

UNIVERSITÉ DE PARIS

RAPPORT DE PROJET

26 Décembre 2020

---

# Effondrement à symétrie sphérique en cosmologie

---



Lucas BARBIER  
L3 Physique

Référent :  
Yann RASERA

# Table des figures

1	Temps de calcul . . . . .	7
2	Temps d'effondrement pour $\delta_i = 0.01$ . . . . .	7
3	Calcul du temps d'effondrement pour 5000 intervalles de temps . . . . .	8
4	Calcul du temps d'effondrement pour 7500 intervalles de temps . . . . .	8
5	Itération sur la surdensité initiale . . . . .	10
6	Itération sur la surdensité d'effondrement . . . . .	10
7	Temps d'effondrement en fonction du pas de temps. . . . .	11
8	Rayon et surdensité en fonction du temps . . . . .	13
9	Profil des vitesses . . . . .	14
10	Profil des énergies . . . . .	15

# Introduction

Dans ce projet nous allons déterminer le temps d'effondrement d'une surdensité sphérique dans un univers en expansion. Dans le cadre du modèle standard de la cosmologie, ce sont les surdensités primordiales qui, en s'effondrant, conduisent à la formation des halos de matière noire au sein desquelles le gaz tombe pour former des galaxies. En connaissant ce temps d'effondrement on peut donc en principe déterminer le rythme de formation des galaxies et amas de galaxies ainsi que leur abondance dans notre univers.

Nous allons dans un premier temps poser le cadre cosmologique, qui va délimiter la validité de notre étude, ainsi que les paramètres fondamentaux de celle-ci. Nous nous intéresserons ensuite à la résolution numérique du problème, à savoir les multiples types de méthodes d'intégration et leur pertinence. Nous étudierons également l'influence des différents paramètres physique ou numérique sur la solution finale. Finalement, nous ferons un retour sur certaines notions de cosmologie qui permettront de rendre notre étude plus réaliste.

# Notions de cosmologie

## Modèle

Dans notre étude nous considérons une sphère homogène de densité de masse  $\rho$  dans un univers en expansion. On définit la surdensité de la sphère par rapport au reste de l'univers telle que  $\delta = \frac{\rho - \rho_m}{\rho_m}$ . Si la sphère est plus dense que le reste de l'univers ( $\delta > 0$ ) la surdensité va s'effondrer. On peut déduire l'évolution temporelle du rayon  $R$  d'une sphère homogène de masse  $M$  initialement en expansion à partir du principe fondamental de la dynamique. En présence de gravité, on peut réécrire cette évolution comme une équation différentielle sur la surdensité :

$$\ddot{\delta} + 2H(t)\dot{\delta} = 4\pi G\rho_m(t)\delta(1 + \delta) + \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1 + \delta} \quad (1)$$

où  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$  est la constante de Hubble et  $\rho_m(t) = \Omega_m\rho_c/a(t)^3$  la densité moyenne de l'univers.  $\Omega_m$  est la densité actuelle de matière dans l'univers, normalisée par la densité critique  $\rho_c$  et  $a(t)$  le facteur d'expansion de l'univers. Il est à noter que puisque nous considérons une sphère de rayon  $R$  initialement en expansion on s'attend à ce que dans un premier temps le rayon croisse, puis qu'il fasse volte-face et diminue. Il va ainsi atteindre un rayon maximum que l'on appellera rayon de volte-face<sup>1</sup> ( $R_{vf}$ ). Nous considérerons un modèle simplifié où l'univers est plat, homogène et rempli uniquement de matière ; ce modèle cosmologique est dit de « Einstein – de Sitter ». Dans ce modèle on a ainsi  $\Omega_m = 1$ ,  $a(t) = (3H_0t/2)^{2/3}$  et  $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$ , avec  $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc} \simeq 2.27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$  et  $G$  la constante de gravitation universelle.

