Drugi hod teorije števil

Luka Urbanc

1. december 2023

1 Duplo

Naloga 1.1. Najdi vse trojice naravnih števil (x, y, z), za katere je $x! + y! = z!$.

Naloga 1.2. Določi vse pare praštevil p, q, za katere je $p^2 + 5pq + 4q^2$ popolni kvadrat.

Naloga 1.3. Dokaži, da če je za naravni števili a in b število $a^2 + 2b$ popolni kvadrat, lahko $a^2 + b$ zapišemo kot vsoto dveh popolnih kvadratov.

Naloga 1.4. Če za naravni števili m, n velja $mn(m - n) \mid m^3 + n^3 + mn$, dokaži, da je njun najmanjši skupni večkratnik popolni kvadrat.

Naloga 1.5. Določi vse pare nenegativnih števil a in b, za katere je $\sqrt{ab} = \sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Naloga 1.6. Najdi vse trojice (x, y, p), kjer sta x in y naravni števili, p pa praštevilo, za katere velja $\frac{xy^3}{x+y} = p$.

Naloga 1.7. Dokaži, da velja sledeča identiteta, kjer je $\tau(n)$ število deliteljev n:

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{d + \sqrt{n}} = \frac{\tau(n)}{2\sqrt{n}}$$

Naloga 1.8. Poišči vse pare naravnih števil k in m, za katere sta števili $k^2 + 4m$ in $m^2 + 5k$ popolna kvadrata.

Naloga 1.9. Najdi vse naravne n, za katere $\varphi(n) \mid n$.

Naloga 1.10. Najdi vsa naravna števila $n \geq 3$, za katera velja

$$n! \mid \prod_{\substack{p<q\leq n, \\ p,q \text{ praštevila}}} (p + q).$$

Naloga 1.11. Če je $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ celo število za $n \in \mathbb{Z}$, dokaži, da je tudi popolni kvadrat.

Naloga 1.12. Reši $n^5 + n^4 = 7^m - 1$ v naravnih številih.

Naloga 1.13. Z $d_1, d_2, \ldots, d_k$ označimo vse delitelje naravnega števila n, kjer velja $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Najdi vsa sestavljena števila $n > 1$ za katera velja $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$ za vse $1 \leq i \leq k - 2$.

Naloga 1.14. Naj bo $(a_n)_{n\geq 1}$ neskončno zaporedje racionalnih števil, za katero velja $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_n$. Katere so vse možne vrednosti a_1?

Naloga 1.15. Najdi vse trojice $x, y \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, za katere velja $x^n = (x + y)y$.

Naloga 1.16. Za katere n lahko uredimo vse delitelje n v $d_1, d_2, \ldots, d_k$ tako, da so delne vsote d_1, $d_1 + d_2$, $\ldots$, $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ vse popolni kvadrati?

Naloga 1.17. Za vsak naravni n s T_n označimo najmanjše naravno število za katerega $n \mid 1 + 2 + \cdots + T_n$. Najdi vse n, za katere je $n \geq T_n$.

Naloga 1.18. Z $d_1, d_2, \ldots, d_k$ označimo vse delitelje naravnega števila n, s $\tau(n)$ pa število njegovih deliteljev. Za katere n velja $\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \tau(n^3)$?

Naloga 1.19. Najdi vse pare naravnih števil a in b, za katere velja $a^2b - 1 \mid ab^3 - 1$.

Naloga 1.20. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo $n \in \mathbb{N}$, za katere $n^2 + 1 \mid n!$.

Naloga 1.21. Naj bo a_1 naravno število, ki ni potenca števila 2. Na sledeč način definiramo neskončno zaporedje naravnih števil $(a_n)_{n\geq 1}$:

- če je a_n sod, je a_{n+1} njegov največji lih delitelj,
- če pa je a_n lih, je $a_{n+1} = a_n + p^2$, kjer je p najmanjši praštevilski delitelj a_n-ja.

Dokaži, da obstaja nek N, da velja $a_m = a_{m+2}$ za vse $m \geq N$.

Naloga 1.22. Dokaži, da za tuji si lihi števili a in b velja

$$\sum_{k=0}^{ab-1} (-1)^{\lfloor \frac{k}{a} \rfloor + \lfloor \frac{k}{b} \rfloor} = 1.$$

Naloga 1.23. Za katera naravna števila $n \geq 4$ obstajajo 4 naravna števila a, b, c, d, katerih vsota je n in velja $n \mid abc + bcd + cda + dab$?

Naloga 1.24. Katera naravna števila m lahko zapišemo kot $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}$ za nek $n \in \mathbb{N}$, kjer je $\tau(n)$ število deliteljev n?

2 Technic

Naloga 2.1. Če sta si a in $m > 0$ tuji celi števili, dokaži, da velja $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Naloga 2.2. Določi vsa naravna števila, ki so tuja vsem členom zaporedja $2^n + 3^n + 6^n - 1$ za $n \in \mathbb{N}$.

Naloga 2.3. Naj bo p praštevilo, k pa naravno število. Dokaži, da $p \mid 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k$ če in samo če $p - 1 \nmid k$.

Naloga 2.4. Naj bo $p \geq 5$ praštevilo. Dokaži, da če zapišemo $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ kot ulomek $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b tuji si naravni števili, velja $p^2 \mid a$.

Naloga 2.5. Dokaži, da za vsa praštevila p obstaja naraven n, da je $1^n + 2^{n-1} + \cdots + (n-1)^2 + n^1 \equiv 1585 \pmod{p}$.

Naloga 2.6. Najdi vse naravne n, za katere za vsa naravna števila a in b, ki so tuja n, velja $ab \equiv 1 \pmod{n} \iff a \equiv b \pmod{n}$.

Naloga 2.7. Dokaži, da za praštevila p velja obstaja celi x, da $p \mid x^2 + 1$, če in samo če $p \not\equiv 3 \pmod{4}$.

Naloga 2.8. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo $n \in \mathbb{N}$, za katere $n^2 + 1 \nmid n!$.

Naloga 2.9. Določi vse pare celih števil (a, b), za katere velja $a^2 - 1 \mid b^2 + 1$.

Naloga 2.10. Reši $3^x - 7^y = 2$, kjer sta x in y naravni števili.

Naloga 2.11. Najdi vse trojice nenegativnih celih števil a, b, c, za katere velja $3^a - 5 \cdot 2^b = c^2$.

Naloga 2.12. Reši $n^7 + 7 = m^2$ v celih številih.

Naloga 2.13. Najdi vse trojice (x, y, p), kjer sta x in y naravni števili, p pa praštevilo, za katere velja, da sta $x^{p-1} + y$ in $y^{p-1} + x$ obe potenci p-ja.