Łukasz Szymczyk, 320744, grupa 5, projekt 2, zadanie 07

Wstęp

Kwadratury Gaussa są najlepsze, jeśli za wyznacznik jakości przyjmiemy ich rząd. Dlatego szukając jak najdokładniejszego przybliżenia całki $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ na obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$ dobrym sposobem jest transformacja go na kwadrat $[-1,1] \times [-1,1]$, a następnie zastosowanie złożonej 3-punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a ze względu na każdą zmienną. Z tego, że jest to kwadratura Gaussa oparta na 3 węzłach wynika, iż jest 6-go rzędu. Oznacza to, że jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia < 6. Ponadto dla dla pozostałych funkcji klasy C^6 na przedziale $[-1,1]$ zwiększając liczbę podziałów przedziału, ze względu na obie zmienne, n-krotnie otrzymamy redukcję błędu rzędu n^6, co potwierdzają przeprowadzone testy. Zwiększając, jednak liczbę podprzedziałów ze względu na tylko jedną zmienną wzrost dokładności kwadratury jest znacznie niższy. Porównałem także tę metodę ze złożoną kwadraturą Simpsona, która również jest oparta na 3 węzłach.

Opis złożonej 3-punktowej kwadartury Gaussa-Legendre'a

Kwadratura Gaussa-Legendre'a służy do obliczania całek postaci $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Jej 3-puntkowa wersja jest oprarta na węzłach $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, które są pierwiastkami wielomianu Legendre'a 3-go stopnia i jest określona wzorem:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f(x_1) + \frac{8}{9} f(x_2) + \frac{5}{9} f(x_3).$$

Kwadratura ta jest 6-go rzędu. Oznacza to, iż jest ona dokładna dla wielomianów stopnia < 6. W przypadku dowolnego przedziału całkowania $[a,b]$ w obliczanej całce dokonujemy liniowej zmiany zmiennej całkowania i otrzymujemy wzór:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} \left(\frac{5}{9} f(t_1) + \frac{8}{9} f(t_2) + \frac{5}{9} f(t_3) \right),$$

gdzie $t_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ dla $i = 1,2,3$. Dzieląc przedział na mniejsze podprzedziały, a następnie stosując powyższy wzór na każdym z nich uzyskujemy złożoną 3-punktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a. Ponadto zwiększając liczbę podziałów przedziału n-krotnie uzyskamy n^6-krotną redukcję błędu.

Obliczenie całki $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ na obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$ przez transformacje na kwadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ polega na zastosowaniu przekształcenia:
$\varphi(x,y) = \frac{x+y}{2}$, $\phi(x,y) = \frac{x-y}{2}$, a następnie wyznaczeniu całki:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\varphi(x,y), \phi(x,y)) |J(x,y)| dx\ dy,$$

gdzie $J(x,y) = \frac{1}{2}$ jest jakobianem tego przeształcenia.

Do wyznaczenia całki na tym kwadracie stosujemy złożoną 3-punktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a ze względu na obie zmienne.

Eksperymenty numeryczne

W tabeli nr 1 złożona 3-punktowa metoda Gaussa-Legendre'a została zestawiona ze złożoną kwadraturą Simpsona, która również jest oparta na 3 węzłach. Kwadratura Simpsona jest 4-go rzędu co oznacza, że dla wielomianów stopnia < 4 otrzymane wyniki są dokładne. W 1 wierszu tabeli możemy zauważyć, iż dla właśnie takich funkcji podcałkowych obie metody są równie dokładne. Natomiast w 2 oraz 3 wierszu możemy już zaobserować, że kwadratura Gaussa-Legendre'a jest znacznie dokładniejsza. Nie licząc funkcji będących wielomianami stopnia < 4, dawała ona lepsze rezultaty dla wszystkich badanych przeze mnie funkcji. Ponadto zwiększając liczbę podprzedziałów całkowania, błąd złożonej kwadratury Gaussa-Legendre'a maleje znacznie szybciej, niż błąd metody Simpsona.

