Laboratorio Didattico di Matematica Computazionale

a.a. 2019-2020

Esercitazione 2

Successioni di numeri reali

Per questa esercitazione verranno corretti gli **esercizi 1, 2, 3, 4 e 5**. Create un file `.tar` o `.zip` contenente gli script che risolvono gli esercizi e le eventuali function ausiliarie, e caricatelo sulla pagina di e-learning del corso.

1. Grafici in Matlab

In questa sezione richiamiamo alcune nozioni utili sulla rappresentazione grafica di vettori reali in Matlab.

- Conoscete già il comando `plot` per disegnare grafici nel piano.

  Consideriamo l'esempio della funzione $x = \sin(t)$ definita su $[0, 2\pi]$. Fissiamo

  ```
  t=0:0.01:2*pi;
  x=sin(t);
  ```

  Confrontate l'output dei comandi seguenti:

  ```
  plot(x)
  plot(t,x)
  plot(t,x,'r*')
  ```

  Per essere usati nel comando `plot`, i vettori `t` e `x` devono avere le stesse dimensioni. In particolare, devono essere entrambi vettori riga (cioè array $1 \times n$) oppure entrambi vettori colonna (cioè array $n \times 1$).

- Il comando `figure` è utile per definire nuove figure. Qual è il risultato se modifichiamo l'esempio precedente come segue?

  ```
  plot(x)
  figure(2)
  plot(t,x)
  figure(3)
  plot(t,x,'r*')
  ```

- A volte è utile tracciare grafici in scala semilogaritmica o logaritmica. In Matlab sono disponibili i comandi seguenti:

  – `semilogy` usa una scala logaritmica sull'asse delle ordinate e lineare sull'asse delle ascisse,

– `semilogx` usa una scala logaritmica sull'asse delle ascisse e lineare sull'asse delle ordinate,

– `loglog` usa una scala logaritmica su entrambi gli assi.

Per esempio, tracciamo il grafico della funzione $y = 3^x$ per $x \in [0, 10]$ in due scale diverse:

```
x=0:0.01:10;
y=3.^x;
plot(x,y)
figure(2)
semilogy(x,y)
```

- Il comando `bar` crea un grafico a barre. Per esempio:

```
v=[8 1 13 37 20 16 2]
bar(v)
```

2. Successione di Collatz

Sia n un intero positivo. La *successione di Collatz* di valore iniziale n è la successione di interi positivi $\{a_k\}_{k\geq 1}$ definita nel modo seguente:

$$a_1 = n,$$
$$\text{per } k \geq 1, \quad a_{k+1} = \begin{cases} \frac{a_k}{2} & \text{se } a_k \text{ è pari,} \\ 3a_k + 1 & \text{se } a_k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La *congettura di Collatz* dice che, per qualsiasi n, esiste sempre un indice h tale che $a_h = 1$.
Ecco un esempio di successione di Collatz:

$$3 \quad 10 \quad 5 \quad 16 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad \ldots$$

Esercizio 1 *Scrivere una function* `a = collatz(n)` *che prenda in input un intero positivo* `n` *e restituisca in output il vettore* `a` *contenente i primi h elementi della successione di Collatz di valore iniziale* `n`*. Qui h indica il più piccolo indice tale che $a_h = 1$.*
(Suggerimento: potrebbero essere utili i comandi `while`*,* `if` *e* `rem`*).*

Possiamo rappresentare graficamente la successione dell'esempio con i comandi seguenti:

```
a=collatz(3);
plot(a,'.-')
title(['n=',num2str(a(1))]);
```

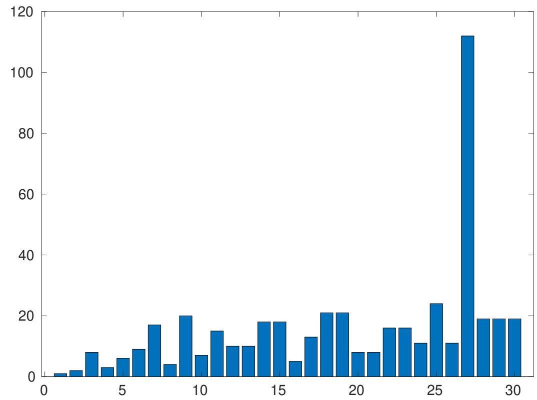
Provate a calcolare e visualizzare altri esempi di successioni di Collatz, per vari valori di n.
È interessante studiare, al variare di n, dopo quante iterazioni viene raggiunto per la prima volta il valore 1.

