AN1-2

Montag, 28. September 2020 10:11

Lukas Ingold 20-123-998

Prof. Dr. S. Baader Herbstsemester 2020

Übungen zur Vorlesung Analysis I

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Prüfe die folgenden Verknüpfungen $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Assoziativität und Kommutativität.

a) $x - y$ b) y c) $x + y + xy$ d) $(x + y)^2$ e) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

Hinweis: Die Rechenregeln übertragen sich von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ und brauchen deshalb nicht verifiziert zu werden.

Aufgabe 3. Sei K ein geordneter Körper. Zeige, dass K unendlich ist und weiterhin, dass die Gleichung $x^2 = -1$ in K keine Lösung hat.

Aufgabe 4. Konstruiere eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}$$

eine rationale Lösung $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Hinweis: $\alpha = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000000000} + \dots$

Aufgabe 5. Zeige, dass keine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{5q^2}.$$

Hinweis: Schreibe $\sqrt{2} = \frac{p}{q} + \epsilon$ und leite aus $|\epsilon| \leq \frac{1}{5q^2}$ die Ungleichung $|\epsilon| \geq \frac{24}{50pq}$ her. Aus $p < 2q$ folgt daraus ein Widerspruch.

Abgabe am Donnerstag, 1. Oktober.

1

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Assoziativität : $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

KOMMUTATIVITÄT : $a \circ b = b \circ a$

a) $x - y$ $\boxed{\text{Zischti } 6-7}$

$x - y = y - x$ $\Rightarrow$ nicht KOMMUTATIV

$5 - 3 = 2 \neq 3 - 5 = -2$

$(x-y)-z = x-(y-z)$

$x - y - z \neq x - y + z$ $\Rightarrow$ NICHT ASSOZIATIV □

b) $a \circ y = y$

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$b \circ c = a \circ c$ $\Rightarrow$ ASSOZIATIV

$c = c$

$a \circ b \circ c = b \circ c = c$

$c \circ b = b$ $\Rightarrow$ NICHT KOMMUTATIV

$c \circ y = y$

WEIL $x \circ y = y \neq x = y \circ x$ □

c) $x + y + xy$

$\underbrace{(x \circ y)}_{(x+y+xy)} \circ \underset{y}{z} = x \circ (y \circ z)$

$x + y + yx$

$(x+y+xy) + z + z(x+y+xy) =$

$x + y + xy + z + xz + yz + xyz =$

$x + y + z + xy + xz + yz + xyz$

d) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ASSOZIATIVITÄT: $((x+y)^2 + z)^2 = (x + (y+z)^2)^2$

$\sqrt{(..)}$: $\pm (x+y)^2 + z = \pm x + (y+z)^2$

$\pm (x^2 + 2xy + y^2 + z) = \pm (x + y^2 + 2yz + z^2)$

$\pm (x^2 + 2xy - x) = \pm (z^3 + 2yz - z)$

$\pm (x(x + 2y - 1)) = \pm (z(z + 2y - 1))$

↯ WENN $\pm x \neq \pm z$

KOMMUTATIVITÄT : $(x+y)^2 = (y+x)^2$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (y+x)^2$ ✓

e) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^3+y^3} + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt[3]{y^3+z^3}}$ $\quad | (\dots)^3$

$\sqrt[3]{x^3+y^3} + z^3 = x^3 + \sqrt[3]{y^3+z^3}$ $\quad | (\dots)^3$

$x^3 + y^3 + z^9 = x^9 + y^3 + z^3$

2.) $n \in \mathbb{N}$

MENGE $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$

Körper $(\mathbb{Q}[\sqrt{n}], +, \cdot)$

(K1) : $(a_1 + b_1\sqrt{n}) + ((a_2 + b_2\sqrt{n}) + (a_3 + b_3\sqrt{n})) \overset{\mathbb{R}\text{ KÖRPER}}{=} a_1 + b_2\sqrt{n} + a_2 + b_2\sqrt{n} + a_3 + b_3\sqrt{n} = ((a_1 + b_1\sqrt{n}) + (a_2 + b_2\sqrt{n})) + (a_3 + b_3\sqrt{n})$ ✓

