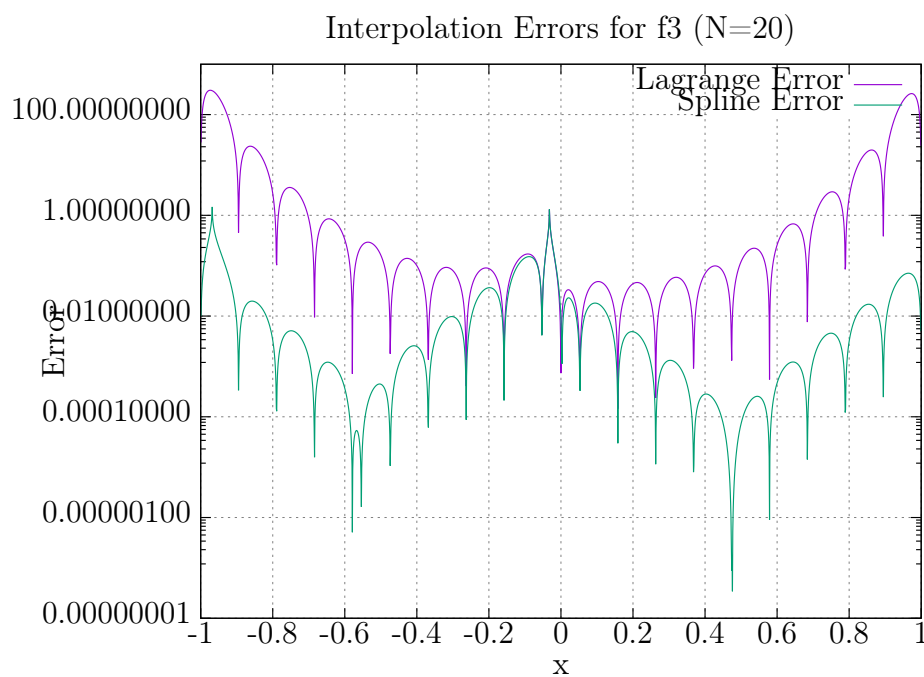
Interpolacja funkcji  $f_3(x)$  dla  $N = 20$ .



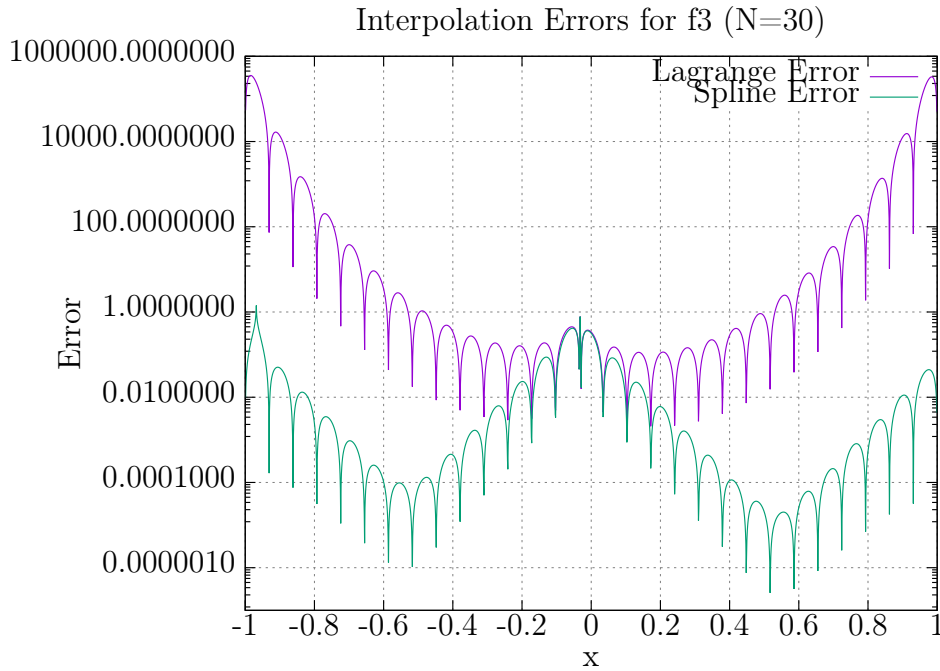
Interpolacja funkcji  $f_3(x)$  dla  $N = 30$ .



Błędy interpolacji funkcji  $f_3(x)$  dla  $N = 10$ .



Błędy interpolacji funkcji  $f_3(x)$  dla  $N = 20$ .



Błędy interpolacji funkcji  $f_3(x)$  dla  $N = 30$ .

