Metody numeryczne – laboratorium nr 6

Poszukiwanie pierwiastków równań nieliniowych

Zadanie 1

1) Napisz skrypt, który porówna działanie dwóch (z czterech podanych) metod rozwiazywania równań nieliniowych, pod kątem czasu potrzebnego na znalezienie rozwiązania oraz liczby iteracji. Poza wynikami liczbowymi skrypt ma generować wykres, na którym będzie zaznaczone równanie (krzywa) oraz dwa różne znaczniki reprezentujące odpowiednio rozwiązanie znalezione przez pierwszą i drugą metodę.

2) Metody poszukiwania pierwiastków równania nieliniowego:

a) metoda bisekcji (połowienia)

```
function [x_b, n_b, czas_b] = bisekcja(f, a, b, tol, ftol)
```

gdzie:

Dane wejściowe	**Dane wyjściowe**

`f` – wzór funkcji, `f = @(x) wzór`
`a` – lewy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
`b` – prawy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
`tol` – dokładność dla `x`
`ftol` – dokładność dla wartości funkcji `f(x)`
	`x_b` – znaleziony pierwiastek metodą bisekcji
	`n_b` – liczba iteracji potrzebna do znalezienia pierwiastka
	`czas_b` – czas poszukiwania pierwiastka

b) metoda regula falsi

```
function [x_r, n_r, czas_r] = regula(f, a, b, tol, ftol)
```

gdzie:

Dane wejściowe	**Dane wyjściowe**

`f` – wzór funkcji, `f = @(x) wzór`
`a` – lewy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
`b` – prawy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
`tol` – dokładność dla `x`
`ftol` – dokładność dla wartości funkcji `f(x)`
	`x_r` – znaleziony pierwiastek metodą bisekcji
	`n_r` – liczba iteracji potrzebna do znalezienia pierwiastka
	`czas_r` – czas poszukiwania pierwiastka

c) metoda siecznych

```
function [x_s, n_s, czas_s] = sieczne(f, a, b, ftol)
```

gdzie:

Dane wejściowe	Dane wyjściowe

`f` – wzór funkcji, `f = @(x) wzór`
 	
`a` – lewy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
 	
`b` – prawy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
 	
`tol` – dokładność dla `x`
 	
`ftol` – dokładność dla wartości funkcji `f(x)`
	`x_s` – znaleziony pierwiastek metodą bisekcji
	
	`n_s` – liczba iteracji potrzebna do znalezienia pierwiastka
	
	`czas_s` – czas poszukiwania pierwiastka

d) metoda Newtona (stycznych)

```
function [x_n, n_n, czas_n] = newton(f, a, b, x0, tol, ftol)
```

gdzie:

Dane wejściowe	Dane wyjściowe

`f` – wzór funkcji, `f = @(x) wzór`
 	
`a` – lewy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
 	
`b` – prawy kraniec przedziału izolacji pierwiastka
 	
`x0` – punkt startowy
 	
`tol` – dokładność dla `x`
 	
`ftol` – dokładność dla wartości funkcji `f(x)`
	`x_n` – znaleziony pierwiastek metodą bisekcji
	
