**Łukasz Szymczyk, 320744, grupa 5, projekt 1, zadanie 24**

## Wstęp

Często niemożliwe jest uzyskanie analitycznego rozwiązania równania różniczkowego. W takim wypadku stosuje się numeryczne metody przybliżające to rozwiązanie na konkretnym przedziale. Jedną z nich jest metoda Rungego-Kutty rzędu 4 (wzór "3/8"). Rząd zbieżności 4 oznacza, że dla dostatecznie małych $h$ błąd globalny jest rzędu $\mathcal{O}(h^4)$ (gdzie h to długość kroku całkowania). Z tego faktu wynika, że zmniejszając $h$ $n$-krotnie, błąd zmaleje około $n^4$-krotnie, co potwierdzają przeprowadzone doświadczenia. Jednakże, gdy krok całkowania jest już bardzo mały to dalsze zmniejszanie go powoduje wzrostu błędu przybliżenia. Dla równań różniczkowch, których rozwiązaniami są wielomiany stopnia $\leqslant 4$, niezależnie od długości kroku błąd jest pomijalnie mały. Przeprowadziłem także doświadczenie porównujące dokładność tej metody z metodą Rungego-Kutty rzędu 4 okeślonej wzorem klasycznym oraz z metodą Adamsa-Bashfortha-Moultona rzędu 2-go.

## Opis metody Rungego-Kutty rzędu 4 (wzór "3/8")

Metoda Rungego-Kutty rzędu 4 jest metodą jednokrokową i samostartującą. Rozważmy liniowe równanie różniczkowe: $y^{(m)} = f(x, y', y'', ..., y^{(m-1)})(m \geqslant 1)$, dla $x \in [a, b]$ oraz z danymi warunkami początkowymi $y(a), y'(a), ..., y^{(m-1)}(a)$. Punkty, w których funkcja jest przybliżana oznaczmy jako: $x_0, x_1, ..., x_n$, gdzie odległość $x_{i+1} - x_i (i = 0, ..., n-1)$ nazywana jest krokiem całkowania. Węzły są równoodległe, co oznacza, że $x_i = a + hi$ gdzie $h = \frac{b-a}{n}$.

Zdefiniumy $Y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ ... \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}$, $F \equiv F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ ... \\ f(x, y_1, y_2, ..., y_m) \end{pmatrix}$.

Niech $Y_0 = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ ... \\ y^{(m-1)}(a) \end{pmatrix}$, wtedy przybliżenia w następnych węzłach są wyznaczane według wzoru:

$$Y_{i+1} = Y_i + \tfrac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

gdzie:

$$\begin{gathered} k_1 = hF(x_i, Y_i), \\ k_2 = hF(x_i + \tfrac{h}{3}, Y_i + \tfrac{k_1}{3}), \\ k_3 = hF(x_i + \tfrac{2h}{3}, Y_i - \tfrac{k_1}{3} + k_2), \\ k_4 = hF(x_i + h, Y_i + k_1 - k_2 + k_3). \end{gathered}$$

Metoda ta jest rzędu 4 co oznaczna, że dla dostatecznie małych $h$ spełnia nierówność:

$$|e_i^{(h)}| \leqslant c \cdot h^4 \tag{1}$$

dla każdego $i = 0, 1, ..., n$, gdzie $e_i^{(h)}$ jest błędem przybliżenia w punkcie $x_i$ dla kroku całkowania $h$, gdy $c$ jest stałą niezależną od $h$.

## Eksperymenty numeryczne

Nierówność (1) jest spełniona dla błędu przybliżenia w każdym węźle, w którym wyznaczamy rozwiązanie. W szczególności jest też prawdziwa dla błedu globalnego. Biorąc pewne $h_1$ oraz $h_2 = \frac{h_1}{10}$, a następnie podstawiając je do (1) i dzieląc przez siebie otrzymane nierówności uzyskamy:

$$\frac{|e_i^{(h_1)}|}{|e_i^{(h_2)}|} \leqslant c \cdot 10^4,$$

co oznacza, że gdy $h$ zmniejszymy 10-krotnie otrzymamy redukcje błedu rzędu $10^4$.
W tabeli 1 przedstawione są rozwiązania pewnych równań różniczkowych oraz otrzymane błędy globalne dla 3 różnych długości kroku całkowania. Zauważmy, że wartość błędu globalnego rzeczywiście maleje zgodnie z wyżej wyznaczoną nierównością.

