Kombinatorika, spet

Luka Urbanc

π 2024

1 Splošno

Naloga 1.1. Na 100 listkih imamo zapisana zaporedoma naravna števila od 1 do 100 (na vsakem eno). Izgubimo naključnih 79 listkov. Ali lahko iz preostalih listkov zagotovo izberemo 4, da bo veljalo $a + b = c + d$, kjer so a, b, c in d števila na teh listkih?

Naloga 1.2. Na koliko načinov se lahko po celoštevilski mreži premaknemo od točke $(0, 0)$ do točke $(15, 85)$, če so dovoljeni premiki za eno mesto gor, za eno mesto v desno in diagonalen premik za eno gor in eno v desno?

Naloga 1.3. Trikotno mrežo dobimo tako, da enakostranični trikotnik z dolžino stranice n razdelimo na n^2 enakostraničnih trikotnikov z dolžinami stranic 1. Določi število paralelogramov, omejenih z odseki trikotne mreže.

Naloga 1.4. V Srednji naravoslovni šoli, ki zaposluje več Direktorjev, imajo kadilnico, ki je zaklenjena z $2n$ ključavnicami. Vsak Direktor ima n ključev, s katerimi lahko odklene n različnih ključavnic. Z vsakim ključem lahko odklene natanko eno ključavnico. Nobena dva Direktorja ne moreta odkleniti istih n ključavnic in nobena dva Direktorja skupaj ne moreta odpreti kadilnice. Največ koliko Direktorjev je zaposlenih na šoli?

Naloga 1.5. Sedem dijakov rešuje prvi izbirni test za geografsko olimpijado v Dublinu. Vsako nalogo rešijo največ trije dijaki in za vsak par dijakov obstaja vsaj ena naloga, ki sta jo rešila oba. Določi najmanjše možno število nalog na testu.

Naloga 1.6. Naj bosta n in m naravni števili. Vsako polje $n \times m$ tabele pobarvamo bodisi belo, bodisi črno. Za katere m in n lahko to naredimo tako, da ima vsako polje liho mnogo takšnih sosednjih polj, ki so iste barve kot polje samo? Dve polji sta sosednji, če imata skupno stranico.

Naloga 1.7. Naj bo $n \geq 5$ naravno število. Določi največje naravno število k, za katerega obstaja n-kotnik (ne nujno konveksen, a tak, da se njegove stranice ne sekajo), ki ima k notranjih pravih kotov.

Naloga 1.8. Naj bo n naravno število in M množica $\{1, 2, \ldots, n\}$. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ so različne podmnožice M velikosti 2. P_i in P_j imata skupni element, če in samo če obstaja k, za katerega je $P_k = \{i, j\}$. Dokaži, da se vsak element M-ja v P-jih pojavi natanko dvakrat.

Naloga 1.9. Naj bodo $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ različne točke na enotski krožnici $x^2 + y^2 = 1$, med katerimi nobena ni $(1, 0)$. n jih pobarvamo rdeče, preostalih n pa modro. Naj bo $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ neka permutacija vseh rdečih točk. Naj bo Z_1 prva modra točka, ki jo dosežemo, če začnemo na R_1 in se premikamo po krožnici v smeri, nasprotni urinemu kazalcu. Nato Z_1 pobarvamo zeleno. Podobno definiramo Z_2, nato Z_3 in tako dalje vse do Z_n. Dokaži, da je število lokov $\widehat{R_i Z_i}$ (razumljenih kot $R_i \to Z_i$ smeri nasprotni urinemu kazalcu), ki vsebujejo točko $(1, 0)$, neodvisno od izbire permutacije $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$.

Naloga 1.10. Na zabavi ždi $n \in \mathbb{N}$ ljudi in $m \in \mathbb{N}_0$ kovancev, kjer jih ima vsak človek na začetku nenegativno mnogo. Nato v vsakem koraku ljudje z $\geq n - 1$ kovanci dajo vsakemu preostalemu človeku po 1 kovanec. Če se radodarnost kdaj konča, torej če v nekem koraku nihče nima $\geq n - 1$ kovancev, je zabave konec. Določi najmanjši možni m, za katerega obstaja začetna porazdelitev m kovancev, da se zabava nikoli ne konča.

Naloga 1.11. Naj bo n naravno in $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ realna števila. Naj bo $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $n \times n$ tabela z vrednostmi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } x_i + y_j \ge 0; \\ 0, & \text{če } x_i + y_j < 0. \end{cases}$$

Denimo, da je B taka $n \times n$ tabela z elementi 0 ali 1, da je vsota elementov v poljubni vrstici ali stolpcu B-ja enaka vsoti enake vrstice ali stolpca v A. Dokaži, da velja $A = B$.

Naloga 1.12. Naj bodo (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_{100}, b_{100}) različni urejeni pari nenegativnih celih števil. Naj bo n število parov naravnih števil (i, j), ki zadoščajo $1 \le i < j \le 100$ in $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Določi največjo možno vrednost n čez vse možne izbire stotih urejenih parov.

Naloga 1.13. Naj bodo D_1, D_2, $\ldots$, D_n zaprti diski (območja, ki jih omejuje krožnica, skupaj s krožnico samo) v ravnini. Denimo, da je vsaka točka v ravnini element največ m diskov. Dokaži, da obstaja disk D_k, ki ima neprazen presek z največ $7m - 1$ drugimi diski D_i.

Naloga 1.14. Ana je postavila n stolpov iz enotskih kamnitih kock. Njihove višine so zaporedoma $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Ko stolpe zagleda njen redoljubni prijatelj Bojan, jih takoj želi urediti po (ne nujno strogo) naraščajočih višinah. Sklene, da bo to storil samo z dodajanji in odvzemanji posameznih blokov. Ni nujno, da doda enako število blokov, kot jih odvzame. Naj bo m najmanjše možno skupno število dodajanj in odvzemanj blokov potrebnih za uresničitev Bojanovega cilja.

Ana želi kljub temu dokazati svojo moralno nadvlado nad Bojanom in izračunati m pred njim. Zatorej izvede sledeči postopek: naj bo A na začetku prazno zaporedje, r pa število, na začetku enako 0. V i-tem koraku, kjer teče i od 1 do n, v A dvakrat doda h_i. Nato r-ju prišteje razliko največjega števila v A in h_i, za tem pa iz A izbriše največje število.

Dokaži, da njena metoda deluje (da velja $m = r$).