Teorija števil 1

Osnove ter nekaj malega redov inu LDE

Luka Urbanc

13. november 2023

1 Osnove

Naloga 1.1. Določi vsa naravna števila n, za katera $n + 2 \mid n^2 + 5$.

Naloga 1.2. Če so a, b, c in m cela števila, kjer $m \neq 0$ in sta si a in m tuja, dokaži, da iz $ab \equiv ac \pmod{m}$ sledi $b \equiv c \pmod{m}$.

Naloga 1.3. Najdi vse pare naravnih števil m, n, za katere je $1! + 2! + 3! + \cdots + m! = n^2$.

Naloga 1.4. Naj bo $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, m pa naravno število. Če $m \mid p(n)$ za m zaporednih naravnih števil n, dokaži, da $m \mid p(n)$ za vsa $n \in \mathbb{N}$.

Naloga 1.5. Danih je nekaj celih števil (ne nujno različnih) z vsoto 2023. Ali je lahko vsota njihovih sedmih potenc enaka 160120?

Naloga 1.6. Ali obstajajo taka tri naravna števila večja od 1, da je predhodnik kvadrata poljubnega med njimi deljiv z obema ostalima številoma?

Naloga 1.7. Določi vse pare celih števil m, n, za katere velja $m^3 + n^3 = (m + n)^2$.

Naloga 1.8. Koliko naravnih števil $1 \leq x \leq n$ zadošča sledeči enačbi: $x^2 \equiv x \pmod{n}$?

Naloga 1.9. Določi vse pare celih števil x, y, za katere velja $y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Naloga 1.10. Naj bo n naravno število in naj bodo $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ različna naravna števila iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, za katera velja, da n deli $a_i(a_{i+1} - 1)$ za vsak $i = 1, \ldots, k - 1$. Dokaži, da n ne deli $a_k(a_1 - 1)$.

Naloga 1.11. Ali obstaja strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil $(a_n)_{n\geq 1}$, za katerega velja, da vsebuje za poljubno nenegativno celo število k zaporedje $(a_n + k)_{n\geq 1}$ le končno mnogo praštevil?

Naloga 1.12. Dokaži, da velja $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$, kjer je p praštevilo, $0 \leq k \leq p - 1$ pa celo število.

Naloga 1.13. Najdi vse pare nenegativnih celih števil x, y, za katere velja $2^x - 3^y = 7$.

Naloga 1.14. Določi vse pare naravnih števil m, n, za katere velja $n^4 - n^3 + 3n^2 + 5 = m^2$.

Naloga 1.15. x, y in z so naravna števila, za katera velja $\gcd(x, y, z) = 1$ in $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je xyz popolni kvadrat.

Naloga 1.16. Najdi vse racionalne trojice x, y, z, za katere so $x + \frac{1}{yz}$, $y + \frac{1}{zx}$ in $z + \frac{1}{xy}$ cela števila.

Naloga 1.17. Najdi vse naravne n, za katere je $2^{n-1} \cdot n + 1$ popolni kvadrat.

Naloga 1.18. Naj bo $a > 1$ naravno število. Dokaži, da lahko med števili $a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, a^4 + a^3 - 1, \ldots$ izberemo neskončno takih, ki so si paroma tuja.

Naloga 1.19. Ali obstajata naravni števili a, b, za kateri sta a^2+b+2 in $4a+b^2$ popolna kvadrata?

Naloga 1.20. Dokaži, da za naravna števila a, b, c, d, za katera je $a^2+b^2+c^2+d^2 = 2023!$, mora veljati $a, b, c, d > 10^{300}$.

Naloga 1.21. Naj bo p praštevilo. Dokaži, da obstaja neskončno naravnih števil n, za katere $p \mid 2^n - n$.

Naloga 1.22. Dokaži, da za vsaka $a, n \in \mathbb{N}$ velja: zaporedje $a, a^a, a^{a^a}, \ldots$ je od nekega člena dalje konstantno mod n.

Naloga 1.23. Za katere n obstajata popolna sistema ostankov $a_1, \ldots, a_n$ in $b_1, \ldots, b_n$, da je $a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n$ tudi? Kaj pa, če želimo, da je popoln sistem ostankov $a_1b_1, \ldots, a_nb_n$?

Naloga 1.24. Določi vse pare nenegativnih celih števil x, y, za katere velja $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

Naloga 1.25. Z $d_1, d_2, \ldots, d_k$ označimo vse delitelje naravnega števila n, kjer velja $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Dokaži, da vedno velja $d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k \leq n^2$ in najdi vse n, za katere ta vsota deli n^2.

Naloga 1.26. Dokaži, da za naravni števili n, k, ki zadoščata $1 < k < n-1$, velja, da $\binom{n}{k}$ ni potenca praštevila.

Naloga 1.27. Dokaži, da za poljubna naravna števila a, b in n velja $n! \mid b^{n-1}a(a+b)(a+2b)\ldots(a+(n-1)b)$.

Naloga 1.28. Naj bo n naravno število in naj bo $\sigma(n)$ vsota njegovih deliteljev. Dokaži, da je n-to najmanjše naravno število, tuje n, večje ali enako $\sigma(n)$ ter določi, v katerih primerih velja enakost.

Naloga 1.29. Dokaži, da za katerokoli naravno število k in praštevilo p drži $\binom{k}{p} \equiv \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \pmod{p}$.

2 Redi & $\mathfrak{LDE}$

Naloga 2.1. Če so $a \geq 2$, m in n naravna števila, dokaži, da velja $\gcd(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\gcd(m,n)} - 1$.

Naloga 2.2. Če sta si a in $m > 0$ tuji celi števili, dokaži, da velja $\operatorname{ord}_m a \mid \varphi(m)$.

Naloga 2.3. Če sta $a > 1$ in m naravni števili, dokaži, da $m \mid \varphi(a^m - 1)$.

Naloga 2.4. V odvisnosti od celega števila m in praštevila p, koliko rešitev ima enačba $x^m \equiv 1 \pmod{p}$ za $1 \leq x \leq p-1$?

Naloga 2.5. Reši enačbo $x^3 + y^4 = 7$ v celih številih.

Naloga 2.6. Dokaži, da vsa praštevila $p \not\equiv 1 \pmod{k}$ delijo nek člen zaporedja $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^k + 1$.

Naloga 2.7. Dokaži, da so vsi prafaktorji $2^p - 1$, kjer je p liho praštevilo, oblike $2pk + 1$ za neko naravno število k.

Naloga 2.8. Dokaži, da so vsi praštevilski delitelji števil oblike $2^{2^n} + 1$ kongruentni $1 \pmod{2^{n+1}}$.

Naloga 2.9. Najdi vse naravne n za katere $n \mid 2^n - 1$.

Naloga 2.10. Če za različna $x, y \in \mathbb{Q}$ velja, da je $x^n - y^n$ celo število za neskončno naravnih števil n, dokaži, da sta x in y celi.

Naloga 2.11. Najdi vse naravne n za katere $n \mid 2^{n-1} + 1$.

Naloga 2.12. Določi vse pare naravnih števil m, n, za katere velja $2^n - 1 \mid m^2 + 9$.

Naloga 2.13. Najdi vse pare praštevil p, q, za katere velja, da $3p^{q-1} + 1 \mid 11^p + 17^p$.