笔记: 度量空间中的紧性, 列紧集性, 有界闭的关系

BY 陆潇扬

2022年6月2日

1 定义

本文假定读者有基本的拓扑知识, 包括拓扑空间, 度量空间, 极限点, 收敛的定义, 等等. 这部分主要介绍和主题相关的几个定义.

定义 1. *如果拓扑空间 X 的任一点列都有收敛子列, 那么称 X 是**列紧**的.*

定义 2. *如果拓扑空间 X 的任何无穷子集都有极限点, 那么称 X 是**极限点紧**的.*

本文中出现的"开覆盖"有时指拓扑空间中的开集族覆盖一个子空间, 有时指覆盖整个拓扑空间, 通过上下文应该不会出现歧义.

2 预备

我们证明一个后文中用到的引理.

引理 3. (勒贝格数引理 (列紧版本)) *对于列紧度量空间 X, 对于 X 的任意开覆盖 $\mathcal{A}$, 都存在 $\delta>0$, 对于任何半径小于 δ 的子集, 这个子集都被 $\mathcal{A}$ 中某个集合包含. δ 称为勒贝格数.*

证明. 反证法. 我们假设不存在这样的 δ. 那么, 对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$, 都存在一个集合 C_n, 它不被任何 $\mathcal{A}$ 中的集合包含. 对于每个 C_n 取其中的一个点 x_n, 根据列紧的假设, 点列 $x_1,\ldots$ 有一个收敛子列 x_{n_k}, 不妨设收敛于 x. 假设 $x\in A\in\mathcal{A}$. 因为 A 是度量空间中的开集, 有一个开球 $B(x,\epsilon)\subset A$. 当 k 足够大, 使得 $\frac{1}{n_k}<\frac{\epsilon}{2}$, 那么 $C_{n_k}\subset B\left(x_{n_k},\frac{\epsilon}{2}\right)$; 同时也使得 $d(x_{n_k},x)<\frac{\epsilon}{2}$ (因为子列收敛于 x), 那么综合前一条就有 $C_{n_k}\subset B(x,\epsilon)$, 这与假设矛盾. □

3 证明

3.1 紧性和有界闭

定理 4. *在度量空间中, 紧的子空间一定是有界闭集, 但是有界闭集不一定是紧的.*

证明. 对于前者, 先证明有界性质. 任取 X 的紧子集 A 中的一个点 x, 并考虑开覆盖 $\{B(x,n)|n\in\mathbb{N}^+\}$. 这个开覆盖有有限子覆盖, 那么我们有 $\forall y\in A, d(x,y)<N, N\in\mathbb{N}$. 进而有 $\forall y,z\in A, d(y,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)<2N$, 因此该子空间是有界的. 对于闭集, 我们展示一个对于任意 Hausdorff 空间都成立的证明. 为了证明 A 是闭的, 我们证明对于任意 $x\in X-A$, 都有邻域 $x\in V\subset X-A$ 且 $U\cap A=\varnothing$, 进而说明 $X-A$ 是开集. 对于 A 中的每一个点 y, 都有开集 $y\in U_y, x\in V_y, U_y\cap V_y=\varnothing$ (Hausdorff 条件). $\bigcup_{y\in A}U_y$ 是 A 的一个开覆盖, 因此有有限子覆盖 $U_{y_1}\cup\cdots\cup U_{y_k}\supset A$. 我们发现 $(U_{y_1}\cup\cdots\cup U_{y_k})\cap(V_{y_1}\cap\cdots\cap V_{y_k})=\varnothing$. 这是因为

$$\begin{aligned} z\in U_{y_1}\cup\cdots\cup U_{y_k} &\Rightarrow \exists i, z\in U_{y_i}\\ &\Rightarrow z\notin V_{y_i}\\ &\Rightarrow z\notin V_{y_1}\cap\cdots\cap V_{y_k}. \end{aligned}$$

后者是一个包含 x 的开集, 因此定理得证.