## Les solutions analytiques

En régime linéaire ( $\delta \ll 1$ ) on peut calculer la surdensité en utilisant la théorie de la perturbation linéaire, qui prédit que  $\delta_{lin} \propto a \propto t^{2/3}$ . En régime non-linéaire ( $\delta > 1$ ), on ne peut plus décrire l'évolution de la surdensité par un simple facteur d'expansion et il n'existe en général pas de solution analytique. Dans ce genre de situation l'outil numérique est alors d'une aide précieuse. Pour chacun des deux régimes on peut calculer la valeur de la surdensité au moment du volte-face et de l'effondrement final. Pour le volte-face, la solution non-linéaire donne [vDB13] :

$$1 + \delta(t_{vf}) = \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5,55 \quad (2)$$

---

1. On va ici éviter l'anglicisme "turn around".

Tandis que la solution linéaire donne :

$$\delta_{lin}(t_{vf}) = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3} \simeq 1,062 \quad (3)$$

Pour l'effondrement, la solution non-linéaire donne :

$$\delta(t_{eff}) = \infty \quad (4)$$

Tandis que la solution linéaire donne :

$$\delta_{lin}(t_{eff}) = \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{2/3} \simeq 1,686 \quad (5)$$

## Les conditions initiales

Pour résoudre le problème il nous faut choisir des conditions initiales pour  $\delta$ ,  $\dot{\delta}$  et  $t$ . Il nous faut également choisir une valeur à partir de laquelle on considérera que la surdensité s'est effondrée. Les seules contraintes sur ces valeurs sont :

- $\delta_i \ll 1$
- $t_i \ll 1/H_0$  avec  $1/H_0 \simeq 14$  milliards d'années
- $\dot{\delta}_i = H(t_i)\delta_i$
- $\delta_{eff} \gg 100$

Pour commencer la résolution on choisira arbitrairement  $t_i = 300000$  ans,  $\delta_i = 10^{-3}$  et  $\delta_{eff} = 10^4$ . On étudiera par la suite l'influence de chacune de ces valeurs sur la solution finale.

# Résolution numérique

## Les méthodes de résolution

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles, je me suis intéressé aux deux plus classiques, Euler explicite et Runge-Kutta [Rou20]. Tout d'abord, sachant que l'on a une équation du second ordre, on va poser :

$$\begin{cases} \dot{y} = \delta = f(t, y(t)) \\ \dot{\delta} = \ddot{\delta} \end{cases}$$

### Euler explicite

Dans un premier temps on va discrétiser le temps ; on va ainsi se déplacer sur notre "grille de temps" de l'instant initial  $t_i$  à l'instant final  $t_f$  par pas de temps  $\Delta t$ <sup>2</sup>. En intégrant notre équation différentielle entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  on a la relation :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f(t, y(t)) dt$$

La méthode d'Euler explicite consiste à approximer cette intégrale par la méthode du rectangle à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f(t, y(t)) dt \simeq \Delta t \times f(t_n, y(t_n))$$

On en déduit l'itération suivante :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Après N itérations, l'erreur commise est de l'ordre de  $N \frac{1}{2} p \Delta t^2 = \frac{1}{2} T p \Delta t$  où T est la durée totale et p la pente de la fonction à l'instant  $t_n$ . Soit une erreur proportionnelle à  $\Delta t$ .

---

2. Les échelles de temps étant délicates à appréhender on parlera par la suite d'intervalles de temps, à savoir le nombre d'éléments dans notre grille de temps.

## Runge-Kutta

Cette méthode est applicable à différents ordres de développement. Plus l'ordre de développement est élevé et plus la solution doit être précise, mais également plus gourmande en temps de calcul. Runge-Kutta 2 et Runge-Kutta 4 (2 et 4 pour les ordres de développement) sont donc assez populaires car elles offrent un compromis entre précision et rapidité de calcul.

**Runge-Kutta 2** Ici l'idée est de calculer l'aire d'un trapèze plutôt que celle d'un rectangle. On aura ainsi comme approximation de l'intégrale :

$$\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} f(t, y(t)) dt \simeq \frac{\Delta t}{2} \times (f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$$

On va ensuite programmer cette méthode de résolution selon l'algorithme suivant :

1. Initialisation des conditions initiales
2. Création d'un tableau qui va contenir les valeurs de  $y$  et  $\delta$
3. Pour  $t$  dans notre grille de temps, faire :
  - (a) Si  $\delta_n$  et  $y < \delta_{eff}$ , faire :
    - Calcul de  $k_1 = f(t, y)$
    - Calcul de  $k_2 = f(t + \Delta t, y + \Delta t k_1)$
    - $\delta_{n+1} = \delta_n + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2)$
    - $y_{n+1} = \delta_n + y_n \Delta t$
  - (b) Sinon, faire :
    - $\delta_n = \delta_{eff}$
    - $y_n = y_{n-1}$

Avec cette méthode l'erreur finale est de l'ordre de  $\Delta t^2$  (méthode d'ordre 2).

