Nekonstruktivna teorija števil

Luka Urbanc

26. marec 2025

Naloga 1

Naravno število n je *Dimitrijevo*, če za vse naravne $9 \leq b \leq 1337$ zapis n-ja v bazi b vsebuje zaporedne števke 1, 5, 8, 5 (v tem vrstnem redu, od leve proti desni). Dokaži, da obstaja neskončno Dimitrijevih števil.

Naloga 2

Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ različna naravna števila, da velja $a_i \leq 2025$ in $\operatorname{lcm}(a_i, a_j) > 2025$ za vse $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$. Dokaži:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} < 2.$$

Naloga 3

Naj bo $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ zaporedje naravnih števil in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da obstaja neskončno $k \in \mathbb{N}$, da ne obstaja noben par $(m, t) \in \mathbb{N}^2$, da bi veljalo $m > n$ in

$$a_m - a_n = kn - tm(m+1).$$

Naloga 4

Ali obstaja nenegativno celo število a, za katerega ima enačba

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

več kot milijon različnih rešitev $(m, n) \in \mathbb{N}^2$?

Naloga 5

Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Naravno število n je *lepo*, če je vsaj 99% števil

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

deljivih s k. Dokaži, da obstaja $N \in \mathbb{N}$, za katerega je vsaj 99% števil med 1 in N lepih.

Naloga 6

Dokaži, da obstaja neskončno $n \in \mathbb{N}$, za katere $n^2 + 1$ nima deliteljev oblike a^2, $1 < a \in \mathbb{N}$.

Naloga 7

Naj bo n naravno število in $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Pravimo, da je S n-lep, kadar za vsaka $x, y \in S$, za katera velja $x + y \leq n$, velja še $x + y \in S$. Naj bo r_n najmanjše tako realno število, da za vsa naravna števila $m \leq n$ velja, da obstaja neka n-lepa množica z natanko m elementi, da je vsota njenih elementov največ $m \cdot r_n$. Dokaži, da obstaja realno število α, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $|r_n - \alpha n| \leq 2025$.

Naloga 8

Dokaži, da imajo števila $1!, 2!, \ldots, (p-1)!$ vsaj $\sqrt{p}$ različnih ostankov modulo p.

Naloga 9

Dokaži, da je za praštevilo p število takih naravnih n, da $p \mid n! + 1$, manjše ali enako $cp^{\frac{2}{3}}$, kjer je c neka realna konstanta, neodvisna od p.

Naloga 10

Dokaži, da obstaja pozitivno realno število c, da za vsa liha praštevila $p = 2k + 1$ velja, da imajo števila $1^0, 2^1, 3^2, \ldots, k^{k-1}$ vsaj $c\sqrt{p}$ različnih ostankov modulo p.

Naloga 11

Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Naj bosta $f(n), g(n)$ minimalni naravni števili, za kateri velja

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \frac{f(n)}{g(n)}.$$

Ali obstaja n, za katerega je $g(n) > n^{0.999n}$?