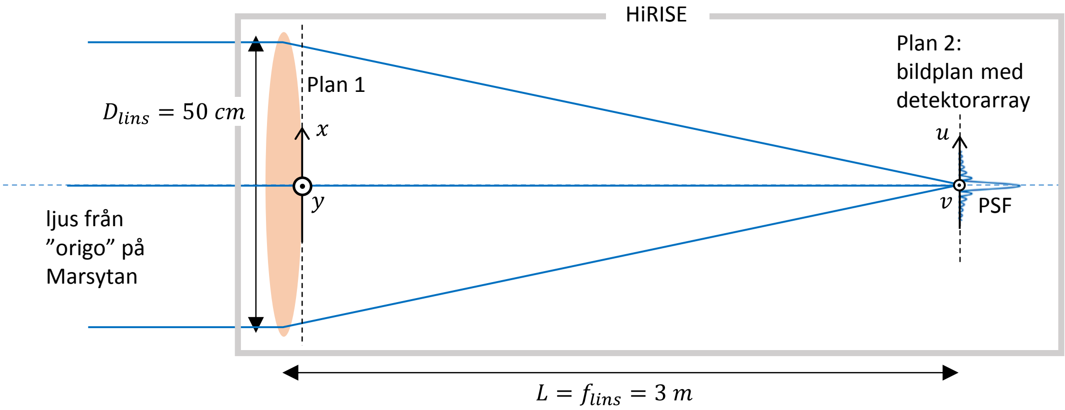
I en tentauppgift från mars 2016 skulle man bedöma om det som påstods i *The Martian* är sant: att det går att se Mark Watneys fotspår (eller hjulspår, beroende på om man läser boken eller ser filmen) med hjälp av de teleskop som finns ombord på kommunikationssatelliterna som (i framtiden) snurrar runt Mars. Eftersom vi så gärna ville att Hollywood skulle ha rätt, sade vi i vår analys att satelliterna i själva verket skulle vara identiska med den (redan existerande) lågsniffande spionsatelliten *Mars Reconnaissance Orbiter* (MRO). Den befinner sig endast cirka 250 km ovanför Marsytan, och tittar ned mot denna med sitt mycket kraftfulla HiRISE (high resolution imaging science experiment)-teleskop, det största teleskop som någon interplanetär rymdsond någonsin haft med sig.



Vår modell av HiRISE-teleskopet. Som nästan alla lite större teleskop är det ett spegelteleskop, men som vanligt viker vi ut strålgången och ersätter spegeln med en lins. I texten till denna HUPP kommer vi därför att använda beteckningarna ”lins” och ”spegel” utan åtskillnad.

Till skillnad från tentan ska vi i denna HUPP inte använda tumregler och magkänsla. Istället ska vi simulera hur den faktiska bilden blir i teleskopet. Men frågan är densamma*: är det rimligt att man kunde upptäcka spåren av Mark från teleskopbilderna?* Vi använder standardmetoden för att simulera intensitetsfördelningen i en avbildning: faltning av den perfekta bilden med point-spread funktionen (PSFen) för avbildningen.

1. Beräkning av PSF

I princip kan vi beräkna PSFen genom att propagera fältet från Plan 1 (efter linsen) till Plan 2 (detektorplanet/bildplanet) med PAS. Men kom ihåg att samplingsavstånden i Plan 1 och Plan 2 är lika stora i PAS. Eftersom vi vill ha (sub-)mikrometerupplösning i detektorplanet måste vi alltså sampla även Plan 1 i steg om en mikrometer eller mindre. Men eftersom linsen är så stor (50 cm diameter) krävs det en förfärligt massa sampelpunkter i Plan 1 – åtminstone 500000×500000 om samplingsavståndet är 1 mikrometer. Så stora matriser är helt omöjliga att hantera i vanliga datorer.

Houston, we have a problem

Å andra sidan är systemet rotationssymmetriskt, så även PSFen är det. Alltså räcker det med att bestämma PSFen längs en radie, t.ex. längs u-axeln i Plan 2. Det kraftigt reducerade antalet punkter vi behöver bestämma PSFen i gör att vi faktiskt kan skippa FFT-baserade metoder och istället direkt beräkna HFM-integralen. Då behöver vi heller inte göra den paraxiella approximationen, som ju gjordes för att få HFM-integralen att bli en fouriertransform. Det oapproximerade uttrycket för fältet i Plan 2 från fältet i Plan 1 blir, som vi såg redan i föreläsning 2, enligt Huygens-Fresnel:

$$E_2(u,v) = c_{HFM} \iint_{x,y} E_1(x,y) \frac{e^{jkr(x,y,u,v)}}{r(x,y,u,v)} dxdy$$

där $r(x,y,u,v) = \sqrt{L^2 + (x-u)^2 + (y-v)^2}$ är avståndet från en HF-källa i Plan 1 till observationspunkten i Plan 2. PSFen längs u-axeln blir alltså, med $c_{HFM} = 1$ eftersom vi inte är intresserade av absolutvärden,

