# GTI HS 20 Lösung Serie 4

Michael Baur, Tatjana Meier, Sophie Pfister

Die 4. Serie ist bis Montag, den 19. Oktober 2020 um 12:00 Uhr zu lösen und als PDF-Dokument via ILIAS abzugeben. Für Fragen steht im ILIAS jederzeit ein Forum zur Verfügung. Zu jeder Frage wird, falls nicht anders deklariert, der Lösungsweg erwartet. **Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht akzeptiert**. Allfällige unlösbare Probleme sind uns so früh wie möglich mitzuteilen, wir werden gerne helfen.
Viel Spass!

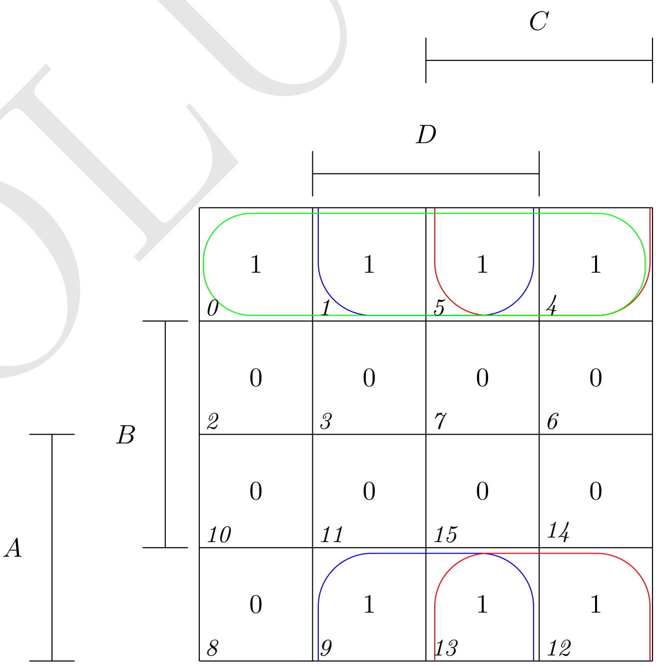


## 1 Karnaugh-Diagramm I (2 Punkte)

Bestimme eine möglichst vereinfachte Schaltfunktion, die dem folgenden Diagramm entspricht.

| AB\CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 1 |

### Lösung




$$f(A,B,C,D) = \neg A \neg B + \neg B C + \neg B D$$

## 2 Karnaugh-Diagramm II (1 Punkt)

Wie findet man Primimplikanten in Karnaugh-Diagrammen?

## Lösung

Primimplikanten entsprechen maximalen Blöcken in Karnaugh-Diagrammen.

# 3 Karnaugh mit Don't Care (3 Punkte)

Entwickle unter Verwendung des Karnaugh-Verfahrens eine Schaltfunktion, welche für eine einstellige BCD-Zahl feststellt, ob sie ein Teiler ($\neq 1$) von 252 ist. Führe dazu die folgenden Schritte aus:

(a) (2 Punkte) Bestimme mit Hilfe einer Wertetabelle ein Karnaugh-Diagramm unter Ausnutzung der Don't-Care-Fälle.

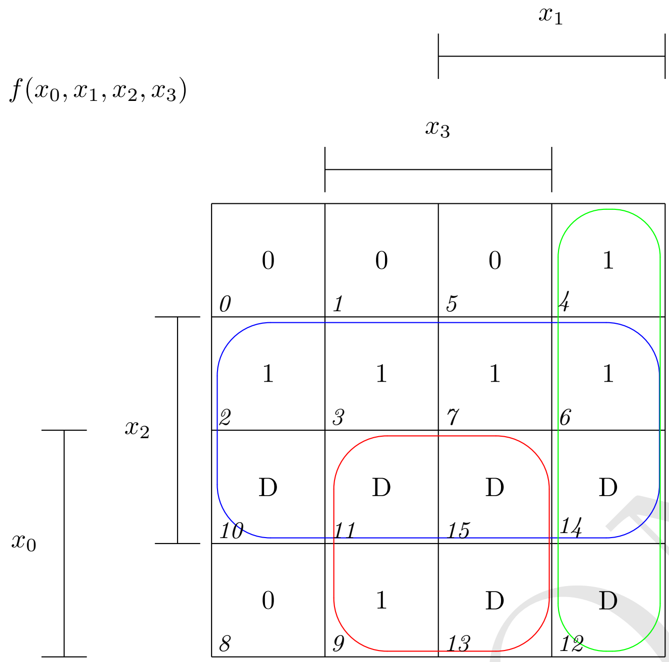
(b) (1 Punkt) Bestimme eine möglichst vereinfachte Schaltfunktion, die der Wertetabelle von (a) entspricht.

