Polinomi in odvodi

Zapiski z višjega nivoja priprav MMO

Luka Urbanc (lukau86.github.io)

11. februar 2026

Kazalo

1 Ogrevanje

Zavoljo manjše količine pisanja se najprej seznanimo z uporabno notacijo. Kogar ta notacija ne zanima v vsej njeni splošnosti, naj nadaljuje pri izreku 1.2.

Definicija 1.1: O-notacija

Naj bo D podmnožica kompleksnih števil in naj bosta $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ dve funkciji. Notacija $f = O(g)$ pomeni, da f *narašča kvečjemu tako hitro* kot g. Natančneje: obstaja $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, da je izraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ omejen za $|x| \geq M$, $x \in D$.

Vrednost te notacije je predvsem v tem, da nam zaradi nje pogosto ni potrebno pisati dolgih neenakosti. Vse člene, ki rastejo počasneje od g, lahko izpustimo. Kot primer: za funkcijo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iz neenakosti $f(n) \leq 67n + 4e^{-n} + 5\binom{n}{3} - 8$ sledi $f(n) = O(n^3)$. S tem zapisom izgubimo eksplicitnost, saj ne sledimo več točni meji za f, pridobimo pa na berljivosti in ohranimo glavno vsebino neenakosti.

Pogosto pišemo izraze oblike $f = g + O(h)$. To seveda pomeni, da velja $f - g = O(h)$. S tem ponavadi želimo povedati, da je funkcija g nekakšen približek za funkcijo f, napaka tega približka pa je »reda velikosti največ h«.

Zavedati se moramo, da $f = O(g)$ ne predstavlja enakosti, ampak le vsebovanost f-ja v množici funkcij, ki ne rastejo hitreje od g. Zaradi tega iz $f = O(h)$ in $g = O(h)$ ne moremo sklepati, da velja $f = g$. Bralec pa naj se sam prepriča, da iz teh dveh pogojev v resnici sledi $f - g = O(h)$.

Obstajajo še mnoge druge različice te notacije, ki so lepo razložene na spletni strani [1].

Zgornja definicija se nekoliko poenostavi za polinome. Ker nas bo v teh zapiskih zanimal le ta primer, si poglejmo še to različico.

Izrek 1.2: O-notacija za polinome

Če sta $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, velja $P(x) = O(Q(x))$ natanko tedaj, ko je stopnja P manjša ali enaka stopnji Q.

Izjava $P(x) = Q(x) + O(x^3)$ torej ne predstavlja nič drugega kot to, da se P in Q razlikujeta kvečjemu pri členih x^0, x^1, x^2 in x^3.

Za začetek se spopadimo s klasično polinomsko funkcijsko enačbo.

Primer 1.3

Naj bosta $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ monična. Če velja $P(P(x)) = Q(Q(x))$, dokaži $P(x) = Q(x)$.

Rešitev. Očitno iz enakosti $P(P(x)) = Q(Q(x))$ sledi, da sta stopnji P in Q enaki; recimo jima d. Samo z vstavljanjem vrednosti ne pridemo daleč, zato se raje poskusimo poigrati s koeficienti. Ključna ideja je, da se v enakosti $P(P(x)) = Q(Q(x))$ osredotočimo samo

na najvišje potence x-a, saj je v nižjih mnogo več kaosa. Veljata torej enakosti

$$P(P(x)) = P(x)^d + O(x^{d(d-1)}) \text{ in } Q(Q(x)) = Q(x)^d + O(x^{d(d-1)}),$$

iz česar sledi $P(x)^d - Q(x)^d = O(x^{d(d-1)})$. Iz tega želimo izpeljati $P(x) = Q(x)$. To bi šlo že z razpisovanjem koeficientov od najvišjega do nižjih, a tu bomo ubrali bolj uglajeno pot. Razpišimo

$$P(x)^d - Q(x)^d = (P(x) - Q(x))(P(x)^{d-1} + \cdots + Q(x)^{d-1}).$$

Stopnja drugega faktorja je natanko $d(d-1)$ (saj imajo vsi členi te vsote vodilni koeficient 1 in stopnjo $d(d-1)$), torej mora biti $P(x)-Q(x)$ konstanta, da bo produkt res v $O(x^{d(d-1)})$.

Pišimo torej $Q(x) = P(x) + c$ in predpostavimo $c \neq 0$. Iz začetne enačbe sledi

$$P(P(x)) = P(P(x) + c) + c.$$

Tega se poskusimo lotiti z metodami iz funkcijskih enačb. Prav bi nam prišla surjektivnost P-ja, s katero bi se znebili $P(x)$-ov v argumentih. A ta surjektivnost sledi iz osnovnega izreka algebre (dokler P ni konstanten)! Enačba $P(x) = y$ je ekvivalentna $P(x) - y = 0$, kar je nekonstanten polinom v x-u, torej ima vsaj eno rešitev.

Če je P nekonstanten, mora po tem razmisleku veljati kar $P(x) = P(x + c) + c$ za vse $x \in \mathbb{C}$. Ta enakost je podobna periodičnosti. Res, če obema stranema prištejemo x, dobimo $P(x)+x = P(x+c)+x+c$, kar je ravno periodičnost polinoma $R(x) = P(x)+x$. A nekonstanten polinom ne more biti periodičen, sicer bi imel neskončno mnogo različnih ničel. Sledi, da je $R(x) = k$, torej mora biti $P(x) = -x + k$. To pa ni možno, ker je P moničen.

V primeru, ko je P konstanten, pa je zaradi moničnosti obeh polinomov edina možnost seveda $P(x) = Q(x) = 1$. □

Sledeča naloga (lahko bi bil tudi izrek) je res presenetljiv del teorije realnih polinomov. Kot zanimivost: ekvivalentna izjava ne velja za polinome v več spremenljivkah.

