GTI HS 20 Lösung Serie 1

Michael Baur, Tatjana Meier, Sophie Pfister

Die 1. Serie ist bis Montag, den 28. September 2020 um 12:00 Uhr zu lösen und als PDF-Dokument via ILIAS abzugeben. Für Fragen steht im ILIAS jederzeit ein Forum zur Verfügung. Zu jeder Frage wird, falls nicht anders deklariert, der Lösungsweg erwartet. **Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht akzeptiert**. Allfällige unlösbare Probleme sind uns so früh wie möglich mitzuteilen, wir werden gerne helfen.
Viel Spass!

1 Äquivalenz von Booleschen Funktionen (7 Punkte)

(a) (1 Punkt) Gilt $\neg x \neg y = \neg(x+y)$ in jeder Booleschen Algebra? Begründe deine Antwort.

(b) (2 Punkte) Zeige, dass $\neg 0 = 1$ in allen Booleschen Algebren gilt, d.h. forme $\neg 0$ unter Verwendung der Gesetze der Booleschen Algebra zu 1 um.
Freiwillige Zusatzfrage: Folgt daraus $0 \neq 1$?

(c) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x(y+z) + \neg(xy)z + y \\ g(x,y,z) &= y+z \end{aligned}$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

(d) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$f(x,y,z) = \neg y \neg z + yz$$
$$g(x,y,z) = \neg y z + y \neg z$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

Bei (c) und (d): **Alle Umformungen** sollten begründet werden.

Lösung

(a) Ja, es handelt sich dabei um eine der beiden de Morganschen Regeln.

(b)

$$\begin{aligned} \neg 0 &= \neg 0 \cdot 1 && \text{weil } x \cdot 1 = x \\ &= \neg 0 \cdot \neg\neg 1 && \text{weil } x = \neg\neg x \\ &= \neg(0 + \neg 1) && \text{De Morgan} \\ &= \neg\neg 1 && \text{weil } x + 0 = x \\ &= 1 && \text{weil } x = \neg\neg x \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \neg 0 &= \neg 0 + 0 && \text{weil (f) } x = x + 0 \\ &= (\neg 0 + 0) \cdot 1 && \text{weil (f) } x = x \cdot 1 \\ &= 1 && \text{weil (e) } x \cdot (y + \neg y) = x \end{aligned}$$

Nein, $0 \neq 1$ folgt nicht aus dieser Umformung, da die Booleschen Gesetze nur über *Gleichheit* von Termen entscheiden, aber nichts über Ungleichheit aussagen. Tatsächlich gilt in der einelementigen Booleschen Algebra $0 = 1$, jedoch gilt in allen anderen Booleschen Algebren $0 \neq 1$. Dies lässt sich wie folgt beweisen:

Angenommen es gilt $0 = 1$ und sei x ein beliebiges Element der Booleschen Algebra. Dann gilt $x = x \vee 0 = x \vee 1 = 1$ und somit sind alle Elemente gleich, d.h. wenn $0 = 1$ in einer Booleschen Algebra gilt, dann handelt es sich um die einelementige Boolesche Algebra.

(c) Die Funktionen sind äquivalent, sie können wie folgt ineinander überführt werden:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x(y+z) + \neg(xy)z + y \\
&= x(y+z) + (\neg x + \neg y)z + y \qquad \text{De Morgan} \\
&= xy + xz + (\neg x)z + (\neg y)z + y \qquad \text{Distributivität} \\
&= yx + y + zx + z(\neg x) + z\neg y \qquad \text{Kommutativität} \\
&= yx + y1 + zx + z(\neg x) + z\neg y \qquad \text{weil } y = y1 \\
&= y(1+x) + z(x + \neg x) + z\neg y \qquad \text{Distributivität} \\
&= y1 + z(x + \neg x) + z\neg y \qquad \text{weil } 1 + x = 1 \\
&= y1 + z + z\neg y \qquad \text{Komplementgesetz} \\
&= y + z + z\neg y \qquad \text{weil } y1 = y \\
&= y + z1 + z\neg y \qquad \text{weil } z1 = z \\
&= y + z(1 + \neg y) \qquad \text{Distributivität} \\
&= y + z1 \qquad \text{weil } 1 + \neg y = 1 \\
&= y + z \qquad \text{weil } z1 = z
\end{aligned}
$$

Man kann die Äquivalenz auch erkennen, indem man die Wahrheitstafel der beiden Funktionen betrachtet:

x	y	z	f(x,y,z)	g(x,y,z)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

(d) Man erkennt leicht, dass die beiden Funktionen nicht äquivalent sind, indem man die Wahrheitstabelle betrachtet. Tatsächlich ist sind die Funktionen sogar jeweils das Komplement der anderen, d.h. sie stimmen an keiner Stelle überein.

x	y	z	f(x,y,z)	g(x,y,z)
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

2 Eine erste, einfache Schaltung (2 Punkte)

Gib (unter ausschliesslicher Verwendung von Negation, Konjunktion und Disjunktion) eine Boolesche Funktion $f : B^3 \to B$ an, die sich wie folgt verhält:

$$
f(x,y,z) = \begin{cases} \text{y} & \text{falls x=0} \\ \text{z} & \text{falls x=1} \end{cases}
$$

Wozu könnte man eine solche Schaltung brauchen?

Lösung

Mögliche Lösungen lauten:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \neg xy + xz \\ f(x,y,z) &= (\neg x + z)(x + y) \end{aligned}$$

Man könnte eine solche Schaltung für die Realisierung des “if–then– else” brauchen, d.h.:

$$f(x,y,z) = \text{if } x \text{ then } z \text{ else } y$$

3 b-adische Zahlendarstellung (1 Punkt)

Stelle die folgenden natürlichen Zahlen in der b-adischen Darstellungsform für $b = 8$ dar.