**Runge-Kutta 4** Ici bien que mathématiquement l'idée soit un peu différente que pour Runge-Kutta 2, la procédure est similaire. On suit l'algorithme subséquent :

1. Initialisation des conditions initiales
2. Création d'un tableau qui va contenir les valeurs de  $y$  et  $\delta$
3. Pour  $t$  dans notre grille de temps, faire :
  - (a) Si  $\delta_n$  et  $y < \delta_{eff}$ , faire :
    - Calcul de  $k_1 = f(t, y)$
    - Calcul de  $k_2 = f(t + \Delta t/2, y + \Delta t k_1/2)$
    - Calcul de  $k_3 = f(t + \Delta t/2, y + \Delta t k_2/2)$
    - Calcul de  $k_4 = f(t + \Delta t, y + \Delta t k_3)$
    - $\delta_{n+1} = \delta_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
    - $y_{n+1} = \delta_n + y_n \Delta t$
  - (b) Sinon, faire :
    - $\delta_n = \delta_{eff}$

- $y_n = y_{n-1}$

J'ai codé les deux méthodes pour regarder l'écart de précision ainsi que leurs temps d'exécution. J'ai finalement opté pour RK4 car l'écart de temps était très faible. (Voir Figure 1)

```
Effondrement à 1.1439068506279353 milliards d'années, indice 409
Temps de calcul RK4 : 0.021939516067504883 secondes
Effondrement à 1.0292665550882156 milliards d'années, indice 368
Temps de calcul RK2 : 0.011967182159423828 secondes
```

FIGURE 1 – Temps de calcul pour chacune des méthodes RK2 et RK4

## Solution non-linéaire

A partir des algorithmes détaillés ci-dessus j'ai créé une fonction qui prend en argument la surdensité initiale et la surdensité d'effondrement puis qui calcule le temps d'effondrement. A noter que la condition d'infériorité de  $\delta_n$  et  $y_n$  par rapport à  $\delta_{eff}$  est très importante car dépassé  $\delta_{eff}$  la valeur de la surdensité diverge et tend vers l'infini extrêmement vite, causant évidemment des problèmes de calcul. J'ai décidé de donner la valeur  $\delta_{eff}$  à toutes les valeurs qui suivaient, considérant donc que la surdensité saturait, ce qui on le verra se rapproche de la réalité physique.

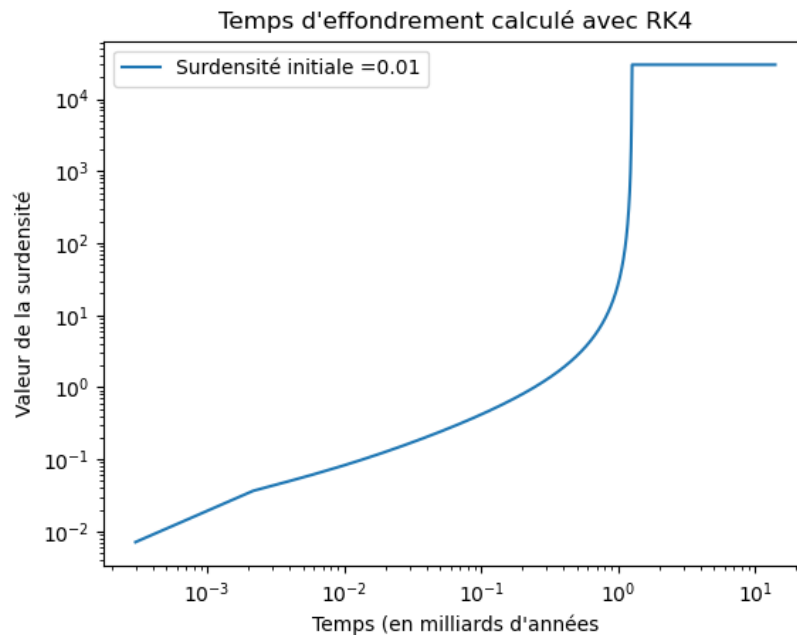


FIGURE 2 – Temps d'effondrement pour  $\delta_i = 0.01$



## Solution linéaire

Dans cette partie l'objectif est de calculer la solution de l'équation (1) en négligeant les termes non-linéaires, on obtient alors :

$$\ddot{\delta} + 2H(t)\dot{\delta} = 4\pi G\rho_m(t)\delta \quad (6)$$

Cette équation a été résolue avec la même fonction que pour l'équation (1). Il est ici intéressant de comparer et tracer le résultat obtenu avec la valeur analytique qui prédisait que  $\delta \propto t^{2/3}$ . Pour confirmer ces deux résultats on peut également les confronter aux résultats renvoyés par la fonction `scipy.integrate.odeint`.

