Metody numeryczne – laboratorium nr 8

Poszukiwanie minimum funkcji jednej zmiennej

Zadanie 1

1) Napisz skrypt, który porówna działanie trzech (z pięciu podanych) metod poszukiwania minimum funkcji 1 zmiennej w podanym przedziale pod kątem czasu potrzebnego na znalezienie rozwiązania oraz liczby iteracji.
   Metody poszukiwania minimum 1 zmiennej:
   a) Metoda połowienia,
   b) Metoda złotego podziału,
   c) Metoda aproksymacji kwadratowej (algorytm Powella),
   d) Metoda aproksymacji sześciennej (algorytm Davidona),
   e) Metoda Newtona.

2) Przykładowe funkcje nieliniowe do przetestowania skryptu:

L.p.	Funkcja	Przedział
1.	$f(x) = x^2 - 2$	$< \frac{1}{4}, \frac{3}{4} >$
2.	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{7}x + 11$	$< -10,10 >$
3.	$f(x) = x^4 - 12x^3 + x + 4$	$< -2,2 >$
4.	$F(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$	$< -2,-1 >$

3) Wyniki działania skryptu zapisz w tabeli dla dwóch wybranych funkcji przyjmując błąd działania poszczególnych metod $tol = 10^{-5}$.

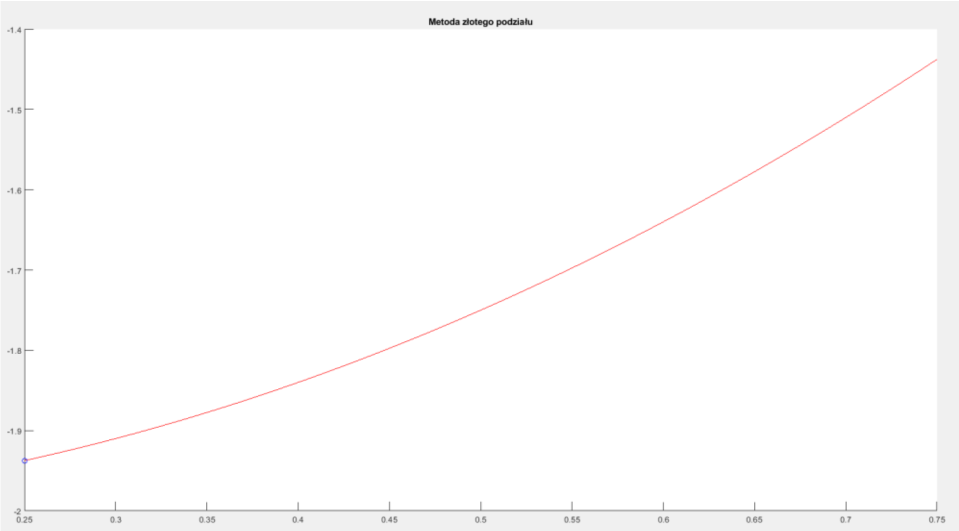
Funkcja	Przedział	Metoda	Minimum	Liczba iteracji	Czas
$f(x) = x^2 - 2$	$< \frac{1}{4}, \frac{3}{4} >$	Złotego podziału	0.25	24	0.001755
		Davidona	0.25	1	0.000950
		Newtona	0.25	1	0.001061
$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{7}x + 11$	$< -10, 10 >$	Złotego podziału	2.7857	32	0.041728
		Davidona	2.7857	1	0.001543
		Newtona	2.7857	1	0.000529

