LA1-6

Lukas Ingold 20-123-998

Lineare Algebra 1 **Serie 6**
HS 2020 *Abgabe: Do. 5.11.2020, 12.15 Uhr.*

* **Aufgabe 1** (0 Punkte). Gegeben seien die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&5\\1&8&-7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\0\\8\\-7\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-1&2&0&8\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}-1&4\\0&5\\6&8\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Man bezeichne mit E_{ij} die Matrix in $\mathrm{Mat}(m\times n,K)$, die eine 1 an der Stelle (i,j) hat und deren andere Einträge alle gleich Null sind. Gegeben seien Matrizen $A=(a_{i,j})\in\mathrm{Mat}(r\times m,K)$ und $B=(b_{i,j})\in\mathrm{Mat}(n\times s,K)$. Berechnen Sie die Matrixprodukte $A\cdot E_{ij}$ und $E_{ij}\cdot B$. Beschreiben Sie das Ergebnis in Worten.

Aufgabe 3 (1+3 Punkte).

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $D\in\mathrm{Mat}(n\times n,K)$ ein Diagonalmatrix, so gilt $DA=AD$ für alle $A\in\mathrm{Mat}(n\times n,K)$.

(b) Finden Sie alle Matrizen $A\in\mathrm{Mat}(n\times n,K)$, so dass $AM=MA$ für alle $M\in\mathrm{Mat}(n\times n,K)$ gilt. Begründen Sie, wie immer, Ihre Antwort!

* **Aufgabe 4** (0 Punkte). Gegeben seien linear unabhängige Zeilenvektoren $v_1,\dots,v_k\in K^m$ und $w_1,\dots,w_\ell\in K^n$. Für jedes $(i,j)\in\{1,\dots,k\}\times\{1,\dots,\ell\}$ bezeichnen wir mit $M_{(i,j)}$ die $m\times n$-Matrix $M_{(i,j)}:={}^tv_i\cdot w_j$. Zeigen Sie, dass diese Matrizen in $\mathrm{Mat}(m\times n,K)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Es sei U_d der Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vom Grad $\le d$ und es sei $\mathcal{B}_d:=(p_0,p_1,\dots,p_d)$ die Basis von U_d definiert durch $p_i(x)=x^i$. Die linearen Abbildungen $f:U_3\to U_2$ und $g:U_2\to U_3$ sind definiert durch $f(p)=p'$ (die erste Ableitung von p) und $(g(p))(x)=(x+1)\cdot p(x)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen

$$A:=M^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2}(f),\quad B:=M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3}(g),\quad C:=M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}(f\circ g)$$

und berechnen Sie $A\cdot B$.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Schreiben Sie die Matrix

$$A=\begin{pmatrix}2&6&6\\2&7&6\\2&7&7\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}(3\times3,\mathbb{R})$$

als Produkt von Elementarmatrizen.

2.) $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$

hat eine 1 an stelle ij

$A=(a_{i,j})\in \mathrm{Mat}(r\times m,K)$
$B=(b_{i,j})\in \mathrm{Mat}(n\times s,K)$

MATRIXPRODUKTE:

$A\cdot E_{ij}$
$E_{ij}\cdot B$

$$E_{ij} \quad \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix}0&&&0\\&0&1&0\\&0&0&0\\0&&&0\end{pmatrix}\end{array}$$ alle stellen ausser i,j sind 0

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{12}&0&0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&0&0\\a_{22}&0&0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_{11}&0\\0&a_{12}&0\end{pmatrix}$$

Die Spalte in E_{ij} bei welcher sich 1 befindet definiert die Spalte der Terme $\neq 0$ in dem Resultat zudem ist die Zeile in E_{ij} wo sich die 1 befindet sogleich die Zeile mit den Werten die in die Spalte des Resultates übertragen werden.

$$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{21}&b_{22}\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{31}&b_{32}\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\b_{11}&b_{12}\end{pmatrix}$$

Die Zeile in E_{ij} mit einer 1 bestimmt die Zeile im Resultat auf welcher die Terme $\neq 0$ stehen
Die Spalte sagt aus welche Werte aus den Zeilen in B im Resultat stehen

3.)