(a) (0.5 Punkte) $(159)_{10}$

(b) (0.5 Punkte) $(226)_{10}$

Erkläre die Konvertierungen!

Lösung

(a) $(237)_8$ weil $159 = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$.

(b) $(342)_8$ weil $226 = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0$.

4 Konvertierung von Zahlensystemen (1 Punkt)

Konvertiere die Zahl $(273)_{10}$ in eine Dual-, Oktal- und Hexadezimalzahl. Alle Umrechnungen sind zu erklären!

Lösung

$(273)_{10} = (100010001)_2 = (421)_8 = (111)_{16}$

5 Addition von Dualzahlen (1 Punkt)

Konvertiere die Zahlen $(17)_{10}$ und $(69)_{10}$ in Binärzahlen und addiere die Resultate schriftlich. Alle Umrechnungen sind zu erklären!

Lösung

$$\begin{array}{cr} & 10001 \\ + & 1000101 \\ \hline = & 1010110 \end{array}$$

6 Dreielementige Boolesche Algebren (2 Punkte)

Beweise, dass es keine dreielementigen Booleschen Algebren gibt.

Tipp: Nimm an, dass es eine dreielementige Boolsche Algebra gibt und zeige, dass ein Widerspruch entsteht.

Lösung

Wir bemerken zuerst, dass aus dem Komplementgesetzen $x \vee (y \wedge \neg y) = x$ und $x \wedge (y \vee \neg y) = x$ sowie aus $x \vee 0 = x$ und $x \wedge 1 = x$ die Gesetze

- $y \wedge \neg y = 0$
- $y \vee \neg y = 1$

folgen, indem man für x jeweills 0 bzw. 1 einsetzt.

Nehmen wir an, es gäbe eine dreielementige Boolesche Algebra. Wie vorhin gezeigt, muss $0 \neq 1$ gelten, somit können wir davon ausgehen, dass die Grundmenge wie folgt aussieht $\{0, a, 1\}$ wobei $0 \neq a \neq 1$. Wir betrachten $\neg a$, es gibt folgende drei Möglichkeiten:

(a) $\neg a = 0$. Dann gilt $1 = a \vee \neg a = a \vee 0 = a$, Widerspruch!

(b) $\neg a = a$. Dann gilt $1 = a \vee \neg a = a \vee a = a$, Widerspruch!

(c) $\neg a = 1$. Dann gilt $0 = a \wedge \neg a = a \wedge 1 = a$, Widerspruch!

Es ist somit nicht möglich, dass eine dreielementige Boolesche Algebra existiert.

7 Vierelementige Boolesche Algebren (2 Punkte)

Gegeben seien die Familie von Mengen $M := \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$ (die Potenzmenge von $\{a, b\}$) und die folgenden Definitionen:

- $0 := \emptyset$
- $1 := \{a, b\}$
- $X \vee Y := X \cup Y$ für Mengen $X, Y \in M$
- $X \wedge Y := X \cap Y$ für Mengen $X, Y \in M$
- $\overline{X} := \{a, b\} \setminus X$ für Menge $X \in M$

Beweise, dass das 6-Tupel $\langle M, \wedge, \vee, \overline{}, 0, 1\rangle$ eine Boolesche Algebra ist. Du darfst annehmen, dass alle Gesetze der Mengenlehre gelten.

Allgemeiner (freiwillig): Gib ein Beispiel für eine 2^n-elementige Boolesche Algebra für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

obligatorischer Teil: Es muss für alle Gesetze der Boolschen Algebra gezeigt werden, dass sie gelten. Siehe hierzu die Besprechung in der Übungsstunde. Ein Beispiel einer 2^n-elementigen Algebra ist gegeben durch

$$\langle \mathcal{P}(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}), \cap, \cup, {}' \rangle$$

wobei $\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$ die Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) der n-elementigen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ bezeichnet, $\cap$ und $\cup$ die üblichen mengentheoretischen Schnitt- und Vereinoperationen und $'$ die Komplementoperation, d.h. $x' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus x$, also Mengendifferenz bezüglich der Grundmenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Freiwillige Aufgabe

Einfache Umwandlung

Zeige, dass Zahlen in Binärdarstellung durch Zusammenfassen in Dreier- bzw. Viererblöcke einfach in Oktal- und Hexadezimal-Darstellung umgewandelt werden können:

$$\underbrace{011}_{3}\underbrace{111}_{7}\underbrace{101}_{5}\underbrace{000}_{0}\underbrace{001}_{1}$$

bzw.

$$\underbrace{0011}_{3}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{0100}_{4}\underbrace{0001}_{1}$$

also $(11111101000001)_2 = (37501)_8 = (3F41)_{16}$.

Lösung

Wir zeigen allgemein, dass die Umwandlung von Binärzahlen in die 2^l–adische Darstellung durch Zusammenfassen von Blöcken der Grösse l möglich ist.

Sei also die Binärzahl $z = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot z_i$ gegebenen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass n ein Vielfaches von l ist (ansonsten kann man einfach führende Nullen auffüllen). Es sei also $n = k \cdot l$.

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot z_i \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{l-1} 2^{l \cdot j + i} \cdot z_{l \cdot j + i} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} 2^{l \cdot j} \cdot \left(\sum_{i=0}^{l-1} 2^i \cdot z_{l \cdot j + i} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(2^l\right)^j \cdot z'_j \end{aligned}$$

wobei $z'_j = \sum_{i=0}^{l-1} 2^i \cdot z_{l \cdot j + i}$ gerade den zusammengefassten Blöcken der Länge l entspricht.