	`n_n` – liczba iteracji potrzebna do znalezienia pierwiastka
	
	`czas_n` – czas poszukiwania pierwiastka

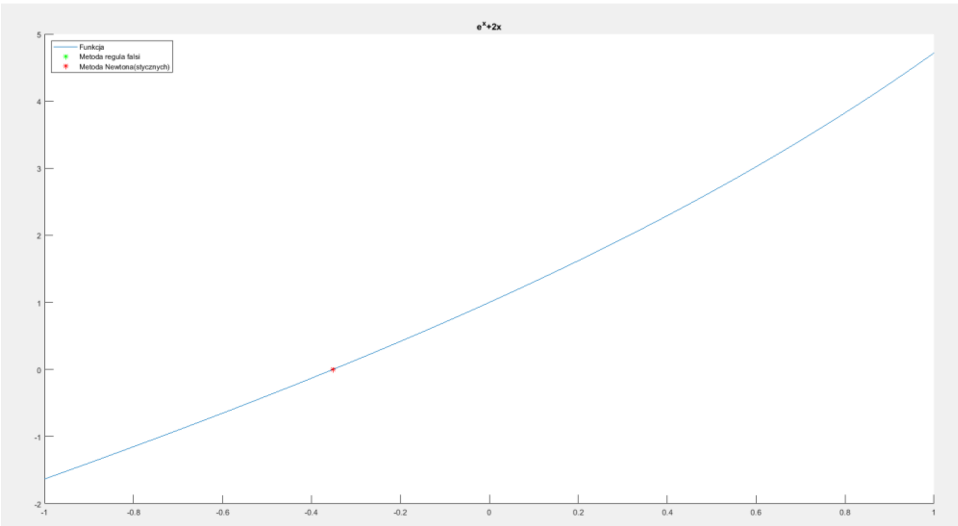
3) Przykładowe funkcje nieliniowe do przetestowania skryptu:

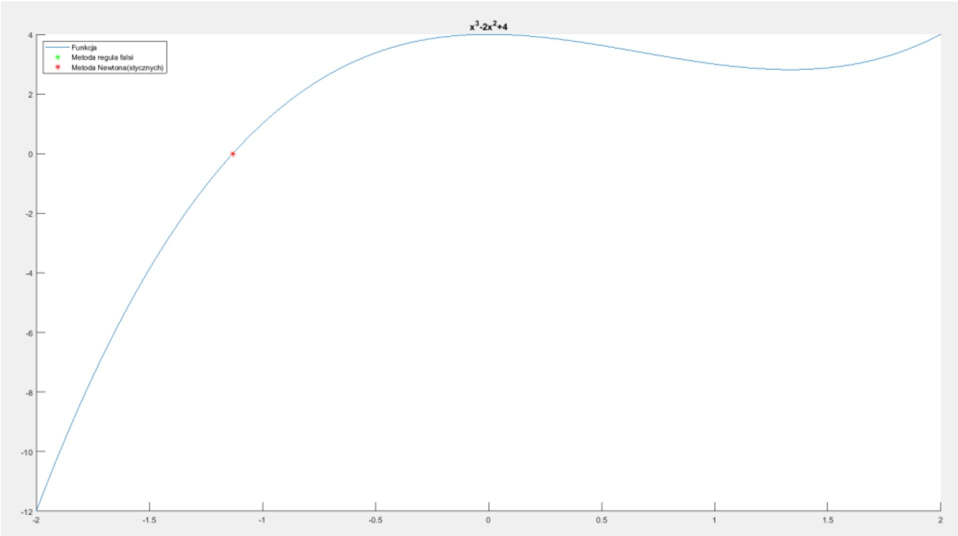
Równanie	Przedział
$cos(x)$	$< 0,2 >$
$2^{-x} + e^{x} + 2\cos(x) - 6$	$< 1,3 >$
$(x+2)^5$	$< -3,0 >$
$e^{x-1} - 2$	$< -1,2 >$
$\log(x + \frac{2}{3})$	$< -0.5,2 >$
$x^3 - 2x - 5$	$< 0,3 >$

4) Wyniki działania skryptu zapisz w tabeli dla dwóch funkcji innych niż podane w punkcie 3 przyjmując $tol = 10^{-5}$ oraz $ftol = 10^{-4}$.

Funkcja	**Przedział**	**Metoda**	**Pierwiastek**	**Liczba iteracji**	**Czas**
$e^x + 2x$	<-1, 1>	Regula falsi	-0.3517	9	0.0173
		Newtona	-0.3517	12	0.0056
$x^3 - 2x^2 + 4$	<-2, 2>	Regula falsi	-1.1304	17	0.0222
		Newtona	-1.1304	25	0.0064

/Tu wstaw wykresy/





Metoda bisekcji

Funkcja $f(x)$ na danym przedziale $[a, b]$ ma miejsce zerowe, gdy:

- jest ciągła,
- jest określona,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Gdy funkcja $f(x)$ spełnia powyższe warunki, to w przedziale $[a, b]$ istnienie pierwiastek i można go odnaleźć stosując algorytm połowienia.