## Lösung

(a) Die Teiler von $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ sind 2, 3, 4, 6, 7, 9. Wir berechnen zuerst die Wertetabelle:

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | D |
| 1 | 0 | 1 | 1 | D |
| 1 | 1 | 0 | 0 | D |
| 1 | 1 | 0 | 1 | D |
| 1 | 1 | 1 | 0 | D |
| 1 | 1 | 1 | 1 | D |

Das Karnaugh-Diagramme sieht wie folgt aus:




(b) Die Schaltfunktion lautet $f(x_0, \ldots, x_3) = x_2 + x_0x_3 + x_1\neg x_3$

## 4 Quine und McCluskey (4 Punkte)

Die Funktion $f : B^5 \to B$ habe genau die folgenden einschlägigen Indizes:

0, 1, 4, 5, 8, 12, 17, 20, 23, 28, 31

Bestimme mit Hilfe des Verfahrens von Quine und McCluskey die Primimplikanten und eine kostenminimale, disjunktive Darstellung.

## Lösung

Die folgenden Minterme werden gebraucht:

| Gruppe | Minterm | (einschlägiger Index)$_2$ | (einschlägiger Index)$_{10}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $x_4x_3x_2x_1x_0$ | 11111 | 31 |
| 1 | $x_4\neg x_3x_2x_1x_0$ | 10111 | 23 |
| 2 | $x_4x_3x_2\neg x_1\neg x_0$ | 11100 | 28 |
| 3 | $x_4\neg x_3x_2\neg x_1\neg x_0$ | 10100 | 20 |
| | $x_4\neg x_3\neg x_2\neg x_1x_0$ | 10001 | 17 |
| | $\neg x_4x_3x_2\neg x_1\neg x_0$ | 01100 | 12 |
| | $\neg x_4\neg x_3x_2\neg x_1x_0$ | 00101 | 5 |
| 4 | $\neg x_4x_3\neg x_2\neg x_1\neg x_0$ | 01000 | 8 |
| | $\neg x_4\neg x_3x_2\neg x_1\neg x_0$ | 00100 | 4 |
| | $\neg x_4\neg x_3\neg x_2\neg x_1x_0$ | 00001 | 1 |
| 5 | $\neg x_4\neg x_3\neg x_2\neg x_1\neg x_0$ | 00000 | 0 |

Nach einmaliger Anwendung der Resolutionsregel:

| Gruppe | Minterm | (einschlägiger Index)$_2$ | (einschlägiger Index)$_{10}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $x_4x_2x_1x_0$ | $1*111$ | 23, 31 |
| 2 | $x_3x_2\neg x_1\neg x_0$ | $*1100$ | 12, 28 |
| | $x_4x_2\neg x_1\neg x_0$ | $1*100$ | 20, 28 |
| 3 | $\neg x_3x_2\neg x_1\neg x_0$ | $*0100$ | 4, 20 |
| | $\neg x_4\neg x_3x_2\neg x_1$ | $0010*$ | 4, 5 |
| | $\neg x_4x_2\neg x_1\neg x_0$ | $0*100$ | 4, 12 |
| | $\neg x_4\neg x_3\neg x_1x_0$ | $00*01$ | 1, 5 |
| | $\neg x_3\neg x_2\neg x_1x_0$ | $*0001$ | 1, 17 |
| | $\neg x_4x_3\neg x_1\neg x_0$ | $01*00$ | 8, 12 |
| 4 | $\neg x_4\neg x_2\neg x_1\neg x_0$ | $0*000$ | 0, 8 |
| | $\neg x_4\neg x_3\neg x_1\neg x_0$ | $00*00$ | 0, 4 |
| | $\neg x_4\neg x_3\neg x_2\neg x_1$ | $0000*$ | 0, 1 |