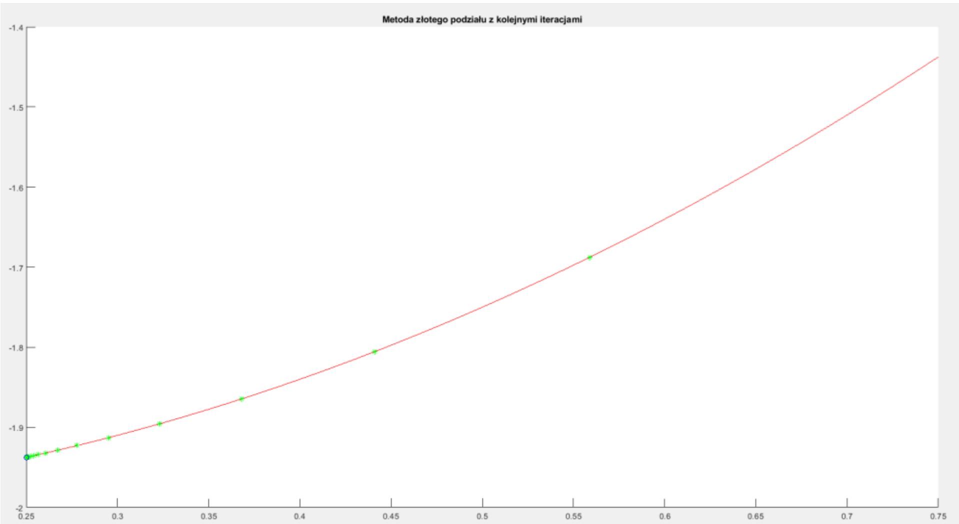
4) Dla każdej z metod przygotuj dwa wykresy:

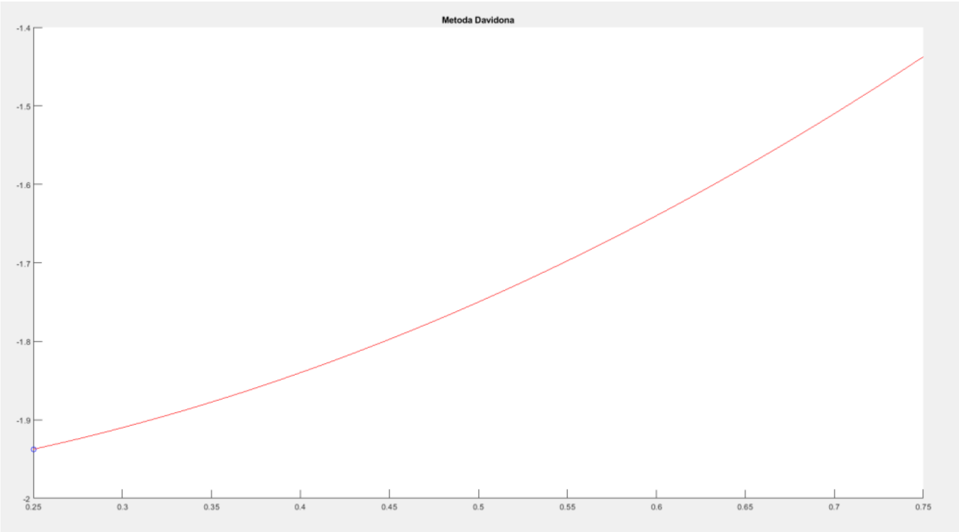
a) wykres, na którym narysowana będzie funkcja i zaznaczone rozwiązanie (punkt),
b) wykres, na którym na osi OX zaznaczone będą kolejne iteracje, a na osi OY wartości funkcji obliczane w kolejnych iteracjach.