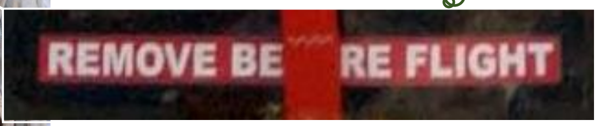
$$E_{PSF}(u, v=0) = \iint_{x,y} T_{lins}(x,y) \frac{e^{jkr(x,y,u)}}{r(x,y,u)} dxdy = \text{(Matlab)} = \texttt{ sum(sum(...}$$

eftersom $E_1(x,y) = E_{in}(x,y) \cdot T_{lins}(x,y) = T_{lins}(x,y) = \begin{cases} e^{j\varphi_{lins}(x,y)} \\ 0 \text{ utanför lins} \end{cases}$ eftersom vi antar att punktkällan i origo på objektet (Marsytan) ligger mycket långt bort, så att dess sfäriska våg in på linsen kan approximeras med en plan våg, d.v.s. $E_{in}(x,y) = 1$. Vi använder beteckningen E_{PSF} som en påminnelse om att PSFen är *intensiteten* hos detta fält, alltså $PSF(u, v=0) = |E_{PSF}(u, v=0)|^2$.

Komplettera den nästan färdiga givna koden PSF_radiell.m (endast två rader behöver kompletteras) så att rutinen beräknar PSFen längs u-axeln för avbildningen av Marsytan i HiRISE-teleskopet! Bifoga koden. Koden plottar också vad den paraxiella approximationen skulle ge för resultat. Jämför det paraxiella resultatet med det optiska systemets verkliga PSF – är du nöjd med den verkliga PSFen?

(I denna uppgift använder du optikkursens vanliga uttryck för fasmoduleringen hos linsen, vilket i matlabprogrammet uttrycks som att korrektionsparametern $c_4 = 0$, detta förklaras i uppgift 2.)

HiRISE-teleskopet sett framifrån, med sitt snedskurna roterbara solskydd framför öppningen.



I rymden kan ingen ta av dammskydden

2. Utför spegelkorrektion!

Du borde absolut *inte* vara nöjd med din verkliga PSF! Jämfört med den förväntade Airy-funktionen, som man skulle få om den paraxiella approximationen vore giltig, är den *mycket* blaffigare. Anledningen till att vi inte får det förväntade resultatet är att den vanliga fasmoduleringsfunktionen $\varphi_{lins} = -k\frac{r^2}{2f}$ bara är optimal för paraxiella fall (förtydligande: här är r det radiella avståndet från origo, ofta kallat `rmat` i våra Matlabrutiner, alltså inte det $r = r(x, y, u, v)$ som ingår i PSF-uttrycket i uppgift 1). Men den stora spegeldiametern i förhållande till den korta längden på teleskopet gör att vågutbredningen i HiRISE-teleskopet avviker från paraxiell. Den vanliga fasmoduleringsfunktionen fungerar bra i spegelns centrala del, alltså för små värden på r, men i spegelns periferi ger den ett fel som uppenbarligen leder till en blaffig PSF och därmed suddig bild.

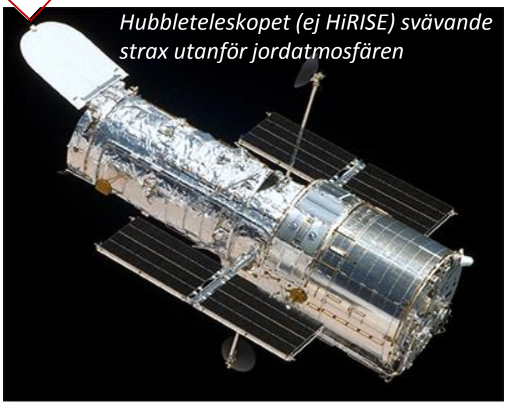
Detta påminner en hel del om det pinsamma spegelfelet hos det väldigt mycket större Hubble-teleskopet som sändes upp i omloppsbana runt Jorden år 1990. Den felaktiga formen på Hubble-teleskopets spegel berodde dock inte på okunnighet om paraxiella teorins begränsningar, utan på att en lins stått en dryg millimeter fel i mätuppställningen under slipningen av den buktiga glasytan på spegeln:

