Metody numeryczne – laboratorium nr 7

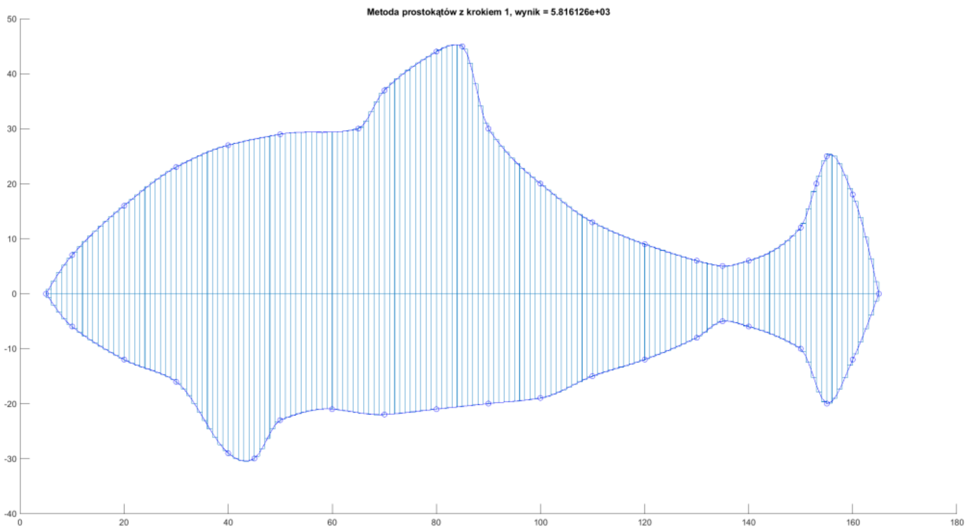
Całkowanie

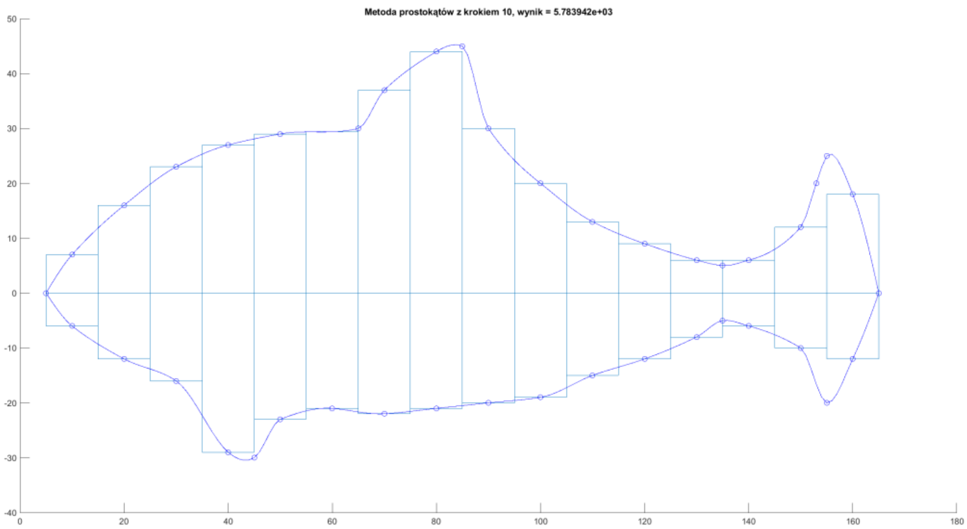
Zadanie 1

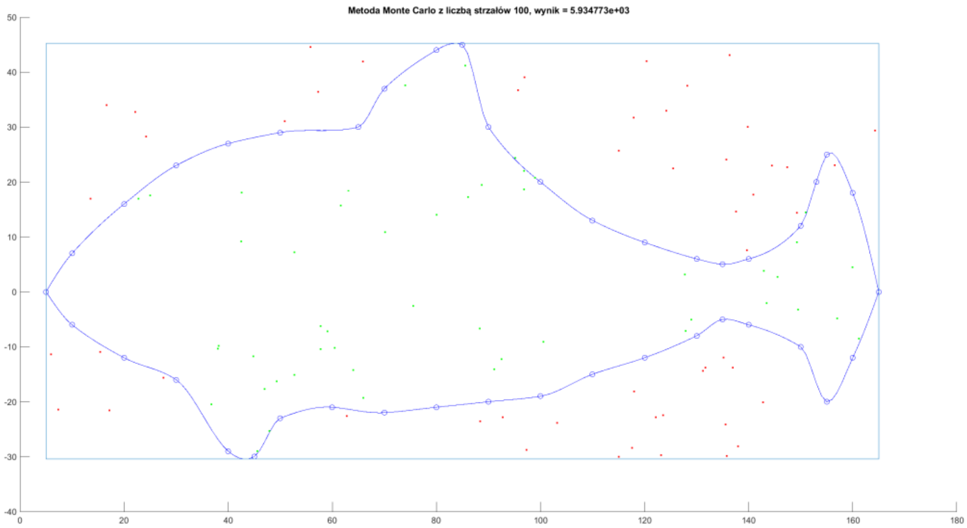
1) Oblicz pole powierzchni kształtu z zajęć z interpolacji (ryba) następującymi metodami:
   - metodą prostokątów,
   - metodą Monte Carlo (wersja z losowaniem dwóch liczb).

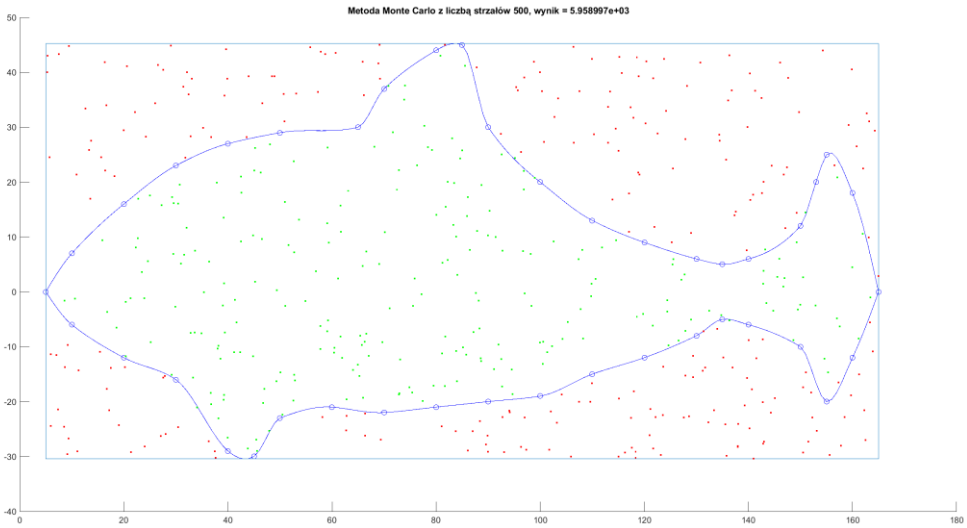
   Skrypt, poza wynikiem liczbowym, ma generować wykres, na którym będzie zaznaczony kształt oraz elementy działania metody. Odpowiednio: prostokąty dla metody prostokątów oraz strzały dla metody MC. W metodzie MC strzały celne oraz ‘pudła’ oznacz różnymi znacznikami.

   Tu wklej wykresy (w sumie 4) działania skryptu dla następujących parametrów:
   - Metoda prostokątów: krok = 1, krok = 10
   - Metoda Monte Carlo: liczba strzałów = 100, liczba strzałów = 500







