1. mock izbirni test

Luka Urbanc

11. december 2025

Naloga 1

Zaporedje nenegativnih celih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je *samoreferenčno*, če velja

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Za vsak n določi število samoreferenčnih zaporedij dolžine n.

Naloga 2

Naj bo ABC pravokotni trikotnik, za katerega je $\angle ACB = 90°$. Naj bosta E in F razpolovišči daljic BC in AC zaporedoma, D pa nožišče višine iz C. Presečišče simetrale kota $\angle BAC$ in premice EF označimo s P. Dokaži, da je P središče včrtane krožnice trikotnika CDE.

Naloga 3

Naj bosta $m < n$ taki naravni števili, da je možno n zapisati kot vsoto 2026 potenc števila m z nenegativnimi celoštevilskimi eksponenti ter kot vsoto 2026 potenc števila $m+1$ z nenegativnimi celoštevilskimi eksponenti. Določi maksimalno možno vrednost števila m, za katerega obstaja tak n.

Naloga 4

Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$f(f(x) + 2y) = 6x + f(f(y) - x).$$

Naloga 5: za oboževalce teorije števil

Za katera naravna števila $n > 1$ obstajajo naravna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki niso vsa enaka, za katera velja, da je $(a_1 + k)(a_2 + k) \cdots (a_n + k)$ popolna potenca naravnega števila za vsak $k \in \mathbb{N}$? *Opomba: popolna potenca naravnega števila je število oblike x^y za $x, y \in \mathbb{N}$, $y > 1$.*

Naloga 6: za oboževalce kombinatorike

1000 različno visokih otrok se postavi v vrsto. Par različnih otrok $\{a, b\}$, $a \neq b$, je *močan,* če noben otrok med njima ni hkrati višji od enega od njiju in nižji od drugega. Določi največje možno število močnih parov.