/Tu wstaw wykresy/

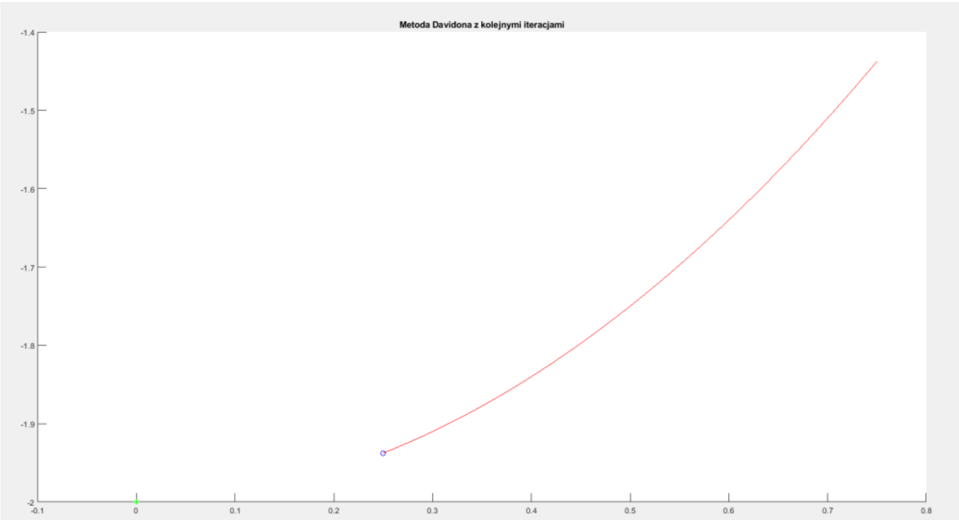
$$f(x) = x^2 - 2$$



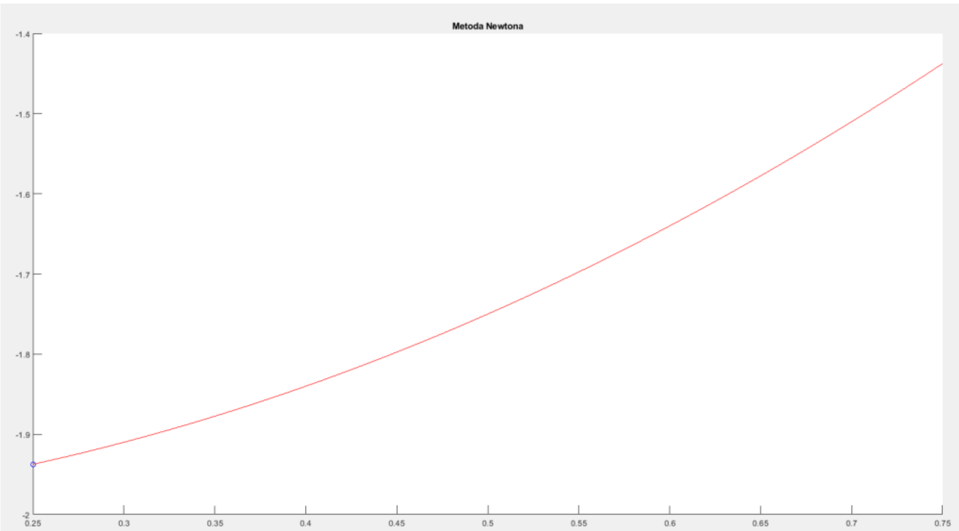




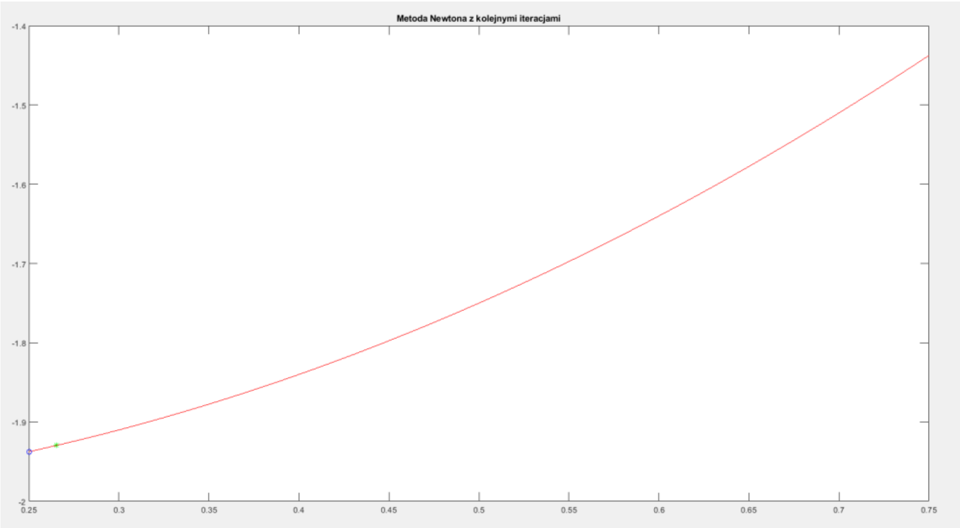
Metoda Davidona
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75



