

# 概 率 论 与 数 理 统 计

## Probability and Statistics

南京大学 张绍群 & 徐科

更新: December 9, 2025

# Part X – Ch10: 参数估计

# Ch10: 参数估计

## Interval Estimation

December 9, 2025

# 区间估计

点估计用样本统计统计量直接作为总体参数的估计值, 简洁却存在以偏概全的局限性. 但是 推断一个参数落在某个区间比推断这个参数具体的数值要简单. 因此, 我们可以推断总体的参数的是在某个区间范围内的. 比如通过 1 万人的样本预估出中国总体人口的平均身高是 165-175cm, 这就是区间估计.

区间的范围很大, 你可以预估身高是 165-175cm 之间, 也可以预估是 160-180cm 之间, 也可以是其他. 但你会看到, 前者相比后者预测准确的概率更低, 因为其预测的区间范围太窄, 而后者预测的区间范围更宽. 所以, 在进行区间估计的时候, 你会发现每一个预估的区间都对应一个预估的准确度. 前者被称为置信区间, 后者被称为置信度.

# 提纲：区间估计

- 置信区间与置信度
- 枢轴 (Pivot) 变量法
  - 单个正态总体参数:  $\sigma$  已知时,  $\mu$  的置信区间
  - 单个正态总体参数:  $\sigma$  未知时,  $\mu$  的置信区间
  - 单个正态总体参数:  $\sigma^2$  的置信区间
  - 两个正态总体参数
  - 非正态分布的区间估计
- 单侧置信区间
- 区间估计与机器学习

# 置信区间与置信度

**定义 0.1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本, 总体  $X$  的分布函数含未知参数  $\theta$ , 求统计量  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  使得

$$\Pr[\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2] \geq 1 - \alpha$$

成立, 则称  $1 - \alpha$  为置信度,  $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$  为  $\theta$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间.

## Remarks:

- 置信区间  $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$  反映了估计精度: 长度越小, 精度越大.
- 置信度  $\alpha$  反映了估计的可靠度:  $\alpha$  越小, 可靠度越高.
- 给定置信度  $\alpha$ , 置信区间  $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$  的选取并不唯一确定. 通常选长度最小的一个区间.

## 枢轴变量法

构造未知参数  $\theta$  的置信区间最常用的方法是枢轴变量法, 其步骤可以概括如下:

- 设法构造一个样本统计量  $W = W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$ , 使得  $W$  的分布包含待估参数  $\theta$ , 但不依赖其它参数, 且函数  $W$  的分布已知,  $W$  称为**枢轴变量**.
- 给定置信度  $1 - \alpha$ , 根据  $W$  的分布找出临界值  $a$  和  $b$ , 使得下式成立

$$\Pr[a < W < b] = 1 - \alpha .$$

- 根据  $a < W < b$ , 解出  $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ , 则  $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$  为  $\theta$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间.

# 单个正态总体参数 $\mu$ 已知时 $\sigma$ 的置信区间

按照枢轴变量法, 有:

- 由于  $\mu$  的点估计为  $\bar{X}$ , 且  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ , 因此枢轴变量可选为  $W = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- 给定置信度  $1 - \alpha$ , 根据  $W$  的分布找出临界值  $a$  和  $b$ , 使得

$$\Pr[a < W < b] = 1 - \alpha .$$

- 根据正态分布的性质、对称性和上分位点可知

$$\Pr[W \geq \mu_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \quad \text{和} \quad \Pr[W \leq \mu_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 .$$

求解可得  $a = \mu_{1-\alpha/2} = -\mu_{\alpha/2}$  和  $b = \mu_{\alpha/2}$ . 又因为  $W = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ , 于是有

$$\Pr[-\mu_{\alpha/2} < W < \mu_{\alpha/2}] = \Pr\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha .$$

## 区间估计：例 0.1

**例 0.1** 用天平称量某物体的质量 9 次, 得平均值  $\bar{x} = 15.4(\text{g})$ , 已知天平称量结果为正态分布, 其标准差为  $0.1(\text{g})$ . 试求该物体质量的 0.95 置信区间.