Primer 1.4

Naj bo $P \in \mathbb{R}[x]$ polinom, za katerega velja $P(x) \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Dokaži, da obstajata realna polinoma $Q, R \in \mathbb{R}[x]$, da je $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

Rešitev. Ker je nenegativnost s koeficienti zelo težko povezati, raje razmišljajmo o ničlah. Zapišimo P v produktni obliki:

$$P(x) = a(x - r_1) \cdots (x - r_k)(x - z_1)(x - \overline{z_1}) \cdots (x - z_l)(x - \overline{z_l}),$$

kjer so r_i realne ničle, z_i in $\overline{z_i}$ pa kompleksne. Ker je polinom nenegativen, so stopnje realnih ničel sode, vodilni koeficient pa je nenegativen. »Realni« del produktne oblike P-ja, $a(x - r_1) \cdots (x - r_k)$, lahko torej zapišemo kot kvadrat nekega realnega polinoma $T(x)$.

Za drugi, »kompleksni« del izraza pa se moramo bolj potruditi. Najprej ga poskusimo spremeniti v realnega tako, da poparčkamo konjugirane pare kompleksnih ničel:

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 = (x-\operatorname{Re}(\alpha))^2 + \left(\sqrt{|\alpha|^2 - \operatorname{Re}(\alpha)^2}\right)^2.$$

Torej je $(x-z_1)(x-\overline{z_1})\cdots(x-z_l)(x-\overline{z_l})$ enak produktu l členov, kjer je vsak člen vsota dveh kvadratov realnih polinomov.

Da iz tega zaključimo, uporabimo t.i. Brahmaguptovo enakost

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

(Ta sicer ni nič čarobnega: bralec jo lahko izpelje iz enakosti $|z\cdot w|^2 = |z|^2\cdot|w|^2$ za kompleksni števili z, w.) Z njo lahko spremenimo zmnožek dveh členov, ki sta oba vsoti dveh kvadratov, v eno samo vsoto dveh kvadratov. Tako lahko naš produkt induktivno spremenimo v eno samo vsoto dveh kvadratov, $F(x)^2 + G(x)^2$. S tem dobimo izraz $P(x) = T(x)^2(F(x)^2+G(x)^2)$; naša želena polinoma sta ravno $T(x)F(x)$ in $T(x)G(x)$. □

Zdaj pa pojdimo na malo modernejše olimpijske naloge.

Primer 1.5: USEMO 2025/1

Najdi vsa realna števila λ, za katera obstaja naravno število $n \geq 2$ in aritmetično zaporedje realnih števil $a_0, a_1, \ldots, a_n$, da velja

$$(x-\lambda)(x-\lambda^2)\cdots(x-\lambda^n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Rešitev. Za začetek opazimo $a_0 = 1$. Kako izkoristiti dejstvo, da koeficienti polinoma tvorijo aritmetično zaporedje? Trik, ki ga uporabimo, je množenje z $(x-1)$. Naj bo $d = a_1 - a_0$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}(x-1)(x-\lambda)\cdots(x-\lambda^n) &= a_0x^{n+1} + (a_1-a_0)x^n + \cdots + (a_n - a_{n-1})x - a_n \\ &= x^{n+1} + dx^n + dx^{n-1} + \cdots + dx - (1+nd).\end{aligned}$$

Sedaj imamo lepe ničle in lepe koeficiente. Da iz tega dobimo protislovje, je smiselna le ena poteza: zloraba Vietovih formul. Uporabimo jih na členih x^n, x^1 in x^0:

$$\begin{aligned}1+\lambda+\cdots+\lambda^n &= -d, \\ \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(1+\frac{1}{\lambda}+\cdots+\frac{1}{\lambda^n}\right) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}(1+\lambda+\cdots+\lambda^n) &= d\cdot(-1)^n \quad \text{in} \\ \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} &= (1+nd)\cdot(-1)^n.\end{aligned}$$

Če je $d = 0$, iz tretje enačbe dobimo $|\lambda| = 1$. V nasprotnem pa isti zaključek sledi iz deljenja druge enačbe s prvo: $\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{n+1}$.

Če bi veljalo $\lambda = 1$, bi bil naš polinom $(x-1)^n$, katerega koeficienti očitno ne tvorijo aritmetičnega zaporedja za $n \geq 2$. Preostala nam je samo še možnost $\lambda = -1$. Zanjo pa deluje npr. $n = 2$: $(x+1)(x-1) = 1\cdot x^2 + 0\cdot x + (-1)$. □

Sedaj rešimo še dve nalogi, pri katerih je glavni korak ugotovitev potrebnega pogoja, da ničle polinoma pripadajo določeni množici.

Primer 1.6: IMC 2017/7

Naj bo $P \in \mathbb{R}[x]$ nekonstanten polinom. Za vsako naravno število m definiramo

$$Q_m(x) = (x+1)^m P(x) + x^m P(x+1).$$

Dokaži, da obstaja kvečjemu končno mnogo števil m, za katera ima Q_m same realne ničle.

Rešitev. Kako uporabiti realnost ničel? Definicija Q_m-jev nam ne ugaja, ker iz nje težko dostopamo do ničel. Na srečo pa lahko z lahkoto dostopamo do koeficientov. To nas prepriča, da bo pot do zmage spet zloraba Vietovih formul.

Tu uporabimo sledeč trik: če je $P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in so α_i vse realne, potem velja

$$0 \leq \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_i\alpha_j = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

torej $2\frac{a_{n-2}}{a_n} \leq \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2$. Izkaže se, da nam ta šibka meja pogosto že omogoča, da rešimo nalogo.

