Uvod v rodovne funkcije

Luka Urbanc

4. januar 2024

1 Kaj in zakaj

Recimo, da nas zanima neko zaporedje $a_0, a_1, \dots$, ki je lahko definirano z neko rekurzivno relacijo, lahko šteje velikosti določenih množic, ali pa je kaj še zapletenejšega. Ena splošnejših idej, ki nam pri obravnavi takih zaporedij pogosto pomaga, je metoda *rodovnih funkcij*. Rodovne funkcije so preprosto izrazi oblike

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

kjer so a_n členi našega zaporedja, x pa je (da se ognemo problemom konvergence) neka "formalna spremenljivka", kar pomeni, da jo (vsaj za zdaj) obravnavamo le kot simbol, ki zadošča nam znanim pravilom množenja, ne pa kot neko poljubno število.

A le kako naj bi nam ta ideja olajšala življenje? Najprvo, rodovne funkcije mnogih kombinatoričnih zaporedij imajo pogosto presenetljivo lepo obliko, ker imajo seštevanje, množenje in odvajanje rodovnih funkcij zanimive kombinatorične interpretacije. Sledi, da lahko z njimi rešimo različne probleme iz kombinatoričnega štetja tako, da zapleten problem pretvorimo v neko preprosto računanje z rodovnimi funkcijami, nato pa izračunamo koeficiente dobljene rodovne funkcije. Poleg tega lahko včasih z njimi celo izpeljemo izraz za zaporedje sámo (glej Fibonaccijeva števila), če pa to ne gre, pa vsaj asimptotsko rast zaporedja, kakšne kongruence, rekurzivne zveze ipd.

2 Nekaj primerov

Za pokušino izpeljimo klasični primer: rodovna funkcija konstantnega zaporedja $a_n = 1$. Zanima nas torej lepši izraz za rodovno funkcijo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Opazimo, da je $xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ enaka $f(x)$, le brez člena $1 \cdot x^0$, torej velja $xf(x) = f(x) - 1 \implies (1-x)f(x) = 1 \implies f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Za nekoliko zanimivejši primer si oglejmo še rodovno funkcijo zaporedja Fibonaccijevih števil $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ in $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $\forall n \geq 2$. Zanjo velja

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = x + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &= x + x(f(x) - 0) + x^2 f(x) = x + f(x)(x^2 + x), \end{aligned}$$

torej je $f(x) \cdot (1 - x - x^2) = x$ in $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$. Izkaže se (in to ni naključje, ampak sledi iz izreka o razčlenitvi na parcialne ulomke), da lahko ta ulomek zapišemo kot vsoto dveh, katerih imenovalca sta linearni funkciji. Naj bo $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, β pa $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-x\alpha)(1-x\beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{1-x\alpha} - \frac{1}{1-x\beta}\right) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n}{\sqrt{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n.$$

S tem smo z lahkoto izpeljali Binetovo formulo $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$.

Ime zaporedja	Splošni člen	Vrsta	"Lepša" oblika
Geometrijsko zaporedje	$a_n = a^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$	$\frac{1}{1-ax}$
Aritmetično zaporedje	$a_n = n$	$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$	$\frac{x}{(1-x)^2}$
Binomski simboli ($m \in \mathbb{N}$)	$a_n = \binom{n}{m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^n$	$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$
Binomski simboli 2 ($z \in \mathbb{C}$)	$a_n = \binom{z}{n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} x^n$	$(1+x)^z$
Srednji binomski simboli	$a_n = \binom{2n}{n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$	$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

Zgornja obravnava deluje splošneje za vsa linearna rekurzivna zaporedja, tj. zaporedja z rekurzivnim predpisom oblike $a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + c_{d-2}a_{n+d-2} + \cdots + c_0 a_n$ za $n \geq 0$. Velja:

Izrek 2.1. *Za zaporedje s predpisom $a_{n+d} = c_{d-1}a_{n+d-1} + c_{d-2}a_{n+d-2} + \cdots + c_0 a_n$ za $n \geq 0$ velja:*

$$a_n = \sum_{\lambda:\ q(\lambda)=0} \frac{p_\lambda(n)}{\lambda^n}.$$

Tu gre vsota čez ničle polinoma $q(x) = x^d - c_{d-1}x^{d-1} - \cdots - c_1 x - c_0$ (t.i. karakterističnega polinoma našega zaporedja), $p_\lambda(x)$ pa so polinomi stopnje manjše od stopnje ničle λ polinoma $q(x)$. Koeficiente polinomov $p_\lambda(x)$ se torej da izračunati iz rešitve sistema linearnih enačb, če imamo podanih vsaj d členov zaporedja.

