Wyznaczanie maksymalnych klik metodą Brona-Kerbosha

Łukasz Biel

Seminarium dyplomowe, Zima 2021

Spis Treści

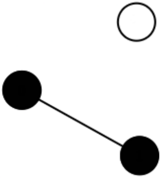
Definicje

- Klika:
  - podgraf w którym wszystkie wierzchołki są połączone krawędzią

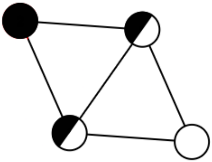
Definicje

- Klika:
    - podgraf w którym wszystkie wierzchołki są połączone krawędzią
- Klikę jest maksymalna gdy:
    - klika, do której nie można dodać nowego wierzchołka z grafu tak, aby nowopodstały podgraf dalej tworzył klikę

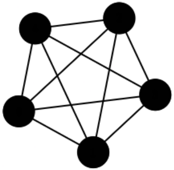
Przykłady



(a) dwie kliki, dwu i jednoelementowa



(b) dwie kliki trzyelementowe



(c) jedna pięcioelementowa klika

Rysunek: przykłady klik maksymalnych

Algorytm Brona-Kerbosha

Sygnatura

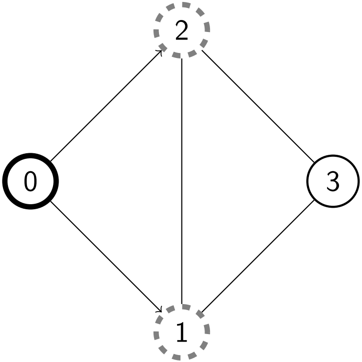
bron_kerbosh(R, P, X)

- **R** potencjalna klika
- **P** nierozważone wierzchołki
- **X** zapamiętane wierzchołki

Krok 1

bron_kerbosh($\{\},\{0,1,2,3\},\{\}$)

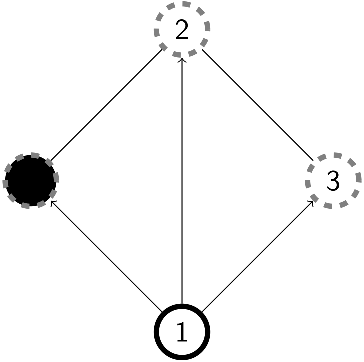
- Sprawdź czy **P** i **X** są puste, jeśli tak, to **R** jest maksymalną kliką
- Wybierz wierzchołek v z **P**
- (w przykładzie v to **0**)
- ...a następnie rekurencyjnie wywołaj **bron_kerbosh** dla
  - $R' := \{\} \cup \{0\}$
  - $P' := \{0,1,2,3\} \cap \{1,2\}$
  - $X' := \{\} \cap \{1,2\}$



Krok 2

bron_kerbosh($\{0\}$,$\{1,2\}$,$\{\}$)

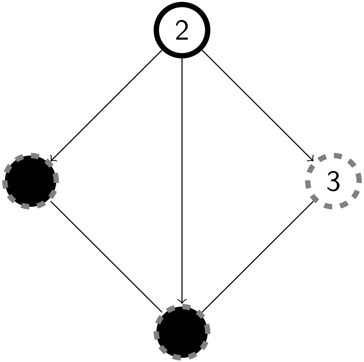
- Sprawdź czy **P** i **X** są puste, jeśli tak, to **R** jest maksymalną kliką
- Wybierz kolejny wierzchołek v z elementów nowego **P'** ($v = 1$)
- ...i kontynuuj rekurencję
  - $R'' := \{0\} \cup \{1\}$
  - $P'' := \{1, 2\} \cap \{0, 2, 3\}$
  - $X'' := \{\} \cap \{0, 2, 3\}$



Krok 3

bron_kerbosh($\{0,1\}$,$\{2\}$,$\{\}$)

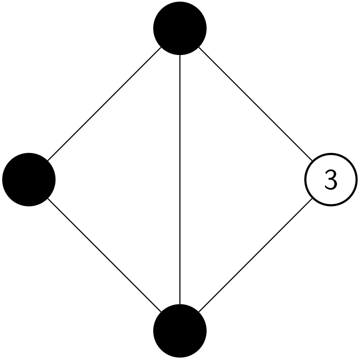
- Sprawdź czy **P** i **X** są puste, jeśli tak, to **R** jest maksymalną kliką
- Kontynuuj ($v = 2$):
  - $R''' := \{0,1\} \cup \{2\}$
  - $P''' := \{2\} \cap \{0,1,3\}$
  - $X''' := \{\} \cap \{0,1,3\}$



Krok 4

bron_kerbosh$(\{0,1,2\},\{\},\{\})$

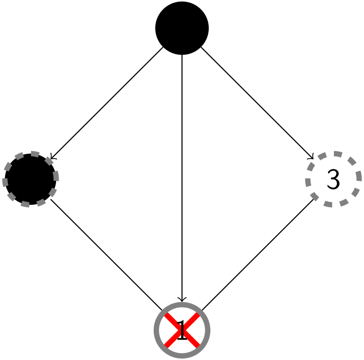
- Sprawdź czy **P** i **X** są puste, jeśli tak, to **R** jest maksymalną kliką
- Znaleźliśmy pierwszą klikę



Krok 5

bron_kerbosh$(\{0\},\{1,2\},\{\})$

- Wychodzimy z rekurencji do kroku 2
- **P"** $:=$ **P"** $\setminus \{1\}$
- **X"** $:=$ **X"** $\cup \{1\}$
- wybieramy nowe $v = 2$
  - $R'' := \{0\} \cup \{2\}$
  - $P'' := \{2\} \cap \{0, 1, 3\}$
  - $X'' := \{1\} \cap \{0, 1, 3\}$



Krok 6...

kontynuujemy

I tak dalej, następnie należy wrócić do kroku 1, dokonać redukcji zbiorów **P'** oraz **X'**, wybrać kolejny wierzchołek i kontynuować wywołania rekurencyjne

Pseudokod

```
fn bron_kerbosh(R, P, X):
    if P == ∅ and X == ∅:
        print(R)
    for v in P:
        bron_kerbosh(R ∪ {v}, P ∩ N(v), X ∩ N(v))
        P := P \ {v}
        X := X ∪ {v}
```

Złożoność obliczeniowa

Złożoność

Czas wykonywania algorytmu zależy od ilości wygenerowanych klik, tj. $\mathbf{O}((N-1)*M^2)$. Zakładając dobór pivota można to zredukować do $O(3^{\frac{N}{3}})$ - lub inaczej do $O(M)$, ponieważ każdy N-wierzchołkowy graf ma maksymalnie $3^{\frac{N}{3}}$ maksymalnych klik.

Dobór pivota

Dobór pivota

Na początku wywołania możemy dobrać element pivotujący u ze zbioru $P \cup X$ aby ograniczyć wierzchołki, które musimy sprawdzić do u oraz wierzchołków nie będących sąsiadami u

Zastosowania

Zastosowania

- medycyna - porównywanie protein (https://opus4.kobv.de/opus4-zib/files/775/ZR-03-53.pdf)
- hotele - podgrupy zniżek