Funkcja	n	m	Błąd kwadratury Simpsona	Błąd kwadratury GL
$4x^3$	1	1	0	0
	2	2	$2.76 \cdot 10^{-17}$	$1.39 \cdot 10^{-17}$
	4	4	$6.94 \cdot 10^{-18}$	$6.94 \cdot 10^{-17}$
$2x^4 + x^2y^2$	1	1	$1 \cdot 10^{-1}$	$5.55 \cdot 10^{-17}$
	4	4	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$
	32	32	$9.54 \cdot 10^{-8}$	$3.33 \cdot 10^{-16}$
$\sin^2 x \cdot \cos y$	1	1	$2.38 \cdot 10^{-2}$	$3.22 \cdot 10^{-4}$
	8	8	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$8.82 \cdot 10^{-10}$
	64	64	$1.04 \cdot 10^{-9}$	$3.61 \cdot 10^{-15}$

Tabela 1: Zestawienie wartości bezwzględnego błędu złożonej 3-punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a ze złożoną kwadraturą Simpsona w zależności od liczby podziałów przedziału [-1,1] względem pierwszej zmiennej - n oraz drugiej zmiennej - m.

Tabela nr 2 przedstawia wartość błędu bezwzględnego złożonej 3-punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a w zalżności od liczby podziałów przedziału ze wzgledu na obie zmienne. Na przykładzie funkcji w pierwszym wierszu możemy zauważyć, iż zwiększanie liczby podprzedziałów ze względu na tylko jedną zmienną powoduje niską redukcję błędu. Dla podwojenia m błąd zmalał zaledwie około 2-krotnie, a dalsze zwiększanie m nie powoduje jego większej redukcji. Na podstawie funkcji $f(x, y) = x^2y^4$ oraz $f(x, y) = \sqrt{x + y + 4}$ możemy zauważyć, że zwiększając liczbę podziałów ze względu na obie zmienne 2-krotnie błąd maleje około 64-krotnie. Pozwala to uzyskać przybliżenie z niską wartością błędu już dla $n = m = 16$.

Funkcja	n	m	Błąd bezwzględny
$y^2 \cos x + x^2 \sin y$	4	4	$1.33 \cdot 10^{-8}$
	4	8	$6.77 \cdot 10^{-9}$
	4	16	$6.67 \cdot 10^{-9}$
x^2y^4	4	4	$3.49 \cdot 10^{-7}$
	4	8	$1.77 \cdot 10^{-7}$
	8	8	$5.45 \cdot 10^{-9}$
$\sqrt{x + y + 4}$	4	4	$1.59 \cdot 10^{-10}$
	8	8	$2.53 \cdot 10^{-12}$
	16	16	$3.91 \cdot 10^{-14}$

Tabela 2: Wartość bezwzględnego błędu złożonej 3-punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a w zależności od liczby podziałów przedziału [-1,1] względem pierwszej zmiennej - n oraz drugiej zmiennej - m.

Dla funkcji, które nie mają ciągłej pochodnej złożona kwadratura Gassa-Legendre'a radzi sobie znacznie gorzej. W tabli nr 3 przedstawione są błędy owej metody dla takiej funkcji. Możemy zauważyć, iż redukcja błędu nie jest już rzędu n^6. Dla $f(x, y) = |x|$ zwiększając liczbę przedziałów n-krotnie uzyskujemy zaledwie n^2-krotne zmniejszenie błędu.

Funkcja	n	m	Błąd bezwzględny
$\|x\|$	1	1	$4.51 \cdot 10^{-2}$
	2	2	$1.13 \cdot 10^{-2}$
	4	4	$2.82 \cdot 10^{-3}$

Tabela 3: Wartość bezwzględnego błędu złożonej 3-punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a w zależności od liczby podziałów przedziału [-1,1] względem pierwszej zmiennej - n oraz drugiej zmiennej - m.