- $0_K = 0 + 0\sqrt{n} \in K$
- DAS INVERSE VON $(a_1 + b_2\sqrt{n})$ ist $(-a_1) + (-b_1)\cdot\sqrt{n} \in K$
- $(a_1 + b_1\sqrt{n}) + (a_2 + b_2\sqrt{n}) - (a_2 + b_2\sqrt{n}) + (a_1 + b_1\sqrt{n})$ ✓

(K2) : • ASSOZIATIVITÄT UND KOMMUTATIVITÄT IN $(K \setminus \{0\}, \cdot)$, folgt aus ASSOZIATIVITÄT UND KOMMUTATIVITÄT IN $\mathbb{R}$

- $1_K = 1 + 0\sqrt{n} \in K$
- Inverse von $a + b\sqrt{n}$ in $\mathbb{R}$ $\frac{1}{a+b\sqrt{n}}$ $(a + b\sqrt{n}) \neq 0$

(K3) : DIE DISTRIBUTIVGESETZE FOLGEN AUS DENEN IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ KÖRPER

3.) geordneter KÖRPER

$x^2 = -1$

$x \cdot x = -1 \quad | : x$

$x = -\frac{1}{x}$

$x = -1 \cdot \frac{1}{x}$ FÜR $x > 0 \Rightarrow \underbrace{x}_{\text{positiv}} = \underbrace{-1 \cdot \frac{1}{x}}_{\text{NEGATIV}}$ ↯, FÜR $x < 0 \Rightarrow \underbrace{x}_{\text{NEGATIV}} = \underbrace{-1 \cdot \frac{1}{x}}_{\text{POSITIV}}$ ↯ $\Rightarrow$ FÜR $x = 0$ ↯

SOMIT Gibt sich ein WIDERSPRUCH DA ETWAS POSITIVES $\neq$ ETWAS NEGATIVES

GETEILT DURCH 0 NICHT Möglich

$\forall x \in K$: eine d der Beziehungen

$x = 0$, $x > 0$, $-x > 0$

$x > 0$ und $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$

INDUKTION

1.) Wenn $n \in \mathbb{N}$ UND $x < y$: $nx < ny$

2.) WENN $x > 0_K$: $nx > mx > 0_K$ $\forall$ $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$

AUS 2.) WENN $x, y \in K$ mit $x < y$: $\exists$ ∞ ELEMENTE ZWISCHEN x UND y

DENN $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $(n+1)1_K > n1_K > 0_K$ also $(n1_K)^{-1} \geq ((n+1)1_K)^{-1} > 0_K$

SO FOLGT : $y = x + (y-x)\cdot(1_K)^{-1} > x + (y-x)(2 \cdot 1_K)^{-1} > x + (y-3)(3 \cdot 1_K)^{-1} \dots > x$)

DA WIR DIESEN SCHRITT UNENDLICH OFT AUSFÜHREN KÖNNEN SEHEN WIR, DASS ZWISCHEN x UND y UNENDLICH VIELE ZAHLEN EXISTIEREN.

4.) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}$$

eine rationale Lösung $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha$ kann kein bruch sein

sagen wir $q^n > 0$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n} \quad | \cdot q^n$$

$\alpha - pq^{n-1} \leq 1 \quad | + pq^{n-1}$

$\alpha \leq 1 + pq^{n-1}$

für $n = 0$

$\alpha \leq 1 + p \cdot \frac{1}{q}$ WIR SAGEN : $p = 1$; $q = 2$

q^{-1} für $n \geq 1$ $\Rightarrow \alpha \leq 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}$

$\alpha \leq \frac{3}{2}$

$\alpha \leq 1 + p \cdot 1$ p ist mind. 1 weil $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

q^0

$\Rightarrow \alpha \leq 2$

$\alpha \leq \frac{2}{3}$

α MUSS IRATIONAL SEIN

$\alpha = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10'000'000} \dots$ □