Wikipedia

Flawed mirror

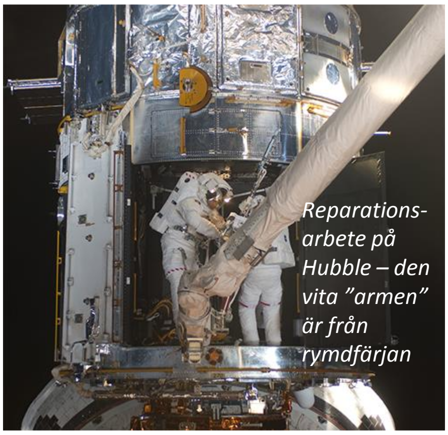
Within weeks of the launch of the telescope, the returned images indicated a serious problem with the optical system. Although the first images appeared to be sharper than those of ground-based telescopes, Hubble failed to achieve a final sharp focus and the best image quality obtained was drastically lower than expected. Images of point sources spread out over a radius of more than one arcsecond, instead of having a point spread function (PSF) concentrated within a circle 0.1 arcsec in diameter as had been specified in the design criteria.[57][58]

Kass PSF



Hubbleteleskopet (ej HiRISE) svävande strax utanför jordatmosfären

Den ökända teleskopspegeln →



Reparations-arbete på Hubble – den vita "armen" är från rymdfärjan

Så vi måste alltså korrigera spegelns fasmodulering för att få en bättre PSF. Gör det genom att addera en svag fasmodulering som har ett r^4-beroende, så att fasmoduleringen blir

$$\varphi_{lins} = -k\frac{r^2}{2f} + c_4 r^4$$

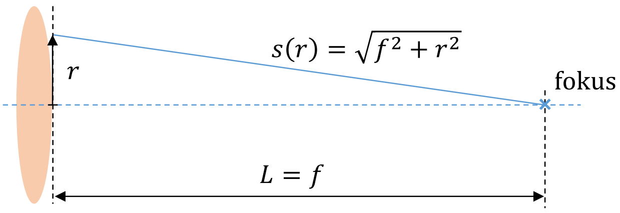
där c_4 är en konstant som du kan komma fram till genom att testa lite olika värden för c_4 och välja det som ger bästa PSFen. Se till att det valda c_4-värdet förbättrar din PSF-kurva signifikant så att den närmar sig den indikerade Airy-funktionens minimala blaffighet. För att det ska gå enkelt, följ ett av recepten nedan:

gör såhär…

För att snabbt få fram ett hyfsat värde på c_4 kör rutinen rays_HiRISE.m som visar strålgången efter linsen i HiRISE. Justera successivt c_4 så att de yttre strålarna skär symmetriaxeln allt närmare den streckade linjen. Kolla med PSF_radiell.m att detta c_4 verkligen ger en bra PSF.

… eller såhär!

Alternativt kan du tänka på att en lins ska kompensera för att gångvägen s från lins till fokus ökar med radiella avståndet r



$$s = \sqrt{f^2 + r^2} \approx \text{(Maclaurin med } \textit{tre} \text{ termer)} \approx f + \frac{r^2}{2f} - \frac{r^4}{8f^3}$$

där den andra termen ger den vanliga (paraxiella) fasmoduleringen (minustecknet i fasmoduleringen kommer av att propagationen genom linsen ska *motverka* gångvägsskillnaden från lins till fokus, faktorn k kommer av att vi betraktar *fasen* som motsvarar gångvägen), och den tredje termen ger första ordningens korrektion för icke-paraxiell propagation, vilket ger ett r^4-beroende ur vilket c_4 kan erhållas på samma sätt som koefficienten framför r^2 i den paraxiella fasmoduleringen. Kolla detta c_4-värde med PSF_radiell.m och se att det ger en bra PSF. Kolla också att detta c_4 ger ett bra fokus även strålmässigt, genom att köra rutinen rays_HiRISE.m både utan ($c_4 = 0$) och med din korrektion.