Szkic algorytmu:

1. Sprawdź, czy na zadanym przedziale istnieje pierwiastek. Jeśli nie, zakończ działanie programu z odpowiednim komunikatem. Jeśli tak, przejdź do kolejnego kroku.
2. Wyznacz środek x_0 przedziału $[a, b]$
3. Jeśli osiągnięto zadaną dokładność, to zakończ działanie programu i zwróć x_0. Jeśli nie, przejdź do kolejnego kroku.
4. Jeśli $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, to $b = x_0$. W przeciwnym wypadku $a = x_0$.
5. Idź do kroku 2.

Regula falsi

Funkcja $f(x)$ na danym przedziale $[a, b]$ ma miejsce zerowe, gdy:

- funkcja f oraz jej pierwsza i druga pochodna są ciągłe w badanym przedziale $[a, b]$,
- pierwsza i druga pochodna funkcji f mają stały znak w badanym przedziale $[a, b]$,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Gdy funkcja $f(x)$ spełnia powyższe warunki, to w przedziale $[a, b]$ istnienie pierwiastek i można go odnaleźć stosując regulę falsi.

Szkic algorytmu:

1. Sprawdź, czy na zadanym przedziale istnieje pierwiastek. Jeśli nie, zakończ działanie programu z odpowiednim komunikatem. Jeśli tak, przejdź do kolejnego kroku.
2. Zbadaj znak funkcji i jej drugiej pochodnej na krańcach przedziału. Jeśli znaki są takie same w punkcie a, to $x_s = a$ oraz $x_0 = b$. W przeciwnym wypadku $x_s = b$ i $x_0 = a$.
3. Wykonuj tak długo aż osiągnięta zostanie zadana dokładność:
   (a) Oblicz x_0 zgodnie ze wzorem: $x_0 = x_s - \frac{f(x_s)}{f(x_0)-f(x_s)}(x_0 - x_s)$

Metoda siecznych

Szkic algorytmu:

1. Sprawdź, czy na zadanym przedziale istnieje pierwiastek. Jeśli nie, zakończ działanie programu z odpowiednim komunikatem. Jeśli tak, przejdź do kolejnego kroku.
2. Wykonaj pierwszy krok metody falsi, tj. zbadaj znak funkcji i jej drugiej pochodnej na krańcach przedziału. Jeśli znaki są takie same w punkcie a, to $x_0 = a$ oraz $x_1 = b$. W przeciwnym wypadku $x_0 = b$ i $x_1 = a$.
3. Oblicz x_{i+1} zgodnie ze wzorem:
$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$
4. Jeśli osiągnięto zadaną dokładność, to zakończ działanie programu i zwróć x_{i+1}. Jeśli nie powtórz poprzedni krok.

Metoda stycznych

Szkic algorytmu:

1. Sprawdź, czy na zadanym przedziale istnieje pierwiastek. Jeśli nie, zakończ działanie programu z odpowiednim komunikatem. Jeśli tak, przejdź do kolejnego kroku.
2. Zbadaj znak funkcji i jej drugiej pochodnej na krańcach przedziału. Jeśli znaki są takie same w punkcie a, to $x_0 = a$. W przeciwnym wypadku $x_0 = b$.
3. Oblicz x_{i+1} zgodnie ze wzorem:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

4. Jeśli osiągnięto zadaną dokładność, to zakończ działanie programu i zwróć x_{i+1}. Jeśli nie powtórz poprzedni krok.

Przyda się:

- Warunki stopu:

$$|f(x)| \leq ftol$$

$$|x_k - x_{k-1}| \leq tol$$

- pomiaru czasu

`tic` – start zegara, `toc` – stop zegara

- obliczanie pierwszej pochodnej numerycznie

$$df(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 * h}$$

gdzie h – mała liczba, np. 0.001

- obliczanie drugiej pochodnej numerycznie

$$d2f(x) = \frac{f(x+h) - 2 * f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

gdzie h – mała liczba, np. 0.001

- rysowanie punktu na wykresie `plot(x,y,'r*')` – wygeneruje czerwoną gwiazdkę o współrzędnych (x,y)