## 解答：例 0.1

题目：用天平称量某物体的质量 9 次，得平均值  $\bar{x} = 15.4(\text{g})$ ，已知天平称量结果为正态分布，其标准差为  $0.1(\text{g})$ 。试求该物体质量的 0.95 置信区间。

解答：

- 根据题意知  $1 - \alpha = 0.95$ ,  $\alpha = 0.05$ , 查标准正态分布函数表知  $\mu_{\alpha/2} = \mu_{0.025} = 1.96$ .
- 进一步有该物体质量的 0.95 置信区间为

$$\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mu_{\alpha/2} = 15.4 \pm 1.96 \times 0.1 / \sqrt{9} = 15.4 \pm 0.0653.$$

从而该物体质量的 0.95 置信区间为  $[15.3347, 15.4653]$ .

## 区间估计：例 0.2

**例 0.2** 设总体为正态分布  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ , 为得到  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间且区间长度不超过 1.2, 求样本容量应为多大?

## 解答：例 0.2

题目：设总体为正态分布  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ , 为得到  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间且区间长度不超过 1.2, 求样本容量应为多大?

解答：

- 根据题意知  $1 - \alpha = 0.95$ ,  $\alpha = 0.05$ , 查标准正态分布函数表知  $\mu_{\alpha/2} = \mu_{0.025} = 1.96$ .
- 又因为  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间为

$$[\bar{X} - \mu_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X} + \mu_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$$

其区间长度为  $2\mu_{\alpha/2}/\sqrt{n}$ , 它仅依赖于样本容量  $n$  且与样本取值无关. 又

$$2\mu_{\alpha/2}/\sqrt{n} \leq 1.2 \Rightarrow n \geq (2/1.2)^2 \mu_{\alpha/2}^2 = 10.67 \approx 11.$$

即样本容量为 11 时, 使得  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间长度不超过 1.2.

# 单个正态总体参数 -- $\sigma$ 未知时 $\mu$ 的置信区间

按照枢轴变量法, 有:

- $\sigma^2$  可用样本方差  $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1)$  估计, 枢轴变量选为  $W = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n - 1)$ .
- 给定置信度  $1 - \alpha$ , 根据  $W$  的分布找出临界值  $a$  和  $b$ , 使得

$$\Pr[a < W < b] = 1 - \alpha \Rightarrow b = t_{\alpha/2}(n - 1), \quad a = -t_{\alpha/2}(n - 1).$$

- 整理可得

$$\Pr\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n - 1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n - 1)\right] = 1 - \alpha.$$

## 区间估计：例 0.3

**例 0.3** 假设轮胎的寿命服从正态分布. 为估计某种轮胎的平均寿命, 现随机地抽取 12 只轮胎试用, 测得它们的寿命 (单位: 万千米) 如下:

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.7

试求平均寿命的 0.95 置信区间.

## 解答：例 0.3

题目：假设轮胎的寿命服从正态分布。为估计某种轮胎的平均寿命，现随机地抽取 12 只轮胎试用，测得它们的寿命（单位：万千米）如下：

$$\begin{array}{ccccccc} 4.68 & 4.85 & 4.32 & 4.85 & 4.61 & 5.02 \\ 5.20 & 4.60 & 4.58 & 4.72 & 4.38 & 4.7 \end{array}$$

试求平均寿命的 0.95 置信区间。

解答：

- 此处正态总体标准差未知，可使用  $t$  分布求均值的置信区间。本例中经计算有

$$\bar{x} = 4.709, \quad s^2 = 0.0615$$

取  $\alpha = 0.05$ ，查表知  $t_{0.025}(11) = 2.2010$ ，于是平均寿命的 0.95 置信区间为

$$4.7092 \pm 2.2010 \cdot \sqrt{0.0615} / \sqrt{12} = [4.5516, 4.8668]$$

# 单个正态总体参数 $\sigma^2$ 的置信区间

虽然可以就  $\mu$  是否已知分两种情况讨论  $\sigma^2$  的置信区间, 但在实际中  $\sigma^2$  未知  $\mu$  已知的情形是极为罕见的, 所以我们只在  $\mu$  未知的情况下讨论  $\sigma^2$  的置信区间. 按照枢轴变量法, 有:

- $\sigma^2$  可用样本方差  $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1)$  估计, 枢轴变量选为  $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .
- 给定置信度  $1 - \alpha$ , 设临界值  $a$  和  $b$ , 使得  $P[a < W < b] = 1 - \alpha$ . 又根据  $\chi^2$  分布的不对称性, 采用概率对称的区间

$$P[W \leq a] = P[W \geq b] = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow b = \chi_{\alpha/2}^2(n-1), \quad a = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1).$$

- 整理可得

$$\Pr \left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right] = 1 - \alpha.$$

## 区间估计：例 0.4

**例 0.4** 某厂生产的零件质量服从正态分布  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , 现随机地抽取 9 个零件, 测得其质量 (单位: g) 如下:

45.3 45.4 45.1 45.3 45.5 45.7 45.4 45.3 45.6

试求总体标准差  $\sigma$  的 0.95 置信区间.

