7Metody numeryczne – laboratorium nr 3

Błędy obliczeń

Zadanie 1 (1 punkt)

Wykonaj obliczenia i zanotuj wyniki. Ustaw format wyświetlania danych na `format long e`. Wyjaśnij co się dzieje.

Wyrażenie	Wynik
x=29/13	2.230769230769231e+00
y=29-13*x	0
x1=29/1300	2.230769230769231e-02
y1=29-1300*x1	3.552713678800501e-15
29-1300*(29/1300)	3.552713678800501e-15
29-1300*29/1300	0

Wyjaśnienie:

Wyniki prawidłowe.

Zadanie 2 (3 punkty)

1) Policz $f(x) = x - \sqrt{1 + x \cdot x}$ algorytmem wprost wynikającym z tego wzoru, a następnie z wykorzystaniem równoważnego wzoru $f(x) = \frac{-1}{x+\sqrt{1+x\cdot x}}$. W tym celu napisz program, w którym zastosujesz dwa następujące algorytmy:

   (A1) $w_1 = x - a$ gdzie: $a = \sqrt{1 + x \cdot x}$,

   (A2) $w_2 = -\frac{1}{x+a}$ gdzie: $a = \sqrt{1 + x \cdot x}$.

Obliczenia wykonaj dla $x = 10^k$ gdzie: $k = 4,5, \dots ,10$

Obliczenia przeprowadź zarówno na liczbach pojedynczej precyzji (funkcja `single`) jak i podwójnej precyzji (funkcja `double`).

Dla wszystkich algorytmów (ustaw format wyświetlania danych na `format long e`).

Wyniki obliczeń:

	Pojedyncza precyzja		Podwójna precyzja	
	$w_1 = x - a$	$w_2 = -\frac{1}{x+a}$	$w_1 = x - a$	$w_2 = -\frac{1}{x+a}$
$x = 10^4$	0	-4.9999999e-05	-5.00000005558832e-05	-4.99999998750000e-05
$x = 10^5$	0	-4.9999999e-06	-4.99999441672117e-06	-4.99999999987500e-06
$x = 10^6$	0	-5.0000000e-07	-5.00003807246685e-07	-4.99999999999875e-07
$x = 10^7$	0	-5.0000001e-08	-5.02914190292358e-08	-4.99999999999999e-08
$x = 10^8$	0	-5.0000000e-09	0	-5.00000000000000e-09
$x = 10^9$	0	-4.9999999e-10	0	-5.00000000000000e-10
$x = 10^{10}$	0	-5.0000001e-11	0	-5.00000000000000e-11

Zadanie 3 (2 punkty)

Oblicz wartości wielomianu $(x-2)^4 = x^4 - \cdots + 16$

na siatce równomiernej 1000 punktowej w przedziale $(2-d, 2+d)$ dla $d = 10^{-3}$ za pomocą

dwóch algorytmów. Ustaw format wyświetlania danych na `format long e`

Algorytm 1: $a = (x-2),\ f_1(x) = a^4$

Algorytm 2: $f_2(x) = x * x * x * x - \cdots + 16$

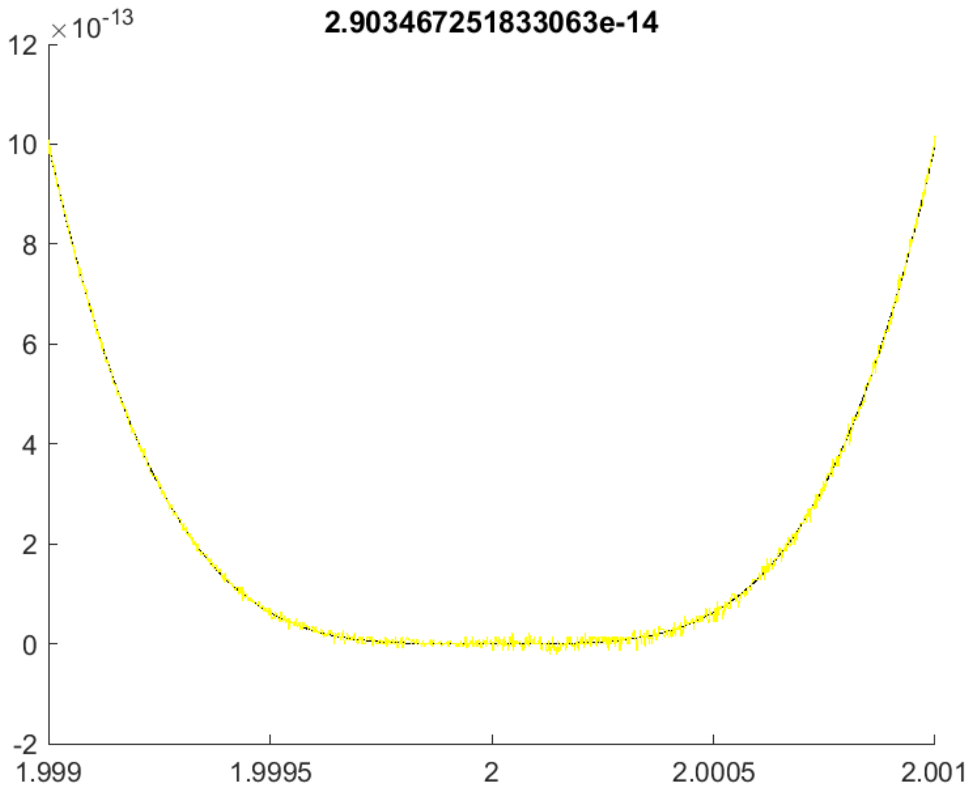
Narysuj oba wielomiany w jednym układzie współrzędnych.