(HUPP3b fortsätter på nästa sida)

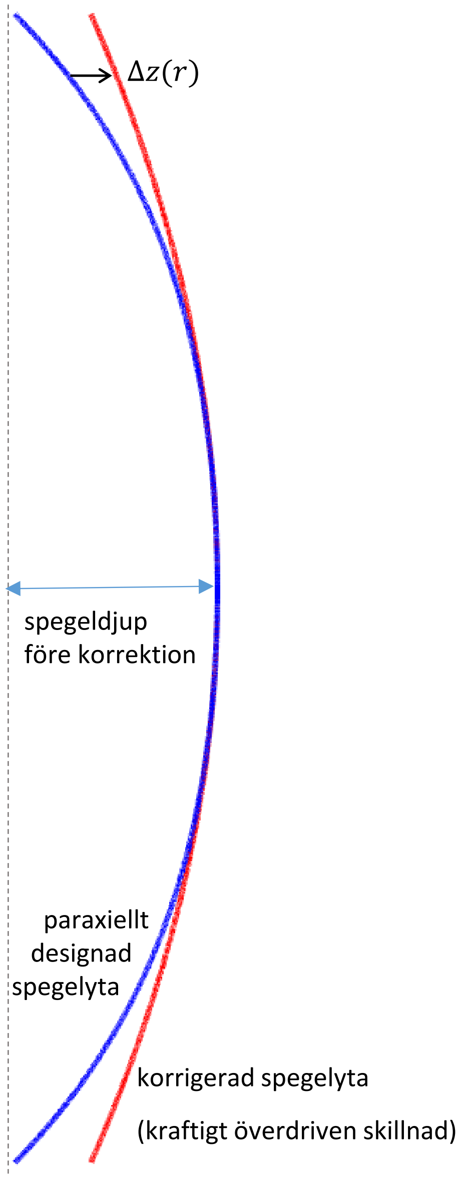
3. Hur stor är korrektionen i mm?

Hur mycket ändras det fysiska djupet hos HiRISE-spegeln genom din faskorrektion? Eftersom korrektionen minskar (beloppet av) fasmoduleringen hos lins/spegel kommer korrektionen att leda till en något grundare spegel.

Ledning: Enligt TOK-modellen leder en ändring $\Delta z(r)$ av spegelytans position till att spegelns fasmodulering ändras

$$\Delta\varphi(r) = k \cdot 2\Delta z(r)$$

eftersom ljuset går fram och tillbaka mellan in/utplanet.



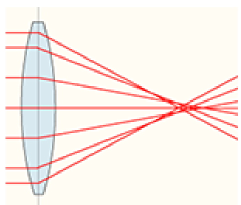
Detta till skillnad från Hubble där man efter analys av bilderna kom fram till att spegeln borde ha varit en aning djupare:

Wikipedia

Analysis of the flawed images showed that the cause of the problem was that the primary mirror had been ground to the wrong shape. Although it was probably the most precisely figured mirror ever made, with variations from the prescribed curve of only 10 nanometers,[23] at the perimeter it was too flat by about 2,200 nanometers (2.2 micrometers).[59] This difference was catastrophic, introducing severe spherical aberration, a flaw in which light reflecting off the edge of a mirror focuses on a different point from the light reflecting off its center.[60]

Så den mödosamma slipningen av Hubble-teleskopets spegel ledde till en form som var kusligt nära den som mätsystemet sade var perfekt – men tyvärr var alltså mätsystemet felinställt! Som tur var kunde man vid en bemannad uppskjutning med rymdfärjan Endeavour 1993 förse teleskopet med korrigerande "glasögon", och allt sedan dess ger Hubble nästan optimala avbildningar.

