Rodovne funkcije

Luka Urbanc

8. januar 2024

1 Kombinatorične vsote

Če vsota vsebuje člene z neko simetrijo, je to pogosto dober znak, da jo lahko izračunamo z rodovnimi funkcijami: količine, ki se seštejejo v nekaj konstantnega, so verjetno posledica formule za produkt rodovnih funkcij.

Naloga 1.1. Dokaži *Vandermondovo identiteto*: $\sum_{k=0}^{t}\binom{m}{k}\binom{n}{t-k}=\binom{m+n}{t}$.

Naloga 1.2. Dokaži, da velja $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}=4^n$.

Naloga 1.3. Izračunaj vsoto $\sum_{k=0}^{b}\binom{b}{k}\frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k}$ za naravna a,b.

Naloga 1.4. Dokaži, da za praštevila $p\geq 5$ velja $\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\binom{2i}{i}\equiv 0$ ali $-2 \pmod p$ in $\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{i}\binom{2i}{i}\equiv 0 \pmod p$.

Še močnejša metoda je sledeča: želeno zaporedje nastavimo kot koeficiente neke rodovne funkcije (potrebno je pametno izbrati prosto spremenljivko, tj. spremenljivko, ki se bo pojavila kot eksponent x-a). Rodovna funkcija je potem zapisana kot dvojna vsota. Ideja je zamenjati vrstni red vsot in upati, da nastane kaj lepega (kar se presenetljivo pogosto res zgodi).

Naloga 1.5. Izračunaj sledeče vsote:

- $\displaystyle\sum_k\binom{k}{n-k}$,
- $\displaystyle\sum_k\binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor\frac{m-k}{2}\rfloor}2^k$,
- $\displaystyle\sum_k\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$,
- $\displaystyle\sum_k\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}$ in
- $\displaystyle\sum_k\binom{2n+1}{2m+2k+1}\binom{m+k}{k}$.

2 Vsote množic in povezane ideje

Naj bo rodovna funkcija množice $A\subseteq\mathbb{N}_0$ enaka $f_A(x)=\sum_{a\in A}x^a$ in podobno za B. Potem je

$$f_A(x)f_B(x)=\left(\sum_{a\in A}x^a\right)\left(\sum_{b\in B}x^b\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a\in A,b\in B:\ a+b=n}1\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}|\{(a,b)\in A\times B:a+b=n\}|x^n.$$

Označimo $r_{A,B}(n)=|\{(a,b)\in A\times B:a+b=n\}|$. To je torej število urejenih parov iz A,B z vsoto enako n. Dokazali smo, da je rodovna funkcija zaporedja $r_{A,B}(n)$ enaka $f_A(x)f_B(x)$.

Za primer z rodovnimi funkcijami dokažimo, da lahko vsa nenegativna cela števila zapišemo v poljubni bazi $b\geq 2$, torej kot vsoto členov oblike $c_n\cdot b^n$ za $0\leq c_n<b$. Povedano drugače, za množice $A_n=\{0,b^n,2b^n,\ldots,(b-1)b^n\}$ moramo dokazati $r_{A_0,A_1,\ldots}(n)=1$, torej hočemo $\prod_{n=0}^{\infty}f_{A_n}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Velja pa:

$$\prod_{n=0}^{\infty}f_{A_n}(x)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{c_n=0}^{b-1}x^{c_n\cdot b^n}\right)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-x^{b\cdot b^n}}{1-x^{b^n}}=\frac{1-x^b}{1-x}\frac{1-x^{b^2}}{1-x^b}\frac{1-x^{b^3}}{1-x^{b^2}}\cdots=\frac{1}{1-x},$$

torej smo končali.

Naloga 2.1. Za poljubno nenegativno celo število n izračunaj vsoto $\sum_{i,j,k\in\mathbb{N}_0:\ i+j+k=n} ijk$.

Naloga 2.2. Za poljubno naravno število n dokaži, da je vsota

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{(a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{N}^k\ \mid\ a_1+\cdots+a_k=n} a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_k\right)$$

enaka $2n$-temu Fibonaccijevemu številu.

Naloga 2.3. Naj bo $f(m,n)$ število n-tork celih števil $(x_1,\dots,x_n)$, za katere je $|x_1|+\cdots+|x_n|\le m$, za poljubni nenegativni celi števili m,n.

a) Dokaži, da velja $f(m,n)=f(n,m)$.

b) Dokaži, da je rodovna funkcija zaporedja $f(n,n)$ enaka $\frac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}}$.

3 Koreni enote

Izračunajmo vsoto

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}.$$

Opazimo, da je izraz $1+(-1)^k$ enak 2 za sode k in 0 za lihe. Sledi, da je naša vsota enaka

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1+(-1)^k}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right)=\frac{1}{2}\left((1+1)^n+(1-1)^n\right)=2^{n-1}.$$

Splošnejša verzija tega je sledeča: če želimo, da v vsoti ostanejo le členi v določenem aritmetičnem zaporedju, člene zmnožimo z indikatorsko funkcijo tega zaporedja, ki pa se jo da izraziti kot vsoto potenc korenov enote:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}k}\right)^t=\begin{cases}1, & \text{če } n\mid k \text{ in}\\ 0, & \text{če } n\nmid k.\end{cases}$$

Še pomembna opomba: če rodovna funkcija ni polinom, je pri vstavljanju res treba paziti na konvergenco! Velja izrek, da vedno obstaja polmer $R\in\mathbb{R}_{\ge 0}$, za katerega funkcija konvergira za $z\in\mathbb{C}$ z $|z|<R$ in divergira za $|z|>R$. Za $|z|=R$ je v splošnem težje vedeti, ali je tam funkcija dobro definirana.

Popolnoma splošne strategije za izračun polmera konvergence ni. Če je rodovna funkcija racionalna (torej ulomek dveh polinomov) je R minimum absolutnih vrednosti ničel imenovalca. Če ni racionalna, pa je ponavadi najboljša strategija omejevanje njenih členov z nekimi preprostejšimi, na primer z geometrijsko vrsto.

Naloga 3.1. Izračunaj vsoto $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}$, kjer je F_n n-to Fibonaccijevo število.

Naloga 3.2. Izračunaj vsoto $\sum_k\binom{n}{3k}(-1)^k$.

Naloga 3.3. Naj bo p praštevilo. Izračunaj število podmnožic množice $S=\{1,2,\dots,p\}$, katerih elementi se seštejejo v večkratnik p-ja.

Naloga 3.4. $a\times b$ pravokotnik lahko tlakujemo z dominami oblike $c\times 1$ in $1\times d$. Dokaži, da velja $c\mid a$ ali $d\mid b$.

Naloga 3.5. Ali je možno množico naravnih števil razdeliti na $n\ge 2$ aritmetičnih zaporedij, pri čemer nimata nobeni dve enake razlike sosednjih členov?

Naloga 3.6. Naj bo p liho praštevilo. Koliko podmnožic A množice $\{1,2,\dots,2p\}$ s p elementi ima vsoto deljivo s p?

Naloga 3.7. Naj bo n naravno število. Dokaži, da za poljubna cela števila $a_1,a_2,\dots,a_n$ velja, da vsaj $\frac{2n^2-(3\pi+2)(n-1)}{12\pi}$ elementov $\{1,2,\dots,\binom{n}{2}\}$ ne moremo zapisati kot a_i-a_j za poljubna $1\le i,j\le n$.

4 Bonus naloga

Naloga 4.1. Naj bo λ največja (po absolutni vrednosti) ničla polinoma x^3-3x^2+1. Dokaži, da $17\mid\lfloor\lambda^{100}\rfloor$.