LA1-10

Lukas Ingold 20-123-998

Lineare Algebra 1 — **Serie 10**
HS 2020 — *Abgabe: Do. 03.12.2020, 12.15 Uhr.*

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie (ohne gross zu rechnen!), dass die Matrizen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ genau dann ähnlich sind, wenn $a \neq d$ ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ zwei Matrizen. Zeigen Sie: *Sind A und B ähnlich, so gilt* $\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda) = \dim \mathrm{Eig}(B, \lambda)$ *für alle* $\lambda \in K$.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sind die folgenden Matrizen in $\mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ ähnlich?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* **Aufgabe 4** (0 + 0 Punkte). Die Fibonacci-Folge ist die reelle Folge (x_n), die durch $x_0 = x_1 = 1$ und $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Formel von Binet zu zeigen:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dazu setzen wir $X_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $X_{n+1} = A \cdot X_n$ und somit $X_n = A^n \cdot X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T, so dass $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ gilt.

(b) Beweisen Sie die Formel von Binet.

Aufgabe 5 (4 + 0 Punkte). (1) Gegeben sei die Permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in S_6.$$

(a) Schreiben Sie σ als Produkt von disjunkten Zyklen.
(b) Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen.
(c) Bestimmen Sie das Signum von σ.
(d) Berechnen Sie $\sigma^{100} = \underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{100\text{-mal}}$.

* (2) Gleiche Fragen für die Permutation $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in S_9$.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_n, $n \geq 3$, von 3-Zyklen erzeugt wird.

* **Aufgabe 7** (0 Punkte). Bestimen Sie das Signum der Permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix} \in S_n.$$

1.) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$a \neq d \Rightarrow$ sind die Matrizen ähnlich

Annahme $a = d$ $\quad N, M$ sind ähnlich

$N = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$

$MT = NT$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} at_{11} & at_{12} \\ at_{21} & at_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at_{11} + t_{21} & at_{12} + t_{22} \\ at_{21} & at_{22} \end{pmatrix}$

$a \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = a \cdot T \neq \begin{pmatrix} at_{11} + t_{21} & at_{12} + b_{22} \\ at_{21} & at_{22} \end{pmatrix}$

d.h wenn $a = d$ $\nexists$ T für welches gilt $M = T \cdot N \cdot T^{-1}$

$\Rightarrow$ N und C nicht ähnlich wenn $a = d$

2.) z.z. falls $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ähnlich $\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda) = \dim \mathrm{Eig}(B, \lambda)$ $\forall \lambda \in K$

Wenn A und B ähnlich

$A = TB \cdot T^{-1}$, $T = (E_{v_1}, \ldots, E_{v_n})$: alle Eigenvektoren sind linear. unabh.

$\mathrm{Eig}(B, A, \lambda) = \mathrm{span}(E_{v_1}, \ldots, E_{v_n})$

↳ $\dim(\mathrm{Eig}(B, A, \lambda)) =$ Anz. linear unab. Eigenvektoren

Da T investierbar sein muss $\Rightarrow$ Alle Ev lin. unabh.

↳ dim(span) von zwei ähnlichen Matrizen muss gleich sein

da die Grösse gleich ist

$A \in (n \times n, K)$ und $B \in (m \times m, K)$

$n \stackrel{!}{=} m$

$\Rightarrow$ Falls zwei Matrizen ähnlich sind gilt

$\dim \mathrm{Eig}(B, \lambda) = \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$ $\square$

3.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EW von A, B sind nur 1

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b = 0$, $d = 0$

$\mathrm{Eig}(A, 1) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad d = 0$

$\mathrm{Eig}(B, 1) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\dim \mathrm{Eig}(A, 1) \neq \dim \mathrm{Eig}(B, 1)$

$\rightarrow$ A, B sind nicht ähnlich $\square$

5.)

$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in S_6$

a) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{matrix}$

$(2, 5)$

$(1, 3, 4, 6)$

b.) $(1,3)(3,4)(4,6)(2,5)$

c) Gerade Anzahl Transpositionen:

$\Pi(\delta) = 1 \Rightarrow \mathrm{sgn}(-1)$

$\Rightarrow \mathrm{sgn}\ (-1)^{6-2} = -1^4 = 1$

d.) δ^{100}

$\delta^1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{matrix}$

$\delta^2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{matrix}$

$\delta^4 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$

$\delta^{100} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$

WEIL 4 ein Teiler von 100 $\square$

6.) A_n

$n \geq 3$

WIRD VON 3 ZYKLEN ERZEUGT

$\Rightarrow$ Sobald eine Permutation eine gerade Anz. Transpositionen

bildet $\Rightarrow$ Signum $= +1$

Ein 3-Zykel bildet immer eine gerade Permutation

$\Rightarrow (ab) \circ (bc) = (abc)$

↳ 2 TRANSPOSITIONEN

$\Rightarrow$ Somit ist eine Permutation aus 2 Transpositionen ein Produkt von 3 Zyklen

$(ab) \circ (ab) = \mathrm{id} = (abc)(cba)$

falls beide Transpositionen gleich sind

$(ab)(ac) = (acb)$

für gemeinsames Element

$(ab) \circ (cd) = (acb) \circ (acd)$

für keine gemeinsame Elemente $\square$