Metody numeryczne – laboratorium nr 4

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Zadanie 1 (10 punktów)

1) Przygotuj dane do rozwiązania układu równań liniowych $A \cdot X = b$ dla różnych rozmiarów macierzy A w taki sposób, aby otrzymać rozwiązanie w postaci wektora jednostkowego i aby były spełnione warunki zbieżności dla metod iteracyjnych (wykorzystaj polecenia `rand`, `eye`, `ones`).

Przykład:

$n = 3,$

$$A = \begin{pmatrix} 0.3922 & 0.7060 & 0.0462 \\ 0.6555 & 0.0318 & 0.0971 \\ 0.1712 & 0.2769 & 0.8235 \end{pmatrix}$$

$A = A + n \cdot E$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$b = A \cdot x$

2) Napisz:

   a) funkcję **`eliminGC`**, która rozwiązuje układ równań liniowych metodą eliminacji Gaussa-Crouta (metoda eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego);

   b) funkcję **`iterP`**, która rozwiązuje układ równań liniowych metodą iteracji prostej.

   Dane wejściowe dla funkcji **`eliminGC`** oraz **`iterP`**:

   – macierz współczynników A stojących przy zmiennych w równaniach

   – wektor kolumnowy B zawierający wyrazy wolne z równań,

   Dane wyjściowe:

   – wektor rozwiązań X.

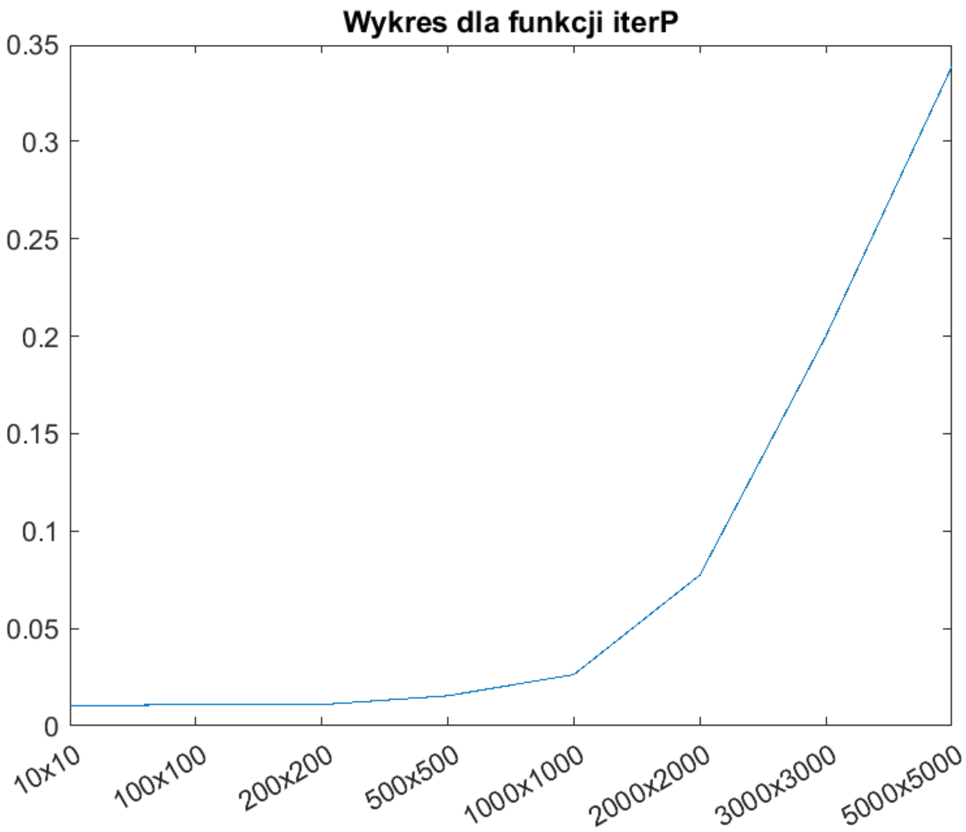
3) Rozwiąż przygotowane w punkcie 1 układy równań liniowych metodą eliminacji Gaussa-Crouta (funkcja **`eliminGC`**) oraz metodą iteracji prostej (funkcja **`iterP`**).

