

Omejevanje 2: The Return of Omejevanje

Luka Urbanc

3. junij 2025

Lema 1

Celoštevilsko zaporedje $(a_n)_{n \geq 1}$, ki konvergira proti celemu številu m ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$), je za vse dovolj velike n konstantno enako m .

Naloga 2

Naj bosta $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ nekonstantna polinoma, za katera velja $q(n) \mid p(n)$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da obstaja polinom $r \in \mathbb{Q}[x]$, da je $q(x)r(x) = p(x)$.

Naloga 3

Določi vse pare $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, za katere je $2^n a + b$ popolni kvadrat za vse dovolj velike $n \in \mathbb{N}$.

Naloga 4

Določi vsa pozitivna realna števila x , za katera velja, da je $\lfloor n^2 x \rfloor$ popolni kvadrat za vse $n \in \mathbb{N}$.

Naloga 5

Dokaži, da ne obstajajo kvadratni polinomi $p, q, r \in \mathbb{Z}[x]$, da bi za vsa cela števila x, y obstajalo celo število z , da je $p(x) + q(y) = r(z)$.

Naloga 6

Naj bodo a_1, a_2, \dots, a_k pozitivna realna števila, ki niso vsa naravna. Dokaži, da obstaja neskončno naravnih n , za katere sta si n in $\lfloor a_1 n \rfloor + \lfloor a_2 n \rfloor + \dots + \lfloor a_k n \rfloor$ tuja.

Naloga 7

Dokaži, da za liho število $1 < a \in \mathbb{N}$ in $a - 1 \leq m \in \mathbb{N}$ izraz $\frac{2^{am} - 1}{2^m - 1}$ ni popolni kvadrat.

Naloga 8

Naj sta a pa b naravni števili. Denimo, da obstaja neskončno parov naravnih števil (m, n) , za katere sta tako $m^2 + an + b$ kot tudi $n^2 + am + b$ popolna kvadrata. Dokaži, da a deli $2b$.

Naloga 9

Naj bo $p \in \mathbb{Z}[x]$ moničen. Predpostavimo, da ima enačba $p(x) = 2^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ vsaj eno rešitev $x \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je p linearni polinom.

Lema 10

Naj bodo x_1, x_2, \dots, x_k paroma različna racionalna števila večja ali enaka 1. Denimo še, da so c_1, c_2, \dots, c_k neničelna realna števila in da je $(m_n)_{n \geq 1}$ zaporedje celih števil, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(m_n - \sum_{i=1}^k c_i x_i^n \right) = 0.$$

Dokaži, da so x_i vsi cela števila.

Naloga 11

Naj sta $a, b > 1$ naravni števili, za kateri velja $a^n - 1 \mid b^n - 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je $b = a^k$ za nek $k \in \mathbb{N}$.