

Ugankarski kotiček

Luka Urbanc

12. januar 2025

Naloga 1. Za neka realna števila a, b, c velja

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1.$$

Najdi vse možne vrednosti, ki jih lahko zavzame izraz

$$\frac{1}{(a + b + c)^{2025}} - \frac{1}{a^{2025}} - \frac{1}{b^{2025}} - \frac{1}{c^{2025}}.$$

Naloga 2. Na tabli je napisanih n naravnih števil. Ta števila zadoščajo sledečim pogojem:

- njihova vsota je 500,
- lahko jih razdelimo na 20 skupin, da je vsota vsake skupine 25 in
- lahko jih razdelimo na 25 skupin, da je vsota vsake skupine 20.

Katero je najmanjše možno naravno število n , da se to lahko zgodi?

Naloga 3. Naj bo $ABCD$ poljuben štirikotnik na evklidski ravnini. Naj bo točka X razpolovišče stranice AB , Y razpolovišče BC , Z razpolovišče CD in W razpolovišče DA . Dokaži, da je štirikotnik $XYZW$ paralelogram.

Naloga 4. Naj bo $n > 2$ naravno število. Sebastjan ima sledečih $n - 1$ ulomkov:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n}{n-1}.$$

Njihov zmnožek je seveda enak n . Sebastjana zanima, ali lahko obrne določene ulomke (torej nekatere $\frac{a}{b}$ zamenja z $\frac{b}{a}$), tako da bo zmnožek vseh skupaj na koncu enak 1. Določi vse n , za katere se njegove sanje lahko uresničijo.