LA1Blatt11

Lukas Ingold 20-123-998

Aufgabe 1 (1 + 1 Punkte). Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

* **Aufgabe 2** (0 + 0 Punkte). Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei K ein Körper. Seien $v_1, v_2, v_3 \in K^3$ gegeben durch $v_1 = (1, 1, \lambda)$, $v_2 = (1, \lambda, 1)$ und $v_3 = (\lambda, 1, 1)$. Für welche $\lambda \in K$ sind (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig?

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte).

(a) Gibt es eine reelle Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

(b) Gibt es eine reelle Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

* **Aufgabe 5** (0 Punkte). Sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller $n \times n$ reellen Matrizen. Bestimmen Sie die Determinante des Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$, der durch $f(M) = {}^tM$ für alle $M \in V$ definiert ist.

Aufgabe 6 (2 + 2 Punkte).

(a) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit P_j das Polynom in $\mathbb{R}[x]$, das durch $P_j(x) = (x + j)^3$ definiert ist. Zeigen Sie, dass die Familie $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ in $\mathbb{R}[x]$ linear abhängig ist.

(b) Folgern Sie daraus, dass $\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \end{vmatrix} = 0$ ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det({}^tA)$ für alle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gilt.

1)
Aufgabe 1 (1 + 1 Punkte). Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \cancel{-0 \cdot \det\begin{pmatrix} \ast & 2 & 3 & 4 \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ \ast & -3 & 3 & -3 \\ \ast & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} + \cancel{0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \ast & 3 & 4 \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ 3 & \ast & 3 & -3 \\ 1 & \ast & 1 & 1 \end{pmatrix}} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ast & 4 \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ 3 & -3 & \ast & -3 \\ 1 & 1 & \ast & 1 \end{pmatrix} + (-2) \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ast \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ 3 & -3 & 3 & \ast \\ 1 & 1 & 1 & \ast \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

WEITER mit Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot -3 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 4) + (1 \cdot 2 \cdot -3) - (4 \cdot -3 \cdot 1) - (-3 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 3)$$
$$-3 \quad + \quad 12 \quad + \quad -6 \quad - \quad -12 \quad - \quad -3 \quad - \quad 6$$

$\det('') = -12$

$$-2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot -3 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 3) + (1 \cdot 2 \cdot 3) - (3 \cdot -3 \cdot 1) - (3 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 3) = 12 \cdot -2$$
$$-3 \quad + \quad 9 \quad + \quad 6 \quad - \quad -9 \quad - \quad 3 \quad - \quad 6$$

$\Rightarrow -24$

$$\det(A) = -12 - 24 = \underline{\underline{-36}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = +0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ast \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ 3 & -3 & 3 & \ast \\ 1 & -1 & 0 & \ast \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} \ast & 2 & 3 & 2 \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ \ast & -3 & 3 & 6 \\ \ast & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \ast & 3 & 2 \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ 3 & \ast & 3 & 6 \\ 1 & \ast & 0 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ast & 2 \\ \ast & \ast & \ast & \ast \\ 3 & -3 & \ast & 6 \\ 1 & -1 & \ast & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = (1 \cdot -3 \cdot 2) + (3 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot 2 \cdot 6) - (2 \cdot -3 \cdot 1) - (6 \cdot -1 \cdot 1) - (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (-1)$$
$$-6 \quad -6 \quad + \quad 12 \quad + \quad 6 \quad + \quad 6 \quad - \quad 12 \quad \cdot (-1)$$

$$\det(B) = \underline{\underline{0}}$$

3.)

