Grafi

Luka Urbanc

12. oktober 2023

(Enostavni, neusmerjeni) graf G je urejen par (V, E) množice *vozlišč* (*točk*) V in množice *povezav* (tudi *robov, vej*) $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\}$.[1] So precej uporaben koncept, kadar imamo opravka z nekimi objekti in relacijami med njimi, torej kadar se ukvarjamo z matematiko.

Stopnja vozlišča je število povezav, ki ga vsebujejo. Označimo jo z $\deg(x)$. Minimalno stopnjo vozlišč grafa G označimo z $\delta(G)$, maksimalno pa z $\Delta(G)$.
Sprehod je zaporedje povezav, ki povezujejo zaporedje vozlišč.
Enostaven sprehod je sprehod, kjer se povezave ne ponavljajo.
Pot je enostaven sprehod, kjer se vozlišča ne ponavljajo.
Cikel je enostaven sprehod, kjer sta prvo in zadnje vozlišče enaka, ostala pa so si različna.
Obhod je sprehod, katerega prvo in zadnje vozlišče sta enaki.
Graf je *povezan*, če za poljuben par vozlišč obstaja sprehod med njima. *Povezana komponenta* je maksimalen povezan podgraf.
Drevo je povezan graf brez ciklov. *Gozd* je nepovezana unija dreves.
Polni graf K_n je graf z n vozlišči, kjer je vsak par vozlišč povezan.
Dvodelni graf je graf, katerega vozlišča lahko razdelimo na dve množici $X, Y \subseteq V$ tako, da znotraj X-a in Y-a ni povezav.

1 Splošno

Naloga 1.1. Dokaži, da je vsota stopenj vseh vozlišč enaka dvokratniku števila povezav.

Naloga 1.2. Dokaži, da ima vsak graf pot dolžine $\geq \delta$ in, če je $\delta \geq 2$, cikel dolžine $\geq \delta + 1$.

Naloga 1.3. Dokaži, da ima vsak graf G z vsaj eno povezavo podgraf H, za katerega velja $\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$.

Naloga 1.4. Dan je graf z $2n+1$ vozlišči. Za vsako množico največ n vozlišč velja, da obstaja vozlišče, ki ni med njimi in je povezano z vsemi vozlišči v množici. Dokaži, da obstaja vozlišče, ki je v grafu povezano z vsemi ostalimi.[2]

Naloga 1.5. Naj bo G graf. Povezavi $e \in E$ pravimo *flagrantna*, če lahko V razdelimo na taki dve disjunktni podmnožici A in B, da ima ≤ 100 povezav G-ja en konec v A in drug v B in je e ena takih povezav.
Dokaži, da obstaja največ $100|V|$ flagrantnih povezav.

Naloga 1.6. V neki stavbi je 1002001 sob, postavljenih v obliki 1001×1001 kvadratne tabele. Sobi sta sosednji, če imata skupen zid. Ali je mogoče, da ima vsaka soba natanko dvoje vrat v sosednje sobe?

Naloga 1.7 (Turánov izrek)**.** Za graf G velja, da nima podgrafa oblike K_{r+1}. Dokaži:

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{|V|^2}{2}$$

Naloga 1.8. Dokaži, da ima graf G vsaj $\frac{|E|(4|E|-|V|^2)}{3|V|}$ trikotniških podgrafov (K_3).

[1] Poznamo tudi usmerjene grafe, kjer so elementi E-ja urejeni pari, multigrafe, kjer lahko obstaja več povezav med dvema vozliščema, grafe z zankami, kjer je lahko vozlišče povezano samo s seboj...

[2] Glej tudi t.i. *friendship theorem*: če za graf velja, da ima poljuben par vozlišč natanko enega skupnega soseda, mora obstajati eno vozlišče, ki je sosednje vsem ostalim.

Naloga 1.9 (Caro-Weijev izrek)**.** Neodvisna množica $I \subseteq V(G)$ je taka množica vozlišč, da nobeni dve nista povezani. Za nek graf G z $\alpha(G)$ označimo največjo možno velikost neodvisne množice. Dokaži, da velja

$$\alpha(G) \geq \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{\deg(x)+1}.$$

Naloga 1.10. Naj bo $p(x)$ nekonstantni polinom s celoštevilskimi koeficienti. Dokaži, da ne obstaja funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, za katero za vse naravne n velja $p(n) = |\{x \in \mathbb{Z} \mid f^n(x) = x\}|$.