Nach zweiter Anwendung der Resolutionsregel:

| Gruppe | Minterm | (einschlägiger Index)$_2$ | (einschlägiger Index)$_{10}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $x_4x_2x_1x_0$ | $1*111$ | 23, 31 |
| 2 | $x_2\neg x_1\neg x_0$ | $**100$ | 4, 12, 20, 28 |
| 3 | $\neg x_3\neg x_2\neg x_1x_0$ | $*0001$ | 1, 17 |
| | $\neg x_4\neg x_3\neg x_1$ | $00*0*$ | 0, 1, 4, 5 |
| | $\neg x_4\neg x_1\neg x_0$ | $0**00$ | 0, 4, 8, 12 |

Eine weitere Anwendung der Resolutionsregel ist nicht möglich, d.h. alle Primimplikanten sind gefunden.

Wir erstellen nun die Implikationsmatrix mit Hilfe der oben erhaltenen Primimplikanten

| Nr. | Term | 0 | 1 | 4 | 5 | 8 | 12 | 17 | 20 | 23 | 28 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_4x_2x_1x_0$ | | | | | | | | | 1 | | 1 |
| 2 | $x_2\neg x_1\neg x_0$ | | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | |
| 3 | $\neg x_3\neg x_2\neg x_1x_0$ | | 1 | | | | | 1 | | | | |
| 4 | $\neg x_4\neg x_3\neg x_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 5 | $\neg x_4\neg x_1\neg x_0$ | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | | | | |

Primimplikant 1 ist notwendig, da er nur die Spalte 31 abdeckt, gleiches gilt für Primimplikant 2 und Spalte 28, Primimplikant 3 und Spalte 17, Primimplikant 4 und Spalte 5 sowie Primimplikant 5 und Spalte 8. D.h. alle Primimplikanten sind notwendig, keiner kann weggelassen werden und somit ist die kostengünstigste disjunktive Darstellung gegeben durch

$$f(x_0,\ldots,x_4) = x_4x_2x_1x_0 + x_2\neg x_1\neg x_0 + \neg x_3\neg x_2\neg x_1x_0 + \neg x_4\neg x_3\neg x_1 + \neg x_4\neg x_1\neg x_0$$

# 5 Ordered Binary Decision Diagrams (4 Punkte)

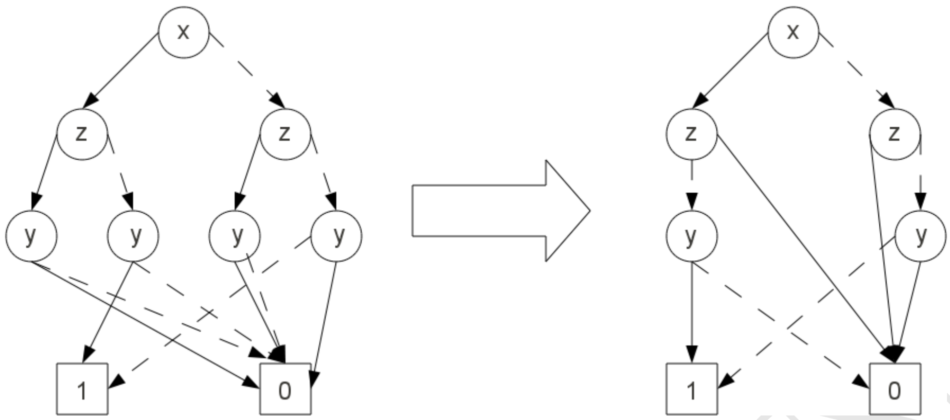
(a) (2 Punkte) Stelle die folgende Funktion $f(x, y, z)$ als OBDD zur Ordnung $x < z < y$ dar und vereinfache dieses anschliessend.

