

Mock izbirni test

Luka Urbanc

2. december 2023

1. Najdi vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki za vsa realna števila x in y zadoščajo enačbi $f(f(xy) + y) = (x + 1)f(y)$.
2. Dokaži, da ima za vsa naravna števila n število $(3 \cdot 1^2 + 1) \cdot (3 \cdot 2^2 + 1) \cdot \dots \cdot (3 \cdot n^2 + 1)$ največ n različnih praštevilskih deliteljev.
3. Naj bo M končna podmnožica točk s celoštevilskimi koordinatami v evklidski ravnini, n pa naravno število. Varna pot je pot po točkah s celoštevilskimi koordinatami dolžine n , ki se začne na $(0, 0)$, konča na točki (x, y) z $x + y = n$ in ne vsebuje nobene točke iz M . Dokaži, da če obstaja ena varna pot, jih mora obstajati vsaj $2^{n-|M|}$.
4. Dan je trikotnik ABC in točke P, Q in R , ki ležijo zaporedoma na BC, CA in AB . Z ω_a, ω_b in ω_c označimo zaporedoma očrtane krožnice trikotnikov AQR, BRP in CPQ . Daljica AP drugič seka ω_a, ω_b in ω_c zaporedoma v točkah X, Y in Z . Dokaži, da velja $\frac{|YX|}{|XZ|} = \frac{|BP|}{|PC|}$.
5. Najdi vsa naravna števila $n \geq 2$, za katera velja $n = \frac{\sigma(n)}{p(n)-1}$, kjer s $p(n)$ označimo največji praštevilski delitelj n -ja, s $\sigma(n)$ pa označimo vsoto njegovih deliteljev.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige Altius, Citius, Fortius in e-revije Brihtnež) ni potrebno navajati.

Veliko uspeha!