

Funkcijske enačbe

Luka Urbanc

30. november 2023

1 Osnovni prijemi

Naloga 1.1. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y)$.

Naloga 1.2. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, za katere za vsa cela števila a in b velja $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$.

Naloga 1.3. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(x^2 + yf(x)) = xf(x+y)$.

Naloga 1.4. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, za katere za vsa cela števila x in y velja $f(m+n)^3 - f(m)^3 - f(n)^3 = 3f(m)f(n)f(m+n)$.

Naloga 1.5. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere za vsa pozitivna realna števila x in y velja $(1 + yf(x))(1 - yf(x+y)) = 1$.

Naloga 1.6. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katere za vsako naravno število n in vsako praštevilo p velja $f(n)^p \equiv n \pmod{f(p)}$.

Naloga 1.7. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katere za vsako naravno število n velja $f(n+1) > f(f(n))$.

Naloga 1.8. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$.

Naloga 1.9. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x velja $f(x+1) = f(x) + 1$ in $f(x^2) = f(x)^2$.

Naloga 1.10. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$.

2 Injektivnost, surjektivnost

Naloga 2.1. Najdi vsa realna števila a , za katera obstaja funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $f(x + yf(x)) = axy + f(f(x))$ za vsa realna števila x in y .

Naloga 2.2. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(f(x) + xy) = f(x)f(x+y)$.

Naloga 2.3. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(xf(y) + f(x+y) + 1) = (y+1)f(x+1)$.

Naloga 2.4. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(x^2) + xf(y) = f(x)f(x+f(y))$.

Naloga 2.5. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katere za vsa naravna števila a in b velja, da obstaja neizrojen trikotnik z dolžinami stranic a , $f(b)$ in $f(b + f(a) - 1)$.

Naloga 2.6. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere za vsa pozitivna realna števila x in y velja $f(xf(x+y)) = 1 + yf(x)$.

3 Cauchyjeva funkcijska enačba

Naloga 3.1. Najdi vse zvezne funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere velja $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ za vsa realna števila x in y .

Naloga 3.2. Najdi vse zvezne funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere velja $f(x+y) = a^{xy}f(x)f(y)$ za vsa realna števila x in y , kjer je $a \in \mathbb{R}^+$ konstanta.

Naloga 3.3. Najdi vse zvezne funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere velja $f(f(x+y)) = f(x) + f(y)$ za vsa realna števila x in y .

Naloga 3.4. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(x^4+y) = x^3f(x) + f(f(y))$ in ki imajo končno mnogo ničel.

Naloga 3.5. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(x^2+xf(y)) = f(x)^2 + yf(x)$.

4 Težje naloge

Naloga 4.1. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere za vsa pozitivna realna števila x in y velja $f(x)f(y) = 2f(x+yf(x))$.

Naloga 4.2. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ obstaja natanko en $y \in \mathbb{R}^+$, za katerega velja $xf(y) + yf(x) \leq 2$.

Naloga 4.3. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, za katere za vsa kompleksna števila x in y velja $f(f(x)+yf(y)) = x+|y|^2$.

Naloga 4.4. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(f(x)f(y))+f(x+y) = f(xy)$.

Naloga 4.5. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja $f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$.

Naloga 4.6. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila $x < y < z$ velja

$$f(y) - \left(\frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) \right) \leq f\left(\frac{x+z}{2}\right) - \frac{f(x)+f(z)}{2}.$$

Naloga 4.7 (Bohr¹-Mollerupov izrek). Dokaži, da je funkcija $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, definirana z

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

edina funkcija iz \mathbb{R}^+ v \mathbb{R}^+ , ki zadostuje sledečim trem pogojem:

- $\Gamma(1) = 1$,
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}^+$ in
- $\ln \Gamma(x)$ je konveksna funkcija.

¹Harald August Bohr, danski nogometaš in matematik. Njegov brat je bil fizič.