Ici j'ai regardé brièvement l'influence du pas de temps sur la précision de la solution. J'ai par la suite décidé de prendre 5000 intervalles de temps, valeur pour laquelle Runge-Kutta 4 est la plus précise.

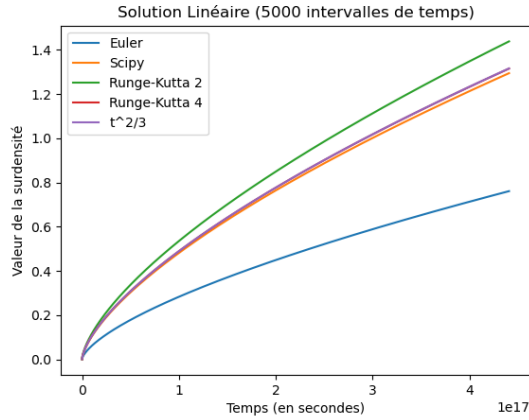


FIGURE 3 – Calcul du temps d'effondrement pour 5000 intervalles de temps

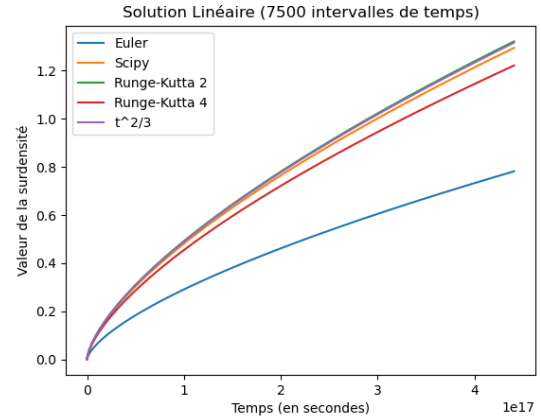


FIGURE 4 – Calcul du temps d'effondrement pour 7500 intervalles de temps

Bien que les résultats semblent diverger sur les figures (3) et (4), il faut préciser que puisque l'on utilise une échelle log-log les écarts paraissent amplifiés. Avec une échelle linéaire, toutes les courbes sont très proches, à l'exception de la méthode Euler.

Finalement avec la solution obtenue à l'aide de RK4 pour 5000 intervalles de temps, on calcule que  $\delta_c \simeq 1,707$ , très proche<sup>3</sup> donc de la valeur analytique (5).

---

3. Précis à 1,2 %.

# Evolution des paramètres

## Recherche de surdensité initiale

Dans cette partie on s'intéresse à la valeur de la surdensité initiale telle que celle-ci mette un temps égal à l'âge de l'univers pour s'effondrer. Afin de calculer ceci j'ai procédé par dichotomie, selon l'algorithme suivant :

1. Initialisation des surdensités minimale, maximale et d'effondrement
2. Initialisation de la tolérance sur le résultat
3. Vérification que  $\delta_i$  n'est pas trop petit ou trop grand
4. Intervalle =  $|\delta_{i_{max}} - \delta_{i_{min}}|$
5. Tant que intervalle > tolérance, faire :
  - Milieu =  $\frac{\delta_{i_{max}} + \delta_{i_{min}}}{2}$
  - Calcul du temps d'effondrement  $t_{eff}$
  - Si  $t_{eff} >$  âge de l'univers, faire :  $\rightarrow \delta_{i_{min}} = \text{Milieu}$
  - Sinon, faire :  $\rightarrow \delta_{i_{max}} = \text{Milieu}$
  - Calcul du nouvel intervalle  $I = \delta_{i_{max}} - \delta_{i_{min}}$
6. Surdensité initiale =  $\frac{\delta_{i_{max}} + \delta_{i_{min}}}{2}$

On obtient une valeur  $\delta_{univ} \simeq 1,77 \times 10^{-3}$ . J'ai ensuite utilisé cette valeur comme référence pour avoir un contrôle sur le temps d'effondrement.

## Itération sur $\delta_i$

Dans un second temps on peut s'intéresser à l'influence des paramètres choisis plus tôt, et notamment la surdensité initiale. On peut intuitivement que cette valeur, à partir de laquelle se basent nos calculs, a une influence prépondérante sur le temps d'effondrement. On va résoudre l'équation pour plusieurs valeurs de  $\delta_i$ , allant de  $\delta_{univ}$  à  $15 \delta_{univ}$  (voir Figure 5). Comme dit plus haut, on prend des multiples de  $\delta_{univ}$  afin d'avoir un contrôle sur le temps d'effondrement.

