LA1-12

Lukas Ingold 20-123-998

10 P. (N.B.)

Lineare Algebra 1 **Serie 12**
HS 2020 *Abgabe: Do. 17.12.2020, 12.15 Uhr.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie:

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ und alle $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Folgern Sie daraus, dass ähnliche Matrizen die gleiche Spur haben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ mit ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie, dass die Einträge von A^{-1} genau dann ganzzahlig sind, wenn $\det(A) = \pm 1$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Berechnen Sie die Determinante der folgenden $n \times n-$Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ b & & & a \end{pmatrix} = aE_n + b(E_{n,1} + E_{1,n})$$

Aufgabe 4 (Vandermonde-Determinante, 4 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in K$ gilt.

* **Aufgabe 5.** (0 + 0 Punkte) Benutzen Sie die obige Vandermonde-Determinante, um die folgenden Fragen zu lösen.

(a) Es seien $x_1, \dots, x_n \in K$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass es für alle $y_1, \dots, y_n \in K$ ein Polynom $P \in K[x]$ von Grad $n-1$ gibt, so dass $P(x_i) = y_i$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(b) Geben Sie eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ an, in der jede Teilmenge von n verschiedenen Vektoren linear unabhängig ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie:

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ und alle $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Folgern Sie daraus, dass ähnliche Matrizen die gleiche Spur haben.

$A \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$

$B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$

DANN IST: $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{ki} = \mathrm{Spur}(BA)$ ☑

2 P.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ mit ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie, dass die Einträge von A^{-1} genau dann ganzzahlig sind, wenn $\det(A) = \pm 1$ ist.

$A \in GL_n(\mathbb{Q})$ mit Einträgen $\in \mathbb{Z}$

A^{-1} sind dann $\in \mathbb{Z}$ wenn $\det(A) = \pm 1$

Falls A invertierbar $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ ✓

Falls $\det(A) \neq \pm 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) \notin \mathbb{Z}$ weil det(A) auch eine ganze Zahl sein muss. (Begründe noch kurz, weshalb dies gilt.)

Somit muss mindestens ein Eintrag von $A^{-1} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$

2 P.

Und die Gegenrichtung "<-"?

3.) $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix} = a^n - b^2 \cdot a^{n-2}$

Schreibe immer auch den Rechnungsweg auf, damit Dein Vorgehen nachvollziehbar ist.

Das Resultat ist aber korrekt, gut.

$\det(A) = 0$ da alle Terme $= 0$

3 P.

4.) $\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & x_n & \dots & & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

Wobei $x_i \in K \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \\ \vdots & x_2 & x_2^2 & \\ 1 & & & \ddots \end{pmatrix}}_{=A} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 - x_1 & x_1^2 - x_1^2 & \dots \\ \vdots & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 \cdot x_1 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_n \cdot x_1 & \dots \end{pmatrix}$ ✓

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 \cdot x_1 & & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - \cancel{x_2} \cdot x_1 & & & \dots \end{pmatrix}$

n

$B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 \cdot x_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n - x_2 \cdot x_1 & \dots \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \cdot \det(B) - 0 + 0 \dots + 0$

3 P.

$\Rightarrow \det(B) = ?$

ist B Vandermonde ?

Das ist die nächstkleinere Vandermonde-Matrix beginnend mit der Variable x_2 statt x_1, d.h. Ind.annahme dennoch anwendbar.

$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 \cdot x_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n - x_2 \cdot x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & x_n - x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_n & & & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$

DA $(x_i - x_1) \mid (x_i^n - x_i^{(n-1)} \cdot x_1)$ (*)

Für die Determinante bedeutet (*), dass Du die Linearität der Determinante in jeder Zeile verwenden kannst, indem Du diese Faktoren aus der Matrix "hinausnimmst" und an die Determinante der verbleibenden Matrix heranmultiplizierst.