1 Osnove

Definicija 1.1

Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf. Vsakemu vozlišču pripišemo neko nenegativno celo število, število *žetonov*, postavljenih nanj. Igra *izmenjevanja žetonov* na G poteka tako, da zaporedoma izvajamo poteze, v katerih poljubno vozlišče, ki ima vsaj toliko žetonov, kot je njegova stopnja, vsakemu sosedu poda enega izmed svojih žetonov (temu rečemo, da vozlišče *izstreli*).

Definicija 1.2

Stabilna postavitev žetonov je taka, v kateri ni možno izvesti poteze (torej je na vsakem vozlišču v število žetonov strogo manjše od $\deg(v)$).

Definicija 1.3

Igra izmenjevanja žetonov je *končna*, če na neki točki dosežemo stabilno postavitev. Če se to nikoli ne zgodi, je *neskončna*.

Izrek 1.4

Za to igro veljajo sledeča dejstva:

- v neskončni igri vsako vozlišče izstreli neskončno mnogokrat,
- v končni igri obstaja vsaj eno vozlišče, ki nikoli ne izstreli,
- ali je igra končna ali neskončna je odvisno le od začetne postavitve žetonov in ne od vrstnega reda izstreljevanja,
- če začetna postavitev žetonov porodi končno igro, je stabilna konfiguracija, ki jo na koncu dosežemo, neodvisna od zaporedja korakov,[a]
- če je število žetonov strogo večje od $2|E| - |V|$, je igra vedno neskončna,
- če je število žetonov med $|E|$ in $2|E| - |V|$, je igra lahko končna ali neskončna, odvisno od postavitve žetonov,
- če je število žetonov strogo manjše od $|E|$, je igra vedno končna in
- če je igra končna, se nujno konča v manj kot $|V|^4$ potezah.

[a] Velja še več: če začetna postavitev žetonov porodi končno igro, bo število izstrelitev iz nekega vozlišča v vsakem zaporedju korakov, ki nas od začetne postavitve privede do stabilne, enako.

Naloga 1.5: Tajvanski TST 2017

V celicah $n \times n$ tabele živi nekaj mačk. Vsako polnoč princesa izbere celico. Število mačk v tej celici mora biti vsaj tolikšno kot število sosednjih celic (tj. celic s stranico skupno izbrani). Nato v vsako sosednjo celico premakne po eno mačko iz izbrane celice. Določi najmanjše možno število mačk v tabeli, da lahko princesa to počne v nedogled.

Naloga 1.6: Spencer

Na neskončno vrsto celic postavimo končno mnogo kovancev. Na vsakem koraku izberemo neko celico z n kovanci, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ kovancev premaknemo na njenega levega soseda, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pa na desnega. Dokaži, da enkrat dosežemo konfiguracijo, kjer ima vsaka celica največ en kovanec in da je ta konfiguracija edinstvena. Kakšna bo ta konfiguracija, če začnemo z n kovanci na eni celici in 0 povsod drugje?

Naloga 1.7: IMO SL 2001 C7

Iz n kamnov sestavimo stolp. Na vsakem koraku izberemo nek stolp, ki je vsaj za 2 kamna višji od svojega desnega soseda (če desno od stolpa ni kamnov, to razumemo kot stolp iz 0 kamnov) in en kamen iz njega prestavimo na desnega soseda. Če takih stolpov ni, se igra konča. Za vsak n dokaži, da je končna konfiguracija neodvisna od zaporedja izbranih stolpov in jo opiši.

Naloga 1.8: IMO SL 2022 C4

Naj bo $n > 3$ naravno število. V krogu sedi n otrok, med katerimi porazdelimo n kovancev. V vsakem koraku lahko nek otrok z vsaj dvema kovancema svojima sosedoma podari vsakemu po enega. Določi vse začetne porazdelitve kovancev, za katere velja, da lahko po končno mnogo korakih dosežemo, da ima vsak otrok natanko 1 kovanec.

Naloga 1.9: Kitajski TST 2018

Dani sta naravni števili p in q. Na tabli je napisanih n naravnih števil. Na voljo imamo operacijo, v kateri izberemo dve enaki števili na tabli a, a in ju zamenjamo z $a+p, a+q$. Določi najmanjši n, da lahko to operacijo izvedemo neskončnokrat.

Naloga 1.10: IMO SL 2018 C6

Naj bosta $a \neq b$ naravni števili. Na na-začetku-prazni tabli izvedemo sledeči proces:

(i) če je na tabli nek par enakih števil, eno njegovo komponento povečamo za a, drugo pa za b,

(ii) če so na tabli vsa števila različna, pa nanjo dodamo dve števili 0.

Dokaži, da bomo operacijo (ii) izvedli le končno mnogokrat.

Naloga 1.11: Tournament of Towns 2016

Končno mnogo žab stoji na različnih celoštevilskih točkah realne osi. V vsakem koraku lahko ena žaba skoči za 1 na desno, če tam ni druge žabe. Naj bo N naravno število in naj bo D število možnih zaporedij takih korakov dolžine N. Podobno, če namesto desno žabe skačejo levo, naj bo L število možnih zaporedij takih korakov dolžine N. Dokaži, da velja $D = L$.