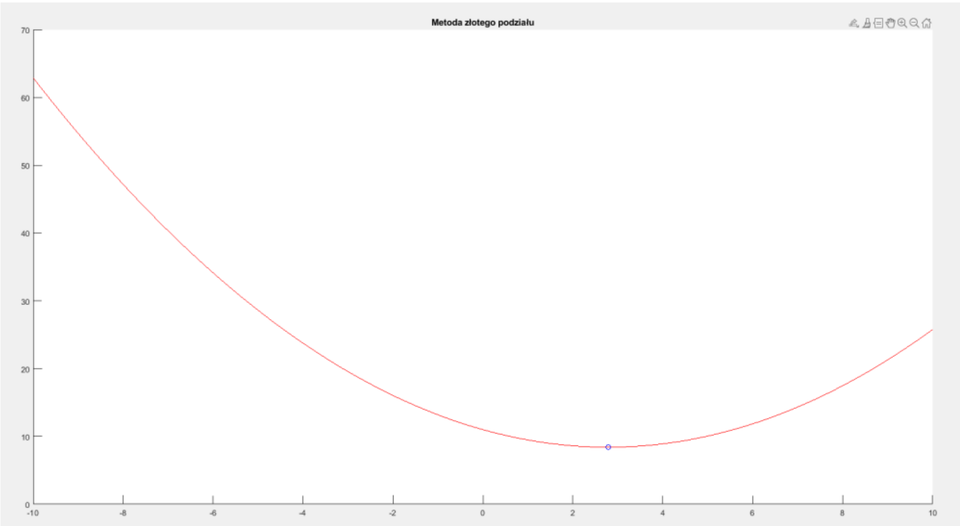
Metoda Davidona z kolejnymi iteracjami
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8

