

# Nekaj nalogic za uvod

Luka Urbanc

5. oktober 2023

## 1 Kombinatorika

**Naloga 1.1.** Pozne večerne ure vrh Rožnika šest koza stoji. Znano je, da je poljuben neurejen par različnih koz ali *nedolžen* ali *čarovniški*. Dokaži, da obstajajo 3 koze, ki so si vse paroma nedolžne, ali pa so si vse paroma čarovniške.

**Naloga 1.2.** V evklidski ravnini imamo 10000 točk z naravnošteviliškima koordinatama manjšima ali enakima 100. Kolikšno je najmanjše možno število premic, da vse te točke razen  $(1, 1)$  ležijo na vsaj eni premici? (nobena premica ne sme potekati skozi  $(1, 1)$ )

**Naloga 1.3.** Naj bo  $n \geq 3$  naravno število. Dokaži, da lahko  $n!$  zapišemo kot vsoto  $n$  različnih deliteljev  $n!$ .

**Naloga 1.4.** Naj bo  $n$  naravno število. Podana je  $n \times n$  tabela realnih števil. Določi največje možno število celic v tabeli, za katere velja, da je število v celici strogo večje od povprečja števil v njenem stolpcu in strogo manjše od povprečja števil v njeni vrstici.

## 2 Geometrija

**Naloga 2.1.** Naj bo  $ABC$  ostrokotni trikotnik z očrtano krožnico  $\omega$ . Naj bo  $\ell$  tangenta premica na  $\omega$ , in naj bodo  $\ell_a$ ,  $\ell_b$  in  $\ell_c$  zrcalne slike premice  $\ell$  čez premice  $BC$ ,  $CA$  in  $AB$ . Dokaži, da je očrtana krožnica trikotnika, ki ga opišejo premice  $\ell_a$ ,  $\ell_b$  in  $\ell_c$ , tangenta na  $\omega$ .

**Naloga 2.2.** Naj bo  $ABC$  trikotnik s središčem očrtane krožnice  $S$  in središčem včrtane krožnice  $I$ .  $V$  je zrcalna slika  $I$  čez  $S$ . Premica skozi  $B$  in zrcalno sliko višinske točke  $ABC$  čez  $S$  seka  $AC$  v  $X$ -u. Včrtana krožnica  $ABC$  se dotika  $BC$  v  $D$ -ju.  $ID$  seka  $AB$  v  $P$ ,  $BV$  seka  $IX$  v  $Q$ , zrcalna slika  $ID$  čez razpolovišče  $BC$  pa seka  $AC$  v  $R$ . Dokaži, da so  $P$ ,  $Q$  in  $R$  kolinearne.

## 3 Teorija števil/algebra

**Naloga 3.1.** Če so  $a, b$  in  $c$  neničelna cela števila, za katere sta  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  in  $\frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$  prav tako celi števili, dokaži, da velja  $|a| = |b| = |c|$ .

**Naloga 3.2.** Najdi vse rešitve enačbe  $p^2 - p + 1 = n^3$ , kjer je  $p$  praštevilo,  $n$  pa naravno število.