| Równanie | Rozwiązanie analityczne | WP | h | E$_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'' + y = x \cdot \sin x$ | $y = \frac{x \cdot \sin x}{4} - \frac{x^2 \cdot \cos x}{4}$ | $y(0) = 0$ <br> $y'(0) = 0$ | 0.1 <br> 0.01 <br> 0.001 | $6.96 \cdot 10^{-7}$ <br> $6.98 \cdot 10^{-11}$ <br> $6.98 \cdot 10^{-15}$ |
| $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y'' = 0$ | $y = \frac{x+3}{e^x} + 4x - 1$ | $y(0) = 2, y'(0) = 2$ <br> $y''(0) = 1, y^{(3)}(0) = 0$ | 0.1 <br> 0.01 <br> 0.001 | $4.43 \cdot 10^{-7}$ <br> $3.90 \cdot 10^{-11}$ <br> $7.55 \cdot 10^{-15}$ |
| $y' + \cos(x) \cdot y = \cos x$ | $y = 1 - \frac{2}{e^{\sin x}}$ | $y(0) = -1$ | 0.1 <br> 0.01 <br> 0.001 | $1.69 \cdot 10^{-7}$ <br> $1.29 \cdot 10^{-11}$ <br> $1.72 \cdot 10^{-15}$ |

Tabela 1: Błąd globalny $E_k$ dla równań z określonymi warunkami początkowymi - WP, wyznaczony dla 3 różnych kroków całkowania - h. Rozwiązania tych równań były przybliżane na przedziale $[0, 1]$.

W tabeli nr 2 zostały zestawione metody: RK4 wzór "3/8", RK4 wzór klasyczny oraz Adams-Bashforth-Moulten 2-go rzędu. Możemy zauważyć, że trzecia z tych metod jest zdecydowanie mniej dokładna niż pozsotałe, co jest spodziewanym wynikiem, gdyż jest metodą niższego rzędu. Natomiast z dwóch metod RK w większości przypadków lepsze rezulataty dawała ta określona wzorem "3/8"(wartość błędu globalnego była niższa w 7 na 10 przeprowadzonych testów). Złożoność czasowa obu tych metod jest identyczna, więc analizowany wzór jest zazwyczaj lepszym wyborem niż jego klasyczna wersja.

| Równanie | h | Błąd RK4 - wzór 3/8 | Błąd RK4 - wzór klasyczny | Błąd ABM2 |
|---|---|---|---|---|
| $5y^{(3)} + y' = \sin x$ | 0.1 | $2.29 \cdot 10^{-8}$ | $9.13 \cdot 10^{-8}$ | $3.9 \cdot 10^{-4}$ |
| $-3y'' = e^{-x}$ | 0.01 | $2.36 \cdot 10^{-12}$ | $5.31 \cdot 10^{-12}$ | $8.4 \cdot 10^{-7}$ |
| $y^{(5)} + y^{(3)} - 2y' = e^x \sin x$ | 0.1 | $8.53 \cdot 10^{-7}$ | $9.81 \cdot 10^{-7}$ | $1.35 \cdot 10^{-3}$ |

Tabela 2: Wybrane równania oraz przybliżona wartość błędu globalnego w zależności od stosowanej metody. Dla każdej z metod warunki testu były identyncze tzn. taki sam przedział ($[0, 2]$), warunki początkowe oraz dłguość kroku całkowania.

Zmniejszanie długości kroku całkowania poprawia dokładność przybliżeń, ale tylko do pewnego momentu. Dla zbyt małyh $h$ pojawiają się błędy zaokrąglenia. Dla $h = 10^{-5}$ błąd jest większy niż dla $h = 10^{-4}$. Ponadto czas trwania obliczeń znacznie się wydłuża.

| Równanie | h | Błąd globalny |
|---|---|---|
| $y'' + y = x^2 + x$ | 0.01 <br> 0.0001 <br> 0.00001 | $1.03 \cdot 10^{-10}$ <br> $3.55 \cdot 10^{-15}$ <br> $2.31 \cdot 10^{-14}$ |
| $y^{(3)} = -4x^2$ | 0.01 <br> 0.0001 <br> 0.00001 | $1.11 \cdot 10^{-10}$ <br> $6.66 \cdot 10^{-15}$ <br> $3.08 \cdot 10^{-14}$ |

Tabela 3: Przybliżona wartość błędu globalnego, dla 3 różnych kroków całkowania. Rozwiązania równania były przybliżane na przedziale $[1, 2]$.