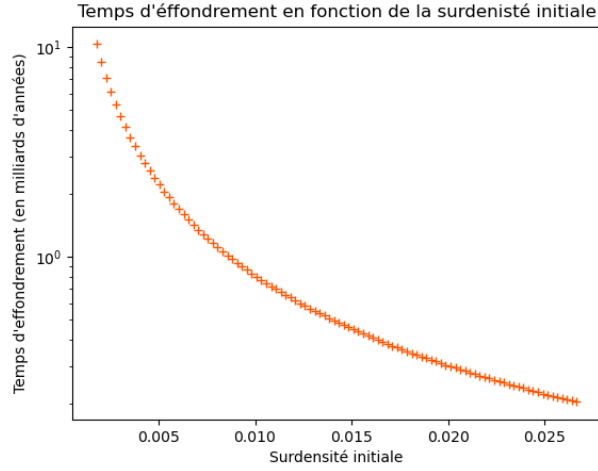


FIGURE 5 – On constate que le temps d’effondrement est fortement corrélé à la valeur de la surdensité initiale

## Itération sur $\delta_{eff}$

Dans l’idée de contrôler l’influence de tous les paramètres arbitrairement choisis on va également itérer sur  $\delta_{eff}$ , prenant des valeurs allant de  $10^3$  à  $10^6$ . Comme spécifié plus haut, après avoir atteint la surdensité d’effondrement,  $\delta$  diverge et tend très vite vers l’infini. On peut donc s’attendre à ce que  $\delta_{eff}$  n’ait pas une très grande influence sur le temps d’effondrement, ce qui est corroboré par le graphe obtenu.

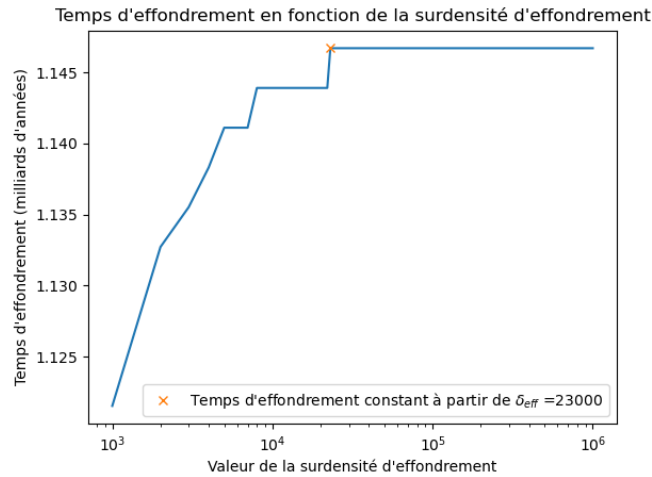


FIGURE 6 – Aucune corrélation entre  $\delta_{eff}$  et  $t_{eff}$  à partir d’une valeur seuil

La valeur initialement choisie de  $\delta_{eff}$  est un peu inférieure à la valeur seuil qu'on peut voir sur le graphe, mais cela n'aura pas d'importance pour la suite, où l'on verra que la valeur réelle de la surdensité d'effondrement est bien inférieure.

## Itération sur le pas de temps

Un des paramètres purement numérique est le choix du pas temps. Celui-ci va déterminer la précision du résultat ; a priori un pas de temps plus petit donnera une meilleure résolution, mais demandera également plus de temps de calcul. De la même manière qu'avant on résout l'équation avec des valeurs de pas de temps différentes. Cependant, même pour des valeurs très petites de pas de temps (jusqu'à  $10^6$  intervalles de temps) les solutions se rapprochent mais ne semblent pas vraiment converger.