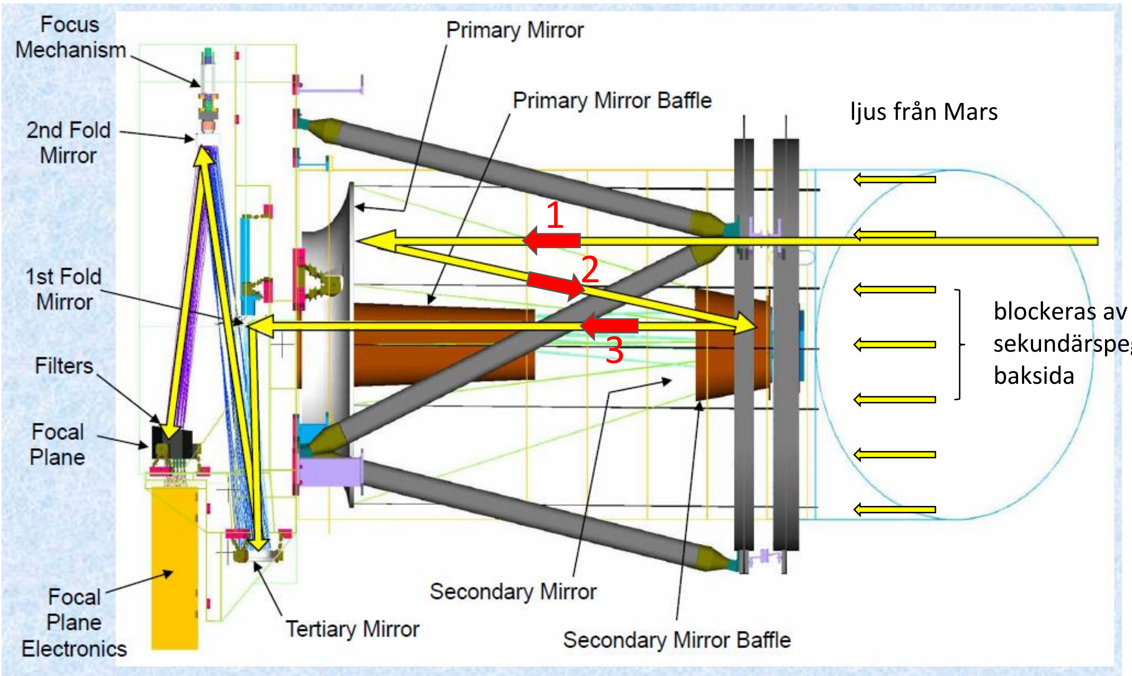
***Sfärisk aberration** lider även vår paraxiellt designade HiRISE-lins av:*



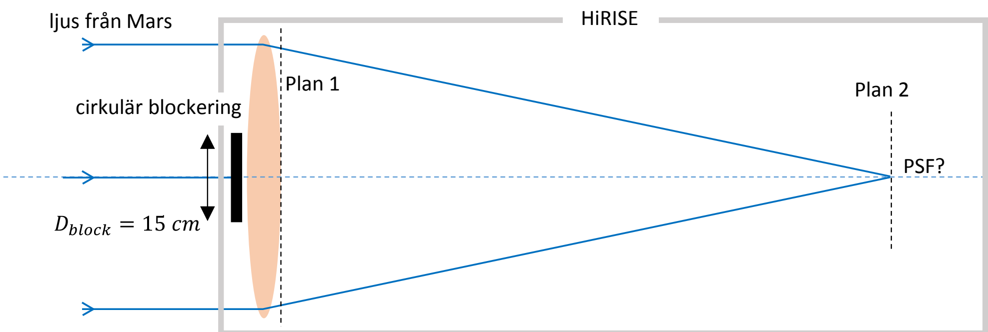
Det är den sfäriska aberrationen vi tar bort genom extratermen i fasmoduleringen. Extratermen minskar linsens styrka i periferin, så att alla strålar möts i fokus (i geometrisk-optisk mening).

4. Hål i bilden?

I verkligheten är HiRISE ett spegelteleskop av Cassegrain-typ, se figuren nedan. Detta gör att teleskopet blir kort och kompakt eftersom ljuset går tre gånger fram och tillbaka: först till primärspegeln som reflekterar ljuset framåt till den mindre sekundärspegeln. Denna reflekterar ljuset tillbaka mot primärspegeln, men eftersom primärspegeln har ett ganska stort borrat hål i centrum smiter ljuset förbi genom hålet. Sista sträckan till detektorarrayen (”Focal Plane”) propagerar ljuset i ett sicksackmönster genom att studsa mot ett antal avlänkningsspeglar, vilket ytterligare bidrar till att teleskopet blir kort.