Esercizio 2 *Scrivere una function* `u = collatz_count(m)` *che prenda in input un intero positivo* `m` *e restituisca in output il vettore* `u` *di lunghezza* `m`*, tale che* `u(j)` *è il numero di elementi del vettore* `a=collatz(j)`*, dove l'indice* `j` *prende i valori da 1 a* `m`*.*

Provate a rappresentare `u` con un grafico a barre. Per esempio, i comandi seguenti

```
close all
u=collatz_count(30);
bar(u)
```

dovrebbero dare una figura come questa:



Provate con altri valori di `m`. Riuscite a trovare un valore iniziale n che richieda più iterazioni di $n = 27$? Riuscite a trovare un valore iniziale n che richieda più di 350 iterazioni?

3. Successione di Fibonacci

La *successione di Fibonacci* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ è definita come

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ per } n \geq 3. \end{aligned}$$

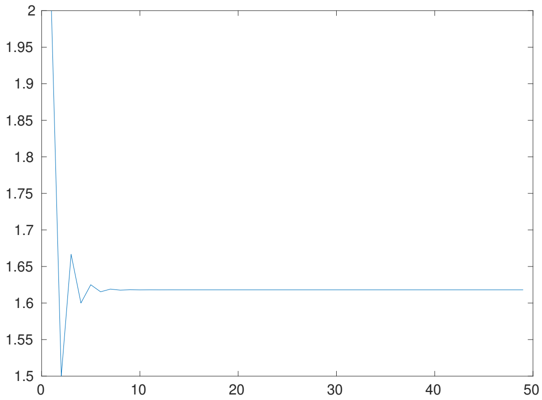
I primi termini della successione sono

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad 89, \quad 144, \ldots$$

Esercizio 3 *Scrivere una function* `f = fibonacci(m)` *che prende in input il numero intero positivo* `m` *e restituisce in output il vettore* `f` *che contiene i primi* `m` *elementi della successione di Fibonacci.*

Alcune misteriose coincidenze.

Scegliete m abbastanza grande (ma non troppo per evitare overflow; per esempio $m = 50$), costruite la successione dei primi m numeri di Fibonacci e costruite il vettore `r` di lunghezza $m-1$ i cui elementi sono i rapporti consecutivi f_k/f_{k-1}, per $k = 2, 3, \ldots, m$. Rappresentate graficamente questo vettore. Qual è il suo andamento? Dovreste ottenere una figura simile a questa:



Graficamente si vede che gli elementi di `r` tendono verso un limite, che numericamente possiamo approssimare con `r(end)`. Per stampare questo valore in doppia precisione scriviamo

```
format long
```

```
r(end)
```

Ora scegliamo un numero reale positivo x, per esempio $x = 10$, e a partire da questo valore iteriamo l'operazione $x \leftarrow \sqrt{1+x}$. In altre parole, definiamo

```
x=10;
```

ed eseguiamo "tante" volte (per esempio 15 volte) l'istruzione

```
x=sqrt(1+x)
```

A quale numero tende questa iterazione? Confrontate l'ultima iterata con `r(end)`.

Il comando `roots` calcola numericamente le radici di un polinomio, espresso come un vettore di coefficienti. Usate `help roots` per capirne meglio il funzionamento.

Ora diamo il comando

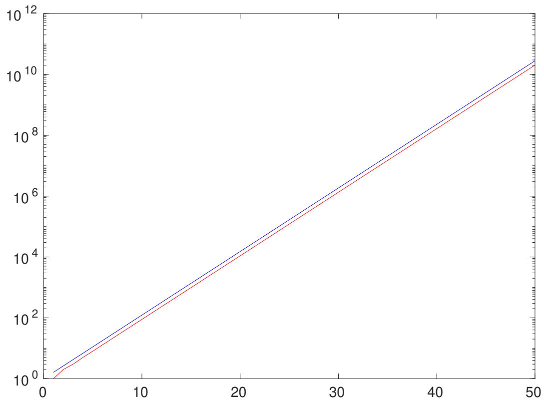
```
z=roots([1 -1 -1])
```

che calcola le due radici di un polinomio quadratico, e selezioniamo la radice positiva:

```
q=max(z)
```

Il mistero si infittisce! Che legame c'è tra il vettore `[1 -1 -1]`, la funzione $g(x) = \sqrt{x+1}$ e i numeri di Fibonacci?

Disegnate in scala semilogaritmica nella stessa figura i primi m termini della successione di Fibonacci e i primi m termini della successione $\{q^n\}_n$. Dovreste ottenere una figura come questa:



Perché i grafici delle due successioni sono due rette, e perché queste rette sono parallele?

Esercizio 4 *Si consideri la successione* $\{g_n\}_{n\geq 1}$ *definita come segue:*

$$\begin{aligned} &g_1 = 1,\ \ g_2 = 1,\ \ g_3 = 2, \\ &g_n = g_{n-1} + g_{n-3} \text{ per } n \geq 4. \end{aligned}$$

Procedendo come per la successione di Fibonacci, si determini ρ *tale che* $g_n \approx K\rho^n$ *e si disegni un grafico che metta a confronto l'andamento di* g_n *e quello di* ρ^n*.*

4. Successione di Fibonacci randomizzata

La *successione di Fibonacci randomizzata* è definita come

$$\begin{aligned} &f_1 = 1, \\ &f_2 = 1, \\ &f_n = f_{n-1} + p_n f_{n-2} \text{ per } n \geq 3, \end{aligned}$$

dove p_n vale 1 con probabilità 1/2 e -1 con probabilità 1/2.

