LA1-8

Lukas Ingold 20-123-998

11 P. (N.B.)

Gut.

Lineare Algebra 1 **Serie 8**
HS 2020 *Abgabe: Do. 19.11.2020, 12.15 Uhr.*

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen mit Rest in $\mathbb{R}[t]$ durch.

(a) $(3t^5 + 4t^2 + 1) : (t^2 + 2t + 3)$.

(b) $(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) : (t - 1)$.

* **Aufgabe 2** (0 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass das Polynom $x^4 + ax^3 + bx + c$ in $\mathbb{R}[x]$ durch $x^2 + x + 1$ teilbar ist.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.**

(a) Wir sagen, dass Polynome $P_1, \ldots, P_n \in K[t]$ *paarweise teilerfremd* sind, wenn P_i und P_j für alle $i \neq j$ teilerfremd sind. Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass P_1 und $Q := P_2 \cdots P_n$ teilerfremd sind, wenn die P_i paarweise teilerfremd sind.

(b) Es seien $A, B, C \in K[t]$. Zeigen Sie die folgende Behauptung:

Teilt A das Produkt BC und ist teilerfremd zu B, so teilt es C.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien $P, Q \in K[t]$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Polynome $U, V \in K[t]$ mit $UP + VQ = 1$ gibt, so dass $\deg(U) < \deg(Q)$ und $\deg(V) < \deg(P)$ gelten.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei K ein Körper und es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$a \text{ teilt } b \text{ in } \mathbb{Z} \iff t^a - 1 \text{ teilt } t^b - 1 \text{ in } K[t].$$

* **Aufgabe 6** (0 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass zwei Polynome $P, Q \in K[t]$ genau dann teilerfremd sind, wenn die Polynome $P + Q$ und PQ teilerfremd sind.

1a)

(a) $(3t^5 + 4t^2 + 1) : (t^2 + 2t + 3)$.

(b) $(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) : (t - 1)$.

$$(3t^5 + 4t^2 + 1) : (t^2 + 2t + 3) = \underline{\underline{3t^3 - 6t^2 + 3t + 16 \quad \text{Rest } -41t - 47}}$$

$-(3t^5 + 6t^4 + 9t^3)$

$-6t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 1$

$-(-6t^4 - 12t^3 - 18t^2)$

$3t^3 + 22t^2 + 1$

$-(3t^3 + 6t^2 + 9t)$

$16t^2 - 9t + 1$

$-(16t^2 + 32t + 48)$

$-41t - 47$

✓

1b) $(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) : (t - 1) = \underline{\underline{t^2 - t + 2}}$ ✓

$-(t^3 - t^2)$

$-t^2 + 3t - 2$

$-(-t^2 - t)$

$2t - 2$

$-(2t - 2)$

$0 \implies$ kein Rest

Gut.

4 P.

3.) z.z. P_1 und $Q \cdot P_{n+1}$ sind teilerfremd $\implies$ Produkt von teilerfremden = teilerfremd $\implies$ P_2 teilerfremd zu $B \cdot P_3$

a) $n = 2$ $\quad Q = P_2 \implies P_1$ und Q teilerfremd

da P_1 und P_2 teilerfremd nach Aufgabenstellung

P_1 und Q_n teilerfremd: Dies brauchst Du ja gerade zu zeigen...

$1 = U \cdot P + V \cdot Q \qquad U, V \in \mathbb{R}$

0,5 P.

b) $A, B, C \in \mathbb{R}[t]$

z.z.:

$\frac{BC}{A} = \mathbb{Z}$, $\frac{C}{A} = \mathbb{Z}$, $\frac{B}{A} \neq \mathbb{Z}$ Meinst du "Element aus..."?

Lemma III.0.6 1.10 denn es handelt sich hier um Polynome, aber die Idee ist gut.

$a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ genau dann teilerfremd wenn $u, v \in \mathbb{Z}$ $\quad ua + vb = 1$

$uA + vB = 1$

$\implies C(uA + vB) = C$

$\implies A(uC) + B(vC) = C$ Super.

Aus Aufgabe $\implies \frac{BC}{A} = \mathbb{Z}$

$B \cdot C$ ist nicht teilerfremd zu A

$\exists\, d \in \mathbb{R}$ mit $BC = dA$

$\implies A(uC + vd) = C$ ✓

1,5 P.

$\implies A$ ist teiler von C $\square$

4.) $P, Q \in \mathbb{K}[t]$ und P, Q teilerfremd

z.z. Lemma III.0.6 1.10 (Satz von Bézout) Genau, dieses Lemma ist wichtig.

$aP + bQ = 1 \qquad a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$UP + VQ = 1$

$\deg(U) < \deg(Q) \wedge \deg(V) < \deg(P)$ (Diese Ungleichungen bräuchtest Du noch zu zeigen.)

gegenannahme: $U, V \in K[t]$ mit $UP + VQ = 1$

$\implies \deg(U) < \deg(Q)$

$\deg(V) < \deg(P)$

$U \neq U'$

$V \neq V'$

also $UP + VQ = U'P + V'Q$

$\implies (V - V')P = (U \cdot U') \cdot Q$

also $(u - u')Q$ durch P teilbar $(\iff (v - v')$ durch Q teilbar$)$

wenn $\frac{(u - u')Q}{P}$ teilbar ist und Q teilerfremd

dann teilt $P \mid (u - u')$ Gut.

$\implies$ WIDERSPRUCH da $\deg(P) > \deg(Q)$ U-U' $= 0$ $(u - u')$ nicht durch P teilbar $\square$

3 P.

5.) Sei K ein Körper und $a, b \in \mathbb{N}$

z.z. $a \mid b$ in $\mathbb{Z} \iff (t^a - 1)\,(t^b - 1)$ in $K[t]$

aus $a \mid b$ in $\mathbb{Z}$ folgt dass

- $b \geq a$ (oder b=0)
- $a \neq 0$ Gut.
- b ist ein vielfaches von a also $\implies b = n \cdot a$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Polynomdivision: $(t^{n \cdot a} - 1) : (t^a - 1) =$

$$(t^{n \cdot a} + 0 \cdot t^{(n-1)a} + \ldots + 0 \cdot t^a - 1) : (t^a - 1) = t^{(n-1)a} + t^{(n-2)a} + \ldots + t^{2a} + t^a + 1$$

$-(t^{n \cdot a} - 1t^{(n-1)a})$

$t^{(n-1)a}$ -1

$-(t^{(n-1)a} - t^{(n-2)a})$

...

...

$t^{2a} + 0t^a$ -1

$-(t^{2a} - t^a)$

$t^a - 1$

$-(t^a - 1)$

2 P.

Und weshalb gilt die Gegenrichtung? $\quad 0 \quad$ kein Rest $= \underline{t^a - 1 \text{ teilt } t^b - 1}$ gilt $\forall\, a, n, b \in \mathbb{N}$ $\square$