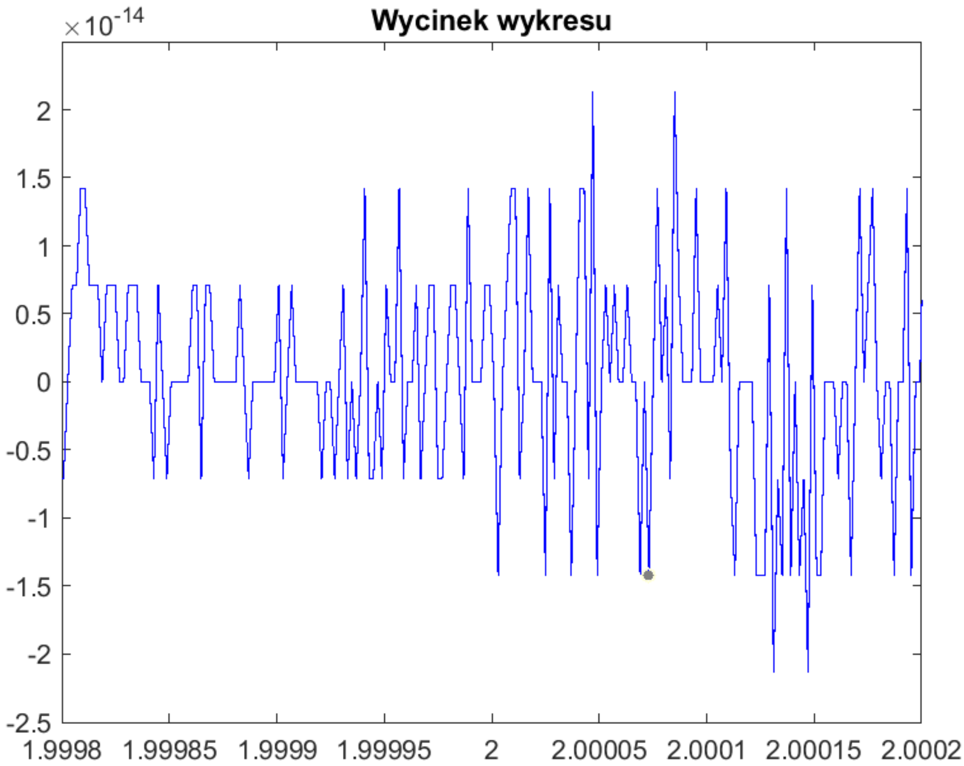
Oblicz błąd $\| f_1(x) - f_2(x) \|_\infty$, czyli $max_k \mid f_1(x(k)) - f_2(x(k)) \mid$