3 Uporaba močnih konceptov

Naloga 3.1. Izračunaj rodovno funkcijo zaporedja $a_n = n^2$.

Naloga 3.2. Definirajmo zaporedje a_n z $a_0 = 1$ in $a_{n+1} = 2a_n + n$ za $n \geq 0$. Z uporabo rodovnih funkcij najdi preprost izraz za a_n.

Naloga 3.3. Dokaži izraz za zadnjo rodovno funkcijo v tabeli na prvi strani. Morda ti prav pride identiteta $\binom{2n}{n} = (-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$.

Naloga 3.4. Najdi preprost izraz za zaporedje Catalanovih števil, ki so definirana z rekurzijo $a_n = a_{n-1}a_0 + a_{n-2}a_1 + \cdots + a_1 a_{n-2} + a_0 a_{n-1}$ za $n \geq 1$ in $a_0 = 1$.

Naloga 3.5. Dokaži izrek 2.1. Morda ti prav pride iskanje termina *"partial fraction decomposition"* z izbranim iskalnikom.

Naloga 3.6. *Particija* naravnega števila n je naraščajoče zaporedje naravnih števil $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k$ z vsoto enako n. S $p(n)$ označimo število particij n-ja.

a) Zapiši rodovno funkcijo zaporedja $p(n)$ v obliki neskončnega produkta.

b) (*) Dokaži, da je inverz te rodovne funkcije enak $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}$. Iz tega izpelji rekurzivno formulo za $p(n)$.[1]

4 Kombinatorika/bolj "olimpijadne" nalogice

Naloga 4.1. Poenostavi izraz $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2$.

Naloga 4.2. Poenostavi vsoto $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Naloga 4.3. Za poljubno nenegativno celo število n določi število polinomov $p(x)$ s koeficienti v množici $\{0, 1, 2, 3\}$, za katere velja $p(2) = n$.

Naloga 4.4. Za neko fiksno naravno število n in poljubno permutacijo $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ definiramo *inverzni par* kot par dveh naravnih števil $i < j$, za katerega velja $\pi(i) > \pi(j)$. Naj bo a_k število permutacij π, ki imajo natanko k inverznih parov. Izračunaj rodovno funkcijo zaporedja a_k.

Naloga 4.5. Za poljubno podmnožico nenegativnih celih števil S z $r_S(n)$ označimo število urejenih parov različnih elementov $s_1, s_2 \in S, s_1 \neq s_2$, ki zadoščajo $s_1 + s_2 = n$. Ali je možno nenegativna cela števila razdeliti na dve disjunktni podmnožici A in B ($A \cup B = \mathbb{Z}_{\geq 0}, A \cap B = \varnothing$), da za vse nenegativne cele n velja $r_A(n) = r_B(n)$?

Naloga 4.6. Naj bo $a_0, a_1, \ldots$ táko naraščajoče zaporedje nenegativnih celih števil, da lahko vsako nenegativno celo število na edinstven način izrazimo kot $a_i + 2a_j + 4a_k$. Določi a_{2024}.

Naloga 4.7. Naj bo n naravno število. Če obstajata dve zaporedji $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ne enaki do permutacije, za kateri sta zaporedji

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n \text{ (vse vsote } a_i + a_j \text{ z } 1 \leq i < j \leq n) \text{ in}$$

$$b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n \text{ (vse vsote } b_i + b_j \text{ z } 1 \leq i < j \leq n)$$

enaki do permutacije, dokaži, da je n potenca števila 2.

[1] S kompleksno analizo se da izpeljati izredno zanimivo asimptotsko formulo $p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4\sqrt{3}n}$, prav tako pa zapleteno eksplicitno formulo za $p(n)$.