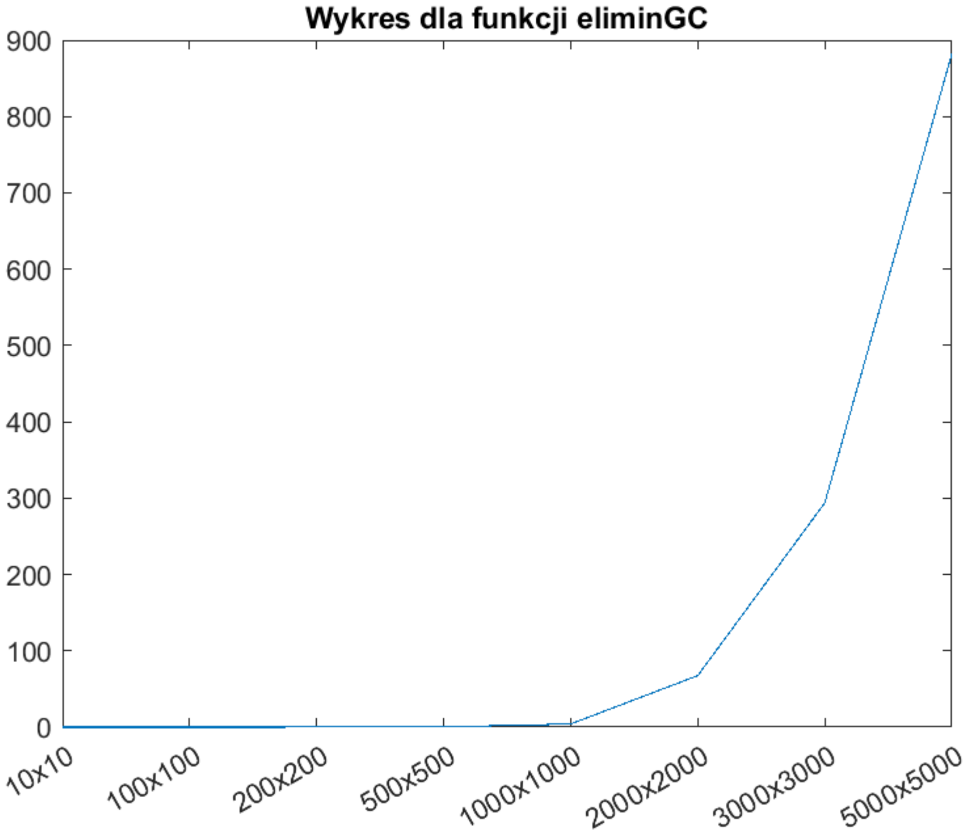
   Stosując polecenia `tic` i `toc` dokonaj pomiaru czasu w jakim uzyskano rozwiązanie podanymi metodami.
   Przyjmij dokładność dla metody iteracyjnej $e = 0.01$. Wyniki wpisz w tabelę.

$e = 0.01$	iteracja prosta		metoda eliminacji Gaussa
A	liczba iteracji	czas	czas
10×10	7	0.010240	0.008701
100×100	9	0.010968	0.011623
200×200	9	0.010931	0.038131
500×500	9	0.015455	0.327928
1000×1000	9	0.026324	4.128788
2000×2000	9	0.077461	67.511632
3000×3000	9	0.200099	293.885399
5000×5000	9	0.338535	882.160421

4) Przedstaw na wykresie wyniki (czasy obliczeń) uzyskane dla poszczególnych metod rozwiązywania układów równań liniowych w odniesieniu do rozmiaru macierzy.

Wykresy:





Metoda eliminacji Gaussa

Etap pierwszy – eliminacja zmiennych(prosty przebieg metody Gaussa).
Stosując przekształcenia elementarne rozwiązywany układ równań liniowych sprowadzamy do układu równoważnego z macierzą trójkątną górną:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n \end{cases}$$

Element podstawowy: element za pomocą którego eliminujemy zmienną z dalszych równań.

Etap drugi – wyznaczanie zmiennych (odwrotny przebieg metody Gaussa).

$$\begin{cases} x_n = b_n \\ x_{n-1} = b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n \\ \ldots \\ x_1 = b_1 - a_{1n}x_n - \ldots - a_{12}x_2 \end{cases}$$

Przykład

Dla układu $\boxed{\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}}$

otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Etap pierwszy:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_1/-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2 - w_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3 - 2w_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2/(3/2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3 - 4w_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & -7/3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3/(7/3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Etap drugi:

$x_3 = -1$
$x_2 = 4/3 - 2/3 \cdot x_3 = 2$
$x_1 = -1 + 2 \cdot x_3 - 1/2 \cdot x_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta

Przykład

Dla układu $\boxed{\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \end{cases}}$

otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Etap pierwszy:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_1/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3 - w_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 & -5/2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 3 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/6 & -5/6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 11/6 & 11/6 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3/(11/6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Etap drugi:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= -5/6 - 1/6 \cdot x_3 = -1 \\ x_1 &= 3/2 - 1/2 \cdot x_3 - x_2 = 2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Metoda iteracji prostej

Przykład. Rozwiąż podany układ równań stosując metodę iteracji prostej.

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4} \cdot x_2 = 2 \\ \frac{1}{2} \cdot x_1 + x_2 = \frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} \cdot x_2 + 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k+1)}}_{X^{(k+1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{W} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k)}}_{X^{(k)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix}}_{Z}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k+1)}}_{X^{(k+1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{W} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k)}}_{X^{(k)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix}}_{Z}$$

$$X^{(k+1)} = W \cdot X^{(k)} + Z$$

Warunek początkowy: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix}^{(1)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.875 \\ 3.5 \end{pmatrix}^{(2)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 4.062 \end{pmatrix}$$