

Topla predjed: Teorija števil

Luka Urbanc

19. avgust 2025

1 Zaporedja

Naloga 1.1. Zaporedje naravnih števil $(a_i)_{i \geq 1}$ za $i \geq 3$ zadošča $a_{i+1} = a_i + \gcd(a_{i-1}, a_{i-2})$. Dokaži, da obstajata naravni števili N, M , za katere je $a_{n+1} - a_n = M$ za vse $n \geq N$.

Naloga 1.2. Podano je zaporedje naravnih števil, za katerega velja $a_1 = 2$ in $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da a_n deli a_{n+1} za vsako naravno število n .

Naloga 1.3. Naj bo C naravno število in $(a_i)_{i \geq 1}$ naravnoštevilsko zaporedje, da velja $a_{n+1} = \sqrt{a_n^3 - Ca_n}$ za vse naravne n . Dokaži, da je zaporedje od nekje naprej konstantno.

Naloga 1.4. Naj bosta n in k naravni števili, za kateri velja

$$1 = \underbrace{\varphi(\varphi(\dots \varphi(n) \dots))}_{k\text{-krat}}.$$

Dokaži, da $n \leq 3^k$.

2 Polinomi

Naloga 2.1. Za celoštevilski polinom $P \in \mathbb{Z}[x]$ velja $P(0) = P(17) = 89$. Dokaži, da P nima celoštevilskih ničel.

Naloga 2.2. Naj bo $P(x)$ tak polinom s celoštevilskimi koeficienti, da je ostanek pri deljenju $P(P(n))$ z n enak $n - 1$ za vsa naravna števila n . Dokaži, da $P(x)$ nima celoštevilskih ničel.

Naloga 2.3. Najdi vse permutacije $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ množice $\{1, 2, \dots, 2025\}$, za katere obstaja polinom $P \in \mathbb{Z}[x]$ s celoštevilskimi koeficienti, da velja $P(n) = a_n$ za vse naravne $1 \leq n \leq 2025$.

Naloga 2.4. Naj bo $P \in \mathbb{Z}[x]$ celoštevilski polinom stopnje 16. Dokaži, da ima enačba $P(x)^2 = 25$ največ 16 celoštevilskih rešitev.

Naloga 2.5. Najdi vse neprazne podmnožice naravnih števil $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, za katere $a_1 a_2 \cdots a_n$ deli $(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n)$ za vse naravne x .

Naloga 2.6. Dokaži, da obstaja neskončno naravnih n , za katere je največji prafaktor $n^4 + n^2 + 1$ enak največjemu prafaktorju $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$.

Naloga 2.7. Naj bo $P \in \mathbb{Z}[x]$ nekonstanten polinom brez celoštevilskih ničel. Dokaži, da obstaja $m \in \mathbb{N}$, $m \leq 3 \deg(P)$, da $P(m)$ ne deli $P(m + 1)$.

3 Diofantske enačbe ipd.

Naloga 3.1. Ali obstajajo različna praštevila p, q, r , za katera velja $p \mid qr + q + r$, $q \mid rp + r + p$ in $r \mid pq + p + q$?

Naloga 3.2. Najdi vse pare praštevil p, q , za katere velja $p^2 \mid q^3 + 1$ in $q^2 \mid p^6 - 1$.

Naloga 3.3. Ali obstajata različni potenci števila 2 z enakimi števki, a v različnem vrstnem redu?

Naloga 3.4. Naravno število n je *močno*, če obstaja naravno število x , za katerega $2^n \mid x^{nx} + 1$. Določi vsa močna števila in zanje določi minimalen x , ki ustreza prejšnjemu pogoju.

Naloga 3.5. Najdi vsa naravna števila a, b , za katere sta $a+1$ in $2(b+1)$ popolna kvadrata, $a^2 + b^2 - 1$ pa je potenca praštevila.

Naloga 3.6. Določi vsa praštevila p, q , za katera $3p^{q-1} + 1$ deli $11^p + 17^p$.

Naloga 3.7. Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Če je

$$\frac{n^2 + 4^n + 7^n}{n}$$

celo število, dokaži, da je deljivo z 11.

4 Drugo

Naloga 4.1. Najdi največje naravno število n , za katerega je produkt števil $n, n+1, n+2, \dots, n+42$ deljiv s kvadratom enega izmed njih.

Naloga 4.2. Za naravno število n naj bodo $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ vsa naravna števila manjša od n , ki so tuja n . Poišči vse n , za katere velja $\gcd(n, c_i + c_{i+1}) > 1$ za vsak $1 \leq i \leq m-1$.

Naloga 4.3. Najdi vse funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, da velja $f(f(x)f(y)) = xy$ in $f(2025x+1) = 2025x+1$ za vse $x, y \in \mathbb{N}$.

Naloga 4.4. Dano je naravno število $s \geq 2$. Za vsako naravno število k definiramo njegov zasuk k' na sledeč način: zapišemo k v obliki $as + b$, kjer sta a in b nenegativni celi števili in $b < s$; potem je $k' = bs + a$. Za naravno število n si oglejmo neskončno zaporedje d_1, d_2, \dots , kjer je $d_1 = n$ in je d_{i+1} zasuk števila d_i za vsako naravno število i . Pokaži, da to zaporedje vsebuje število 1 natanko tedaj, ko je ostanek števila n pri deljenju s $s^2 - 1$ bodisi 1 bodisi s .

Naloga 4.5. Določi vse funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katere $a + f(b) \mid a^2 + bf(a)$ za vse $a, b \in \mathbb{N}$ z $a + b > 2025$.

Naloga 4.6. Določi vse naravne n , za katere obstaja permutacija njihovih deliteljev (d_1, d_2, \dots, d_k) , da je za vsak $1 \leq i \leq k$ število $d_1 + d_2 + \dots + d_i$ popoln kvadrat.

Naloga 4.7. Naj bodo $a > 1, b \neq 0$ in $c \geq 1$ cela števila. Dokaži, da obstaja naravno število n , za katerega ima $a^n + b$ delitelja oblike $cx + 1$ za nek $x \in \mathbb{N}$.

Naloga 4.8. Naravno število n je *mašinsko*, če je $n + 4k^2$ praštevilo za vse naravne $0 < k < n$. Najdi vsa mašinska števila.