## 解答：例 0.4

题目：某厂生产的零件质量服从正态分布  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , 现随机地抽取 9 个零件, 测得其质量(单位: g)如下:

45.3 45.4 45.1 45.3 45.5 45.7 45.4 45.3 45.6

试求总体标准差  $\sigma$  的 0.95 置信区间.

解答:

- 本例中经计算有  $(n-1)S^2 = 8 \times 0.0325 = 0.26$ , 又  $\alpha = 0.05$ , 查表知  $\chi^2_{0.975}(8) = 2.1797$ ,  $\chi^2_{0.025}(8) = 17.5345$ , 于是总体标准差  $\sigma^2$  的 0.95 置信区间为

$$\left[ \frac{0.26}{17.5345}, \frac{0.26}{2.1797} \right] = [0.0148, 0.1193]$$

从而  $\sigma$  的 0.95 置信区间为  $[0.1218, 0.3454]$ .

## 两个正态总体参数的置信区间

若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $y_1, y_2, \dots, y_m$  是来自  $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  的样本, 且两个样本相互独立, 令

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i, \quad S_1^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{x})^2}{(n-1)}, \quad S_2^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(y_i - \bar{y})^2}{(m-1)}.$$

下面讨论两个均值之差  $\mu_1 - \mu_2$  和两个方差之比  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计.

# 两个正态总体参数的置信区间

- 当  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  已知时, 有

$$\bar{x} - \bar{y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right),$$

取枢轴量为

$$W = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

求解置信区间, 有

$$\Pr\left[\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}}\right] = 1 - \alpha.$$

## 两个正态总体参数的置信区间

- 当  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  未知时, 有

$$\bar{x} - \bar{y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right), \quad \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2),$$

故可以构造如下服从  $t$  分布的枢轴量

$$W = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2),$$

其中  $S_W^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ . 于是置信区间为

$$\Pr\left[-t_{\alpha/2}(n+m-2) < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < t_{\alpha/2}(n+m-2)\right] = 1-\alpha.$$

## 两个正态总体参数的置信区间

- 求  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计, 由于  $\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1)$ ,  
 $\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$ , 故可构造服从  $F$  分布的枢轴量

$$W = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1),$$

根据  $F$  分布的不对称性, 采用概率对称的区间

$$\Pr[W \leq a] = \Pr[W \geq b] = \alpha/2$$

$$\Rightarrow b = F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1), \quad a = F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1).$$

由此可得置信区间

$$\Pr \left[ \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} \right] = 1 - \alpha.$$

## 区间估计：例 0.5

**例 0.5** 若从总体  $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  和总体  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  中分别抽取容量为  $n_1 = 10, n_2 = 15$  的样本, 经计算后有  $\bar{X} = 82, S_1^2 = 56.5, \bar{Y} = 76, S_2^2 = 52.4$ .

- 已知  $\sigma_1^2 = 64, \sigma_2^2 = 49$ , 求  $\mu_1 - \mu_2$  的 0.95 置信区间.
- 当  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  未知时, 求  $\mu_1 - \mu_2$  的 0.95 置信区间.
- 求  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  的 0.95 置信区间.

## 解答：例 0.5

解答：

- $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  已知时的置信区间为

$$\Pr \left[ \bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right] = 1 - \alpha.$$

查标准正态分布函数表知  $\mu_{0.025} = 1.96$ , 因此  $\mu_1 - \mu_2$  的 0.95 置信区间为

$$\left[ 6 - 1.96 \sqrt{\frac{64}{10} + \frac{49}{15}}, 6 + 1.96 \sqrt{\frac{64}{10} + \frac{49}{15}} \right] = [-0.0939, 12.0939]$$

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  时, 置信区间为

$$\Pr \left[ -t_{\alpha/2}(n+m-2) < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < t_{\alpha/2}(n+m-2) \right] = 1 - \alpha.$$

其中  $S_W^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} = \frac{9 \times 56.5 + 14 \times 52.4}{23} = 54.0043$ , 而  $t_{0.975}(23) = 2.0687$ , 因此

