Prvo uradno tekmovanje matematičnega krožka Gimnazije Bežigrad

Luka Urbanc

29. november 2024

1 Osnovni nivo

Naloga 1.1. Naj bo $\square ABCD$ romb in P točka na stranici BC. Krožnica skozi A, B in P seka BD še v točki Q, krožnica skozi C, P in Q pa seka BD še v R. Dokaži, da točke A, R in P ležijo na premici.

Naloga 1.2. Naj bodo a, b in c naravna števila, za katera velja $\gcd(a, b, c) = 1$. Denimo, da velja

$$\frac{ab}{a-b} = c.$$

Dokaži, da je $a - b$ popoln kvadrat.

Naloga 1.3. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$ za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

Naloga 1.4. Naj bo $n > 1$ naravno število. V celice $n \times n$ tabele zapišemo naravna števila med 1 in n^2. Dokaži, da obstajata dve celici s skupnim ogliščem, katerih pripadajoči števili se razlikujeta za vsaj $n + 1$.

2 Višji nivo

Naloga 2.1. Naj bo n naravno število in $p, q > n$ praštevili. Dokaži, da lahko števila $1, 2, \ldots, n$ pobarvamo z dvema barvama, da za vsak enobarvni par $x \neq y$ velja $p, q \nmid xy - 1$.

Naloga 2.2. Naj bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik z $\angle CBA = 90°$. Točka D naj leži na premici CB, tako da je B med D in C. Naj bo E razpolovišče daljice AD, F pa drugo presečišče krožnic, očrtanih $\triangle ACD$ in $\triangle BDE$. Dokaži, da ko premikamo točko D, premica EF vedno poteka skozi neko fiksno točko.

Naloga 2.3. Za zaporedje racionalnih števil $(x_i)_{i\geq 1}$ velja $x_1 > 1$ in rekurzivna zveza

$$x_{n+1} = \frac{x_n \cdot n}{\lfloor x_n \cdot n \rfloor}$$

za vse naravne n. Dokaži, da obstaja $k \in \mathbb{N}$, za katerega je $x_k = 1$.

Naloga 2.4. Na Genčevo rojstnodnevno zabavo bo prišlo ali a ali b gostov, kjer sta a in b naravni števili. Torto želi razrezati na n kosov (ne nujno enako velikih), da bo v obeh primerih števila gostov možno vsakemu dati nekaj kosov, da dobi vsak gost enako količino torte. Kolikšno je najmanjše možno število kosov torte n?
Primer: če sta $a = 2$ in $b = 3$, lahko torto razdeli na 4 kose velikosti $1/3, 1/3, 1/6, 1/6$. *Dva gosta bi lahko oba vzela* $1/3 + 1/6$, *trije gostje pa* $1/3$, $1/3$ *in* $1/6 + 1/6$. *V tem primeru torej sledi* $n \leq 4$.

Želim vam vso srečo pri reševanju!