# Ugankarski kotiček

Luka Urbanc

**Naloga 1.** Za neka realna števila $a, b, c$ velja

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1.$$

Najdi vse možne vrednosti, ki jih lahko zavzame izraz

$$\frac{1}{(a+b+c)^{2025}}-\frac{1}{a^{2025}}-\frac{1}{b^{2025}}-\frac{1}{c^{2025}}.$$

Edina možna vrednost tega izraza je 0.

*Dokaz.* Najprej se malo poigrajmo z danim pogojem. Iz $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$ seveda sledi, da je $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$. Če to pogumno razpišemo in faktoriziramo, dobimo $(a+b)(b+c)(c+a)=0$, torej se dve od naših treh števil seštejeta v 0. Brez škode za splošnost denimo, da sta to $b$ in $c$ (ostali primeri so simetrični). Potem velja

$$\frac{1}{(a+b+c)^{2025}}-\frac{1}{a^{2025}}-\frac{1}{b^{2025}}-\frac{1}{c^{2025}}=\frac{1}{a^{2025}}-\frac{1}{a^{2025}}-\frac{1}{b^{2025}}-\frac{1}{(-b)^{2025}}=0,$$

kar zaključi dokaz. □

*Opomba.* A kako naj bi se navadni smrtnik domislil te faktorizacije? Alternativa je, da prepoznamo podobnost med členi v enakosti $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$ ter Vietovimi formulami. Označimo $a+b+c=s$, $ab+bc+ca=t$. Če vpeljemo polinom $(x-a)(x-b)(x-c)$ z ničlami $a, b, c$, vidimo, da je po Vietovih formulah enak $x^3-sx^2+tx-st$, tu pa lažje opazimo faktorizacijo $x^3-sx^2+tx-st=(x^2+t)(x-s)=(x+\sqrt{t})(x-\sqrt{t})(x-s)$. Sledi, da sta si množici $\{a,b,c\}$ in $\{\sqrt{t},-\sqrt{t},s\}$ enaki, saj sta obe množici ničel istega polinoma. Preostanek dokaza je enak.

**Naloga 2.** Na tabli je napisanih $n$ naravnih števil. Ta števila zadoščajo sledečim pogojem:

- njihova vsota je 500,
- lahko jih razdelimo na 20 skupin, da je vsota vsake skupine 25 in
- lahko jih razdelimo na 25 skupin, da je vsota vsake skupine 20.

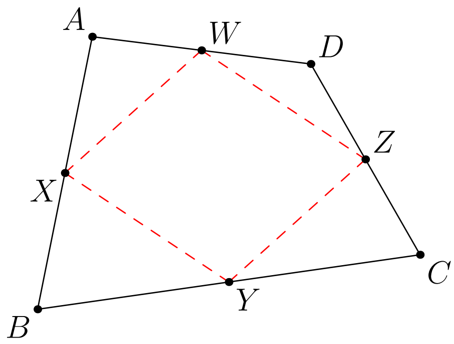
Katero je najmanjše možno naravno število $n$, da se to lahko zgodi?

Najmanjši možni $n$ je 40.

*Dokaz.* Najprej pokažimo, da za manjše $n$ to ni mogoče. Opazimo, da iz tretje točke sledi, da so vsa števila na tabli manjša ali enaka 20. Če to upoštevamo v drugi točki, pa vidimo, da mora vsaka od teh dvajsetih skupin vsebovati vsaj dve števili. Sledi, da mora biti na tabli vsaj $2\times 20=40$ števil.

Za $n=40$ pa dvajset kopij števila 20 in dvajset kopij števila 5 zadošča pogojem. □

**Naloga 3.** Naj bo $ABCD$ poljuben štirikotnik na evklidski ravnini. Naj bo točka $X$ razpolovišče stranice $AB$, $Y$ razpolovišče $BC$, $Z$ razpolovišče $CD$ in $W$ razpolovišče $DA$. Dokaži, da je štirikotnik $XYZW$ paralelogram.




*Dokaz.* Ker je $XY$ srednjica trikotnika $BCA$, sledi $XY \parallel AC$. To znano dejstvo o srednjicah lahko dokažemo npr. s podobnostjo $\triangle BYX \sim \triangle BCA$ (ki sledi iz tega, da $\angle YBX = \angle CBA$ in $\frac{|BY|}{|BX|} = \frac{|BC|}{|BA|}$), iz česar sledi $\angle XYB = \angle ACB$, torej $XY \parallel BA$. Na enak način dobimo $YZ \parallel BD$, $ZW \parallel AC$ in $WX \parallel BD$. Iz tega sledita vzporednosti $XY \parallel ZW$ in $YZ \parallel WX$ – ki sta ravno pogoja, da je štirikotnik $XYZW$ paralelogram. □

**Naloga 4.** Naj bo $n > 2$ naravno število. Sebastjan ima sledečih $n - 1$ ulomkov:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n}{n-1}.$$

Njihov zmnožek je seveda enak $n$. Sebastjana zanima, ali lahko obrne določene ulomke (torej nekatere $\frac{a}{b}$ zamenja z $\frac{b}{a}$), tako da bo zmnožek vseh skupaj na koncu enak 1. Določi vse $n$, za katere se njegove sanje lahko uresničijo.

Sebastjan lahko zmaga natanko tedaj, ko je $n$ popolni kvadrat.

*Dokaz.* Denimo, da ima Sebastjan neko zaporedje korakov, ki mu uresniči sanje. Opazujmo, kako se produkt ulomkov spreminja tekom njegovih potez. Vsakič, ko Sebastjan zamenja $\frac{a}{b}$ z $\frac{b}{a}$, se produkt ulomkov pomnoži z $\left(\frac{b}{a}\right)^2$. To pomeni, da se bo produkt skozi vse njegove poteze zmnožil z nekim številom oblike $\left(\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{b_k}{a_k}\right)^2$. A ker je produkt na začetku enak $n$, na koncu pa enak 1, mora veljati $\left(\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_k}{b_k}\right)^2 = n$, zato je $n$ kvadrat racionalnega števila. Bralec se lahko sam prepriča, da iz tega sledi, da je $n$ popolni kvadrat.

Preostane nam še pokazati, da ima Sebastjan za $n = m^2$ strategijo za uresničitev sanj. Deluje, da obrne prvih $m - 1$ ulomkov:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{m+2}{m+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{m^2} = 1.$$

□