Naj bo $Q_m(x) = \sum_{i=0}^{m+n} b_i x^i$ in $m \geq 2$. Izračunamo sledeče:

$$\begin{aligned}
b_{m+n} &= 2a_n, \\
b_{m+n-1} &= ma_n + a_{n-1} + na_n + a_{n-1} = (m+n)a_n + 2a_{n-1} \quad \text{in} \\
b_{m+n-2} &= \frac{m(m-1)}{2}a_n + ma_{n-1} + a_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2}a_n + (n-1)a_{n-1} + a_{n-2} \\
&= \frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}a_n + (m+n-1)a_{n-1} + 2a_{n-2}.
\end{aligned}$$

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je a_n (in s tem b_{m+n}) pozitiven. Naša meja potem postane

$$\begin{aligned}
&0 \leq b_{m+n-1}^2 - 2b_{m+n}b_{m+n-2} \\
&= ((m+n)a_n + 2a_{n-1})^2 - 4a_n\left(\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}a_n + (m+n-1)a_{n-1} + 2a_{n-2}\right) \\
&= (a_n^2 - 2a_n^2)m^2 + O(m) = -a_n^2 m^2 + O(m).
\end{aligned}$$

To pa očitno ne velja za vse dovolj velike m. □

Primer 1.7: USA TSTST 2020/7

Določi vse nekonstantne polinome $P \in \mathbb{C}[x]$, za katere imata $P(z)$ in $P(z)-1$ vse ničle na kompleksni enotski krožnici $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Rešitev. Kako zaznati polinom z vsemi ničlami na S^1? Jasno je, da obstaja lep način, da zaznamo, ali je neko kompleksno število z na S^1: preverimo $|z| = 1$. Ekvivalentno, $z = \overline{z^{-1}}$. Množica S^1 je torej natanko množica fiksnih točk transformacije $z \mapsto \overline{z^{-1}}$. To nam da idejo, da to transformacijo izvedemo na vseh ničlah polinoma.

Z n označimo $\deg(P)$, z α_i ničle P, z a_i njegove koeficiente, s $\overline{P}$ pa P s konjugiranimi koeficienti (ekvivalentno, konjugiranimi ničlami). Poračunajmo:

$$\begin{aligned} x^n\overline{P}(x^{-1}) &= x^n\overline{a_n}\prod_{i=1}^{n}(x^{-1}-\overline{\alpha_i}) = \overline{a_n}\prod_{i=1}^{n}(1-x\overline{\alpha_i}) = \overline{a_n}\cdot(-1)^n\overline{\alpha_1\cdots\alpha_n}\prod_{i=1}^{n}(x-\overline{\alpha_i^{-1}}) \\ &= \overline{a_0}\prod_{i=1}^{n}(x-\overline{\alpha_i^{-1}}). \end{aligned}$$

To je iskani polinom s transformiranimi ničlami. Če ima P ničle le na enotski krožnici, bo $x^n\overline{P}(x^{-1}) = \sum_{k=0}^{n}\overline{a_{n-k}}x^k$ imel enak seznam ničel, torej bo obstajal nek $\omega \in \mathbb{C}$, da je $x^n\overline{P}(x^{-1}) = \omega P$. Sledilo bo torej $\overline{a_{n-k}} = \omega a_k$ za vse $0 \le k \le n$. Vidimo, da poleg tega velja še $|\omega| = 1$, ker $\omega a_n = \overline{a_0} = \overline{\omega^{-1}\overline{a_n}} = \overline{\omega^{-1}}a_n$. To je potrebni pogoj, ki smo ga iskali.

Sedaj ubijmo vse, kar je od naloge še ostalo. Po prejšnjem odstavku vidimo, da obstajata $\omega, \Omega \in S^1$, za katera velja $\overline{a_{n-k}} = \omega a_k = \Omega a_k$ za $1 \le k \le n-1$ ter $\overline{a_n} = \omega a_0 = \Omega(a_0 - 1)$. Iz zadnje enakosti sledi $\omega \neq \Omega$, kar ima za posledico $a_k = 0$ za vse $1 \le k \le n-1$. Za a_0 mora veljati $|a_0| = |a_0 - 1|$, kar implicira $\mathrm{Re}(a_0) = \frac{1}{2}$. Ne pozabimo še na pogoj $|a_n| = |a_0|$.

Preveriti moramo še, da tovrstni polinomi res delujejo. To nalogo prepuščamo bralcu. □

S podobnim, a lažjim, razmislekom lahko bralec reši še to nalogo:

Domača naloga: ELMO SL 2025/A2

Naj bo n naravno število. Določi največje možno število k, za katero obstaja polinom $P \in \mathbb{C}[x]$ stopnje n ter takih k točk $z_1, z_2, \ldots, z_k \in S^1$, da je $P(z_i)$ realno število za vse $1 \le i \le k$.

Definicija 1.8

Kompleksno število z je n-ti koren enote, če reši enačbo $z^n = 1$. Eksplicitno jih zapišemo z $e^{2\pi ik/n} = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)$, kjer je $0 \le k \le n-1$ celo število.

Nasvet

Koreni enote so uporabni kot filter, ki zazna števila v aritmetičnih zaporedjih: če je $\zeta = e^{2\pi ik/n}$, velja

$$\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{kt} = \begin{cases} \frac{1-\zeta^{tn}}{1-\zeta^t} = 0 & \text{za } n \nmid t, \\ n & \text{za } n \mid t. \end{cases}$$

V prvi enakosti smo uporabili formulo za vsoto geometrijskega zaporedja.

Za polinom $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ torej velja

$$\sum_{t=0}^{n-1} P(\zeta^t) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{t=0}^{n-1} a_k \zeta^{tk} = n \sum_{k=0}^{\lfloor m/n \rfloor} a_{nk}.$$

S koreni enote smo izluščili vsoto tistih koeficientov a_i, za katere i pripada aritmetičnemu zaporedju $(nk)_{k=0}^{\infty}$. Obstaja mnogo variacij na to idejo; bralec naj o njih sam premisli. (Kako izluščiti splošno aritmetično zaporedje? Kaj se zgodi, če namesto vrednosti P seštevamo vrednosti $P \cdot Q$? Kaj, če vzamemo zelo velik n?)

Primer 1.9

Na enotski krožnici je n točk $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Velja, da je za poljubno točko P na enotski krožnici število $\prod_{i=1}^{n} |PP_i|$ manjše ali enako 2. Dokaži, da te točke tvorijo pravilen n-kotnik.

Rešitev. Pojdimo v kompleksna števila. Naj bodo te točke $z_1, z_2, \ldots, z_n \in S^1$ (kot pri prejšnji nalogi $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ predstavlja kompleksno enotsko krožnico). Predpostavka v nalogi je torej to, da za polinom $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_n)$ velja $|P(z)| \leq 2$ za vse $z \in S^1$.

