

# Topla predjed: Teorija števil

Luka Urbanc

19. avgust 2025

## 1 Zaporedja

**Naloga 1.1.** Zaporedje naravnih števil  $(a_i)_{i \geq 1}$  za  $i \geq 3$  zadošča  $a_{i+1} = a_i + \gcd(a_{i-1}, a_{i-2})$ . Dokaži, da obstajata naravni števili  $N, M$ , za katere je  $a_{n+1} - a_n = M$  za vse  $n \geq N$ .

**Naloga 1.2.** Podano je zaporedje naravnih števil, za katerega velja  $a_1 = 2$  in  $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Dokaži, da  $a_n$  deli  $a_{n+1}$  za vsako naravno število  $n$ .

**Naloga 1.3.** Naj bo  $C$  naravno število in  $(a_i)_{i \geq 1}$  naravnoštrevilsko zaporedje, da velja  $a_{n+1} = \sqrt{a_n^3 - Ca_n}$  za vse naravne  $n$ . Dokaži, da je zaporedje od nekje naprej konstantno.

**Naloga 1.4.** Naj bosta  $n$  in  $k$  naravni števili, za kateri velja

$$1 = \underbrace{\varphi(\varphi(\dots \varphi(n) \dots))}_{k\text{-krat}}.$$

Dokaži, da  $n \leq 3^k$ .

## 2 Polinomi

**Naloga 2.1.** Za celoštrevilski polinom  $P \in \mathbb{Z}[x]$  velja  $P(0) = P(17) = 89$ . Dokaži, da  $P$  nima celoštrevilskih ničel.

**Naloga 2.2.** Naj bo  $P(x)$  tak polinom s celoštrevilskimi koeficienti, da je ostanek pri deljenju  $P(P(n))$  z  $n$  enak  $n - 1$  za vsa naravna števila  $n$ . Dokaži, da  $P(x)$  nima celoštrevilskih ničel.

**Naloga 2.3.** Najdi vse permutacije  $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$  množice  $\{1, 2, \dots, 2025\}$ , za katere obstaja polinom  $P \in \mathbb{Z}[x]$  s celoštrevilskimi koeficienti, da velja  $P(n) = a_n$  za vse naravne  $1 \leq n \leq 2025$ .

**Naloga 2.4.** Naj bo  $P \in \mathbb{Z}[x]$  celoštrevilski polinom stopnje 16. Dokaži, da ima enačba  $P(x)^2 = 25$  največ 16 celoštrevilskih rešitev.

**Naloga 2.5.** Najdi vse neprazne podmnožice naravnih števil  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , za katere  $a_1 a_2 \cdots a_n$  deli  $(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n)$  za vse naravne  $x$ .

**Naloga 2.6.** Dokaži, da obstaja neskončno naravnih  $n$ , za katere je največji prafaktor  $n^4 + n^2 + 1$  enak največjemu prafaktorju  $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$ .

**Naloga 2.7.** Naj bo  $P \in \mathbb{Z}[x]$  nekonstanten polinom brez celoštrevilskih ničel. Dokaži, da obstaja  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq 3 \deg(P)$ , da  $P(m)$  ne deli  $P(m + 1)$ .

### 3 Diofantiske enačbe ipd.

**Naloga 3.1.** Ali obstajajo različna praštevila  $p, q, r$ , za katera velja  $p \mid qr + q + r$ ,  $q \mid rp + r + p$  in  $r \mid pq + p + q$ ?

**Naloga 3.2.** Najdi vse pare praštevil  $p, q$ , za katere velja  $p^2 \mid q^3 + 1$  in  $q^2 \mid p^6 - 1$ .

**Naloga 3.3.** Ali obstajata različni potenci števila 2 z enakimi števkami, a v različnem vrstnem redu?

**Naloga 3.4.** Naravno število  $n$  je *močno*, če obstaja naravno število  $x$ , za katerega  $2^n \mid x^{nx} + 1$ . Določi vsa močna števila in zanje določi minimalen  $x$ , ki ustreza prejšnjemu pogoju.

**Naloga 3.5.** Najdi vsa naravna števila  $a, b$ , za katere sta  $a+1$  in  $2(b+1)$  popolna kvadrata,  $a^2 + b^2 - 1$  pa je potenca praštevila.

**Naloga 3.6.** Določi vsa praštevila  $p, q$ , za katere  $3p^{q-1} + 1$  deli  $11^p + 17^p$ .

**Naloga 3.7.** Naj bo  $n \geq 2$  naravno število. Če je

$$\frac{n^2 + 4^n + 7^n}{n}$$

celo število, dokaži, da je deljivo z 11.

### 4 Drugo

**Naloga 4.1.** Najdi največje naravno število  $n$ , za katerega je produkt števil  $n, n+1, n+2, \dots, n+42$  deljiv s kvadratom enega izmed njih.

**Naloga 4.2.** Za naravno število  $n$  naj bodo  $c_1 < c_2 < \dots < c_m$  vsa naravna števila manjša od  $n$ , ki so tuja  $n$ . Poišči vse  $n$ , za katere velja  $\gcd(n, c_i + c_{i+1}) > 1$  za vsak  $1 \leq i \leq m-1$ .

**Naloga 4.3.** Najdi vse funkcije  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , da velja  $f(f(x)f(y)) = xy$  in  $f(2025x + 1) = 2025x + 1$  za vse  $x, y \in \mathbb{N}$ .

**Naloga 4.4.** Dano je naravno število  $s \geq 2$ . Za vsako naravno število  $k$  definiramo njegov zasuk  $k'$  na sledeč način: zapišemo  $k$  v obliki  $as + b$ , kjer sta  $a$  in  $b$  nenegativni celi števili in  $b < s$ ; potem je  $k' = bs + a$ . Za naravno število  $n$  si oglejmo neskončno zaporedje  $d_1, d_2, \dots$ , kjer je  $d_1 = n$  in je  $d_{i+1}$  zasuk števila  $d_i$  za vsako naravno število  $i$ . Pokaži, da to zaporedje vsebuje število 1 natanko tedaj, ko je ostanek števila  $n$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  bodisi 1 bodisi  $s$ .

**Naloga 4.5.** Določi vse funkcije  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , za katere  $a + f(b) \mid a^2 + bf(a)$  za vse  $a, b \in \mathbb{N}$  z  $a + b > 2025$ .

**Naloga 4.6.** Določi vse naravne  $n$ , za katere obstaja permutacija njihovih deliteljev  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ , da je za vsak  $1 \leq i \leq k$  število  $d_1 + d_2 + \dots + d_i$  popoln kvadrat.

**Naloga 4.7.** Naj bodo  $a > 1, b \neq 0$  in  $c \geq 1$  cela števila. Dokaži, da obstaja naravno število  $n$ , za katerega ima  $a^n + b$  delitelja oblike  $cx + 1$  za nek  $x \in \mathbb{N}$ .

**Naloga 4.8.** Naravno število  $n$  je *mašinsko*, če je  $n + 4k^2$  praštevilo za vse naravne  $0 < k < n$ . Najdi vsa mašinska števila.