Naloga 1.11. (*) Dokaži, da lahko graf G z $|V| > 2$ razdelimo na gozd in na največ $K \cdot |V| \ln |V|$ disjunktnih ciklov, kjer je K konstanta neodvisna od $|V|$.

2 Povezane komponente

Naloga 2.1. Dokaži, da je v grafu G število povezanih komponent $|C|$ večje ali enako $|V| - |E|$. Kdaj je dosežena enakost?

Naloga 2.2. Naj bo p praštevilo in $a_1, a_2, \ldots, a_p$ cela števila. Dokaži, da obstaja celo število k, za katerega imajo $a_1 + 1 \cdot k,\ a_2 + 2 \cdot k,\ \ldots,\ a_p + p \cdot k$ vsaj $\frac{p}{2}$ različnih ostankov pri deljenju s p.

Naloga 2.3. Dano je naravno število $n > 1$. Na pobočju gore je n^2 postaj, vse na različnih nadmorskih višinah. Vsako od dveh žičničarskih podjetij A in B upravlja s k žičnicami; vsaka žičnica vozi potnike iz ene od postaj na drugo višjo postajo (brez vmesnih postankov). Vseh k žičnic podjetja A ima k različnih začetnih postaj in k različnih končnih postaj, pri čemer žičnica, ki se začne višje, tudi konča višje. Enaki pogoji veljajo tudi za žičnice podjetja B. Pravimo, da podjetje povezuje dve postaji, če lahko potnik pride z nižje postaje na višjo postajo z uporabo ene ali več žičnic tega podjetja (med postajami niso dovoljeni nobeni drugi premiki).
Določi najmanjše naravno število k, za katero zagotovo obstajata dve postaji, ki ju povezujeta obe podjetji.

3 Drevesa

Naloga 3.1. Poliomine, sestavljene iz ≥ 1585 kvadratkov, okličemo za *slastne*. Najdi največji n, za katerega obstaja poliomina, sestavljena iz n kvadratkov, ki je ni mogoče razdeliti na dve slastni poliomini.

Naloga 3.2. Dan je graf z $|V| \geq 6$, $\delta \geq 3$. Označimo vse cikle tega grafa s $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k$. Določi vse možne vrednosti $d := \gcd(|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|)$.

4 Dvodelni grafi

Naloga 4.1. Dokaži, da je graf dvodelen, če in samo če nima cikla lihe dolžine.

Izrek 4.1 (Hallov izrek)**.** *Naj bo $G = (V, E)$ dvodelen graf z deloma X in Y. Popolno prirejanje $M \subseteq E$ iz X v Y je množica $|X|$ disjunktnih povezav v G (torej je vsako vozlišče v X v popolnem prirejanju povezano z natanko enim vozliščem v Y).*
V grafu G obstaja popolno prirejanje iz X v Y natanko tedaj, ko velja, da je za vsako podmnožico $A \subseteq X$ število vozlišč v Y, ki so sosednja vsaj enemu vozlišču v A (kar označujemo z $|N(A)|$), vsaj $|A|$.

Naloga 4.2. Dana sta dva enaka lista papirja ploščine 2023. Vsak kos razrežemo na 2023 večkotnikov, tako da ima vsak površino natanko 1. Nato lista postavimo enega na drugega tako, da se popolnoma prekrivata. Pokaži, da lahko z 2023 žebljički preluknjamo vse večkotnike.

Naloga 4.3. V $n \times n$ kvadratni tabeli je označenih $2n$ kvadratkov. Dokaži, da obstaja $k > 1$ in $2k$ različnih označenih kvadratkov $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2k}$, da sta za vsak i kvadratka a_{2i-1} in a_{2i} v isti vrstici, kvadratka a_{2i} in a_{2i+1} pa v istem stolpcu (indekse razumemo modulo $2k$).

Naloga 4.4. Dokaži, da v dvodelnem grafu G, katerega vozlišča imajo vsa isto stopnjo, obstaja popolno prirejanje.