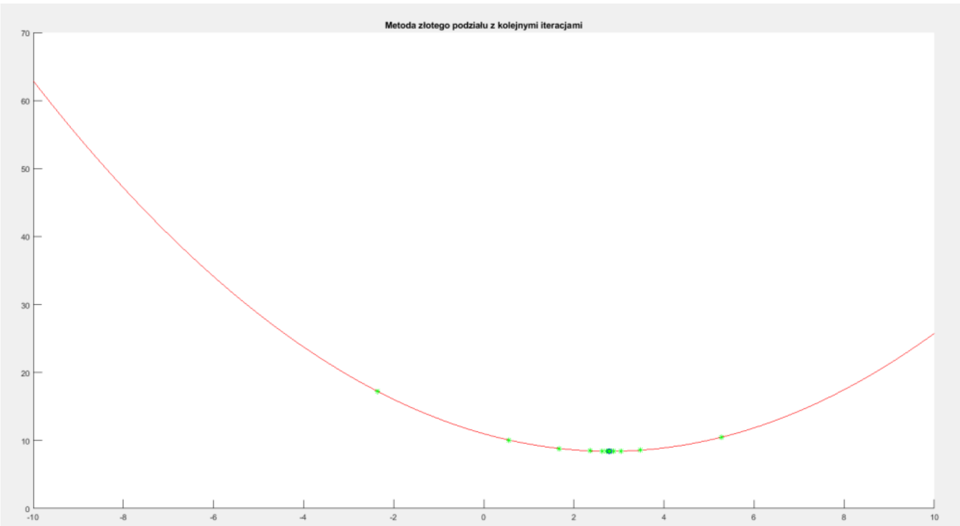


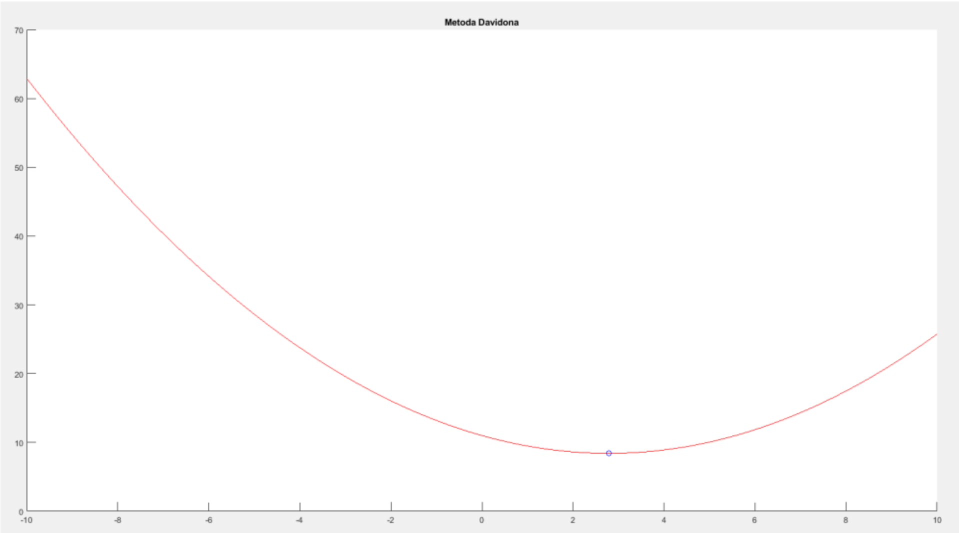
Metoda Newtona
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75