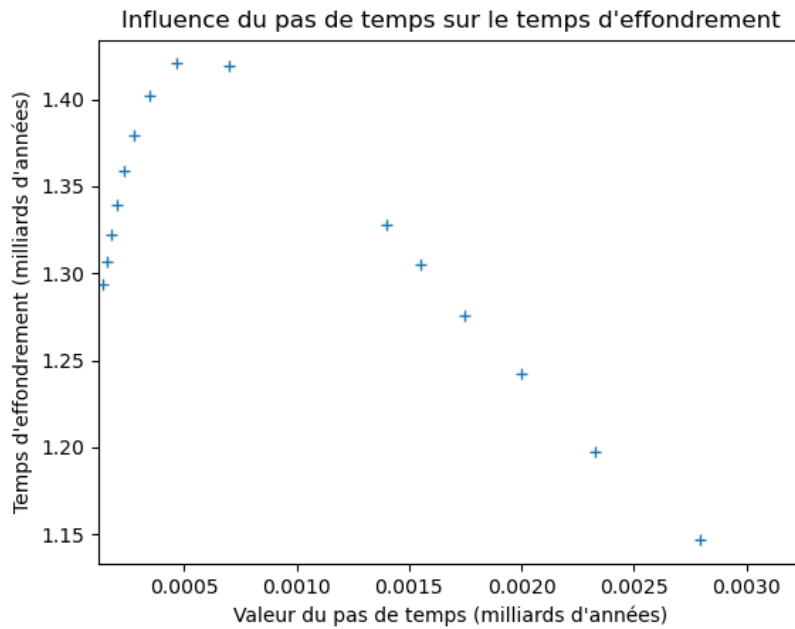


FIGURE 7 – Temps d'effondrement en fonction du pas de temps.

On va donc prendre 7500 intervalle de temps, ce qui donne un bon compromis entre vitesse de calcul et précision.

# Précision de cosmologie : la surdensité viriel

## Le théorème du viriel

Dans la première partie du projet nous avons considéré que l'effondrement avait lieu lorsque  $\delta_{eff}$  tendait vers l'infini, ce qui physiquement n'est pas vraiment concevable. Au lieu de s'effondrer à l'infini, la surdensité va saturer à ce que l'on appelle la surdensité viriel. L'objectif de cette partie est de déterminer cette surdensité viriel. Pour se faire, nous allons nous appuyer sur le théorème du viriel, qui nous dit qu'au rayon de virialisation, on a :

$$2E_{cin} + E_{pot} = 0 \quad (7)$$

## Résultats analytiques

### Energie potentielle d'une sphère autogravitante

Afin de calculer l'énergie potentielle d'une sphère homogène de densité volumique  $\rho$ , on imagine qu'elle est constituée d'une infinité de coquilles infinitésimales de masse  $m_c = 4\pi r^2 \rho dr$ . On en déduit que

$$dE_{pot} = -G \frac{m_c m_{inter}}{r}$$

où  $m_{inter} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  est la masse de la sphère. Finalement, on calcule que [Wik20] :

$$E_{pot} = -\frac{3GM^2}{5R} \quad (8)$$

### Energie cinétique

On peut calculer l'énergie cinétique de notre sphère à l'aide de la formule

$$E_{cin} = \int_0^R \frac{1}{2} \rho v^2(r) 4\pi r^2 dr$$

En intégrant on trouve que :

$$E_{cin} = \frac{3MV^2(R)}{10} \quad (9)$$

Il nous faut alors calculer la vitesse  $V(R)$ . Sachant que l'on a  $\delta = \frac{\rho - \rho_m}{\rho_m}$ , il vient

$$R^3 = \frac{3M}{4\pi\rho_m(t)(1 + \delta)} \quad (10)$$

Pour déterminer  $V(R)$  il ne nous reste plus qu'à dériver  $R$  :

$$V(R) = \frac{dR}{dt} = H(t)R(1 - \frac{\Omega_m R^3 \dot{\delta}}{9MGt}) \quad (11)$$

A noter que l'on peut également calculer la vitesse normale de la sphère en utilisant uniquement les valeurs numériques de notre étude :

$$V(R) = \frac{R_{n+1} - R_n}{\Delta t}$$

En utilisant le principe de conservation de l'énergie on peut montrer que le rayon de virialisation est la moitié du rayon maximum [ML05] :  $R_{vir}/R_{vf} = \frac{1}{2}$ . On peut alors calculer la surdensité au moment de la virialisation :

$$\delta_{vir} = \frac{\rho_{vir}}{\rho_m(t_{vir})} - 1$$

En réalité, quand la sphère s'effondre elle passe par le rayon de virialisation puis continue de s'effondrer (Voir Figure 8) jusqu'à une certaine valeur  $\delta_{final}$ <sup>4</sup>, à partir de laquelle on considère que la structure<sup>5</sup> s'est effondrée.

$$1 + \delta_{fin} = 1 + \delta(t_{eff}) = 32(1 + \delta(t_{vir})) = 18\pi^2 \simeq 177,47 \quad (12)$$

