GTI HS 20 Lösung Serie 9

Michael Baur, Tatjana Meier, Sophie Pfister

Die 9. Serie ist bis Montag, den 30. November 2020 um 12:00 Uhr zu lösen und als PDF-Dokument via ILIAS abzugeben. Für Fragen steht im ILIAS jederzeit ein Forum zur Verfügung. Zu jeder Frage wird, falls nicht anders deklariert, der Lösungsweg erwartet. **Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht akzeptiert**. Allfällige unlösbare Probleme sind uns so früh wie möglich mitzuteilen, wir werden gerne helfen.
Viel Spass!

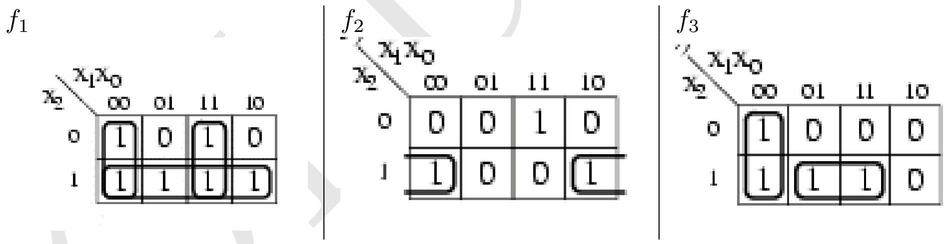
1 Minimales PLA (3 Punkte)

Entwickle jeweils ein PLA mit der kleinstmöglichen Anzahl Spalten für die folgenden drei Funktionen:

$$\begin{aligned}
f_1(x_0, x_1, x_2) &= x_2x_1x_0 + x_2x_1\neg x_0 + x_2\neg x_1x_0 + x_2\neg x_1\neg x_0 + \neg x_2x_1x_0 + \neg x_2\neg x_1\neg x_0 \\
f_2(x_0, x_1, x_2) &= x_2x_1\neg x_0 + x_2\neg x_1\neg x_0 + \neg x_2x_1x_0 \\
f_3(x_0, x_1, x_2) &= x_2x_1x_0 + x_2\neg x_1x_0 + x_2\neg x_1\neg x_0 + \neg x_2\neg x_1\neg x_0
\end{aligned}$$

Lösung

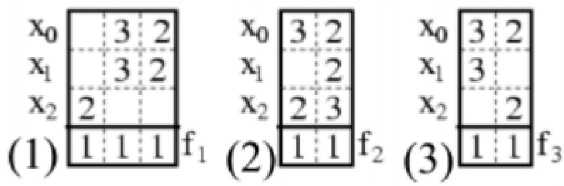
Wir betrachten zuerst die Karnaugh-Diagramme für die Funktionen:



und erhalten die folgenden vereinfachten Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1(x_0, x_1, x_2) &= x_2 + x_1x_0 + \neg x_1\neg x_0 \\
f_2(x_0, x_1, x_2) &= x_2\neg x_0 + \neg x_2x_1x_0 \\
f_3(x_0, x_1, x_2) &= x_2x_0 + \neg x_1\neg x_0
\end{aligned}$$

Die PLA sehen demnach wie folgt aus



2 PLA für Braille (5 Punkte)

Entwirf ein PLA, welches eine 1-stellige Dezimalzahl (codiert als BCD) in Braille-Schrift ausgibt. Die Braille-Definition für die Zahlen sind in der Abbildung 1 angegeben.

Tipp 1: Die einzelnen Ziffern bestehen immer aus zwei Feldern zu je 6 Punkten, dabei bedeutet das erste Feld, dass die nachfolgenden Felder eine Zahl bilden. Das heisst, dass für alle Zahlen (0–9) das erste Feld gleich ist.

Tipp 2: Für jedes Punkt soll eine Funktion definiert werden, die jeweils 1 ausgibt, wenn der Punkt schwarz ist, und 0 wenn der Punkt weiss ist. Das PLA soll die Punktfunktionen realisieren.

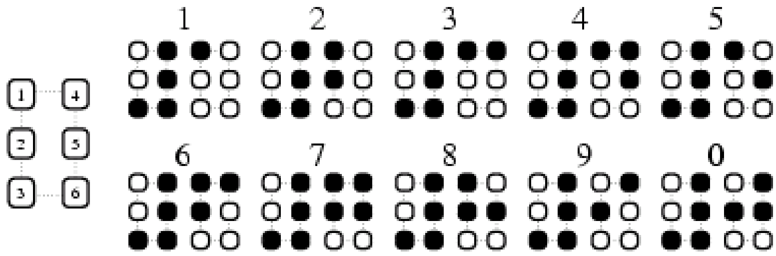


Abbildung 1: Braille-Definition

Lösung

Wir bezeichnen das erste Feld mit A und das zweite Feld mit B. Offensichtlich gilt für alle Zahlen

$$\begin{aligned} 1_A = 2_A = 3_B = 6_B &= 0 \\ 3_A = 4_A = 5_A = 6_A &= 1 \end{aligned}$$

Man kann das gewünschte PLA direkt aus der Spezifikation der Schaltung ablesen, dazu codiert man einfach die entsprechenden Minterme in der UND-Ebene und verknüpft sie in der ODER-Ebene zur DNF.