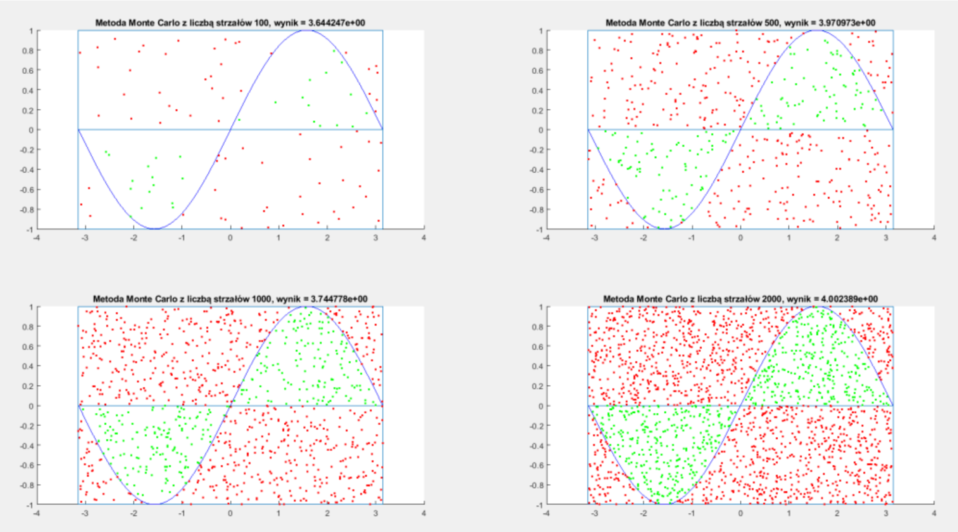


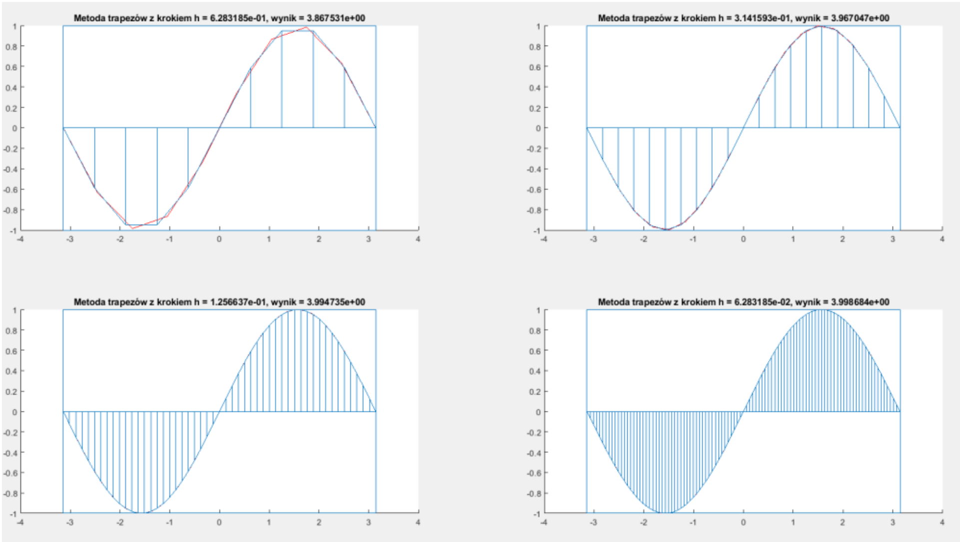
Zadanie 2

Oblicz całkę dla funkcji $sin(x)$ w przedziale $< -\pi, \pi >$. Zastosuj metodę trapezów oraz metodę Monte Carlo. Wykonaj odpowiednie badania i odpowiedz na pytania. Odpowiedzi umieść na końcu skryptu.

- Czy wielkość kroku całkowania wpływa na wynik? Określ tę zależność.
- Czy liczba strzałów wypływa na wynik w metodzie Monte Carlo? Określ tę zależność.

Uwaga: badania przeprowadź przynajmniej dla czterech różnych wartości korku całkowania i czterech różnych liczb strzałów.





Przyda się:

definiowanie funkcji: `f=@(x) sin(x)`

całkowanie w Matlabie (do ewentualnego sprawdzenia wyników): `quad(f,a,b)`

rysowanie linii: `line([x_start, x_koniec],[y_start, y_koniec])`

zaokrąglanie w dół: `floor`

losowanie: `x = rand` – uwaga! Tylko liczby z zakresu <0,1>

zaznaczanie punktu na wykresie – tu czerwona gwiazdka: `plot(x,y,'r*')`

CAŁKOWANIE

- Chcemy obliczyć całkę oznaczoną: $\int_a^b f(x)dx$
- Założenia:

  Dzielimy przedział całkowania na n równych części o długości $h = \frac{b-a}{n}$

  Wyznaczamy punkty $x_1, x_2, \dots\ x_{n-1}$

  $x_0 = a, x_n = b$

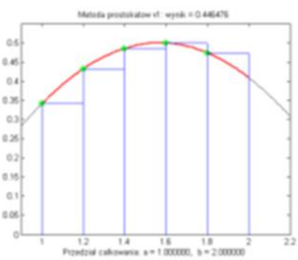
  Obliczamy wartość funkcji podcałkowej w wyznaczonych punktach i na krańcach przedziału całkowania