Ta neenakost za neka fiksna števila z ni veliko vredna; potrebno jo je nekako razpršiti po mnogih z naenkrat. Ključna ideja je sešteti vrednosti polinoma po različnih pravilnih n-kotnikih, torej po točkah $\omega\zeta^k$, kjer je $\omega \in S^1$ poljuben, ζ pa je n-ti koren enote $e^{2\pi i/n}$:

$$2n \geq \sum_{k=0}^{n-1} |P(\omega\zeta^k)| \geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega\zeta^k) \right| = n|\omega^n + (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n|.$$

Vidimo, da lahko s pravilno izbrano ω dosežemo, da je zadnja absolutna vrednost enaka 2, s tem pa smo dosegli enakost v tej verigi neenakosti! Iz tega sledi, da za ta ω velja $|P(\omega\zeta^k)| = 2$ za vse $0 \leq k \leq n-1$, prav tako pa so vsa števila $P(\omega\zeta^k)$ usmerjena v enako smer (to je namreč edini primer enakosti za trikotniško neenakost). To pomeni, da so ta števila vsa enaka 2ξ za nek $\xi \in S^1$.

Polinom $P(z) - 2\xi$ ima zato ničle $\omega\zeta^k$ za $0 \leq k \leq n-1$, torej mora biti enak polinomu $z^n - \omega^n$. To pa zaključi dokaz – ničle polinoma $P(z) = z^n - (\omega^n - 2\xi)$ namreč tako rekoč po definiciji tvorijo pravilni n-kotnik! □

Sledeča naloga je sama po sebi sicer precej težka, a postane bolj rešljiva, če se zavedamo, da njena rešitev vključuje pametno uporabo korenov enote.

Izziv: USEMO 2021/5

Naj bo $S\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ funkcija, ki polinom preslika v vsoto kvadratov njegovih koeficientov. Naj bodo $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$ polinomi, za katere velja $P \cdot Q = R^2$. Dokaži, da je

$$S(P) \cdot S(Q) \geq S(R)^2.$$

2 Odvodi

Definicija 2.1

Odvod funkcije f v točki x je smerni koeficient tangente na graf f v točki $(x, f(x))$, če ta obstaja. Označimo ga s $f'(x)$.

Dovolj »lepe« funkcije so odvedljive, kar pomeni, da lahko na vsaki točki dobro definiramo tangento na njihov graf. Intuitivno to pomeni, da so te funkcije »lokalno skoraj linearne«.

Za odvedljive funkcije je $f'(x)$ spet neka funkcija, ki jo, če je dovolj lepa, lahko spet odvajamo. Tako dobimo drugi odvod $f''(x)$. Postopek lahko (z malo sreče) ponavljamo in tako za vsako naravno število n dobimo n-ti odvod $f^{(n)}(x)$.

Velja, da so polinomi neskončnokrat odvedljivi (obstajajo vsi njihovi odvodi $P^{(n)}(x)$).

Izrek 2.2

Odvod komutira s seštevanjem in odštevanjem: $(f \pm g)' = f' \pm g'$. Odvod produkta dveh funkcij je $(fg)' = f'g + fg'$. Odvod ulomka dveh funkcij je $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$. Odvod kompozituma dveh funkcij je $(f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g)$.

Iz teh pravil sledi, da je odvod $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ enak $P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Opazimo, da se stopnja nekonstantnega polinoma pri odvajanju zmanjša za natanko 1. Torej je $\deg(P)$-ti odvod P-ja neničelna konstanta, $\deg(P)+1$-ti pa je enak 0. Na podoben način odvajanje vpliva tudi na večkratnost ničel.

Definicija 2.3

Oznaka $P(x)^k \mid\mid Q(x)$ pomeni, da $P(x)^k \mid Q(x)$ in $P(x)^{k+1} \nmid Q(x)$.

Izrek 2.4

Večkratnost ničle nekonstantnega polinoma se z odvajanjem zmanjša za točno 1: če je $P \in \mathbb{C}[x]$ nekonstanten in $(x-\alpha)^k \mid\mid P(x)$ za $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, tedaj $(x-\alpha)^{k-1} \mid\mid P'(x)$.

Dokaz. Zapišimo $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$, kjer $Q(\alpha) \neq 0$. Po pravilih odvajanja sledi

$$P'(x) = k(x-\alpha)^{k-1} Q(x) + (x-\alpha)^k Q'(x).$$

Očitno velja $(x-\alpha)^{k-1} \mid P'(x)$ in $(x-\alpha)^k \nmid P'(x)$, s čimer zaključimo dokaz. □

Sledeči izrek je geometrijsko zelo intuitiven, hkrati pa je eden najpomembnejših, saj na netrivialen način poveže vrednosti funkcije z vrednostmi odvoda.

Izrek 2.5: Rollejev izrek

Če je f odvedljiva realna funkcija in velja $f(a) = f(b)$ za neka $a < b$, potem obstaja nek c med a in b, kjer je $f'(c) = 0$.

Navedimo še dve enostavni, a pomembni posledici tega izreka. Prvo se dokaže s preprosto indukcijo, drugo pa s kombinacijo Rollejevega izreka ter izreka o večkratnosti ničel odvoda.

Posledica 2.6

Če je f n-krat odvedljiva funkcija in $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ neke njene realne ničle, ima f' ničle b_i, kjer velja $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < b_{n-1} < a_n$. Po indukciji ima $f^{(n)}$ neko ničlo na intervalu (a_0, a_n).

Posledica 2.7

Če je P polinom z nekimi realnimi ničlami $a_1 \leq \cdots \leq a_m$, potem ima P' realne ničle $b_1 \leq \cdots \leq b_{m-1}$, za katere velja sledeče:

- $a_i \leq b_i \leq a_{i+1}$ za vse i in
- če velja $a_i < a_{i+1}$, potem je $a_i < b_i < a_{i+1}$.

Če je P nekonstanten polinom, ki ima le realne ničle, je to seveda opis vseh ničel P'.