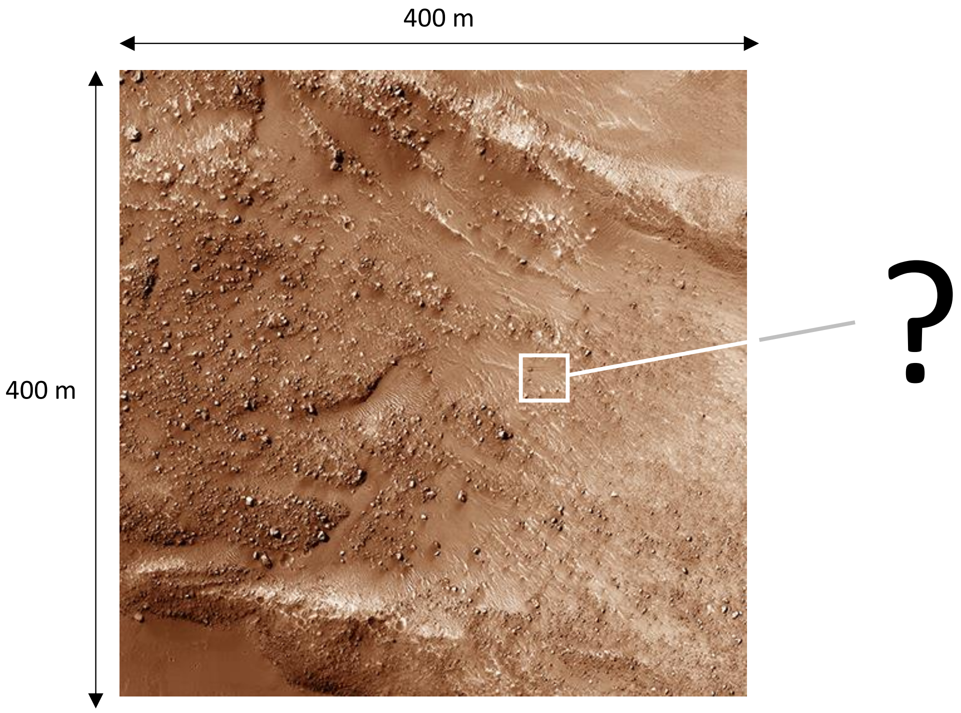
Sekundärspegeln blockerar dock oundvikligen en del av det infallande ljuset från Mars. Vi kan inkludera detta i vår tidigare modellering genom att blockera den centrala delen av linsen, säg med 15 cm diameter.



Modifiera PSF_radiell, genom att komplettera linsens transmissionsfunktion `T_lins` så att den även inkluderar en central blockering med diametern D_{block}=15 cm. Använd den optimerade fasmoduleringen för spegeln som du bestämde i deluppgift 2. Beräkna den PSF som erhålls, och *bedöm med din magkänsla huruvida bilden av Marsytan kommer att bli mycket sämre*, jämfört med fallet utan blockering! Skapar blockeringen rentav ett mörkt hål i bilden, och i så fall var i bilden uppstår hålet?

5. Simulering av bilden av Marsytan i teleskopets detektorplan

Gör simuleringen för *två* fall: utan respektive med den centrala cirkulära blockeringen som beskrivs i uppgift 4.



i. Ovan visas en bild av Marsytan, över området där Mark råkar befinna sig. Den täcker ett område av 400×400 meter och har 5000×5000 pixlar. Denna bild kommer att användas som den ”perfekta bilden” på teleskopets detektor. Vad blir samplingsavståndet hos den perfekta bilden i teleskopets detektorplan?

ii. Du har redan beräknat PSFen för avbildningen, med den korrigerade linsen. Denna PSF ska du använda för att simulera hur bilden av Marsytan blir. För att använda faltningssatsen måste din radiella PSF samplas om till en tvådimensionell funktion i (u, v)-planet, med samma samplings-avstånd och matrisstorlek som den perfekta bilden: Använd den färdiga funktionen Sampla_om_radiell_till_2D.m, som anropas längst ner i PSF_radiell.m (om variabeln `sampla_om_till_2D` är satt till 1), och ditt värde på c_4 för den korrigerade linsen för att skapa en matris som innehåller PSFen i teleskopets detektorplan, med samma samplingsavstånd och matris-storlek som den perfekta bilden. Zooma in centrum av matrisen för att se att din PSF verkar OK!

iii. Läs in den perfekta bilden som visas ovan med kommandot (för enkelhets skull har bilden gjorts om till gråskala)

```
I_perf=double(imread('highly_resolved_photo_of_Marks_surroundings.jpg'));
figure
imagesc(I_perf)
colormap(gray)
```

Zooma in i bilden, ungefär som markeras ovan, så att du förvissar dig om att Marks rover, hans fotspår och roverns hjulspår finns med!

iv. Falta den erhållna tvådimensionella PSFen med den perfekta bilden – med en enda rad i Matlab så som visades på föreläsningen – för att få den verkliga intensitetsfördelningen i detektorplanet! Vad säger du, är *The Martian* sann?

Skicka in din HUPP3b senast

måndag 24 februari

Får du problem eller undrar något kan du maila Jörgen

(jorgen.bengtsson@chalmers.se)

under perioden tisdag till och med söndag.