

# Omejevanje 2: The Return of Omejevanje

Luka Urbanc

3. junij 2025

## Lema 1

Celoštevilsko zaporedje  $(a_n)_{n \geq 1}$ , ki konvergira proti celiemu številu  $m$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$ ), je za vse dovolj velike  $n$  konstantno enako  $m$ .

## Naloga 2

Naj bosta  $p, q \in \mathbb{Z}[x]$  nekonstantna polinoma, za katera velja  $q(n) \mid p(n)$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ . Dokaži, da obstaja polinom  $r \in \mathbb{Q}[x]$ , da je  $q(x)r(x) = p(x)$ .

## Naloga 3

Določi vse pare  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , za katere je  $2^n a + b$  popolni kvadrat za vse dovolj velike  $n \in \mathbb{N}$ .

## Naloga 4

Določi vsa pozitivna realna števila  $x$ , za katera velja, da je  $\lfloor n^2 x \rfloor$  popolni kvadrat za vse  $n \in \mathbb{N}$ .

## Naloga 5

Dokaži, da ne obstajajo kvadratni polinomi  $p, q, r \in \mathbb{Z}[x]$ , da bi za vsa cela števila  $x, y$  obstajalo celo število  $z$ , da je  $p(x) + q(y) = r(z)$ .

## Naloga 6

Naj bodo  $a_1, a_2, \dots, a_k$  pozitivna realna števila, ki niso vsa naravna. Dokaži, da obstaja neskončno naravnih  $n$ , za katere sta si  $n$  in  $\lfloor a_1 n \rfloor + \lfloor a_2 n \rfloor + \dots + \lfloor a_k n \rfloor$  tuja.

## Naloga 7

Dokaži, da za liho število  $1 < a \in \mathbb{N}$  in  $a - 1 \leq m \in \mathbb{N}$  izraz  $\frac{2^{am}-1}{2^m-1}$  ni popolni kvadrat.

**Naloga 8**

Naj sta  $a$  pa  $b$  naravni števili. Denimo, da obstaja neskončno parov naravnih števil  $(m, n)$ , za katere sta tako  $m^2 + an + b$  kot tudi  $n^2 + am + b$  popolna kvadrata. Dokaži, da  $a$  deli  $2b$ .

**Naloga 9**

Naj bo  $p \in \mathbb{Z}[x]$  moničen. Predpostavimo, da ima enačba  $p(x) = 2^n$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$  vsaj eno rešitev  $x \in \mathbb{N}$ . Dokaži, da je  $p$  linearni polinom.

**Lema 10**

Naj bodo  $x_1, x_2, \dots, x_k$  paroma različna racionalna števila večja ali enaka 1. Denimo še, da so  $c_1, c_2, \dots, c_k$  neničelna realna števila in da je  $(m_n)_{n \geq 1}$  zaporedje celih števil, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( m_n - \sum_{i=1}^k c_i x_i^n \right) = 0.$$

Dokaži, da so  $x_i$  vsi cela števila.

**Naloga 11**

Naj sta  $a, b > 1$  naravni števili, za kateri velja  $a^n - 1 \mid b^n - 1$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Dokaži, da je  $b = a^k$  za nek  $k \in \mathbb{N}$ .