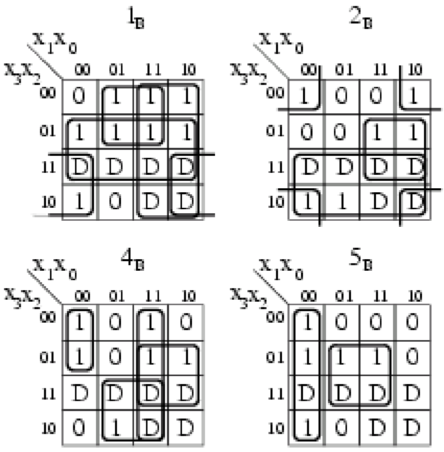
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	
x_0	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	0	
x_1	3	3	2	2	3	3	2	2	3	3	0	
x_2	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3	0	
x_3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1_A, 2_A, 3_B, 6_B$
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$3_A, 4_A, 5_A, 6_A$
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1_B
	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	2_B
	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	4_B
	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	5_B

Man kann die Aufgabe aber auch systematisch, analog der vorherigen Aufgabe lösen:

Wir erstellen dazue eine Wertetabelle für die verbleibenden Werte

x_3	x_2	x_1	x_0	1_B	2_B	4_B	5_B
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	D	D	D	D
1	0	1	1	D	D	D	D
1	1	0	0	D	D	D	D
1	1	0	1	D	D	D	D
1	1	1	0	D	D	D	D
1	1	1	1	D	D	D	D

und erhalten die folgenden Karnaugh-Diagramme



welche uns die vereinfachten Funktionen liefern:

$$
\begin{aligned}
1_B &= x_2 + x_1 + \neg x_3 x_0 + x_3 \neg x_0 \\
2_B &= x_3 + x_2 x_1 + \neg x_2 \neg x_0 \\
4_B &= x_1 x_0 + x_2 x_1 + x_3 x_0 + \neg x_3 \neg x_1 \neg x_0 \\
5_B &= x_2 x_0 + \neg x_1 \neg x_0
\end{aligned}
$$

Diese ergeben schliesslich das folgende PLA

x_3	2			2	2	3						3
x_2		2					2	2	3			
x_1			2				2			2	3	3
x_0				2	3	2		2	3	2	3	3
1_B		1	1		1	1						
2_B	1						1		1			
4_B				1			1			1		1
5_B								1			1	

3 PLA für CRC (4 Punkte)

Entwickle ein minimales PLA, mit dem man ein Datenwort mit angehängter CRC-Prüfsumme kontrollieren kann. Das Generatorpolynom ist $x^3 + x^2 + 1$. Eine entsprechende Schaltung ist in Abbildung 2 abgebildet. Das Signal Datenwortende ist 1, wenn das letzte Bit in den PLA gegeben wurde.[1]

Die zugehörige Wertetabelle sieht wie folgt aus

$x_3(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_0(t)$	$x_3(t+1)$	$x_2(t+1)$	$x_1(t+1)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0

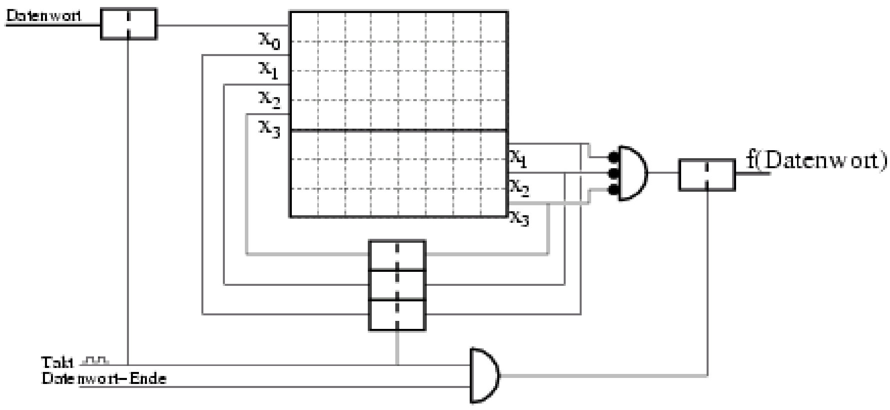
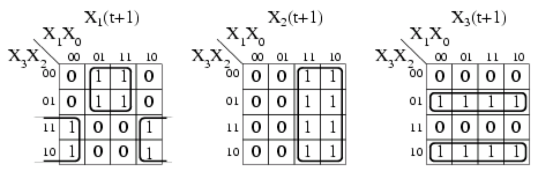


Abbildung 2: CRC-Schaltung

Lösung

Wir erstellen zuerst die Karnaugh-Diagramme



und erhalten die Funktionen

$$\begin{aligned} x_3(t+1) &= x_3\neg x_2 + x_2\neg x_3 \\ x_2(t+1) &= x_1 \\ x_1(t+1) &= x_3\neg x_0 + \neg x_3 x_0 \end{aligned}$$

welche wiederum das folgende PLA ergeben

[1] Es ist nicht notwendig, zu wissen wie die CRC-Prüfsumme kontrolliert wird, die nachfolgende Wertetabelle enthält genügend Information, um die Aufgabe zu lösen. Die genannten Informationen sind als zusätzliche Information gedacht, weitere Informationen findet man unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Cyclic_Redundancy_Check`

$x_0(t)$	3	2				
$x_1(t)$			2			
$x_2(t)$				3	2	
$x_3(t)$	2	3		2	3	
	1	1				$x_1(t+1)$
			1			$x_2(t+1)$
				1	1	$x_3(t+1)$