Diskretna zveznost v teoriji in praksi

Definicija

Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}$. Funkcija $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$ je *diskretno zvezna*, če se njene vrednosti na sosednjih številih razlikujejo za kvečjemu ena, tj. $|f(n+1) - f(n)| \leq 1$ za $n, n+1 \in \mathcal{D}$.
Množica $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}$ je *povezana*, če za vse $a, b \in \mathcal{S}$ in cela števila c med a in b velja $c \in \mathcal{S}$.

Izrek: Diskretni izrek o vmesni vrednosti

Diskretno zvezne funkcije slikajo povezane množice v povezane množice.

Dokaz. Denimo, da je $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}$ povezana, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$ diskretno zvezna, a in b pa v zalogi vrednosti f (to pomeni, da $a = f(x), b = f(y)$ za neka $x, y \in \mathcal{D}$). Želimo dokazati, da so vsa cela števila med a in b tudi v zalogi vrednosti f.

Za začetek lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $x < y$, saj ju lahko sicer zamenjamo. Podobno lahko predpostavimo $a < b$, saj lahko sicer izjavo dokažemo za funkcijo $-f$. Vzemimo zdaj nek $c \in \mathbb{Z}$, $a < c < b$ in si v zaporedju $f(x) = a, f(x+1), f(x+2), \dots, f(y) = b$ izberimo prvi člen $f(x+i)$, za katerega velja $f(x+i) \geq c$. Oglejmo si še člen tik pred njim, $f(x+i-1)$, za katerega mora veljati $f(x+i-1) \leq c-1$. Po diskretni zveznosti f pa smo zdaj končali, saj $f(x+i-1) \leq c-1 < c \leq f(x+i)$ implicira $f(x+i) = c$, torej je c res v zalogi vrednosti f.

(Če smo pedantni, se moramo še prepričati, da prvi člen s to lastnostjo res obstaja in da ta ni ravno $f(x)$, saj sicer ne bi mogli govoriti o členu pred njim. Slednje dejstvo je očitno, saj je $f(x) = a < c$. Obstoj takega člena pa sledi iz splošnega dejstva, da ima neprazna podmnožica naravnih števil vedno nek minimalni element. To lahko namreč uporabimo na množici $\{i \in \mathbb{N} \mid f(x+i) \geq c\}$, ki je neprazna, saj je $i = y - x$ gotovo element.) $\square$

V praksi se diskretna zveznost pogosto pojavlja v rahlo spremenjenih oblikah. Tedaj je potrebno ta izrek prilagoditi. Za primer vzemimo funkcijo $f\colon \{x, x+1, \dots, y\} \to \mathbb{Z}$, za katero velja $f(x) = 0, f(y) = 100$. Če predpostavimo le $f(n+1) - f(n) \leq 1$, lahko še vedno zagotovimo, da bo funkcija dosegla vsa cela števila med 0 in 100 (s $f(x) = 100$, $f(y) = 0$ pa ne bi imeli take sreče). Če bi veljalo npr. $|f(n+1) - f(n)| \leq 10$, pa bi lahko zagotovili, da je iz vsake množice desetih zaporednih celih števil med 0 in 100 vsaj eno v zalogi vrednosti f. Na srečo se da zgornji dokaz z lahkoto posplošiti, da deluje za take primere.

Naloga 1

Vemo, da je med 1 in 1000 natanko 168 praštevil. Dokaži, da obstaja nekih 1000 zaporednih števil, med katerimi je natanko 100 praštevil.

Naloga 2

Naj bodo $S_1, S_2, \dots, S_{2n}$ podmnožice $\{1, 2, \dots, 4n\}$ oblike $S_i = \{i, i+1, \dots, i+2n-1\}$, in naj bo $T \subseteq \{1, 2, \dots, 4n\}$ podmnožica velikosti $2n$. Pokaži, da obstaja nek k, za katerega je $|S_k \cap T| = n$.

Naloga 3

Košarkar Hugo tekom sezone beleži število prostih metov, ki jih je do tedaj zadel. V začetku sezone je bil delež zadetih metov manjši od 80 %, proti koncu pa od tega večji. Ali je nujno obstajal trenutek, ko je bil delež natanko enak 80 %?

Naloga 4

Vsako celo število pobarvamo ali rdeče ali modro tako, da je v vsaki končni množici zaporednih števil absolutna vrednost razlike med številom rdečih in številom modrih števil največ 1000. Dokaži, da obstaja množica 2000 zaporednih števil, med katerimi je natanko 1000 rdečih.

Naloga 5

Naj bo $\pi(n) = |\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq n\}|$. Dokaži, da obstaja neskončno $n \in \mathbb{N}$, za katere $\pi(n) \mid n$.

Naloga 6

Oboževalci polinomov so se igrali sledečo igro: začenši z enačbo $x^2 + 7x + 2 = 0$ se je en za drugim sprehodil do table in tam spremenil tako konstantni kot linearni koeficient polinoma za natanko 1. Ko se je prah polegel, je na tabli ostala enačba $x^2 + 2x + 7 = 0$. Dokaži, da je vsaj en oboževalec napisal enačbo s celoštevilskimi ničlami.

Naloga 7

Neskončno strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil je *središčno,* če je za vsako naravno število n aritmetična sredina prvih a_n členov zaporedja enaka a_n.
Dokaži, da obstaja neskončno zaporedje naravnih števil $b_1, b_2, b_3, \ldots$, tako da za vsako središčno zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ obstaja neskončno mnogo naravnih števil n, da je $a_n = b_n$.

Naloga 8

Naj bosta p in q naravni števili. Žaba se po številski premici premika tako, da skoči ali p enot desno ali q enot levo. Po $> p + q$ skokih se je vrnila na svojo začetno pozicijo. Dokaži, da poleg začetne obstaja še neka druga točka na premici, ki jo je žaba obiskala vsaj dvakrat, ali pa je začetno točko obiskala vsaj trikrat.

Naloga 9

Naravno število n je *trdo,* če se ga da zapisati kot $n = a^b + b$ za naravni števili a, b strogo večji od 1. Ali obstaja 2026 zaporednih naravnih števil, med katerimi je točno 2024 trdih?

Naloga 10

Za vsako naravno število k definiramo f_k kot število elementov množice $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, ki imajo v svojem binarnem zapisu natanko tri enice.

a) Dokaži, da za vsak naraven m obstaja nek naraven k, da je $m = f_k$.

b) Najdi vse m, za katere je ta k enolično določen.

Naloga 11

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ sod. Števila od 1 do n^2 postavimo v $n \times n$ šahovnico. Naj bo A vsota števil v belih kvadratkih, B pa v črnih. Določi vse n, za katere je mogoče, da $\frac{A}{B} = \frac{39}{64}$.

Naloga 12

1000 dijakov stoji v krogu. Pokaži, da za nek $100 \leq k \leq 300$ obstaja skupina $2k$ sosednjih dijakov, da je število dijakinj v prvi in drugi polovici skupine enako.

Naloga 13

Naj bo $1 < n \in \mathbb{N}$. Števila od 1 do n^2 postavimo v $n \times n$ tabelo. Dokaži, da obstajata celici s skupno stranico, katerih števili se razlikujeta za vsaj n.

Bonus nalogice!

Naloga 14: 3. buffed

Dokaži, da so deleži, za katere 3. naloga velja, natanko racionalna števila oblike $\frac{n}{n+1}$.

Naloga 15: 9. buffed

Dokaži, da za vsak $x \geq y$, x, y naravni, obstaja x zaporednih naravnih števil, med katerimi je točno y trdih (v smislu 9. naloge).