

# Mock izbirni test

Luka Urbanc

2. december 2023

1. Najdi vse funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki za vsa realna števila  $x$  in  $y$  zadoščajo enačbi  $f(f(xy) + y) = (x + 1)f(y)$ .
2. Dokaži, da ima za vsa naravna števila  $n$  število  $(3 \cdot 1^2 + 1) \cdot (3 \cdot 2^2 + 1) \cdot \dots \cdot (3 \cdot n^2 + 1)$  največ  $n$  različnih praštevilskih deliteljev.
3. Naj bo  $M$  končna podmnožica točk s celoštevilskimi koordinatami v evklidski ravnini,  $n$  pa naravno število. *Varna* pot je pot po točkah s celoštevilskimi koordinatami dolžine  $n$ , ki se začne na  $(0, 0)$ , konča na točki  $(x, y)$  z  $x + y = n$  in ne vsebuje nobene točke iz  $M$ . Dokaži, da če obstaja ena varna pot, jih mora obstajati vsaj  $2^{n-|M|}$ .
4. Dan je trikotnik  $ABC$  in točke  $P$ ,  $Q$  in  $R$ , ki ležijo zaporedoma na  $BC$ ,  $CA$  in  $AB$ . Z  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  in  $\omega_c$  označimo zaporedoma očrtane krožnice trikotnikov  $AQR$ ,  $BRP$  in  $CPQ$ . Daljica  $AP$  drugič seka  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  in  $\omega_c$  zaporedoma v točkah  $X$ ,  $Y$  in  $Z$ . Dokaži, da velja  $\frac{|YX|}{|XZ|} = \frac{|BP|}{|PC|}$ .
5. Najdi vsa naravna števila  $n \geq 2$ , za katera velja  $n = \frac{\sigma(n)}{p(n)-1}$ , kjer s  $p(n)$  označimo največji praštevilski delitelj  $n$ -ja, s  $\sigma(n)$  pa označimo vsoto njegovih deliteljev.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige Altius, Citius, Fortius in e-revije Brihtnež) ni potrebno navajati.

Veliko uspeha!