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ FALLS DIE DETERMINANTE $\neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \lambda + \lambda + \lambda - \lambda^3 - 1 - 1 = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$$

$(-\lambda^3 + 0\lambda^2 + 3\lambda - 2) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 - \lambda + 2 \Rightarrow$ Quadratische Gleichung
$-(-\lambda^3 + \lambda^2)$
$\quad \lambda^2 + 3\lambda$
$\quad -(\lambda^2 - \lambda)$
$\qquad 2\lambda - 2$
$\qquad -(2\lambda - 2)$
$\qquad\quad 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1 \cdot 2)}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (-8)}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$
$\quad\ \lambda_2 = -2$

$\Rightarrow$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig für $\lambda \in K \setminus \{1, -2\}$

4.) a) $\det(A^2) = -1$

$\Rightarrow \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$

$\Rightarrow$ Wenn $\det(A)$ eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist und $x^2 = -1 \Rightarrow$ gibt es keine andere mögl. als das $x \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ folglich gibt es keine reelle Matrix welche Quadriert die Matrix A^2 darstellt

b.) Ja, nämlich:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{da} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \square$$

6.) a) $j \in \mathbb{N}$ $\quad P_j$ Polynom in $\mathbb{R}[x]$ mit $P_j(x) = (x + j)^3$

Familie $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ in $\mathbb{R}[x]$ linear abh.

$P_0 = x^3$
$P_1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$P_2 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$P_3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
$P_4 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

Wenn die Familie linear abh.:

$$a P_0(x) + b \cdot P_1(x) + c P_2(x) + d P_3(x) = P_4(x)$$

$$a \cdot (x^3) + b(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + c(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + d(x^3 + 9x^2 + 27x + 27) = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & a + 0b + 0c + 0d = 1 \\ \text{II} & a + 3b + 3c + d = 12 \\ \text{III} & a + 6b + 12c + 8d = 48 \\ \text{IV} & a + 9b + 27c + 27d = 64 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{IV} - 3\text{III} - 3\text{II} \\ \text{III} - 8\,\text{II} \end{array} \quad \left.\begin{array}{ll} \text{I} & a = 1 \\ \text{II} & a + 3b + 3c + d = 12 \\ \text{III} & -7a - 18b - 12c = -48 \\ \text{IV} & -6a - 9b - 18c = -114 \end{array}\right\} \text{I} - 2\text{II} \quad \begin{array}{ll} \text{I} & a = 1 \\ \text{II} & a + 3b + 3c + d = 12 \\ \text{III} & 5a + 24c = 180 \\ \text{IV} & -6a - 9b - 18c = -114 \end{array}$$

$\underline{\underline{a = 1}}$

$5a + 24c = 180$

a: $\quad 5 + 24c = 180 \quad | -5 \quad | : 24$

$\underline{\underline{c = \frac{175}{24}}}$

$-6a - 9b - 18c = -114$

$-6 - 9b - \frac{175}{24} \cdot 18 = -144 \quad | +6 \, | + \frac{525}{4}$

$-9b = -6{,}75 \quad | : 9 \quad | \cdot (-1)$

$\underline{\underline{b = \frac{3}{4}}}$

$a + 3b + 3c + d = 12$

$1 + \frac{9}{4} + \frac{175}{8} + d = 12 \quad | -1 \, | - \frac{9}{4} \quad | - \frac{175}{8}$

$\underline{\underline{d = -\frac{105}{8}}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{175}{24} \\ d = -\frac{105}{8} \end{array}}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) + \frac{175}{24} P_2(x) - \frac{105}{8} P_3(x) = P_4(x)$$

Da $P_4(x)$ aus linearkombination von $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ existiert ist die Familie linear unabh.

6.) b)

$$A = \begin{pmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \end{pmatrix} \quad \text{da in a)}$$

gezeigt wurde das $(p_0 \dots p_4)$ linear unabh.

$\Rightarrow$ Spalten linear abh.

$\Rightarrow$ Zeilen linear abh.

da Zeilen und Spalten linear ab.

$\Rightarrow \det(A) = 0 \quad \square$

7.) $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$

$$\det(A) = \det({}^tA)$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)})$$

$$\Rightarrow a_{i\sigma(i)} = a_{\sigma(i)i}$$

somit $\quad \det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n})$

Weiter komme ich leider nicht. :(