Kombinatorika (večinoma)

Luka Urbanc

16. oktober 2023

Die Kombinatorik ist eine Teildisziplin der Mathematik, die sich mit endlichen oder abzählbar unendlichen diskreten Strukturen beschäftigt.

Naloga 0.1. Sedmim oglišč em kocke pripišemo vrednost 0, enemu pa 1. Dominik lahko doda 1 poljubnima dvema ogliščema, ki ležita na skupnem robu. Ali lahko na ta način doseže, da so

a) vrednosti vseh oglišč enaka?

b) vrednosti vseh oglišč deljiva s 3?

Naloga 0.2. Dokaži, da 8×8 tabele ne moremo pokriti s petnajstimi 4×1 pravokotniki in enim 2×2 kvadratom.

Naloga 0.3. 100×100 tabelo pobarvamo z zeleno in rjavo, tako da so vse celice na robu tabele zelene in se v vsakem 2×2 kvadratu pojavita obe barvi. Dokaži, da obstaja 2×2 kvadrat, katerega diagonali sta obe enobarvni.

Naloga 0.4.

a) Naj bo $n = 2^k$ za nek $0 \leq k \in \mathbb{Z}$. Dokaži, da lahko iz množice $2n - 1$ celih števil izberemo takih n, da je njihova vsota deljiva z n.

b) (Erdős–Ginzburg–Ziv, *) Dokaži zgornje za poljuben naravni n.

Naloga 0.5. Naj bo n naravno število. Na nekem tekmovanju je število tekmovalcev večje od n-kratnika števila nalog. Če so vsi tekmovalci rešili vsaj eno nalogo, dokaži, da obstaja tekmovalec, ki je rešil samo take naloge, ki jih je rešilo še vsaj n ostalih tekmovalcev.

Naloga 0.6. Naj bo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivna funkcija. Dokaži, da ne obstajata funkciji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kjer je f injektivna, g surjektivna in $f(n)g(n) = h(n)$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Naloga 0.7. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Podana je tabela z n vrsticami in 18 stolpci. Vsaka celica tabele vsebuje 0 ali 1. Izpolnjeni so še sledeči pogoji:

- Vsaki dve vrstici sta različni.
- V vsaki vrstici je natanko 6 celic s številom 1.
- Za vsake tri vrstice obstaja stolpec, v katerem imajo vse izmed teh treh vrstic število 0.

Največ koliko je lahko n, da taka tabela obstaja?

Naloga 0.8. Marko izbere dve naravnih števili n in k, kjer je $n > k$, in ju pove Janu in Vitu. Potem Janu prišepne neko binarno zaporedje dolžine n in Jan zapiše vsa binarna zaporedja dolžine n, ki se od Markovega razlikujejo na natanko k mestih. (Na primer, če $n = 3$, $k = 1$ in Marko izbere 101, bo Jan zapisal 001, 111 in 100.) Vit si prebere Janove zapiske in nato poskuša uganiti Markovo zaporedje. V odvisnosti od n in k, kolikšno je najmanjše število ugibanj potrebnih, da Vit zagotovo ugotovi pravo zaporedje?

Naloga 0.9. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Naravna števila od 1 do $2n$ (vključno z 1 in $2n$) razčlenimo na dve zaporedji $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ in $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Dokaži, da velja $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2$.

Naloga 0.10. V evklidski ravnini imamo $2n$ točk, kjer je n naravno število in nobene tri niso kolinearne. n jih je pobarvanih zeleno, ostalih n pa rjavo. Dokaži, da jih lahko povežemo z n daljicami tako, da se nobeni dve ne sekata in sta krajišči vsake različnih barv.

Naloga 0.11. V evklidski ravnini imamo n premic, kjer je n naravno število, nobeni dve nista vzporedni in se nobene tri ne sekajo v isti točki. Te premice razdelijo ravnino na nekaj (ne nujno omejenih) večkotnikov. Dokaži, da lahko vsakemu večkotniku pripišemo neničelno celo število absolutne vrednosti $\leq n$, da sta za vsako premico vsoti števil na obeh straneh premice enaki 0.

Naloga 0.12. Na krožnici v smeri urinega kazalca označimo $n \in \mathbb{N}$ točk $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Na vsako točko položimo krožnik. Na voljo imamo sledečo potezo: izberemo lahko dva krožnika na dveh različnih točkah A_i, A_j in ju premaknemo na sosednji točki v nasprotnih smereh: A_{i+1} in A_{j-1} ali A_{i-1} in A_{j+1} (indeksi so mod n, krožnike lahko zlagamo). Za katere n lahko po nekaj potezah vse krožnike zložimo na eno točko?

Naloga 0.13. V $n \times n$ tabeli realnih števil, kjer je $n \in \mathbb{N}$, velja, da je absolutna vrednost vsakega števila ≤ 1 in da je vsota vseh števil 0. Dokaži, da lahko v vsakem stolpcu zamenjamo vrstni red števil tako, da je absolutna vrednost vsote števil v vsaki vrstici ≤ 2.

Naloga 0.14. (Geometrija števil: Blichfeldt, Minkowski, Thue-Vinogradov, Fermat, Lagrange)

a) Naj bo S omejena podmnožica $\mathbb{R}^n$ s prostornino V. Dokaži, da obstaja translacija (tj. vzporedni premik) S-ja, ki vsebuje $\lceil V \rceil$ točk s celoštevilskimi koordinatami.

b) Naj bo S konveksna podmnožica $\mathbb{R}^n$ prostornine $V > 2^n$, ki je simetrična glede na koordinatno izhodišče ($x \in S \iff -x \in S$). Dokaži, da S vsebuje točko s celoštevilskimi koordinatami, ki ni koordinatno izhodišče.

c) Dani sta naravni števili n in a. Dokaži, da za vsak par naravnih števil X in Y, za kateri velja $X \leq n < XY$, obstajata celi števili x, y z $|x| < X$ in $0 < y < Y$, za kateri velja $x \equiv ay \pmod{n}$.

d) (*) Dokaži, da lahko vsako praštevilo $p \equiv 1 \pmod 4$ zapišemo kot vsoto dveh popolnih kvadratov. Nato dokaži, da lahko vse n, katerih praštevilski razcep ne vsebuje lihe potence praštevila, kongruentnega $3 \pmod 4$, zapišemo kot vsoto dveh popolnih kvadratov.

e) (*) Dokaži, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto štirih popolnih kvadratov.[1]

Naloga 0.15. (Erdős–Szekeres, *) Za poljubni naravni števili r in s dokaži, da v poljubnem zaporedju paroma različnih realnih števil dolžine vsaj $(r-1)(s-1)+1$ obstaja naraščajoče podzaporedje dolžine vsaj r ali pa padajoče podzaporedje dolžine vsaj s.

[1] S pomočjo izreka Minkowskega se da (z veliko truda) dokazati tudi izrek, da je vsako naravno število, ki ni oblike $4^a(8n+7)$, vsota treh popolnih kvadratov.