Drugi mock izbirni test

1 Pogenca točke na krožnico

Naloga 1.1. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik s točko P na stranici AB in točko Q na AC, ki zadoščata $|AP| = |AQ|$. S in R sta taki različni točki na stranici BC, da S leži med B in R in da veljata $\angle BPS = \angle PRS$ ter $\angle CQR = \angle QSR$. Dokaži, da so P, Q, R in S koncik1ične.

Naloga 1.2. Naj bo $\triangle ABC$ ostrokotni trikotnik z očrtano krožnico Γ in njenim središčem O. Točka P leži na premici BC, a ne na daljici BC. Naj bo J drugo presečišče premice AP z Γ in naj bo G njena zrcalna slika čez premico OP. Naj bo M presečišče premic AG in OP. Dokaži, da velja $\angle OMB + \angle OMC = 180°$.

Naloga 1.3. Naj bo G težišče pravokotnega trikotnika $\triangle ABC$ s pravim kotom $\angle BAC$. Naj bo P taka točka na poltraku BG, da velja $\angle APB = \angle CBA$, Q pa točka na poltraku CG, da velja $\angle AQC = \angle ACB$. Dokaži, da se krožnici, očrtani trikotnikoma $\triangle BQG$ in $\triangle CPG$, sekata na točki na stranici BC.

Naloga 1.4. Naj bosta D in E taki točki na stranicah AB in AC trikotnika $\triangle ABC$, da velja $|DB| = |BC| = |CE|$. Presečišče premic CD in BE označimo s F. Dokaži kolinearnost središča včrtane krožnice trikotnika $\triangle ABC$, višinske točke trikotnika $\triangle DEF$ in razpolovišča loka $\widehat{BAC}$ krožnice, očrtane $\triangle ABC$.

2 Polinomi

Naloga 2.1. Poišči vse pare polinomov $p, q \in \mathbb{R}[x]$, za katere velja $p(x^2 + 1) = q(x)^2 + 2x$.

Naloga 2.2. Najdi vse naravne n, za katere obstaja polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ stopnje n, za katerega velja $p(x) \mid p(x^2+x+1)$.

Naloga 2.3. Določi vse polinome $p \in \mathbb{Z}[x]$, za katere velja $n \mid p(2^n)$ za vse naravne n.

Naloga 2.4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ pa cela števila. Dokaži nerazcepnost sledečih polinomov v $\mathbb{Q}[x]$:

a) $p(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x - a_k) - 1$ in

b) $p(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)^2 + 1$.

3 Kombinatorne igre, rekurzija in bijekcije

Naloga 3.1. Podmnožica naravnih števil $\mathcal{M}$ je *miškasta*, če in samo če je aritmetična sredina njenih elementov enaka njihovi mediani. Naj bo n poljubno naravno število. Dokaži, da je število miškastih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$ liho.

Naloga 3.2. Za neskončno zaporedje celih števil $a_0, a_1, \dots$ velja, da je $0 \leq a_k \leq k$ in da

$$\binom{k}{a_0} + \binom{k}{a_1} + \cdots + \binom{k}{a_k} = 2^k$$

za vse nenegativne cele k. Dokaži, da se v takem zaporedju vsaj enkrat pojavi vsako nenegativno celo število.

Naloga 3.3. Naj bo n naravno število. Na mizi je nakracljanih n celih števil, Kralj Matjaž pa v vsakem koraku izbere dve, ki sta si enaki, ter eno med njimi za 1 poveča, drugo pa za 1 zmanjša. Dokaži, da se lahko Kralj Matjaž na ta način kratkočasi za največ $\frac{n^3}{6}$ korakov.

Naloga 3.4. Na ogliščih pravilnega petkotnika stoji pet veder, vsako s prostornino 2 litrov. Jan in Genc sta iz nam neznanih razlogov sklenila sledeči krvni pakt: vsako jutro mora Jan prinesti liter vode iz Poljanske Sore in ga na poljuben način razdeliti med vedra, nato pa mora Genc izbrati dve sosednji vedri in njuni vsebini izliti v Selško Soro. Janov cilj je zmočiti petkotnik, kar lahko doseže tako, da vedro napolni z več kot dvemi litri vode, Genc pa bi se temu raje izognil – po njegovem mnenju pakt glede vlažnosti geometrijskih figur ni bil dovolj enoznačen. Ali lahko Jan vseeno vsili svojo interpretacijo pakta?