LA1-8

Lukas Ingold 20-123-998

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen mit Rest in $\mathbb{R}[t]$ durch.

(a) $(3t^5 + 4t^2 + 1) : (t^2 + 2t + 3)$.

(b) $(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) : (t - 1)$.

* **Aufgabe 2** (0 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass das Polynom $x^4 + ax^3 + bx + c$ in $\mathbb{R}[x]$ durch $x^2 + x + 1$ teilbar ist.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.**

(a) Wir sagen, dass Polynome $P_1, \dots, P_n \in K[t]$ *paarweise teilerfremd* sind, wenn P_i und P_j für alle $i \neq j$ teilerfremd sind. Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass P_1 und $Q := P_2 \cdots P_n$ teilerfremd sind, wenn die P_i paarweise teilerfremd sind.

(b) Es seien $A, B, C \in K[t]$. Zeigen Sie die folgende Behauptung:
Teilt A das Produkt BC und ist teilerfremd zu B, so teilt es C.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien $P, Q \in K[t]$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Polynome $U, V \in K[t]$ mit $UP + VQ = 1$ gibt, so dass $\deg(U) < \deg(Q)$ und $\deg(V) < \deg(P)$ gelten.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei K ein Körper und es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$a \text{ teilt } b \text{ in } \mathbb{Z} \iff t^a - 1 \text{ teilt } t^b - 1 \text{ in } K[t].$$

* **Aufgabe 6** (0 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass zwei Polynome $P, Q \in K[t]$ genau dann teilerfremd sind, wenn die Polynome $P + Q$ und PQ teilerfremd sind.

1a)

(a) $(3t^5 + 4t^2 + 1) : (t^2 + 2t + 3)$.
(b) $(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) : (t - 1)$.

$$(3t^5 + 4t^2 + 1) : (t^2 + 2t + 3) = \underline{\underline{3t^3 - 6t^2 + 3t + 16 \quad \text{Rest } -41t - 47}}$$

$$\begin{array}{l}
-(3t^5 + 6t^4 + 9t^3) \\ \hline
-6t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 1 \\
-(-6t^4 - 12t^3 - 18t^2) \\ \hline
3t^3 + 22t^2 + 1 \\
-(3t^3 + 6t^2 + 9t) \\ \hline
16t^2 - 9t + 1 \\
-(16t^2 + 32t + 48) \\ \hline
-41t - 47
\end{array}$$

1b) $(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) : (t - 1) = \underline{\underline{t^2 - t + 2}}$

$$\begin{array}{l}
-(t^3 - t^2) \\ \hline
-t^2 + 3t - 2 \\
-(-t^2 - t) \\ \hline
2t - 2 \\
-(2t - 2) \\ \hline
0 \Rightarrow \text{kein Rest}
\end{array}$$

3.) z.z. P_1 und $Q \cdot P_{n+1}$ sind teilerfremd $\Rightarrow$ Produkt von teilerfremden = teilerfremd $\Rightarrow$ P_2 teilerfremd zu $B \cdot P_3$

a) $n = 2$ $\quad Q = P_2 \Rightarrow P_1$ und Q teilerfremd
da P_1 und P_2 teilerfremd
P_1 und Q_n teilerfremd:
$1 = U \cdot P + V \cdot Q \quad U, V \in \mathbb{R}$

b) $A, B, C \in \mathbb{R}[t]$

$\frac{BC}{A} = \mathbb{Z}$, $\frac{C}{A} = \mathbb{Z}$, $\frac{B}{A} \neq \mathbb{Z}$

Lemma III.0.6
$a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ genau dann teilerfremd wenn $u, v \in \mathbb{Z}$ $\quad ua + vb = 1$

$uA + vB = 1$
$\Rightarrow C(uA + vB) = C$
$\Rightarrow A(uC) + B(vC) = C$

AUS AUFGABE $\Rightarrow \frac{BC}{A} = \mathbb{Z}$

$B \cdot C$ ist nicht teilerfremd zu A
$\exists\, d \in \mathbb{R}$ mit $BC = dA$

$\Rightarrow A(uC + vd) = C$
$\Rightarrow$ A ist teiler von C $\square$

4.) $P, Q \in \mathbb{K}[t]$ und P, Q teilerfremd

z.z lemma II.0.6 (Satz von Bézout)

$aP + bQ = 1 \qquad a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$UP + VQ = 1$
$\deg(U) < \deg(Q) \wedge \deg(V) < \deg(P)$

gegenannahme: $U, V \in K[t]$ mit $UP + VQ = 1$
$\Rightarrow \deg(U) < \deg(Q)$
$\deg(V) < \deg(P)$
$U \neq U'$
$V \neq V'$

also $UP + VQ = U'P + V'Q$
$\Rightarrow (V - V')P = (U \cdot U') \cdot Q$
also $(u - u')Q$ durch P teilbar $\Rightarrow$ $(v - v')$ durch Q teilbar
wenn $\frac{(u - u')Q}{P}$ teilbar ist und Q teilerfremd
dann teilt $P \mid (u - u')$
$\Rightarrow$ WIDERSPRUCH da $\deg(P) > \deg(Q) \Rightarrow (u - u')$ nicht durch P teilbar $\square$

5.) Sei K ein Körper und $a, b \in \mathbb{N}$
z.z. $a \mid b$ in $\mathbb{Z} \iff (t^a - 1)(t^b - 1)$ in $K[t]$

aus $a \mid b$ in $\mathbb{Z}$ folgt dass
- $b \geq a$
- $a \neq 0$
- b ist ein vielfaches von a also $\Rightarrow b = n \cdot a$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Polynomdivision: $(t^{n \cdot a} - 1) : (t^a - 1) =$

$$(t^{n \cdot a} + 0 \cdot t^{(n-1)a} + \dots + 0 \cdot t^a - 1) : (t^a - 1) = t^{(n-1)a} + t^{(n-2)a} + \dots + t^{2a} + t^a + 1$$

$$\begin{array}{l}
-(t^{n \cdot a} - 1t^{(n-1)a}) \\ \hline
t^{(n-1)a} \\
-(t^{(n-1)a} - t^{(n-2)a}) \\
\dots \\
\dots \\
t^{2a} + 0t^a \\
-(t^{2a} - t^a) \\ \hline
t^a - 1 \\
-(t^a - 1) \\ \hline
0
\end{array}$$

kein Rest $= \underline{t^a - 1 \text{ teilt } t^b - 1}$ gilt $\forall\, a, n, b \in \mathbb{N}$ $\square$