对于后者, 考虑 $\mathbb{R}$ 上的离散拓扑. 其中任何一个集合都是开集, 且 $d(x,y)\leqslant 1$, 因此这个拓扑空间是有界闭的, 但不是紧的. □

3.2 紧性和可列紧性 (以及极限点紧)

定理 5. *在度量空间 X 中, 下列命题等价:*

1. *X 是紧的.*
2. *X 是极限点紧的.*
3. *X 是列紧的.*

证明. 我们采用"循环"论证: $(1)\Rightarrow(2)$, $(2)\Rightarrow(3)$, $(3)\Rightarrow(1)$.

$(1)\Rightarrow(2)$: 假设 X 的子集 A 没有极限点, 那么 $A=\bar{A}$, $X-A$ 是开集. 同时, 对于任意 $x\in A$, 都存在 x 的一个邻域 U_x, 满足 $U_x\cap A=\varnothing$ (否则按定义, x 是 A 的一个极限点). 我们得到了 X 的一个开覆盖 $(X-A)\cup\bigcup_{x\in A}U_x$, 存在有限子覆盖 $(X-A)\cup U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_k}$. 因为 $X-A$ 不包含 A 中的元素, 并且 U_{x_i} 只包含一个 A 中的元素, 我们可以得到 A 是有限集. 取逆否命题即得原命题.

$(2)\Rightarrow(3)$: 设有点列 $x_1,x_2,\ldots$. 我们考虑所有在这个点列中出现的元素构成的集合. 若这个集合是有限集, 那么至少有一个元素在这一列元素中出现了无限多次, 因此可以取全由这个元素构成的子列. 否则, 这个集合是无限集, 根据假设有一个极限点 x. 我们通过如下方式归纳地构造子列:

1. 取 x 的一个邻域 $B(x,1)$, 这个邻域包含了这一列元素中的 x_i
2. 对于子列中的第 $n+1$ 个点, 考虑 $B\left(x,\frac{1}{n+1}\right)$. 这个邻域包含了点列中的无穷多个元素 (否则, 可以取足够小的半径, 使得 x 不是极限点), 所以可以取其中一个没有被取过的点.

这样构造出的子列与 x 的距离单调递减趋于 0, 因此收敛于 x.

$(3)\Rightarrow(1)$: 我们先说明, 对于任意 $\epsilon>0$, 都存在一个全部由半径为 ϵ 的开球组成的有限开覆盖. 我们用反证法来证明. 归纳地构造一个点列: x_1 取 X 中任意点; x_2 取 $X-B(x_1,\epsilon)$ 中的一个点 (一定存在这样的点, 否则 $B(x_1,\epsilon)$ 是一个开覆盖); 以此类推, x_{n+1} 取 $X-(B(x_1,\epsilon)\cup\cdots\cup B(x_n,\epsilon))$ 中的一个点. 容易发现, $x_1,\ldots$ 没有收敛子列, 因为任何半径为 $\frac{\epsilon}{3}$ 的开球至多包含其中的一个点, 这与前提矛盾.

接下来我们证明命题本身, 考虑任意一个开覆盖. 根据勒贝格数引理, 存在勒贝格数 δ. 取 $\epsilon=\frac{\delta}{3}$, 根据上面的结论, 存在一个由半径为 ϵ 的开球组成的有限开覆盖. 因为开球的直径至多为 $2\epsilon=\frac{2}{3}\delta<\delta$, 这些开球都完全落在 $\mathcal{A}$ 中的某个集合内, 并且这些集合只有有限个. 这些集合就构成了一个 $\mathcal{A}$ 的有限子覆盖. □

4 小结和其他

本文简要说明了度量空间中几种紧的定义的关系, 这与我们在 $\mathbb{R}^n$ 中形成的直觉是一致的. 但是, 在一般的拓扑空间中, 紧性是最本质的, 它能推导出其他各种定义的紧, 并且出现在许多重要的定理中 (如专门讨论紧性的 Tychonoff 定理), 而列紧和极限点紧没有如此重要. 但是, 若将点列和子列做推广得到网 (nets) 和子网, 则对任意拓扑空间都有相应的"列紧"等价于紧. 网概念也占有重要地位.

5 参考资料

Topology, Second Edition, James Munkres.