

# Ugankarski kotiček

Luka Urbanc

12. januar 2025

**Naloga 1.** Za neka realna števila  $a, b, c$  velja

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1.$$

Najdi vse možne vrednosti, ki jih lahko zavzame izraz

$$\frac{1}{(a + b + c)^{2025}} - \frac{1}{a^{2025}} - \frac{1}{b^{2025}} - \frac{1}{c^{2025}}.$$

**Naloga 2.** Na tabli je napisanih  $n$  naravnih števil. Ta števila zadoščajo sledečim pogojem:

- njihova vsota je 500,
- lahko jih razdelimo na 20 skupin, da je vsota vsake skupine 25 in
- lahko jih razdelimo na 25 skupin, da je vsota vsake skupine 20.

Katero je najmanjše možno naravno število  $n$ , da se to lahko zgodi?

**Naloga 3.** Naj bo  $ABCD$  poljuben štirikotnik na evklidski ravnini. Naj bo točka  $X$  razpolovišče stranice  $AB$ ,  $Y$  razpolovišče  $BC$ ,  $Z$  razpolovišče  $CD$  in  $W$  razpolovišče  $DA$ . Dokaži, da je štirikotnik  $XYZW$  paralelogram.

**Naloga 4.** Naj bo  $n > 2$  naravno število. Sebastjan ima sledečih  $n - 1$  ulomkov:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n}{n-1}.$$

Njihov zmnožek je seveda enak  $n$ . Sebastjana zanima, ali lahko obrne določene ulomke (torej nekatere  $\frac{a}{b}$  zamenja z  $\frac{b}{a}$ ), tako da bo zmnožek vseh skupaj na koncu enak 1. Določi vse  $n$ , za katere se njegove sanje lahko uresničijo.