Zanimiva posledica te izjave je to, da če je x večkratna ničla $P^{(k)}$ (za nek $k \leq \deg(P)$) in ima P le realne ničle, mora x biti tudi večkratna ničla P.

Na tem mestu si zasluži omembo še izrek, ki velja ne le za odvedljive, ampak tudi za zvezne funkcije. To so funkcije, katerih graf nima »nenadnih skokov« (na list bi ga lahko narisali, ne da bi dvignili svinčnik). Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna; posebej, polinomi so zvezni.

Izrek 2.8: Izrek o vmesni vrednosti

Če je f zvezna realna funkcija in velja $f(a) \leq x \leq f(b)$, obstaja c med a in b, da je $f(c) = x$.

Ena lepših posledic do zdaj nabrane teorije je sledeči klasični izrek.

Izrek 2.9: Descartesovo pravilo predznakov

Naj bo $P \in \mathbb{R}[x]$ polinom. Pišimo $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{b_k}$, kjer so koeficienti a_k neničelni, zaporedje eksponentov $b_k \geq 0$ pa strogo naraščajoče. Z $V(P)$ označimo število sprememb predznakov v zaporedju $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$, tj. število indeksov k, za katere je $a_k a_{k+1} < 0$. Z $Z(P)$ označimo število (strogo) pozitivnih ničel P-ja, štetih z večkratnostjo.

Potem velja, da sta parnosti $V(P)$ ter $Z(P)$ enaki ter $Z(P) \leq V(P)$.

Dokaz. Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da je $b_0 = 0$, saj bi lahko v nasprotnem primeru naš polinom delili z x^{b_0}, kar ne bi spremenilo $Z(P)$ in $V(P)$. Poleg tega smemo iz podobnih razlogov predpostaviti $a_n > 0$.

Najprej dokažimo izjavo o parnosti. Opazimo, da je $V(P)$ sod, če $a_0 > 0$, in lih sicer. Ker je $P(0) = a_0$, za dovolj velike x pa je $P(x)$ pozitiven, pa vidimo, da je število pozitivnih ničel, štetih z večkratnostjo, prav tako sodo, če $a_0 > 0$, in liho sicer. (Intuitivno gledano to sledi, ker se predznak P-ja zamenja pri vsaki ničli lihe stopnje. Formalneje lahko to dokažemo s podobnim pristopom kot v primeru 1.4)

Preostal nam je še dokaz $Z(P) \leq V(P)$. Tega se lotimo z indukcijo po n. Za $n = 0$ je izjava seveda jasna, zato predpostavimo $n \geq 1$.

Po indukcijski predpostavki izrek velja za polinom P'. Sledi torej $Z(P') \leq V(P')$. Jasno je, da velja $V(P') \leq V(P)$. Kako pa naj bi povezali $Z(P')$ z $Z(P)$? Odgovor je seveda Rollejev izrek: iz posledice 2.7 takoj sledi $Z(P') \geq Z(P) - 1$. Potem velja

$$Z(P) \leq Z(P') + 1 \leq V(P') + 1 \leq V(P) + 1.$$

Ker imata $Z(P)$ in $V(P)$ isto parnost, $Z(P) = V(P) + 1$ nikakor ne more držati. To zaključi indukcijski korak in s tem tudi dokaz. □

Dovolj teorije, nadaljujmo s prakso.

Primer 2.10: Putnam 1958/A1

Naj bodo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realna števila, za katera velja

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Dokaži, da obstaja $x \in (0, 1)$, za katerega velja

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$

Rešitev. Če znamo integrirati, nas zgornji izraz spomni na integral spodnjega polinoma od 0 do 1. To nas motivira, da vpeljemo polinom

$$Q(x) = \frac{a_0}{1} x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

katerega odvod je $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ in ki ima po predpostavki ničlo v $x = 1$, poleg tega pa ima ničlo v $x = 0$. Po Rolleju sledi, da ima $Q'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ vsaj neko ničlo v $(0, 1)$. □

Primer 2.11: Putnam 2024/A2

Za katere polinome $P \in \mathbb{R}[x]$ velja deljivost $(P(x) - x)^2 \mid P(P(x)) - x$?

Rešitev. Motivacija za to rešitev je, da nam odvod veliko pove o večkratni deljivosti.

Če odvajamo zvezo

$$Q(x) \cdot (P(x) - x)^2 = P(P(x)) - x,$$

dobimo $P(x) - x \mid P'(x)P'(P(x)) - 1$, iz česar sledi

$$P(x) - x \mid P'(x)^2 - 1 = (P'(x) - 1)(P'(x) + 1).$$

Ker sta si ta faktorja tuja, za vsako ničlo α polinoma $P(x) - x$ z večkratnostjo k velja ali $(x-\alpha)^k \mid\mid P'(x)-1$ ali $(x-\alpha)^k \mid\mid P'(x)+1$. A prvi primer je nemogoč! $P'(x)-1$ je namreč ravno odvod $P(x) - x$, torej zanj velja $(x - \alpha)^{k-1} \mid\mid P'(x) - 1$. Sledi $(x - \alpha)^k \mid\mid P'(x) + 1$ za vse ničle, torej velja kar $P(x) - x \mid P'(x) + 1$. To pa je protislovje po stopnji za $\deg(P) \geq 2$, saj je v tem primeru polinom $P'(x)+1$ neničeln in nižje stopnje od polinoma $P(x) - x$. Primer $\deg(P) \leq 1$ pa ročno preverimo v potu svojega obraza. □

Nalogo lahko posplošimo:

Izziv: Iran RMM TST 2020/6

Za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, določi vse polinome $P \in \mathbb{C}[x]$ s stopnjo večjo od ena, za katere velja $(P(x) - x)^2 \mid P^n(x) - x$. (Tu $P^n(x)$ pomeni n-kratno kompozicijo polinoma s samim seboj.)

Primer 2.12: ELMO SL 2012/A3

Dokaži, da ima vsak polinom oblike $P(x) = 1 + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_kx^k$ ($k \geq n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$) vsaj $n - 2$ ne-realnih ničel (štetih z večkratnostjo).