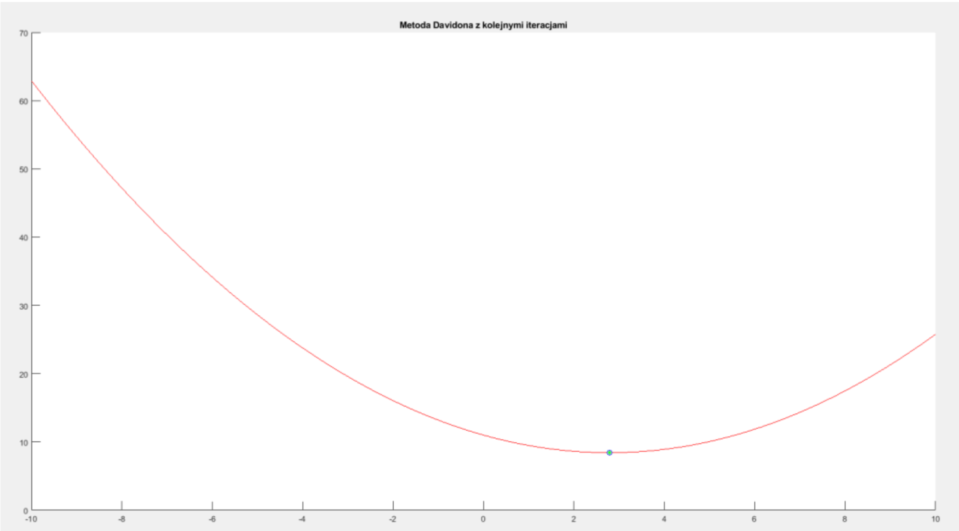


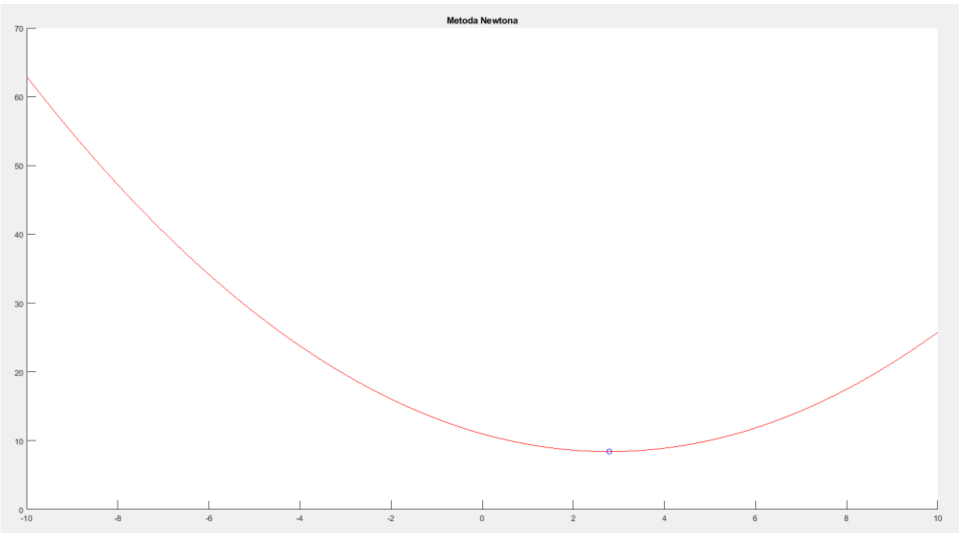
$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{7}x + 11$$

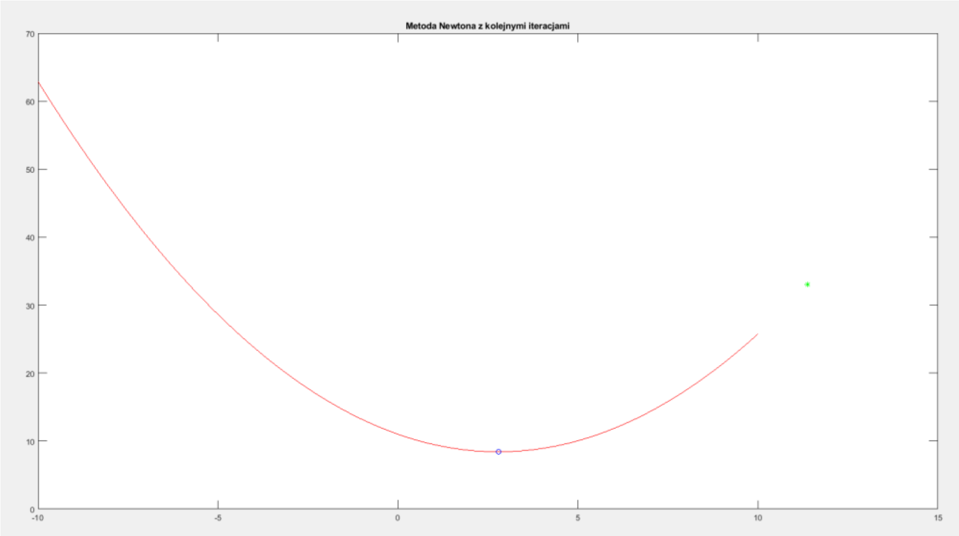





Metoda Davidona
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10


Metoda Davidona z kolejnymi iteracjami
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10


Metoda Newtona
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10



Przyda się:

- Warunki stopu:

  $$|f'(x_k)| \leq ftol$$

  $$|x_k - x_{k-1}| \leq tol$$

- pomiaru czasu

  `tic` – start zegara, `toc` – stop zegara

- obliczanie pierwszej pochodnej numerycznie

  $$df(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 * h}$$

  gdzie h – mała liczba, np. 0.001

- obliczanie drugiej pochodnej numerycznie

  $$d2f(x) = \frac{f(x+h) - 2 * f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

  gdzie h – mała liczba, np. 0.001

- rysowanie punktu na wykresie `plot(x,y,'r*')` – wygeneruje czerwoną gwiazdkę o współrzędnych (x,y)

Metoda połowienia

Mając dane dwa punkty a i b wyznaczamy środek przedziału jako $x_m = \frac{a+b}{2}$. Następnie wyznaczamy dwa punkty leżące w środkach przedziałów $[a, x_m]$: $x_1 = a + 0.25 \cdot L$ oraz $[x_m, b]$: $x_2 = b - 0.25 \cdot L$, gdzie $L = b - a$. W kolejnym kroku metody należy odrzucić dwa punkty: po lewej stronie przedziału, po prawej stronie przedziału lub po jednym z każdego końca. Decyzję o tym, które z punktów należy odrzucić podejmuje się na podstawie wartości funkcji w tychże punktach — odrzucamy te o największych wartościach funkcji. Następnie obliczamy nowe L oraz dwa punkty x_1, x_2 i powtarzamy procedurę.

