Indukcija Luka Urbanc 12. december 2024

Induction is the process of taking things within our experience to be representative of the world outside our experience. It is a process of projection or extrapolation.

Simon Blackburn

Induction for deduction, with a view to construction.

Auguste Comte

Induction makes you feel guilty for getting something out of nothing, and it is artificial, but it is one of the greatest ideas of civilization.

Herbert Wilf

Induction is the glory of science and the scandal of philosophy.

C. D. Broad

If it is love that makes the world go round, it is self-induction that makes electromagnetic waves go round the world.

Oliver Heaviside

Induction is a process of inference; it proceeds from the known to the unknown.

John Stuart Mill

Naloga 1

Naj bo $n = 2^k$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Dokaži, da lahko iz poljubne množice $2n - 1$ celih števil izberemo takih n, da je njihova vsota deljiva z n.

Naloga 2

Naj bo M končna podmnožica točk s celoštevilskimi koordinatami v evklidski ravnini, n pa naravno število. *Varna* pot je pot po točkah s celoštevilskimi koordinatami (kjer je vsak korak premik gor, dol, levo ali desno za dolžino 1) dolžine n, ki se začne na $(0, 0)$, konča na eni izmed točk (x, y) z $x + y = n$ in ne vsebuje nobene točke iz M.

Dokaži, da če obstaja ena varna pot, jih mora obstajati vsaj $2^{n-|M|}$.

Naloga 3

Na neki ulici v Fužinah, ki poteka od zahoda proti vzhodu, stoji $n \in \mathbb{N}$ blokov. Vsak blok ima svoj zahodni Mercator voziček (ki stoji zahodno od bloka in je usmerjen proti zahodu) in svoj vzhodni Mercator voziček (ki se nahaja na vzhodni strani bloka in gleda proti vzhodu). Vozički so vsi različno veliki. Ko nek zahodni in vzhodni voziček čelno trčita, večji ekskomunicira manjšega. Če pa nek voziček trči v zadnjo stran drugega, ga ne glede na njuno velikost vedno odstrani s ceste. Poleg tega je vsak voziček brez težav sposoben uničiti vsak blok; skoznje zdrsi kot maslo po vroči ponvi.

Naj bosta A in B dva bloka, kjer B stoji vzhodno od A. Če lahko prebivalec A zajezdi svoj vzhodni voziček in razblini blok B (in vse, kar stoji med njima), pravimo, da lahko A *useka* B. Podobno velja, da lahko B useka A, če lahko prebivalec B s svojim zahodnim vozičkom nepopravljivo dekonstruira A.

Dokaži, da obstaja natanko en blok, ki ga noben drug ne more usekati.

Naloga 4

Naj bo n naravno število. Na začetku je na tabli n-krat zapisano število 1. **Jan Genc** vsako minuto iz table izbere dve števili x in y, ju zbriše, in nanjo zapiše število $(x+y)^4$. Dokaži, da bo po $n-1$ minutah na tabli zapisano število, ki je večje ali enako $2^{\frac{4n^2-4}{3}}$.

Namig: seznani se z Jensenovo neenakostjo.

Naloga 5

Naj bo n naravno število. Na mizi leži n^2 okraskov pobarvanih z n različnimi barvami (ni nujno, da imamo natanko n okraskov vsake barve). Dokaži, da lahko okraske obesimo na n dreves na tak način, da je na vsakem drevesu točno n okraskov največ dveh različnih barv.

Naloga 6

Naj bo $3 \leq n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da lahko $n!$ zapišemo kot vsoto n različnih deliteljev $n!$.

Naloga 7

Na evklidski ravnini leži 10000 točk z naravnoštevilskima koordinatama, manjšima ali enakima 100. Kolikšno je najmanjše možno število premic, ki pokrivajo vse te točke z izjemo $(1,1)$? (Nobena premica ne sme potekati skozi $(1,1)$.)

Naloga 8

Naj bodo $x_1, \ldots, x_n$ in $y_1, \ldots, y_n$ realna števila. Naj bo $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matrika s koeficienti

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } x_i + y_j \geq 0; \\ 0, & \text{če } x_i + y_j < 0. \end{cases}$$

Denimo, da je B taka $n \times n$ matrika s koeficienti 0 in 1, da je vsota poljubne vrstice ali stolpca B enaka vsoti istoležeče vrstice oz. stolpca A. Dokaži, da $A = B$.

Naloga 9

Naj bo $\mathcal{S}$ množica z 2024 elementi in N celo število z $0 \leq N \leq 2^{2024}$. Dokaži, da je možno pobarvati vse podmnožice $\mathcal{S}$ s črno in belo tako, da velja:

- unija poljubnih dveh belih množic je bela,
- unija poljubnih dveh črnih množic je črna,
- belih množic je natanko N.