Rešitev. Očitno nam bo prav prišla neka različica Rollejevega izreka. Če ima naš polinom $P(x) = 1 + x^nQ(x)$ (pišimo $m = \deg(Q) = k - n$) največ $n - 3$ ne-realnih ničel, mora imeti vsaj $k - (n - 3) = m + 3$ realnih. Po Rolleju sledi, da ima P' vsaj $m + 2$ realnih ničel, a to ni preveč uporabno, ker ima $P'(x) = x^{n-1}(nQ(x) + xQ'(x))$ tako ali tako ničlo visoke večkratnosti pri 0. Da se temu izognemo, ločeno uporabimo Rollejev izrek najprej na pozitivnih in nato še na negativnih številih.

Pa vzemimo l pozitivnih in $m + 3 - l$ negativnih realnih ničel P-ja. Potem ima (po posledici 2.7) P' vsaj $l-1$ pozitivnih in $m+2-l$ negativnih ničel. Skupaj je to vsaj $m+1$ neničelnih realnih ničel! A ker so vse njegove neničelne ničle tudi ničle $nQ(x) + xQ'(x)$, na tej točki pridemo to protislovja (stopnja $nQ(x) + xQ'(x)$ je namreč ravno m). □

Primer 2.13: USAMO 2025/2

Naj bosta $n > k$ naravni števili. $P \in \mathbb{R}[x]$ naj bo stopnje n z neničelnim konstantnim koeficientom in brez dvojnih ničel. Denimo, da velja sledeče: za vsako $(k+1)$-terico realnih števil $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, za katero velja $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 \mid P(x)$, je produkt $a_0 a_1 \cdots a_k$ enak 0. Dokaži, da P nima samih realnih ničel.

Rešitev. Pa predpostavimo, da ima P le realne ničle. Vidimo, da zadošča gledati primer $n = k+1$, saj bi lahko sicer namesto P opazovali nek njegov delitelj s stopnjo $k+1$. S tem lahko predpostavko rahlo preobrazimo v sledeče: naj bodo $r_1, \ldots, r_{k+1}$ različna neničelna realna števila, ki so natanko ničle moničnega polinoma P. Potem ima za vsak $1 \leq j \leq k+1$ polinom $P_j(x) = P(x)/(x - r_j)$ (ki ravno ustreza poljubnemu delitelju P stopnje k) nek ničelni koeficient.

Naj bo $1 \leq l(j) \leq k-1$ najmanjši eksponent, za katerega je $P_j[x^{l(j)}] = 0$ (s $P[x^m]$ označimo koeficient člena x^m v polinomu P). Ker po definiciji velja $(x - r_j)P_j = P$, sledi

$$P[x^{l(j)}] = P_j[x^{l(j)-1}] - r_j P_j[x^{l(j)}] = P_j[x^{l(j)-1}].$$

Preko te enakosti lahko med seboj povežemo koeficiente različnih P_j.

Ker imamo $k+1$ polinomov P_j in le $k-1$ možnih vrednosti $l(j)$, velja $l(i) = l(j)$ za neka $i \neq j$. Označimo to skupno vrednost $l(i)$ in $l(j)$ z l. Iz enakosti v prejšnjem odstavku sledi $P_i[x^{l-1}] = P[x^l] = P_j[x^{l-1}]$. To pomeni, da ima $Q = P_i - P_j = (r_i - r_j)\prod_{m \notin \{i,j\}}(x - r_m)$ kar dva zaporedna ničelna koeficienta, namreč $Q[x^l]$ in $Q[x^{l-1}]$.

Da to izkoristimo, odvajamo Q dokler nista ničelna koeficienta ravno konstantni in linearni. Sledi, da ima $Q^{(t)}$ v 0 ničlo stopnje vsaj 2. A po posledici 2.7 vidimo, da so večkratne ničle $Q^{(t)}$ nujno tudi večkratne ničle Q. Ker te ne obstajajo, je naloga rešena. □

Preden skočimo v bolj teoretskoštevilske vode, pa si za slaščico privoščimo še fizikov naljubši obrok, Taylorjevo vrsto.

Izrek 2.14

Za dovolj lepe (t.i. *realno analitične*) funkcije obstaja Taylorjev razvoj:

$$f(a+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n.$$

To nekako pomeni, da je funkcija določena samo s svojimi lokalnimi polinomskimi približki.

Polinomi so seveda še lepši; pri njih je ta razvoj končen (ker so vsi dovolj visoki odvodi enaki 0):

$$P(a+x) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} x^n.$$

Bralec naj se prepriča, da je za polinome ta izrek preprosta posledica binomskega izreka.

Primer 2.15: VJIMC 2022, kategorija I/1

Denimo, da $P \in \mathbb{R}[x]$ nima realnih ničel. Dokaži, da jih tudi polinom

$$Q(x) = P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \dots$$

nima.

Rešitev. Če poznamo formulo za Taylorjev razvoj in razumemo filter s koreni enote, je naloga enostavna. Zadošča namreč opaziti, da velja

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(2n)}(x)}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(x)}{n!}1^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(x)}{n!}(-1)^n\right) = \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}.$$

Če bi $Q(x)$ imel realno ničlo, bi torej sledilo, da je eden od $P(x+1)$ in $P(x-1)$ negativen, drugi pa pozitiven. A to bi po izreku o vmesni vrednosti pomenilo, da ima P nekje na intervalu $(x-1, x+1)$ realno ničlo, kar je protislovje. □

2.1 Uporaba odvoda v polinomskih diofantskih enačbah

Izrek 2.16: Mason-Stothers za $\mathbb{C}$

Naj bosta $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ tuja polinoma, ki nista oba konstantna. Tedaj ima polinom $PQ(P+Q)$ vsaj $\max\{\deg(P), \deg(Q)\} + 1$ različnih kompleksnih ničel.

Dokaz. Dokažimo raje bolj simetrično različico izreka (ki mu je očitno ekvivalentna): naj bodo $P, Q, R \in \mathbb{C}[x]$ tuji, ne vsi konstantni polinomi, za katere velja $P + Q + R = 0$. Tedaj ima PQR vsaj $\max\{\deg(P), \deg(Q), \deg(R)\} + 1$ različnih kompleksnih ničel.

