GTI HS 20 Lösung Serie 2

Michael Baur, Tatjana Meier, Sophie Pfister

Die 2. Serie ist bis Montag, den 5. Oktober 2020 um 12:00 Uhr zu lösen und als PDF-Dokument via ILIAS abzugeben. Für Fragen steht im ILIAS jederzeit ein Forum zur Verfügung. Zu jeder Frage wird, falls nicht anders deklariert, der Lösungsweg erwartet. **Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht akzeptiert**. Allfällige unlösbare Probleme sind uns so früh wie möglich mitzuteilen, wir werden gerne helfen.
Viel Spass!

1 DNF und KNF (6 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimme die DNF und die KNF

i. (1 Punkt) der Äquivalenzfunktion $\Leftrightarrow$, wobei

$$x \Leftrightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{falls x=y,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. (1 Punkt) der XOR-Funktion, wobei

$$x \text{ XOR } y = \begin{cases} 1 & \text{falls x}\neq\text{y,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) (2 Punkte) Gegeben sei die Boolesche Funktion $f : B^3 \to B$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2(\neg x_3 + \neg x_1) + x_3(\neg x_3x_2 + x_1x_2) + x_1x_2\neg x_3 + \neg x_2(x_1x_3 + x_2)$$

Bestimmte die DNF und die KNF dieser Funktion.

(c) (1 Punkt) Beschreibe den Zusammenhang zwischen DNF und KNF in einem einzigen Satz in eigenen Worten.

(d) (1 Punkt) Bestimme den Minterm $m_{11}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ und den Maxterm $M_9(x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Lösung

(a) i. **DNF** $\neg x\neg y + xy$
KNF $(x + \neg y)(\neg x + y)$

ii. **DNF** $\neg xy + x\neg y$
KNF $(x + y)(\neg x + \neg y)$

(b) Die DNF erhalten wir durch folgende einfache Umformung:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2(\neg x_3 + \neg x_1) + x_3(x_2\neg x_3 + x_1x_2) + x_1x_2\neg x_3 + \neg x_2(x_1x_3 + x_2) \\ &= x_1x_2\neg x_3 + x_1\neg x_1x_2 + x_2x_3\neg x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2\neg x_3 + x_1\neg x_2x_3 + x_2\neg x_2 \\ &= x_1x_2\neg x_3 + x_1x_2x_3 + x_1\neg x_2x_3 \\ &= x_1\neg x_2x_3 + x_1x_2\neg x_3 + x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Die KNF ist somit

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+x_2+\neg x_3)\cdot(x_1+\neg x_2+x_3)\cdot(x_1+\neg x_2+\neg x_3)\cdot(\neg x_1+x_2+x_3)$$

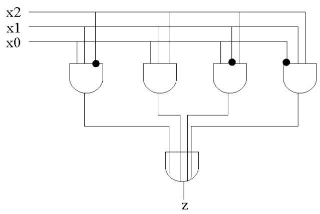
(c) DNF und KNF sind äquivalente, unterschiedliche Darstellungen der gleichen Funktion, wobei erstere eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen und letztere eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

(d)

$$m_{11}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 \cdot \neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$
$$M_9(x_0, x_1, x_2, x_3) = \neg x_0 + x_1 + x_2 + \neg x_3$$

2 Schaltfunktionen I (2 Punkte)

(a) (1 Punkt) Bestimme diejenigen Eingabewerte x0, x1 und x2, für die die folgende Schaltung den Wert 1 am Ausgang z ausgibt.



(b) (1 Punkt) Bestimme diejenige Schaltung in disjunktiver Normalform, die für die folgenden Eingabewerte x0, x1 und x2 den Wert 1 am Ausgang z ausgibt.

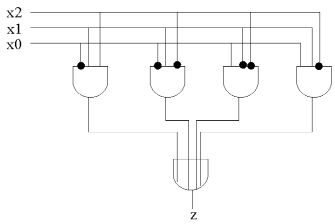
x0	x1	x2
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Lösung

(a)

x0	x1	x2
1	1	0
1	1	1
1	0	1
0	1	1

(b) Die Schaltung in DNF sieht wie folgt aus:



3 Schaltfunktionen II (5 Punkte)

Gegeben sei die Zeichenkette INFORMATIK im ASCII-Code. Sei

$$f : B^7 \cap \{\text{ASCII-Codes von I, N, F, O, R, M, A, T, K}\} \to B$$

diejenige Funktion, die für jeden ASCII-codierten Buchstaben der Zeichenkette das Paritätsbit P (mit *gerader* Parität) berechnet, d.h.

$$P = f(x1, \dots, x7) = \begin{cases} 1 & \text{falls x1, \dots, x7 eine ungerade Anzahl an Einsen enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Schaltfunktion in DNF und stelle die Funktion als Schaltung in KNF dar.