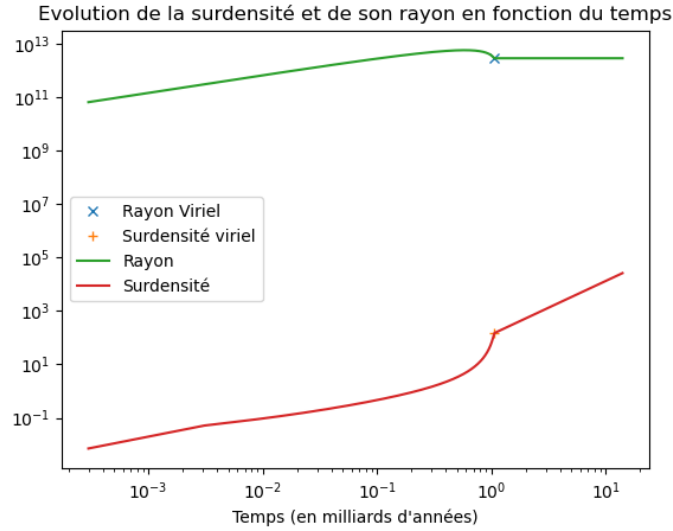


FIGURE 8 – Après que le rayon de virialisation soit atteint, la surdensité continue d'évoluer.

4. En fait, c'est cette valeur que l'on appelle surdensité viriel, mais par soucis de clarté dans les indices et dans les explications, on l'appellera surdensité finale.

5. Structure faite de matière noire, de gaz et d'étoiles.

## Calculs numériques

Pour la vitesse il est ainsi intéressant de comparer les valeurs obtenues en dérivant formellement  $R$  et en prenant les valeurs numériques  $\Delta R/\Delta t$ .

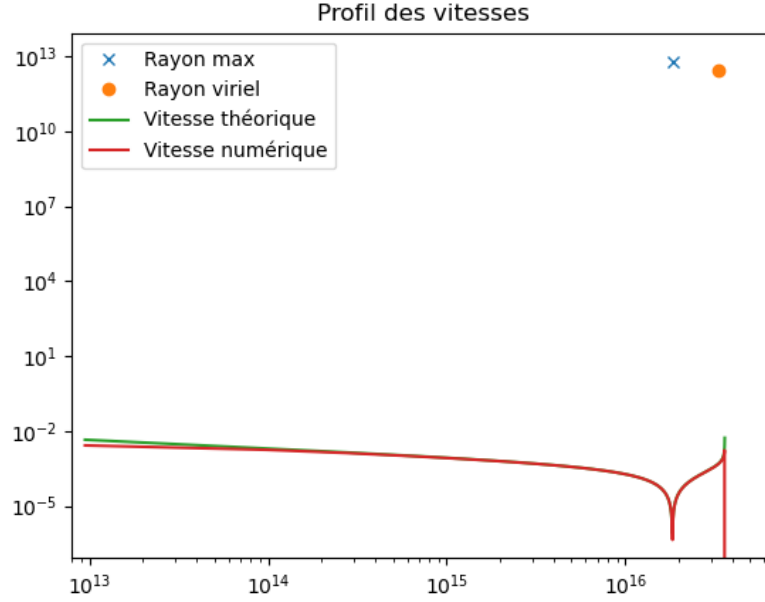


FIGURE 9 – Les deux méthodes de calcul sont bien similaires.

Ensuite, nous avons deux manières de calculer le rayon de virialisation, en prenant la moitié du rayon de volte-face ou en regardant pour quelle valeur de  $R$  l'égalité (7) est vérifiée. Après avoir calculé  $R_{vir}$  des deux manières, on voit que les résultats sont bien corrélés. (Voir Figure 10)