Število različnih ničel polinoma P je natanko $\deg(P) - \deg(\gcd(P, P'))$. Ker so množice ničel P, Q in R disjunktne, je število različnih ničel PQR ravno

$$\deg(P) - \deg(\gcd(P, P')) + \deg(Q) - \deg(\gcd(Q, Q')) + \deg(R) - \deg(\gcd(R, R'))$$

oziroma $\deg(PQR) - \deg(\gcd(P, P')\gcd(Q, Q')\gcd(R, R'))$.

Sedaj sledi ključna opazka: $\gcd(P, P')$, $\gcd(Q, Q')$ in $\gcd(R, R')$ vsi delijo $P'Q - PQ'$. Za prva dva je to očitno, za tretjega pa velja, ker

$$P'Q - PQ' = P'(-R - P) - P(-R' - P') = R'P - RP'.$$

To simetrijo bi lahko opazili npr. preko odvajanja $-\frac{P+Q}{R} = 1$ in cikličnih permutacij.

Ker so si ti trije gcd-ji paroma tuji, sledi $\gcd(P, P')\gcd(Q, Q')\gcd(R, R') \mid P'Q - PQ'$. Ker $P'Q - PQ'$ ni ničeln polinom (v nasprotnem bi veljalo $P \mid P'Q$, torej $P \mid P'$, in $Q \mid PQ'$, torej $Q \mid Q'$, zato bi morala P in Q oba biti konstantna, kar nasprotuje predpostavki izreka), lahko končno omejimo

$$\deg(\gcd(P, P')\gcd(Q, Q')\gcd(R, R')) \leq \deg(P) + \deg(Q) - 1.$$

Sledi, da je različnih ničel PQR vsaj $\deg(PQR) - \deg(P) - \deg(Q) + 1 = \deg(R) + 1$. Po simetriji sledi, da sta spodnji meji tudi $\deg(P) + 1$ in $\deg(Q) + 1$, kar zaključi dokaz. □

Kdor je že slišal za t.i. domnevo *abc* v teoriji števil, lahko v tem izreku prepozna njen analog za polinome. Tako ni presenetljivo, da ima kar nekaj zanimivih posledic v svetu polinomskih diofantskih enačb.

Posledica 2.17: Fermatov zadnji izrek za polinome

Naj bo $n > 2$ naravno število. Če za tuje kompleksne polinome $P, Q, R \in \mathbb{C}[x]$ velja $P^n + Q^n = R^n$, so vsi trije konstantni.

Dokaz. Kot pričakovano, uporabimo Mason-Stothersov izrek na P^n in Q^n. Sledi, da ima $P^nQ^nR^n$ vsaj

$$n \max\{\deg(P), \deg(Q), \deg(R)\} + 1 > 3 \max\{\deg(P), \deg(Q), \deg(R)\} \geq \deg(PQR)$$

različnih ničel. Vse te morajo biti tudi ničle PQR, kar ni mogoče, ker ima polinom največ toliko različnih ničel, kot je njegova stopnja. □

Posledica 2.18

Če sta si $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ tuja in sta nekonstantna, velja $\deg(P^3 - Q^2) \geq \frac{1}{2}\deg(P) + 1$.

Dokaz. Izrek uporabimo na P^3 in $-Q^2$. Sledi, da ima $P^3Q^2(P^3 - Q^2)$ vsaj

$$\max\{3\deg(P), 2\deg(Q)\} + 1 \geq \frac{3\deg(P) + 2\deg(Q)}{2} + 1$$

različnih ničel. To so tudi ničle $PQ(P^3 - Q^2)$, torej mora veljati

$$\deg(P) + \deg(Q) + \deg(P^3 - Q^2) \geq \frac{3\deg(P) + 2\deg(Q)}{2} + 1$$

oziroma $\deg(P^3 - Q^2) \geq \frac{1}{2}\deg(P) + 1$. □

Navdušen bralec lahko poskusi najti neskončno mnogo parov P, Q, ki dosežejo enakost.

Posledica 2.19

Če je $P \in \mathbb{C}[x]$ nekonstanten, obstaja vsaj $\deg(P) + 1$ kompleksnih rešitev enačbe $P(x) \in \{0, 1\}$.

Dokaz. Uporabimo izrek na P in -1. (V tem primeru se dokaz izreka precej poenostavi, uporaba odvoda pa se vseeno zdi neizogibna.) □

Primer 2.20: RMM 2018/2

Ali obstajata nekonstantna polinoma $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, za katera velja

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}?$$

Rešitev. Odgovor je ne. Po Mason-Stothersu na polinomih P in 1 ima $P(P+1)$ vsaj $\deg(P)+1$ različnih ničel, torej jih mora tudi $Q(Q+1)$ imeti toliko. Iz tega seveda sledi $2\deg(Q) \geq \deg(P)+1$. To pa je protislovje, saj iz enačbe vidimo $21\deg(Q) = 10\deg(P)$, torej bi moralo veljati $2\deg(Q) < \deg(P)$. □

Primer 2.21: RMM SL 2018/A1

Naj bosta $m, n > 2$ naravni števili in $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ nekonstantna polinoma, ki nista oba linearna. Če je stopnja $P^m - Q^n$ strogo manjša od $\min\{m, n\}$, dokaži, da $P^m = Q^n$.

Rešitev. Naj bo $R = P^m - Q^n$. Denimo, da R ni ničeln.

Če imata P in Q kak skupen faktor D, očitno $D^{\min\{m,n\}}$ deli R, zato je stopnja R v protislovju s predpostavko naloge.