a) $D\in\mathrm{Mat}(n\times n,K)$ ist diagonalmatrix

Bsp.: $n\left\{\overbrace{\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}}^{n}\right.$ $n=2$

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$D\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\3&4\end{pmatrix}$

$A\cdot D=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\6&4\end{pmatrix}$

$AD\neq DA$ $\square$

DA WIR EIN BEISPIEL GEFUNDEN HABEN IN DEM $DA\neq AD$ IST BEWIESEN DAS $DA=AD$ NICHT IN JEDER MATRIX GILT.

b) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

EINHEITSMATRIZEN SIND IN DER MATRIXMULTIPLIKATION DIE EINZIGEN MATRIZEN WELCHE KOMMUTATIV SIND (AUCH VIELFACHE EINHEITSMATRIZEN, NULLMATRIX, INVERSMATRIX)

AUS LEMMA II.6.1

$B\cdot B^{-1}=E_n \qquad 1\cdot B$

$B\cdot E_n=E_n\cdot B$ ✓ $\square$

5.) U_d ist VR $:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

von Polynom funktionen des Grades $\le d$

Basis: $B_d:=(p_0,p_1,p_2\dots)$ $\qquad p_i(x)=x^i$

lineare Abbildungen:

$f: U_3\to U_2 \qquad f(p)=p'$

$g: U_2\to U_3 \qquad xg(p)=(x+1)\cdot p(x)$

$A:=M^{B_3}_{B_2}(f)$

$M^{(p_0,p_1,p_2,p_3)}_{(p_0,p_1,p_2)}\ p' \qquad p_i=x^i$
$\qquad p_1=x^1$
$\qquad \dots$

$M^{(x^0,x^1,x^2,x^3)}_{(x^0,x^1,x^2)}\ p'$

$M^{B_3}_{B_2}(f)=\left([f(x^0)]_{B_2},[f(x^1)]_{B_2},[f(x^2)]_{B_2},[f(x^3)]_{B_2}\right)$

$\qquad 0_{B_2} \qquad 1_{B_2} \qquad 2x_{B_2} \qquad 3x^2_{B_2}$

$f(x^0)=0=0\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2$
$f(x^1)=1=1\cdot1+0\cdot x\cdot 0\cdot x^2$
$f(x^2)=2x=0\cdot1+2\cdot x+0\cdot x^2$
$f(x^3)=3x^2=0\cdot1+0\cdot x+3\cdot x^2$

$\Rightarrow M^{B_3}_{B_2}(f)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

B: $M^{B_2}_{B_3}(g)$
$p_i=x^i$
$p_0=x^0$
$p_1=x^1$
$\dots$

$M^{(x^0,x^1,x^2)}_{(x^0,x^1,x^2,x^3)} \Rightarrow (x+1)\,px \Rightarrow M^{B_2}_{B_3}=\left([g(x^0)]_{B_3},[g(x^1)]_{B_3},[g(x^2)]_{B_3}\right)$

$\qquad (x+1)\cdot x^0 \qquad (x+1)\,x^1 \qquad (x+1)\,x^2$

$g(x^0)=x+1=1\cdot1+1\cdot x+0+0$
$g(x^1)=x^2+x=0+1\cdot x+1\cdot x^2+0$
$g(x^2)=x^3+x^2=0+0+1\cdot x^2+1x^3$

$\Rightarrow M^{B_2}_{B_3}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$M^{B_2}_{B_2}(f\circ g)=M^{B_3}_{B_2}(f)\cdot M^{B_2}_{B_3}(g)$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}}}$

6.) $\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\begin{pmatrix}2&6&6\\2&7&6\\2&7&7\end{pmatrix} I\cdot\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&3&3\\2&7&6\\2&7&7\end{pmatrix} II-2I$

$\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\2&7&7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\2&7&7\end{pmatrix} III-2I$

$\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} I-3III$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} -II$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}2&6&6\\2&7&6\\2&7&7\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{E}$$

$BA=E \Rightarrow A=B^{-1}$

$$\begin{bmatrix}2&6&6\\2&7&6\\2&7&7\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}2&6&6\\2&7&6\\2&7&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \quad \square$$