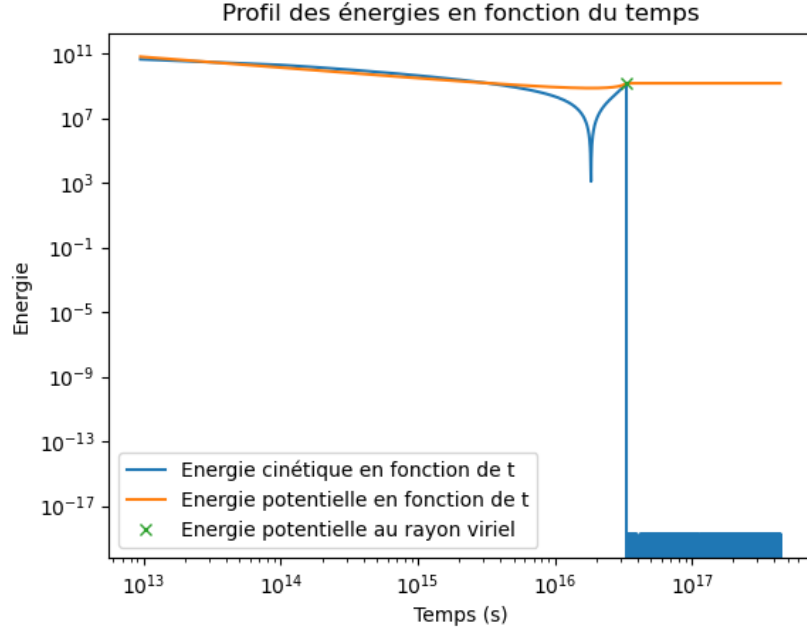


FIGURE 10 – Ici le point représenté par la croix verte est l'énergie potentielle au rayon  $R_{vir}$ , calculé en prenant la moitié de  $R_{vf}$ . Les deux graphes d'énergies se coupent bien au temps  $t = t_{vir}$ , temps auquel  $R_{vir}$  est atteint.

Une fois les valeurs de  $R_{vir}$  et  $t_{vir}$  connues on peut calculer  $\delta_{fin}$ , il vient que :

$$\delta_{fin} \simeq 174,54$$

soit une erreur de seulement 1,66 % .



# Conclusion

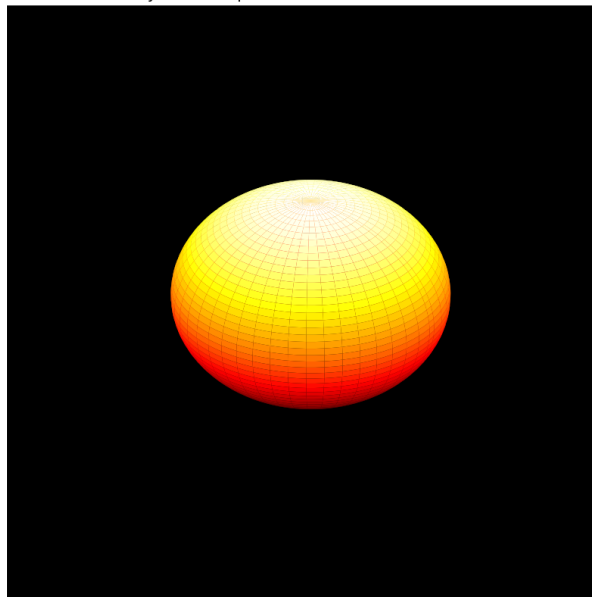
Le phénomène ici abordé est seulement un des nombreux problèmes physiques non-linéaires où aucune solution analytique n'existe. Dans l'optique de résoudre ces équations l'outil numérique se révèle ainsi être un formidable allié. Comme on le voit dans ce projet, malgré les nombreux "sacrifices" faits pour alléger les calculs, on obtient un résultat final relativement proche de la valeur analytique. Pour aller plus loin, sachant que le rythme d'évolution de notre système est très différent selon la phase dans laquelle il se trouve, il serait pertinent d'adopter un pas de temps adaptatif<sup>6</sup>.

Pour conclure ce travail, il m'a semblé intéressant de produire une animation en trois dimensions de cette sphère. J'ai pour cela utilisé la fonction **FuncAnimation** de la bibliothèque **matplotlib**. Cette fonction permet de superposer des graphes de la sphère à chaque instant de notre grille de temps. Pour éviter que le processus ne soit trop long, j'ai pris 5000 intervalles de temps et ai arrêté l'animation peu de temps après le rayon viriel ait été atteint.

---

6. Hélas je n'ai découvert cette option que trop tard et n'ai pas eu le temps de me pencher dessus.

Rayon au temps  $t = 0.74$  milliards d'années



# Bibliographie

- [ML05] Irit Maor and Ofer Lahav. On virialization with dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005(07) :003, 2005.
- [Rou20] Jimmy Roussel. Outils et méthodes pour la physique, 2020.
- [vDB13] Frank van Den Bosch. Lecture 1 : Non-linear structure formation. 2013.
- [Wik20] Wikipedia. Gravitational binding energy, 2020.