$\mu_1 - \mu_2$  的 0.95 置信区间为

$$\left[ 82 - 76 - 2.0687\sqrt{54.0043} \sqrt{\frac{10 + 15}{10 \times 15}}, 82 - 76 + 2.0687\sqrt{54.0043} \sqrt{\frac{10 + 15}{10 \times 15}} \right] \\ = [-0.2063, 12.2063].$$

•  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$\Pr \left[ \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} \right] = 1 - \alpha.$$

查表得  $F_{0.025}(9, 14) = 3.21$ ,  $F_{0.975}(9, 14) = 1/F_{0.975}(14, 9) = 1/3.8$ , 因此  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  的 0.95 置信区间为

$$\left[ \frac{56.5}{52.4} \cdot \frac{1}{3.21}, \frac{56.5}{52.4} \cdot 3.8 \right] = [0.3359, 4.0973]$$

# 非正态分布的区间估计

若总体  $X$  的分布未知或非正态分布, 我们可以利用集中不等式和中心极限定理给出总体期望  $\mu = \mathbb{E}[X]$  的区间估计.

- 若  $X \in [a, b]$ , 设  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ , 根据集中不等式有

$$\Pr[|\mu - \bar{X}| \geq \epsilon] \leq 2 \exp(-2n\epsilon^2/(b-a)^2).$$

令

$$\alpha = 2 \exp(-2n\epsilon^2/(b-a)^2),$$

求解

$$\epsilon = \sqrt{(b-a)^2 \ln(2/\alpha)/n},$$

于是有

$$\Pr[\bar{X} - \sqrt{(b-a)^2 \ln(2/\alpha)/n} < \mu < \bar{X} + \sqrt{(b-a)^2 \ln(2/\alpha)/n}] > 1-\alpha.$$

# 非正态分布的区间估计

- 中心极限定理求枢轴量的近似分布, 设总体  $X$  的期望  $\mathbb{E}[X] = \mu$ , 方差  $\text{VAR}(X) = \sigma^2$ , 有

$$W = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

- 当  $\sigma^2$  已知时, 有

$$\Pr \left[ -\mu_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma \sqrt{n}} < \mu_{\alpha/2} \right] \approx 1 - \alpha.$$

- 当  $\sigma^2$  未知时, 用无偏样本方差  $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1)$  替代  $\sigma^2$ , 于是有

$$\Pr \left[ -\mu_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < \mu_{\alpha/2} \right] \approx 1 - \alpha.$$

## 区间估计：例 0.6

**例 0.6** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X \sim B(p)$  的样本，求  $p$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计。

## 解答：例 0.6

解答：

- 利用集中不等式求解，根据伯努利分布的性质有  $X_i \in \{0, 1\}$  以及  $p = \mathbb{E}[X]$ ，根据切比雪夫不等式有

$$\Pr[|\bar{X} - p| > \epsilon p] \leq 2 \exp(-np\epsilon^2/3) ,$$

设  $\alpha = 2 \exp(-np\epsilon^2/3)$ ，于是有

$$\Pr[\bar{X} - \sqrt{3p \ln(2/\alpha)/n} < p < \bar{X} + \sqrt{3p \ln(2/\alpha)/n}] \geq 1 - \alpha ,$$

- 根据伯努利分布的性质有  $p = \mathbb{E}[X]$  以及  $\text{VAR}(X) = p(1 - p)$ ，利用中心极限定理可知

$$W = \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) .$$

于是有

$$\Pr \left[ -\mu_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \mu_{\alpha/2} \right] \approx 1 - \alpha .$$

## 单侧置信区间

对某些实际问题, 我们往往只关心置信区间的上限或下限

- 例如, 次品率只关心上限, 产品的寿命只关心下限

由此引入单侧置信区间及其估计.

**定义 0.2** 给定  $\alpha \in (0, 1)$ , 设样本  $X_1, \dots, X_n$  的统计量  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)$  满足

$$\Pr[\theta > \hat{\theta}_1] \geq 1 - \alpha ,$$

则称  $(\hat{\theta}_1, +\infty)$  为  $\theta$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间, 且  $\hat{\theta}_1$  称为 单侧置信下限.

# 正态总体的单侧置信区间

对于正态总体, 可以将相关置信区间的估计都拓展到单侧置信估计.

- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  的样本. 若  $\sigma^2$  已知, 讨论  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的单侧置信下限和上限.
- 构建枢轴量为

$$W = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) ,$$

- 根据单侧置信上下限的定义有

$$\Pr \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \mu_\alpha \right] = 1 - \alpha, \quad \Pr \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > -\mu_\alpha \right] = 1 - \alpha .$$

- 若  $\sigma^2$  未知, 构建枢轴量为

$$W = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n - 1) ,$$

## 单侧置信区间估计：例 0.7

**例 0.7** 从一批出厂的灯泡中随机抽取 10 盏灯泡，测试其寿命分别为：  
1000, 1500, 1250, 1050, 950, 1000, 1150, 1050, 950, 1000 (单位：小时).  
假设这批灯泡的寿命服从正态分布，求这批灯泡平均寿命的置信度为  
95% 的单侧置信下限.

## 解答：例 0.7

题目：从一批出厂的灯泡中随机抽取 10 盏灯泡，测试其寿命分别为：1000, 1500, 1250, 1050, 950, 1000, 1150, 1050, 950, 1000（单位：小时）。假设这批灯泡的寿命服从正态分布，求这批灯泡平均寿命的置信度为 95% 的单侧置信下限。

解答：

- 按照题意，判断此例是求  $\sigma$  未知时  $\mu$  的单侧置信区间，枢轴变量选为  $W = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n - 1)$ 。计算样本均值及样本方差（无偏）分别为

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{10} X_i / 10 = 1090 \quad \text{和} \quad S^2 = \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 / 9 = 8800 / 9.$$

于是有

$$\Pr \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{10}} < t_{0.05}(9) \right] = 0.95,$$

查表可知  $t_{0.05}(9) = 1.833$  可得

$$\mu > \bar{X} - t_{0.05}(9)S/\sqrt{10} = 1090 - \sqrt{8800/9} \times 1.833/\sqrt{10} > 1072.$$

# 区间估计与机器学习

- 在统计学中, 区间估计是对未知参数提供一个区间范围, 而不是一个点. 最典型的是置信区间 (Confidence Interval, CI).
- 在机器学习中, 当我们训练模型时, 不仅可以得到参数的点估计 (训练得到的权重), 也可以对预测结果或参数的不确定性进行区间估计, 从而衡量模型的不确定性.
  - 风险控制 (预测房价区间)
  - 医学诊断 (预测病人指标区间)
  - 置信学习 (Conformal Prediction)

# 区间估计与机器学习：线性回归的区间估计

考虑简单线性回归模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

对新输入  $x^*$ , 预测值为

$$\hat{y}^* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$$

则预测标准误为

$$\text{SE}(\hat{y}^*) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)}$$

给定置信水平  $1 - \alpha$  (如 95%), 则预测区间为

$$\text{CI}_{1-\alpha} = \hat{y}^* \pm t_{n-2, 1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{y}^*)$$

# 线性回归的区间估计

考虑简单线性回归模型

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i , \quad \varepsilon_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) , \quad i = 1, \dots, n$$

记样本均值  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  以及

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 .$$

参数的最小二乘估计为

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_{xx}} , \\ \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} , \end{cases}$$

其中,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  .

## Step 1: 预测值及其方差

对新输入  $x^*$ , 对均值响应 (mean response) 和单个新观测 (prediction) 的定义

- 均值响应的真值:  $\mu(x^*) = \beta_0 + \beta_1 x^*$ ;
- 点预测 (拟合值):  $\hat{y}^* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ ;
- 若考虑单次真实观测:  $y^* = \beta_0 + \beta_1 x^* + \varepsilon^*$ , 其中  $\varepsilon^* \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  与训练数据独立.

首先计算  $\hat{y}^*$  的方差 (关于样本的随机性)

$$\text{Var}(\hat{y}^*) = \text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*) = \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right).$$

这个式子可由  $\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ 、 $\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)$  和  $\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\bar{x}\sigma^2}{S_{xx}}$  代入并展开得到

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*) &= \text{Var}(\hat{\beta}_0) + x^{*2} \text{Var}(\hat{\beta}_1) + 2x^* \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ &= \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right).\end{aligned}$$

对于单次新观测  $y^*$ ，预测误差  $y^* - \hat{y}^*$  方差为拟合不确定性与噪声的和

$$\begin{aligned}\text{Var}(y^* - \hat{y}^*) &= \text{Var}(\varepsilon^*) + \text{Var}(\hat{y}^*) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \\ &= \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right).\end{aligned}$$

因此, 若用  $\sigma^2$  表示真实误差方差, 则单次预测的标准误 (standard error) 是

$$\text{SE}_{\text{pred}}(\hat{y}^*) = \sqrt{\sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}.$$