Tipp: Zuerst die Wertetabelle berechnen. Nimm $x1$ als höchstwertiges Bit für die ASCII-Codierung, z.B. ASCII-Code von $B = (66)_{10} = (1000010_2$, also $x1 = 1$, $x2 = 0$, $\ldots$ und $x7 = 0$ und die Parität ist $P = 0$ weil eine gerade Anzahl von Einsen auftritt.

Buchstabe	ASCII	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	P
I	73	...							
N	78								
F	70								
O	79								
R	82								
M	77								
A	65								
T	84								
K	75								

Lösung

Die Wertetabelle sieht wie folgt aus

Buchstabe	ASCII	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	P
I	73	1	0	0	1	0	0	1	1
N	78	1	0	0	1	1	1	0	0
F	70	1	0	0	0	1	1	0	1
O	79	1	0	0	1	1	1	1	1
R	82	1	0	1	0	0	1	0	1
M	77	1	0	0	1	1	0	1	0
A	65	1	0	0	0	0	0	1	0
T	84	1	0	1	0	1	0	0	1
K	75	1	0	0	1	0	1	1	0

Es ergeben sich folgende Minterme

$$
\begin{aligned}
m_{73} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot \neg x3 \cdot x4 \cdot \neg x5 \cdot \neg x6 \cdot x7 \\
m_{78} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot \neg x3 \cdot x4 \cdot x5 \cdot x6 \cdot \neg x7 \\
m_{70} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot \neg x3 \cdot \neg x4 \cdot x5 \cdot x6 \cdot \neg x7 \\
m_{79} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot \neg x3 \cdot x4 \cdot x5 \cdot x6 \cdot x7 \\
m_{82} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot x3 \cdot \neg x4 \cdot \neg x5 \cdot x6 \cdot \neg x7 \\
m_{77} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot \neg x3 \cdot x4 \cdot x5 \cdot \neg x6 \cdot x7 \\
m_{65} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot \neg x3 \cdot \neg x4 \cdot \neg x5 \cdot \neg x6 \cdot x7 \\
m_{84} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot x3 \cdot \neg x4 \cdot x5 \cdot \neg x6 \cdot \neg x7 \\
m_{75} &= x1 \cdot \neg x2 \cdot \neg x3 \cdot x4 \cdot \neg x5 \cdot x6 \cdot x7
\end{aligned}
$$

und Maxterme

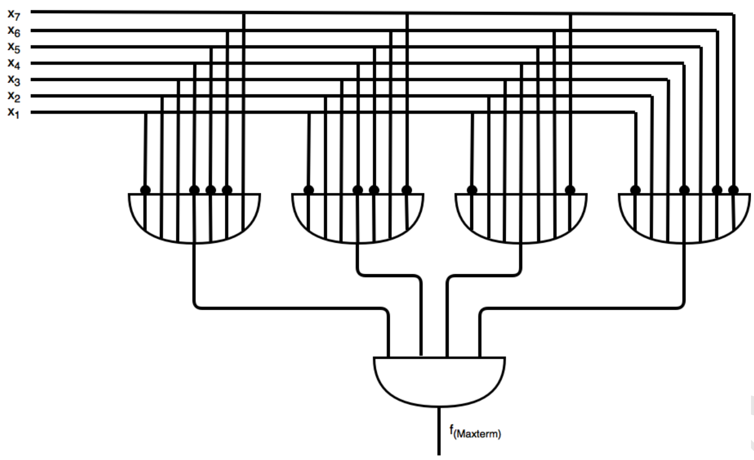
$$
\begin{aligned}
M_{73} &= \neg x1 + x2 + x3 + \neg x4 + x5 + x6 + \neg x7 \\
M_{78} &= \neg x1 + x2 + x3 + \neg x4 + \neg x5 + \neg x6 + x7 \\
M_{70} &= \neg x1 + x2 + x3 + x4 + \neg x5 + \neg x6 + x7 \\
M_{79} &= \neg x1 + x2 + x3 + \neg x4 + \neg x5 + \neg x6 + \neg x7 \\
M_{82} &= \neg x1 + x2 + \neg x3 + x4 + x5 + \neg x6 + x7 \\
M_{77} &= \neg x1 + x2 + x3 + \neg x4 + \neg x5 + x6 + \neg x7 \\
M_{65} &= \neg x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + \neg x7 \\
M_{84} &= \neg x1 + x2 + \neg x3 + x4 + \neg x5 + x6 + x7 \\
M_{75} &= \neg x1 + x2 + x3 + \neg x4 + x5 + \neg x6 + \neg x7
\end{aligned}
$$

