Prvo neuradno ne-tekmovanje matematičnega krožka Gimnazije Bežigrad

Luka Urbanc

11. februar 2025

1 Osnovni nivo

Naloga 1.1. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik s središčem očrtane krožnice O in višinsko točko H. D, E in F so nožišča višin iz A, B in C (v tem vrstnem redu). Naj bo A' zrcalna slika A čez $\overline{EF}$. Dokaži, da je $\square HOA'D$ tetivni štirikotnik.

Naloga 1.2. Naj bo n naravno število. V Škofjeloškem kraljestvu je $4220n + 1$ mest, ki jih kralj Jakob želi povezati s cestami. Kot izkušen Codeforces enjoyer si svoje kraljestvo predstavlja kot graf, kjer so mesta vozlišča in ceste povezave. Da mu bo manj dolgčas, želi povezave postaviti tako, da bo za vsako vozlišče x in za vsako naravno število $1 \leq k \leq 4220$ obstajalo natanko n vozlišč, ki so od x-a oddaljene za natanko k. Za katere n mu to lahko uspe?

Opomba: razdalja med vozliščema x, y je definirana kot najmanjše nenegativno celo število d, za katerega obstaja zaporedje vozlišč $(v_i)_{0\leq i\leq d}$, ki zadošča $v_0 = x$, $v_d = y$ in sta v_i ter v_{i+1} povezana za vse $0 \leq i < d$.

Naloga 1.3. Najdi vse polinome $p \in \mathbb{R}[x]$, za katere za vse realne x velja $(x-2)p(x+2) + (x+2)p(x-2) = 2xp(x)$.

2 Višji nivo

Naloga 2.1. Naj bo P polinom s celoštevilskimi koeficienti, za katerega velja $P(0) = 0$ in

$$\gcd(P(0), P(1), P(2), \ldots) = 1.$$

Dokaži, da obstaja neskončno mnogo n, za katere velja

$$\gcd(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), P(n+2) - P(2), \ldots) = n.$$

Naloga 2.2. Miška se igra na neskončni mreži, sestavljeni iz kvadratov. Na začetku na en kvadrat postavi $n \in \mathbb{N}$ kamnov. Nato v vsaki potezi izbere kvadrat z vsaj štirimi kamni in premakne po enega na vsakega soseda. Dokaži, da obstajajo konstante $A, B, N \in \mathbb{R}^+$, da se za vse $n > N$ njena igra konča po najmanj An^2 in največ Bn^2 potezah.

Naloga 2.3. Naj bo $\triangle ABC$ ostrokotni trikotnik z očrtano krožnico Γ. Naj bo M razpolovišče stranice BC. Točko P postavimo na daljico AM. Krožnici, očrtani $\triangle BPM$ in $\triangle CPM$, drugič sekata Γ v točkah D in E (v tem vrstnem redu). $\overline{DP}$ drugič seka očrtano krožnico $\triangle CPM$ v X, $\overline{EP}$ pa drugič seka očrtano krožnico $\triangle BPM$ v Y. Dokaži, da očrtana krožnica $\triangle AXY$ poteka skozi fiksno točko $T \neq A$, ko P premikamo po AM.

Želim vam vso srečo pri reševanju!