Če sta si P in Q tuja, smemo uporabiti naš izrek na P^m in $-Q^n$. Pove nam, da ima PQR vsaj $\max\{m\deg(P), n\deg(Q)\} + 1$ različnih ničel. Stopnja PQR je enaka vsoti $\deg(P) + \deg(Q) + \deg(R)$, torej velja

$$\begin{aligned}\deg(R) &\geq \max\{m\deg(P), n\deg(Q)\} + 1 - \deg(P) - \deg(Q) \\ &\geq \left(\frac{m}{2} - 1\right)\deg(P) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\deg(Q) + 1 > \frac{m+n}{2} - 1 \geq \min\{m, n\} - 1.\end{aligned}$$

(Pri predzadnji neenakosti smo uporabili dejstvo, da je vsaj en od $\deg(P)$ in $\deg(Q)$ strogo večji od 1.) To je spet v protislovju s predpostavko naloge, kar zaključi dokaz. □

Sledeča naloga izreka ne uporabi direktno, njena rešitev pa vseeno precej spominja na njegov dokaz.

Primer 2.22: USA TST 2017/3

Naj bosta $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ nekonstantna tuja polinoma. Dokaži, da obstajajo največ 3 kompleksna števila λ, za katera je $P + \lambda Q$ kvadrat nekega polinoma.

Rešitev. Denimo, da obstajajo različni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ in polinomi $R_1, R_2, R_3, R_4 \in \mathbb{C}[x]$, da je $P + \lambda_i Q = R_i^2$ za $1 \leq i \leq 4$. Glavna ideja je, da se z odvodom znebimo konstant λ_i: enačbe prepišemo v $\frac{R_i^2 - P}{Q} = \lambda_i$ in jih odvajamo. Iz tega sledi

$$(2R_iR_i' - P')Q - (R_i^2 - P)Q' = 0 \text{ oziroma } R_i(2R_i'Q - R_iQ') = P'Q - PQ',$$

torej $R_i \mid P'Q - PQ'$. Velja, da so si R_i paroma tuji. V nasprotnem primeru bi imela R_i in R_j skupno ničlo, ki bi morala biti tudi skupna ničla P in Q. Ker sta si P in Q tuja, pa

skupnih ničel seveda nimata. Iz tujosti R_i potlej sledi $R_1R_2R_3R_4 \mid P'Q - PQ'$, kar smrdi po protislovju s stopnjami.

Če imamo srečo, bodo $P + \lambda_i Q$ vsi imeli stopnjo $\max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. V tem primeru je enostavno zaključiti: ker $P'Q - PQ' \neq 0$ (sicer $P \mid P'Q \implies P \mid P'$, torej je P konstanten, kar ni možno), iz deljivosti sledi $2\max\{\deg(P), \deg(Q)\} \leq \deg(P) + \deg(Q) - 1$, kar je nemogoče.

Če $\deg(P) > \deg(Q)$, smo torej srečni. Žal sreča ni nujno na naši strani. Če sta stopnji P in Q enaki, lahko brez škode za splošnost P zamaknemo za nek večkratnik Q in s tem poskrbimo, da je $\deg(P) < \deg(Q)$. V tem primeru je stopnja $P + \lambda Q$ enaka $\deg(Q)$ za $\lambda \neq 0$ in $\deg(P)$ za $\lambda = 0$. Za stopnjo $R_1R_2R_3R_4$ torej sledi spodnja meja $\frac{3\deg(Q)+\deg(P)}{2}$. Na srečo je to še vedno dovolj za protislovje, saj je $\frac{3\deg(Q)+\deg(P)}{2} > \deg(P) + \deg(Q)$. □

3 Naloge za vajo

Naloge so zelo približno urejene po težavnosti.

Naloga 3.1. Naj bo $P \in \mathbb{R}[x]$ polinom stopnje n, ki ima n različnih realnih ničel. Dokaži, da ima za vsak $t \in \mathbb{R}$ polinom $P(x) + tP'(x)$ tudi n različnih realnih ničel.

Naloga 3.2. Najdi vse pare polinomov s celoštevilskimi koeficienti P, Q, za katere velja

$$P(Q(x)) = x^{1001} + 2x + 1.$$

Naloga 3.3. Dokaži, da za vsak moničen $P \in \mathbb{C}[x]$ obstaja $z \in \mathbb{C}$, da $|z| = 1$ in $|P(z)| \geq 1$.

Naloga 3.4 (ELMO SL 2023/A3)**.** Ali obstaja tako zaporedje celih števil $(a_n)_{n\geq 0}$, da $a_0 \neq 0$ in ima za vsak $n \geq 0$ polinom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

n različnih realnih ničel?

Naloga 3.5. Najdi vse pare polinomov P, Q s kompleksnimi koeficienti, za katere velja $P(x)^2 - (x^4 + x^3)Q(x)^2 = 1$.

Naloga 3.6 (All-Russian Olympiad 2014, 11. razred, 2. dan/3)**.** Če sta na tabli polinoma P in Q, lahko nanjo napišemo še polinome $P \pm Q$, $P \cdot Q$, $P \circ Q$ in cP, kjer je c poljubno realno število. Na začetku sta na tabli polinoma $x^3 - 3x^2 + 5$ in $x^2 - 4x$. Ali je možno po končno mnogo korakih na tablo napisati polinom oblike $x^n - 1$, kjer je n naravno število?

Naloga 3.7 (IMC 2020/4)**.** Za polinom $P \in \mathbb{R}[x]$ velja $P(x+1) - P(x) = x^{100}$. Dokaži, da velja $P(1-t) \geq P(t)$ za $0 \leq t \leq 1/2$.

Naloga 3.8 (Putnam 2014 B4)**.** Dokaži, da ima za vsak $n \in \mathbb{N}$ polinom $\sum_{k=0}^{n} 2^{k(n-k)} x^k$ samo realne ničle.

Naloga 3.9 (International Olympiad of Metropolises 2016/5)**.** Naj bo R polinom lihe stopnje z realnimi koeficienti. Dokaži, da obstaja kvečjemu končno mnogo parov polinomov P, Q z realnimi koeficienti, ki zadoščajo enačbi $P(x)^3 + Q(x^2) = R(x)$.

Literatura

[1] Wikipedia contributors. *Big O notation*. Ver. 1335437221. 2026. URL: en.wikipedia.org/wiki/Big%5C_O%5C_notation (pridobljeno 6. 2. 2026).