und man erhält als Schaltfunktionen

DNF $f(x1, \ldots, x7) = m_{70} + m_{73} + m_{79} + m_{82} + m_{84}$

KNF $f(x1, \ldots, x7) = M_{65} \cdot M_{75} \cdot M_{77} \cdot M_{78}$

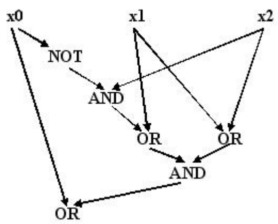
und als Schaltung in KNF



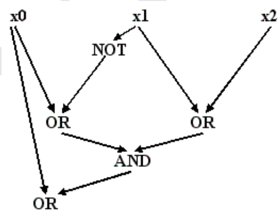
4 Directed Acyclic Graphs (4 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimme die Schaltfunktionen zu den folgenden DAGs

(i)



(ii)



(b) (2 Punkte) Bestimme die DAGs zu den folgenden Schaltfunktionen

$$
\begin{aligned}
f(x0, x1, x2) &= (x0 + x1) \cdot (\neg x2 \cdot x0 + x1) + x0 \\
g(x0, x1, x2) &= (x0 + x2) \cdot (\neg x1 + \neg x2) + x0
\end{aligned}
$$

Lösung

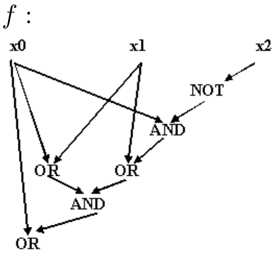
(a) Die Schaltfunktionen lauten:

(i) $f(x0, x1, x2) = (\neg x0 \cdot x2 + x1) \cdot (x1 + x2) + x0$

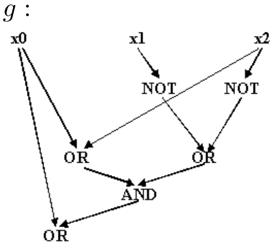
(ii) $g(x0, x1, x2) = (x0 + \neg x1) \cdot (x2 + x1) + x0$

(b) Die DAGs sind

$f:$



$g:$



5 KNF vs. DNF (1 Punkt)

Was ist “besser”: `NAND` in KNF oder DNF darstellen? Begründe Deine Antwort.

Lösung

Wir betrachten die Wertetabelle von `NAND`:

x	y	x `NAND` y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Wir erkennen, dass die KNF nur einen Maxterm benötigt (da die Funktion genau für einen Eingabewerte gleich Null ist), während die DNF drei Minterme benötigt. Mit diesem “Grössenmass” ist also die KNF “besser”.

Freiwillige Aufgaben

Boolesche Funktionen

Sei $f : B^n \to B$ eine Boolesche Funktion und $a \in B$. Mit $f(x_i/a)$ bezeichnen wir die Boolesche Funktion die durch Einsetzen von a als fester Wert in f entsteht, d.h.

$$f(x_i/a) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Zeige, dass sich jede Boolesche Funktion wie folgt darstellen lässt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \cdot f(x_i/1) + \neg x_i \cdot f(x_i/0)$$

Lösung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass f in disjunktiver Normalform gegeben ist:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} m_{k_j}$$

wobei m_{k_j} die in f auftretenden Minterme sind.

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
x_i \cdot f(x_i/1) + \neg x_i \cdot f(x_i/0) &= x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} m_{k_j}(x_i/1) + \neg x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} m_{k_j}(x_i/0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) + \sum_{j=1}^{n} \neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \big(x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) + \neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0) \big)
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle:

- x_i tritt in m_{k_j} nicht auf. Dann gilt $m_{k_j}(x_i/a) = m_{k_j}$ und daher

  $$x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) + \neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0) = x_i \cdot m_{k_j} + \neg x_i \cdot m_{k_j} = (x_i + \neg x_i) \cdot m_{k_j} = m_{k_j}$$

- x_i tritt in m_{k_j} positiv auf. Dann gilt $x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) = m_{k_j}$ und $\neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0) = 0$ und daher

  $$x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) + \neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0) = m_{k_j} + 0 = m_{k_j}$$

- x_i tritt in m_{k_j} negativ auf. Dann gilt $\neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0) = m_{k_j}$ und $x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) = 0$ und daher
$$x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) + \neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0) = 0 + m_{k_j} = m_{k_j}$$

Somit haben wir
$$\sum_{j=1}^{n} \big(x_i \cdot m_{k_j}(x_i/1) + \neg x_i \cdot m_{k_j}(x_i/0)\big) = \sum_{j=1}^{n} m_{k_j} = f(x_1, \ldots, x_n)$$
und die gewünschte Aussage ist damit bewiesen.