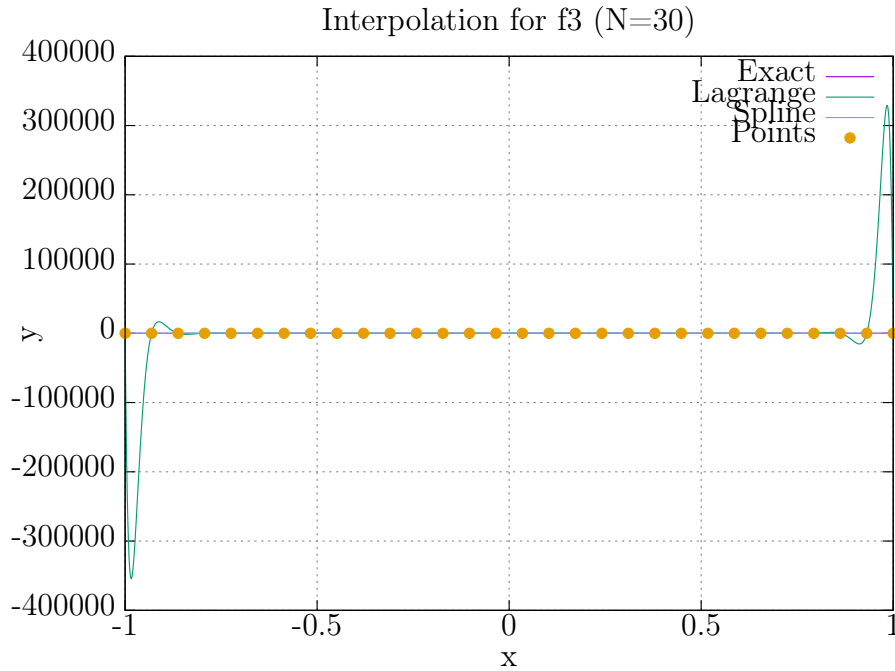
## 5 Dyskusja wyników

Uzyskane wyniki pozwoliły na porównanie dwóch metod interpolacji: wielomianowej metodą Lagrange’a oraz funkcji sklejanych stopnia trzeciego.

### 5.1 Interpolacja wielomianowa

Jak można zauważyć, dla większej liczby węzłów  $N$  metoda Lagrange’a zaczęła wykazywać znaczne oscylacje w pobliżu brzegów przedziału  $x \in [-1, 1]$ . Efekt ten, znany jako problem Rungego, wynika z niestabilności numerycznej wielomianów interpolacyjnych o wysokim stopniu.

Dla funkcji  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , a szczególnie dla  $f_3(x)$ , wielomian interpolacyjny osiąga wartości daleko odbiegające od rzeczywistej funkcji w pobliżu końców przedziału, co zostało przedstawione na wykresie poniżej:



Przykład silnych oscylacji w interpolacji Lagrange'a dla  $N = 30$  funkcji  $f_3(x)$ .

Oczekiwałem pewnych problemów z efektem Rungego, jednak skala oscylacji w tym przypadku była zaskakująco duża, szczególnie dla funkcji o bardziej złożonej strukturze, takich jak  $f_3(x)$ .

## 5.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Funkcje sklepane wykazały znacznie większą stabilność numeryczną i precyzję. Dzięki zastosowaniu wielomianów trzeciego stopnia dla każdego przedziału  $[x_i, x_{i+1}]$ , metoda ta dobrze odwzorowuje funkcję nawet przy większej liczbie węzłów  $N$ . Dodatkowo, brak efektu Rungego sprawia, że interpolacja funkcjami sklejanymi jest bardziej niezawodna w praktycznych zastosowaniach.

## 5.3 Porównanie błędów

Błędy interpolacji dla obu metod były mniejsze w centralnej części przedziału  $x \in [-1, 1]$  i rosły w pobliżu jego brzegów. Dla funkcji sklepanych błędy były generalnie mniejsze, co potwierdza ich wyższą dokładność i stabilność numeryczną w porównaniu z metodą Lagrange'a.

## 6 Wnioski

Przeprowadzona analiza interpolacji wielomianowej metodą Lagrange'a oraz funkcji sklepanych stopnia trzeciego pozwoliła na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Interpolacja wielomianowa metodą Lagrange'a wykazuje znaczące ograniczenia przy większej liczbie węzłów  $N$ , szczególnie w postaci efektu Rungego. Oscylacje w pobliżu brzegów przedziału  $x \in [-1, 1]$  sprawiają, że metoda ta staje się niestabilna i mniej użyteczna w praktycznych zastosowaniach.



2. Funkcje sklepane stopnia trzeciego cechują się znacznie większą stabilnością numeryczną oraz dokładnością. Dzięki segmentacji przedziału na mniejsze odcinki metoda ta jest odporna na problemy związane z dużą liczbą węzłów i dobrze odwzorowuje różnorodne funkcje.
3. Porównanie błędów interpolacji pokazało, że funkcje sklepane generują znacznie mniejsze odchylenia od rzeczywistej wartości funkcji w całym przedziale, co czyni je bardziej niezawodnym narzędziem do interpolacji w zastosowaniach numerycznych.
4. Przy wyborze metody interpolacji należy brać pod uwagę charakter funkcji oraz liczbę węzłów. Dla funkcji prostych i niewielkiej liczby węzłów metoda Lagrange'a może być wystarczająca, natomiast dla bardziej złożonych funkcji lub większej liczby węzłów lepszym wyborem są funkcje sklepane.