## Step 2: 用样本估计并构造 $t$ 区间

在实际中  $\sigma^2$  未知, 用残差均方估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

常见结论 (线性回归理论) 给出

$$\frac{y^* - \hat{y}^*}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2},$$

即该量服从自由度为  $n - 2$  的 Student- $t$  分布（这是因为分子是均值为 0 的正态变量，分母为独立的  $\hat{\sigma}$  的缩放，且  $(n - 2)\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-2}^2$ ）。

因此给定置信水平  $1 - \alpha$ ，单次观测的预测区间（prediction interval）为

$$\text{CI}_{1-\alpha}^{\text{pred}}(y^*) = \hat{y}^* \pm t_{n-2, 1-\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

注意：若关注的是均值响应  $\mu(x^*)$ （不包括随机噪声  $\varepsilon^*$ ），则其标准误为

$$\text{SE}_{\text{mean}}(\hat{y}^*) = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}},$$

相应的均值响应的置信区间为

$$\text{CI}_{1-\alpha}^{\text{mean}}(\mu(x^*)) = \hat{y}^* \pm t_{n-2, 1-\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

两者区别仅在于预测区间多出一个“1”，表示单次观测里有观测噪声。

# 区间估计与机器学习：逻辑回归的区间估计

逻辑回归模型

$$P(y = 1 \mid x; \beta) = \sigma(\beta_0 + \beta_1 x), \quad \sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

假设已经训练得到点估计  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ , 其估计协方差矩阵为  $\hat{\Sigma}$  (通常由费舍尔信息矩阵的逆得到). 则参数  $\beta_j$  的置信区间为

$$\text{CI}_{1-\alpha}(\beta_j) = \hat{\beta}_j \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{\Sigma}_{jj}}, \quad j = 0, 1$$

其中  $z_{1-\alpha/2}$  为标准正态分布临界值.

对新输入  $x^*$  的预测概率的近似区间可以通过 delta 方法得到

$$\text{SE}(\hat{p}^*) \approx \sqrt{\nabla_{\beta} \sigma(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)^\top \hat{\Sigma} \nabla_{\beta} \sigma(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)}$$

预测概率区间为

$$\text{CI}_{1-\alpha}(\hat{p}^*) = \hat{p}^* \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{p}^*)$$

# 神经网络中的区间估计

考虑单隐藏层神经网络回归

$$\hat{y}_i = f(x_i; \Theta), \quad \Theta = \{W_1, b_1, W_2, b_2\}$$

假设输出服从正态分布  $y_i \sim \mathcal{N}(\hat{y}_i, \sigma^2)$ .

对新输入  $x^*$  的预测值为  $\hat{y}^* = f(x^*; \hat{\Theta})$ , 其预测不确定性可以通过蒙特卡洛 dropout 或贝叶斯近似得到标准误  $\text{SE}(\hat{y}^*)$ , 然后构造预测区间

$$\text{CI}_{1-\alpha}(\hat{y}^*) = \hat{y}^* \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{y}^*)$$

# 神经网络中的区间估计

考虑单隐藏层神经网络回归

$$\hat{y}_i = f(x_i; \Theta), \quad \Theta = \{W_1, b_1, W_2, b_2\}$$

假设输出服从正态分布  $y_i \sim \mathcal{N}(\hat{y}_i, \sigma^2)$ .

对新输入  $x^*$  的预测值为  $\hat{y}^* = f(x^*; \hat{\Theta})$ , 其预测不确定性可以通过蒙特卡洛 dropout 或贝叶斯近似得到标准误  $\text{SE}(\hat{y}^*)$ , 然后构造预测区间

$$\text{CI}_{1-\alpha}(\hat{y}^*) = \hat{y}^* \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{y}^*)$$

例如, 通过 MC dropout 对同一个  $x^*$  进行  $T$  次前向传播, 得到预测样本  $\{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_T\}$ , 则

$$\text{SE}(\hat{y}^*) \approx \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2} \quad \text{with} \quad \bar{\hat{y}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{y}_t$$

# 区间估计与机器学习：小结

区间估计为机器学习模型提供了对不确定性的量化，能够在决策中提供更可靠的信息。

- 线性回归：可以直接利用残差和  $t$  分布构造预测区间。
- 逻辑回归：可以利用参数协方差矩阵和 delta 方法近似得到概率预测区间。
- 神经网络：通过蒙特卡洛 dropout 或贝叶斯神经网络获得预测分布，从而计算预测区间。