Tretji mock izbirni test

1 Teorija števil

Naloga 1.1. Če je $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ celo število za $n \in \mathbb{N}$, dokaži, da je tudi popolni kvadrat.

Naloga 1.2. Določi vsa praštevila p, za katera je $\frac{7^{p-1}-1}{p}$ popolni kvadrat.

Naloga 1.3. Naj bosta $b, n > 1$ naravni števili. Denimo, da za vsak $k > 1$ obstaja celo število a_k, da velja $k \mid b - a_k^n$. Dokaži, da velja $b = A^n$ za nek celi A.

Naloga 1.4. Najdi vse naravne n, za katere $\varphi(n) \mid n^2 + 3$.

2 Geometrija

Naloga 2.1. V ostrokotnem trikotniku $\triangle ABC$, kjer $AB \neq AC$, definiramo V kot presečišče simetrale kota $\angle CAB$ z BC in D kot nožišče višine iz A na BC. Naj sta E in F presečišči stranic AC in AB z AVD. Dokaži, da se AD, BE in CF sekajo v eni točki.

Naloga 2.2. Tetiva PQ krožnice, očrtane trikotniku $\triangle ABC$, seka stranici BC, AC v točkah A', B'. Tangenti očrtani krožnici v A in B se sekata v X, tangenti v P in Q pa v Y. Premica XY seka AB v C'. Dokaži, da so AA', BB' in CC' konkurentne premice.

Naloga 2.3. V ostrokotnem trikotniku $\triangle ABC$ izberemo točko D, za katero velja $\angle DAC = \angle ACB$ in $\angle BDC = 90° + \angle BAC$. Na poltraku BD izberemo točko E, da $AE = EC$. Naj bo M razpolovišče daljice BC. Dokaži, da je premica AB tangentna krožnici, očrtani trikotniku $\triangle BEM$.

Naloga 2.4. V trikotniku $\triangle ABC$ z $AB > AC$ simetrala kota $\angle BAC$ seka BC v D. P leži na DA, tako da je A med P in D. PQ je tangenten $\odot(ABD)$ pri Q. PR je tangenten $\odot(ACD)$ pri R. Q in R ležita na različnih bregovih premice AD. CQ seka BR v K. Premica vzporedna BC skozi K, seka QD, AD, RD v E, L, F, zaporedoma. Dokaži, da velja $EL = KF$.

3 Kombinatorika

Naloga 3.1. V tekmovanju, ki ga sodi b sodnikov, tekmuje a tekmovalcev. Vsak sodnik vsakemu tekmovalcu določi bodisi zadostno bodisi nezadostno oceno. Naj bo k tako število, da se poljuben par sodnikov strinja glede ocen največ k tekmovalcev. Dokaži, da $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Naloga 3.2. Dokaži, da lahko vsako naravno število n zapišemo kot vsoto m Fibonaccijevih števil, kjer si nobeni dve nista sosednji, in dokaži, da vsebuje vsak zapis n kot vsota Fibonaccijevih števil najmanj m členov.

Naloga 3.3. Poliomine,[1] sestavljene iz ≥ 1585 kvadratkov, okličemo za *slastne*. Najdi največji n, za katerega obstaja poliomina, sestavljena iz n kvadratkov, ki je ni mogoče razdeliti na dve slastni poliomini.

Naloga 3.4. V Horjakovem roju je n dronov. Vsak je prijatelj z enakim številom drugih dronov. Določi največji naravni k, da lahko neodvisno od prijateljstev Horjak vedno izbere $2k$ dronov, ki se jih da razdeliti v k parov, da sta drona v vsakem paru prijatelja.

4 Algebraična poslastica

Naloga 4.1. Ali obstaja neskončno zaporedje celih števil a_0, a_1, a_2, ..., kjer $a_0 \neq 0$, za katerega velja, da ima za vse $n \geq 0$ polinom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

n različnih realnih ničel?

[1] Poliomina je ravninski lik, ki ga sestavlja eden ali več skladnih neprekrivajočih se enotskih kvadratov, ki so povezani po stranicah.