Polinomi

Luka Urbanc

25. januar 2024

1 Uporabni izreki

Izrek 1.1 (Deljenje polinomov)**.** *Za vsak par polinomov $a(x), b(x)$, kjer $b(x) \neq 0$, obstaja enolično določen par polinomov $q(x), r(x)$, za katera velja $d(r(x)) < d(b(x))$ in $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$. Če je $r(x) = 0$ pravimo, da $b(x)$ deli $a(x)$, kar zapišemo tudi tako: $b(x) \mid a(x)$.*

Izrek 1.2 (Ničle $\iff$ linearni delitelji)**.** *Za polinom $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ in element polja $\alpha \in \mathbb{F}$ velja*

$$x - \alpha \mid p(x) \iff p(\alpha) = 0,$$

kjer leva izjava pomeni deljivost polinomov, desna pa vrednost polinomske funkcije v $\mathbb{F}$.

Izrek 1.3 ($p(x)$ stopnje n ima največ n različnih ničel)**.** *Neničelni polinom stopnje n $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ima največ n ničel v $\mathbb{F}$, upoštevajoč večkratnosti.*

Izrek 1.4 (Osnovni izrek algebre)**.** *V kompleksnih številih v zgornjem izreku velja enakost: polinom stopnje n ima vedno natanko n ničel (upoštevajoč večkratnosti). Iz tega sledi, da lahko vse take polinome zapišemo kot produkt*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k),$$

kjer so α_k ničle polinoma.

Izrek 1.5 (Vietove formule)**.** *Če razširimo zgornjo enakost, dobimo zanimive povezave med ničlami in koeficienti polinoma:*

- $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$,
- $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \alpha_k \alpha_l = \frac{a_{n-2}}{a_n}$,
- $\ldots$, *in*
- $\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Izrek 1.6 (Deljivost pri celoštevilskih polinomih)**.** *Za vse polinome $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ in pare različnih celih števil a in b velja*

$$a - b \mid p(a) - p(b).$$

2 Splošno

Naloga 2.1. Dokaži, da lahko sod polinom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ($p(x) = p(-x)\ \forall x \in \mathbb{C}$) zapišemo kot $p(x) = r(x^2)$ za nek $r(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Naloga 2.2. Najdi vse polinome s kompleksnimi koeficienti, za katere velja $(x - 8)p(2x) = 8(x - 1)p(x)$.

Naloga 2.3. Najdi vse polinome s kompleksnimi koeficienti, za katere velja $xp(x-5) = (x-20)p(x)$.

Naloga 2.4. Najdi vse kvadratne polinome $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, za katere obstaja nek $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, da ima polinom $p(x)q(x)$ vse koeficiente oblike ± 1.

Naloga 2.5. Poišči vse $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, za katere je $p(x)p(x-1) = p(x^2-1)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Naloga 2.6. Naj bo $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ s padajočimi pozitivnimi koeficienti: $a_n \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Dokaži, da njegove kompleksne ničle z ležijo v zaprti enotski krožnici: $|z| \leq 1$.

Naloga 2.7. Najdi vse $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, za katere je $p(x^2+1) = p(x)^2\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Naloga 2.8. Denimo, da za 6 različnih kompleksnih števil a, b, c, d, e, f velja $ad+be+cf = af+bc+de = ab+cd+ef$. Dokaži, da velja $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 = ac+ce+ea+bd+df+fb$.

Naloga 2.9. Najdi vse pare $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ s $p(q(x)) = x^{1585} + 4x + 7$.

Naloga 2.10. Naj imata $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$ vodilni koeficient enak 1 in $p(p(x)) = q(q(x))$. Dokaži, da je $p(x) = q(x)$.

Naloga 2.11. Naj so $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ taki, da je $p(q(x)) + p(r(x))$ konstanta. Dokaži, da je eden od $p(x)$ in $q(x) + r(x)$ konstanta.

3 Teorija števil

Naloga 3.1. Poišči vse polinome, ki imajo le racionalne ničle in imajo vse koeficiente enake ± 1.

Naloga 3.2. Naj bo $p(x)$ tak polinom s celoštevilskimi koeficienti, da je ostanek pri deljenju $p(p(n))$ z n enak $n-1$ za vsa naravna števila n. Dokaži, da $p(x)$ nima celoštevilskih ničel.

Naloga 3.3. Naj bodo $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Dokaži, da če $x^4+x^3+x^2+x+1 \mid p(x^5) + x \cdot q(x^5) + x^2 \cdot r(x^5)$, potem $x - 1 \mid p(x)$.

Naloga 3.4. Naj bo $p(x)$ polinom s celoštevilskimi koeficienti, ki je injektiven na racionalnih številih (za vsak par različnih racionalnih števil a, b velja $p(a) \neq p(b)$). Ali nujno velja, da je injektiven tudi na realnih številih?

Naloga 3.5.

a) Naj bodo a, b in c tri različna cela števila in $p(x)$ polinom s celoštevilskimi koeficienti. Dokaži, da ne morejo veljati $p(a) = b$, $p(b) = c$ in $p(c) = a$ hkrati.

b) Naj bo $p(x)$ polinom s celoštevilskimi koeficienti, n liho naravno število, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pa zaporedje celih števil, za katere velja $x_2 = p(x_1)$, $x_3 = p(x_2)$, $\ldots$, $x_n = p(x_{n-1})$ in $x_1 = p(x_n)$. Dokaži, da so si vsi x_i enaki.

c) Naj bo $p(x)$ polinom s celoštevilskimi koeficienti stopnje $n > 1$ in naj bo k naravno število. Dokaži, da za polinom

$$q(x) = \underbrace{p(p(\ldots(p(x))\ldots))}_{k\ p\text{-jev}}$$

obstaja največ n celih števil m, za katere je $q(m) = m$.

Naloga 3.6. Naj bo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Če je $xp(x) = yp(y)$ za neskončno parov celih števil $x \neq y$, dokaži, da ima $p(x)$ celoštevilsko ničlo.