| x | y | z | f(x,y,z) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

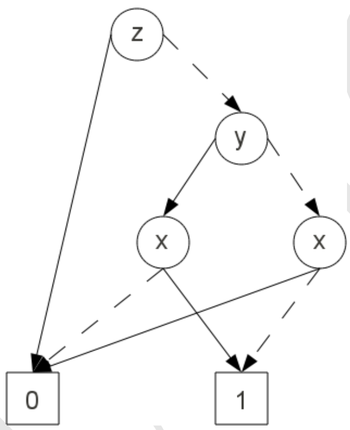
(b) (2 Punkte) Gibt es eine Variablenordnung, die ein kleineres OBDD erzeugt? Falls ja, zeichne das entsprechende OBDD. Falls nein, weshalb nicht?

# Lösung

(a) Das OBDD und seine Vereinfachung sehen wie folgt aus




(b) Die Variablenordnung $z < y < x$ ergibt folgendes kleiners OBDD




# Freiwillige Aufgaben

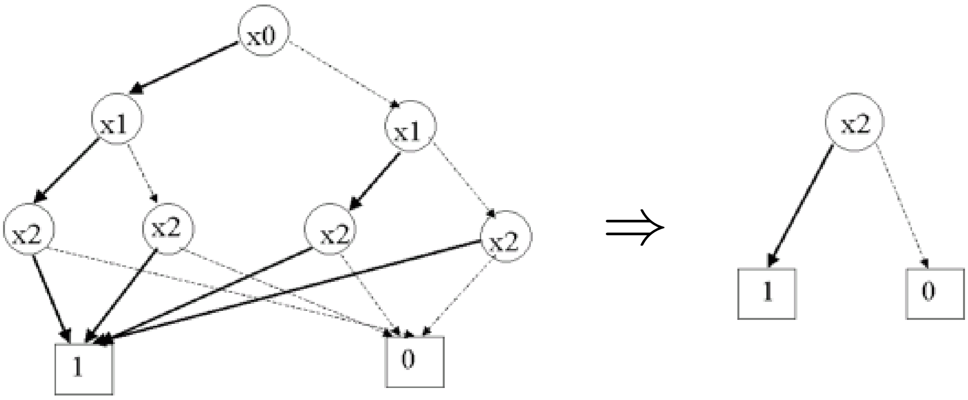
## Ordered Binary Decision Diagrams

Stelle die folgende Funktion $y(x_0, x_1, x_2)$ als OBDD zur Ordnung $x_0 < x_1 < x_2$ dar und vereinfache dieses anschliessend.

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $y(x_0, x_1, x_2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Lösung

Das OBDD und seine Vereinfachung sehen wie folgt aus




### Quine und McCluskey

Vereinfache die Funktion

$$f(x, y, z) = xy\neg z + x\neg y\neg z + xyz + x\neg yz$$

nach dem Verfahren von Quine und McCluskey.

## Lösung

Wir beginnen mit

| | | |
|---|---|---|
| 0 | $xyz$ | 7 |
| 1 | $xy\neg z$ | 6 |
| | $x\neg yz$ | 5 |
| 2 | $x\neg y\neg$ z | 4 |

Die Anwendung der Resolutionsregel ergibt

| | | |
|---|---|---|
| 0 | $xy*$ | 7, 6 |
| | $x * z$ | 7, 5 |
| 1 | $x * \neg$ z | 6, 4 |
| | $x\neg y*$ | 5, 4 |

und eine zweite Anwendung der Resolutionsregel ergibt

| | | |
|---|---|---|
| 0 | $x * *$ | 4, 5, 6, 7 |

Es ist somit offensichtlich, dass die minimale Darstellung durch

$$f(x, y, z) = x$$

gegeben ist.