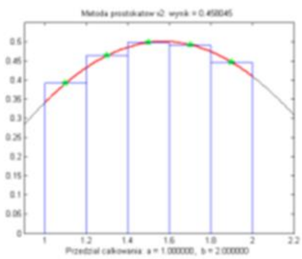
  $y_0 = f(a)\,, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots\,, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(b),$

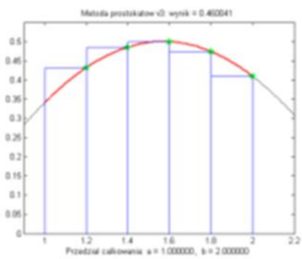
CAŁKOWANIE – METODA PROSTOKĄTÓW

$$I = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$I = h \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$







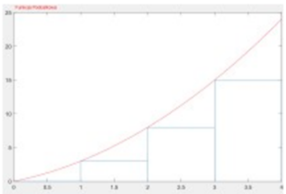
CAŁKOWANIE

ZADANIE: Oblicz całkę $\int_0^4 (x^2 + 2x)dx$ w przedziale $(0,4)$ z krokiem $h = 1$ metodą prostokątów (wszystkie warianty).

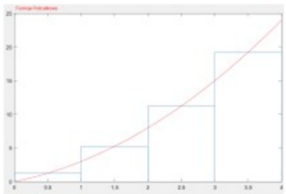
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	8	15	24

x	0.5	1.5	2.5	3.5
$f(x)$	1.25	5.25	11.25	19.25

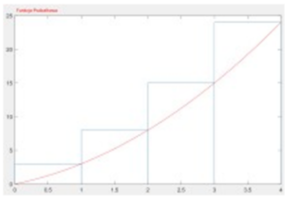
$I = 26$



$I = 37$

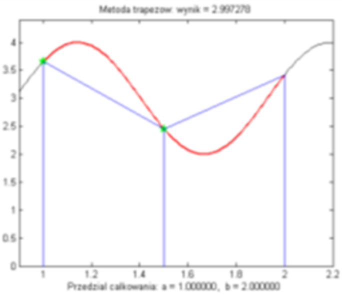


$I = 50$



CAŁKOWANIE – METODA TRAPEZÓW

$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$



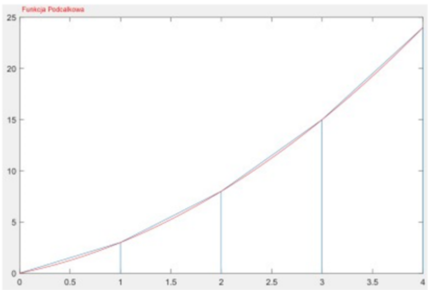
CAŁKOWANIE

ZADANIE: Oblicz całkę $\int_0^4 (x^2 + 2x)dx$ w przedziale $(0{,}4)$ z krokiem $h = 1$ metodą trapezów.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	8	15	24

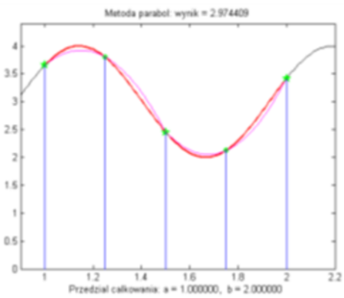
$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

$$I = 1 \cdot \left(\frac{0 + 24}{2} + 3 + 8 + 15 \right) = 38$$



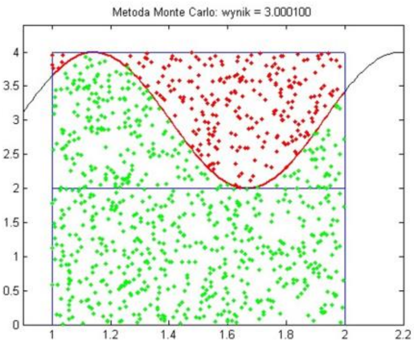
CAŁKOWANIE – METODA PARABOL (SIMPSONA)

$$I = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-2} y_{2i} \right)$$



CAŁKOWANIE – METODA MONTE CARLO

$$I = \frac{strzały\ celne}{liczba\ strzałów} \cdot pole\ obszaru$$



wynik dokładny = 2.9744