Warto zauważyć, że w każdym kroku trzeba obliczyć wartości funkcji tylko w dwóch nowych punktach.

Poszukiwanie minimum należy zakończyć, gdy spełniony zostanie warunek $b-a < \epsilon$ lub $|f'(x_m)| < \epsilon$

Metoda złotego podziału

Stosunek złotego podziału to $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Mając dane dwa punkty a i b wyznaczamy dwa punkty wewnętrzne przedziału $[a, b]$: $x_1 = b - \varphi(b - a)$ i $x_2 = a + \varphi(b - a)$. W kolejnym kroku odrzucamy ten ze skrajnych punktów, w którym wartość funkcji jest największa i dzielimy w złotym stosunku dłuższy z pozostałych dwóch odcinków. W ten sposób znowu otrzymujemy 4 punkty i powtarzamy procedurę.

Warto zauważyć, że w każdym kroku trzeba obliczyć wartość funkcji tylko w jednym nowym punkcie.

Poszukiwanie minimum należy zakończyć, gdy spełniony zostanie warunek $b-a < \epsilon$ lub $|f'(x_m)| < \epsilon$

Aproksymacja kwadratowa — algorytm Powella

Mając dane dwa punkty $x_1 = a$ i $x_3 = b$ obliczamy punkt x_2 taki, że $x_1 < x_2 < x_3$, $\Delta_k = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$. Na podstawie trzech punktów, oraz wartości funkcji dla nich, wyznaczamy $x_m = x_2 - 0.5 \cdot \Delta \frac{f(x_3) - f(x_1)}{f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)}$. Następnie jako nowe x_2 przyjmujemy x_m i na tej podstawie wyznaczamy nowe wartości dla x_1 oraz x_2 pamiętając, że $\Delta_{k+1} = \frac{\Delta_k}{2} = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$. Mając wyznaczone trzy nowe punkty x_1, x_2 oraz x_3 powtarzamy procedurę.

Poszukiwanie minimum należy zakończyć, gdy spełniony zostanie warunek $x_3 - x_1 < \epsilon$ lub $|f'(x_m)| < \epsilon$

Aproksymacja sześcienna — algorytm Davidona

Mając dane dwa punkty a i b obliczamy punkt x_m zgodnie ze wzorem: $x_m = b - \frac{f'(b) + Q - Z}{f'(b) - f'(a) + 2Q}(b - a)$, gdzie $Q = \sqrt{Z^2 - f'(a) \cdot f'(b)}$ i $Z = \frac{3(f(a) - f(b))}{b-a} + f'(a) + f'(b)$. Następnie należy zwęzić przedział poszukiwań do $[a, x_m]$ lub $[x_m, b]$ badając znak pochodnej w x_m. Jeśli $f'(x_m) > 0$, to zawężamy przedział do $[a, x_m]$, w przeciwnym wypadku do $[x_m, b]$.

Poszukiwanie minimum należy zakończyć, gdy spełniony zostanie warunek $|f'(x_m)| < \epsilon$

Metoda Newtona

Metoda bazuje na wyznaczaniu wartości pierwszej i drugiej pochodnej funkcji f. Początkowy punkt x_1 powinien znajdować się odpowiednio blisko szukanego minimum. Wtedy, kolejny punkt wyznacza się zgodnie ze wzorem: $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$.

Poszukiwanie minimum należy zakończyć, gdy spełniony zostanie warunek $|f'(x_k)| < \epsilon$.