È stato dimostrato[1] che, con probabilità 1, il limite

$$\lim_{n\to\infty} |f_n|^{1/n}$$

esiste finito ed è uguale ad una costante c le cui prime cifre decimali sono date da $c = 1.13198824....$ In altre parole, si ha che quasi certamente la successione cresce in valore assoluto come c^n.

Esercizio 5 *Scrivere una function* `rf = rfibonacci(m)` *che prenda in input un intero positivo* `m` *e restituisca il vettore* `rf` *contenente i primi* `m` *elementi della successione di Fibonacci randomizzata. Usare poi la function per visualizzare graficamente la proprietà di crescita esponenziale descritta sopra, rappresentando in scala semilogaritmica il grafico della successione di Fibonacci randomizzata (in valore assoluto) e quello di* c^n*.*

[1] D. Viswanath, *Random Fibonacci sequences and the number* $c = 1.13198824$, Math. Comp. 69:1131–1155, 2000.

Una generalizzazione della successione di Fibonacci randomizzata si può formulare come segue:

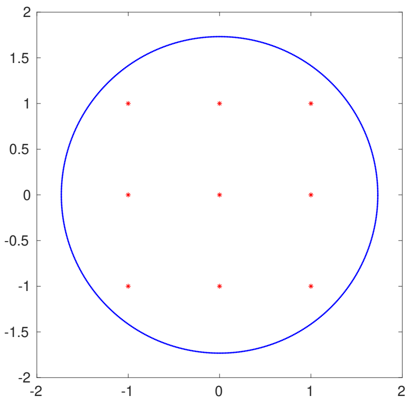
$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1,$$
$$x_n = x_{n-1} + p_n \beta x_{n-2} \text{ per } n \geq 3,$$

dove β è un numero reale positivo fissato e p_n è definito come sopra. Anche per questa successione è stata osservata[2] una crescita esponenziale, il cui tasso di crescita è indicato con $\sigma(\beta)$. Inoltre, si ha $\sigma(\beta) < 1$ se $0 < \beta < \beta^*$ e $\sigma(\beta) > 1$ se $\beta > \beta^*$, dove $\beta^* = 0.70258...$ è una costante nota come *costante di Embree-Trefethen.*

Esercizio 6 *(facoltativo) Si verifichi sperimentalmente la proprietà di crescita esponenziale della successione* $\{x_n\}_{n\geq 1}$. *È interessante fare questo esperimento con vari valori di* β*: provate a scegliere* $\beta < \beta^*$*, poi* $\beta > \beta^*$ *e infine* $\beta = \beta^*$.

5. Approssimazione di π (facoltativo)

Si consideri la successione di interi positivi $\{k_n\}_{n\geq 1}$ definita come segue. Per $n \geq 1$ si consideri nel piano cartesiano il cerchio $\mathcal{C}_n$ di centro l'origine degli assi e di raggio $\sqrt{n}$, e si ponga k_n uguale al numero di punti di coordinate intere che appartengono a $\mathcal{C}_n$. La figura qui sotto illustra il caso $n = 3$, in cui si ha $k_3 = 9$.



Esercizio 7 *Scrivere una function* `k=pigreco(m)` *che prende in input un intero positivo* `m` *e restituisce il vettore* k *contenente i primi* `m` *elementi della successione definita sopra.*

Vogliamo ora modificare la successione $\{k_n\}_{n\geq 1}$ *in modo da definire una nuova successione* $\{\hat{k}_n\}_{n\geq 1}$ *che approssimi* π. *Come possiamo procedere? (Suggerimento: si osservi che* k_n *è l'area della figura formata dall'unione di tutti i quadratini di lato 1 e centro nei punti del piano di coordinate intere appartenenti a* $\mathcal{C}_n$. *È ragionevole aspettarsi che* $\{k_n\}_{n\geq 1}$ *approssimi l'area di* $\mathcal{C}_n$. *Per quale numero occorrerà dividere* k_n *affinché la nuova successione approssimi* π*?).*

Si applichi la function con `m` *abbastanza grande, si esegua un'opportuna operazione su* `k` *per ottenere il vettore* `k_hat` *dei primi* `m` *elementi di* $\{\hat{k}_n\}_{n\geq 1}$, *e si tracci un grafico semilogaritmico dell'errore con cui la successione approssima* π.

[2] M. Embree, L. N. Trefethen, *Growth and decay of random Fibonacci sequences*, Proc. R. Soc. Lond. A 455: 2471–2485 (1999).