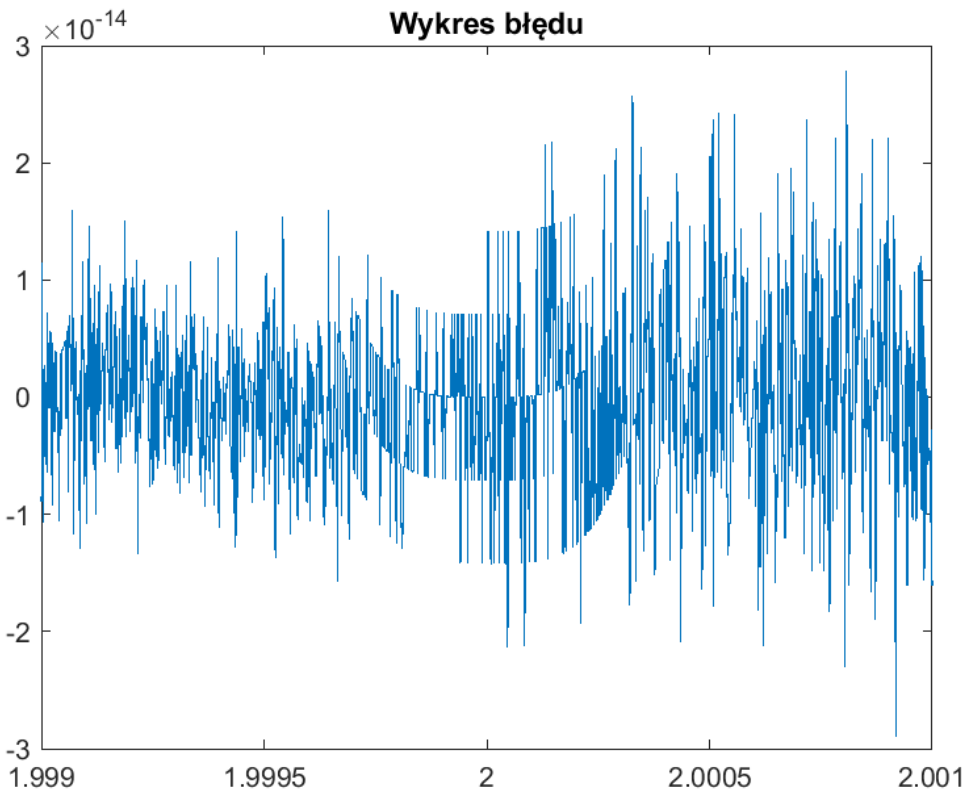
Przydatne funkcje:

`linspace (a,b,N)` – a i b: granice przedziału, N – liczba próbek
`plot(x,y)`
`hold on` – nakładanie wykresów
`title('tytuł')`
`max(x)` – największa wartość w wektorze x
`abs(y)` – wartość bezwzględna argumentu y

/tu wklej wykres z Matlaba z dwoma wielomianami, jako tytuł wstaw wartość błędu/







Zadanie 4 (2 punkty)

Oblicz wartość podanej funkcji dla x = 40545 i y =70226

$$f(x,y) = 9 \cdot x^4 - y^4 + 2 \cdot y^2 \quad (1)$$

kolejno dla:

Podwójna precyzja - domyślnie	**Wynik**
`float`	**-**
`int64`	**9863382152**
`int32`	**2147483647**
`int16`	**32767**
Pojedyncza precyzja - `single`	
`float`	**-**
`int64`	**9863382152**
`int32`	**2147483647**
`int16`	**32767**

Przekształć podaną funkcję (1) do postaci równoważnej (2)

$$f(x,y) = (3 \cdot x^2 - y^2 + 1)(3 \cdot x^2 + y^2 - 1) + 1 \tag{2}$$

/Tutaj zapisz odpowiednie przekształcenia/

$$f(x,y) = 9 \cdot x^4 - y^4 + 2 \cdot y^2 = 9 \cdot x^4 - y^4 + 2 \cdot y^2 - 1 + 1 = 9 \cdot x^4 - (y^4 - 2 \cdot y^2 - 1) + 1 =$$

$$= 9 \cdot x^4 - (y^2 - 1)^2 + 1 = (3 \cdot x^2)^2 - (y^2 - 1)^2 + 1$$

$$= \left(3 \cdot x^2 - (y^2 - 1)\right) \cdot \left(3 \cdot x^2 + (y^2 - 1)\right) + 1 =$$

$$= (3 \cdot x^2 - y^2 + 1) \cdot (3 \cdot x^2 + y^2 - 1) + 1$$

Jeszcze raz powtórz obliczenia. Wyniki umieść w tabeli.

Podwójna precyzja - domyślnie	**Wynik**
`float`	**-**
`int64`	**1**
`int32`	**2147483647**
`int16`	**32767**
Pojedyncza precyzja - `single`	
`float`	**-**
`int64`	**1**
`int32`	**2147483647**
`int16`	**32767**

Który z wyników jest poprawny? Znajdź sposób na potwierdzenie prawidłowości wyniku.

