Pozdrav iz kuhinje: Algebra

Luka Urbanc

18. avgust 2025

1 Zaporedja

Naloga 1.1. Zaporedje $(a_i)_{i\geq 1} \subseteq \mathbb{N}$ zadošča enačbi $a_n = \sqrt{(n+1)a_{n-1}+1}$ za vse $n \geq 2$. Določi a_1.

Naloga 1.2. Naj bo $N \in \mathbb{N}$. Zaporedje nenegativnih realnih števil $(x_n)_{n\geq 1}$ zadošča zvezi

$$x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{x_i x_{n-i}}$$

za vse naravne $n > N$. Dokaži, da obstaja realna konstanta $c > 0$, da je $x_n \leq \frac{n}{2} + c$ za vse naravne n.

Naloga 1.3. Za zaporedje pozitivnih realnih števil $(a_i)_{i\geq 1}$ velja $a_n \geq a_{2n} + a_{2n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo naravnih števil m, za katere velja

$$2m \cdot a_m > (4m-3) \cdot a_{2m-1}.$$

Naloga 1.4. Zaporedje realnih števil $(a_i)_{i\geq 1}$ zadošča

$$a_n = -\max_{i+j=n}(a_i + a_j)$$

za vse $n > 2025$. Dokaži, da je zaporedje omejeno.

Naloga 1.5. Ali obstajata omejeni zaporedji $a_1, a_2, \ldots$ in $b_1, b_2, \ldots$, da za vsak par naravnih števil n in $m > n$ velja vsaj ena od neenakosti $|a_m - a_n| > 1/\sqrt{n}$, $|b_m - b_n| > 1/\sqrt{n}$?

2 Polinomi

Naloga 2.1. Naj bo $n > 1$ naravno število in naj bo $P \in \mathbb{Z}[x]$ polinom stopnje n. Naj bo A množica nekih $n+1$ zaporednih celih števil. Dokaži, da obstaja $a \in A$, da $P(x) \neq a$ za vse $x \in \mathbb{Z}$.

Naloga 2.2. Določi vsa naravna števila n, za katera velja sledeča izjava: če za nek polinom $P \in \mathbb{Z}[x]$ veljajo neenakosti $0 \leq P(k) \leq n$ za vse $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n+1$, potem $P(0) = P(1) = \cdots = P(n+1)$.

Naloga 2.3. Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, k$ in M naravna števila, za katera velja

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{in} \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$

Če $M > 1$, dokaži, da polinom $P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$ nima pozitivnih ničel.

Naloga 2.4. Naj bosta $A(x,y)$ in $B(x,y)$ polinoma v dveh spremenljivkah z realnimi koeficienti. Denimo, da je $A(x,y)/B(x,y)$ polinom v x za neskončno vrednosti y in polinom v y za neskončno vrednosti x. Dokaži, da B deli A, torej da obstaja polinom v dveh spremenljivkah z realnimi koeficienti $C(x,y)$, da velja $A = B \cdot C$.

Naloga 2.5. Če za monična polinoma $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ velja $P(P(z)) = Q(Q(z))$ za vse $z \in \mathbb{C}$, dokaži, da $P = Q$.

Naloga 2.6. Najdi vse take nekonstantne polinome $P \in \mathbb{C}[x]$, da imajo vse ničle polinomov $P(z)$ in $P(z) - 1$ absolutno vrednost 1.

3 Funkcijske (ne-)enačbe

Naloga 3.1. Naj bo $\mathbb{Z}_{>1}$ množica celih števil, strogo večjih od 1. Ali obstaja funkcija $f\colon \mathbb{Z}_{>1} \to \mathbb{Z}_{>1}$, za katero velja $f^{f(n)}(m) = m^n$ za vse $m, n \in \mathbb{Z}_{>1}$?

Naloga 3.2. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katere velja $f^m(n) + f(mn) = f(m)f(n)$ za vse $m, n \in \mathbb{N}$.

Naloga 3.3. Za katere $a \in \mathbb{R}$ obstaja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da velja $f(x - f(y)) = f(x) + a\lfloor y \rfloor$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$?

Naloga 3.4. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, za katere za vse $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ velja

$$x\Big(f(x) + f(y)\Big) \geq \Big(f(f(x)) + y\Big)f(y)$$

Naloga 3.5. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere za vse $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$f\left(x^2 + 2yf(x)\right) + f(y)^2 \leq f\left((x+y)^2\right).$$

4 Bonus

Naloga 4.1. Ali obstaja realni polinom v dveh spremenljivkah $P \in \mathbb{R}[x,y]$, katerega zaloga vrednosti je natanko $\mathbb{R}_{>0}$?

Naloga 4.2. Naj bo $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funkcija. Dokaži, da obstaja neskončno $c \in \mathbb{Z}$, za katere funkcija $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ s predpisom $g(x) = f(x) + cx$ ni bijektivna.

Naloga 4.3. Določi najmanjše realno število $C > 1$, za katerega velja sledeča izjava: za vsak $2 \leq n \in \mathbb{N}$ in vsako zaporedje necelih pozitivnih realnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki zadošča $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$, je možno izbrati naravna števila $b_i \in \{\lfloor a_i \rfloor, \lfloor a_i \rfloor + 1\}$, da velja

$$1 < \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} \leq C.$$

Naloga 4.4. Določi vse take neomejene funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, da so za vsako aritmetično zaporedje celih števil a, b, c števila $f(a), f(b), f(c)$ permutacija nekega aritmetičnega zaporedja.

Naloga 4.5. Naj bo n naravno število in $P \in \mathbb{R}[x]$ polinom, za katerega velja $P(0) = P(n)$. Dokaži, da obstaja vsaj n različnih parov realnih števil x, y, da je $y - x \in \mathbb{N}$ in $P(x) = P(y)$.