Prawidłowy wynik to 1. Pierwszy z nawiasów równania (2), po wstawieniu x = 40545 i y = 70226 będzie równy 0, co za tym idzie wartość drugiego nawiasu nie ma znaczenia, ponieważ wartość pomnożona razy 0 zawsze będzie równa 0. Na koniec do 0 dodajemy 1 co daje wynik 1.

Zadanie 5 (2 punkty)

1) Oblicz iloczyn skalarny podanych wektorów X i Y:

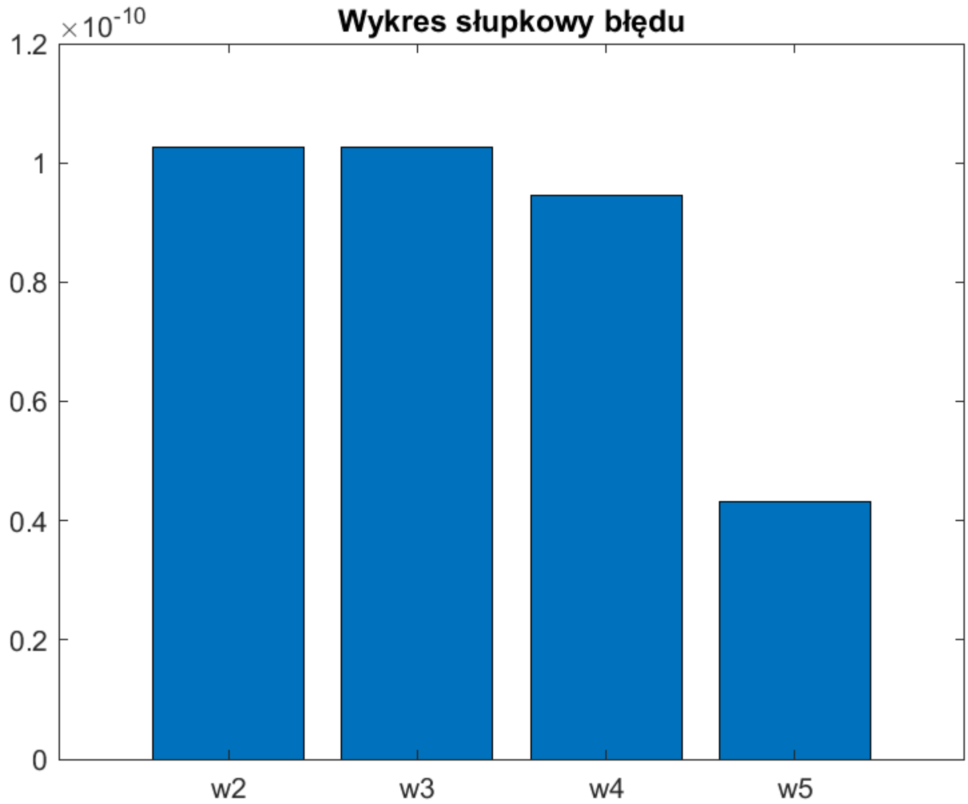
$$
\begin{aligned}
X &= [exp(1), -pi, sqrt(2), -psi(1), log10(2)] \\
Y &= [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]
\end{aligned}
$$

Obliczenia wykonaj dla podanych wariantów:

- **W1** => Matlab – mnożenie skalarne wektorów;
- **W2** => Matlab – sumowanie iloczynu elementów wektorów, z użyciem polecenia `sum`;
- **W3** => sumowanie w pętli iloczynu elementów wektorów na tych samych pozycjach. Sumowanie rozpocznij od elementu na pozycji 1;
- **W4** => sumowanie w pętli iloczynu elementów wektorów na tych samych pozycjach. Sumowanie rozpocznij od elementu na pozycji ostatniej;
- **W5** => sumowanie w pętli iloczynu elementów wektorów na tych samych pozycjach. Najpierw dokonaj obliczeń dla elementów leżących na pozycjach parzystych, potem na pozycjach nieparzystych.

2) Oblicz błąd bezwzględny dla wariantów **W2** do **W5**. Jako wzorzec przyjmij wynik uzyskany dla wariantu **W1**. Błąd przedstaw na wykresie słupkowym (funkcja `bar`).

/Wykres błędu (tu wstaw wykres z Matlaba)/


Wykres słupkowy błędu
×10^-10
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
w2
w3
w4
w5