1 Mengenlehre

Wie es der Name bereits sagt, bilden Relationen das Grundgerüst relationaler Datenbanken. Um formal präzise über Eigenschaften relationaler Datenbanken sprechen zu können, ist es somit wichtig, das Konzept einer Relation im mathematischen Sinn zu verstehen.

Deshalb beginnen wir mit einer kurzen Repetition der wichtigsten Begriffe der Mengenlehre. Wir beschreiben allgemein, wie Mengen gebildet werden können und definieren einige Operationen auf Mengen. Relationen sind dann spezielle Mengen, auf denen weitere Operationen definiert und ausgeführt werden können. Wir werden dabei an ein paar Stellen, z. B. bei der Definition der Sprache oder beim kartesischen Produkt, von der klassischen mathematischen Mengenlehre abweichen. Dadurch wird die Theorie etwas einfacher und die mathematischen Definitionen entsprechen besser den tatsächlichen Konzepten relationaler Datenbanken. Die Begriffe, welche wir hier einführen, bilden die Grundlage, um später das relationale Modell exakt zu beschreiben. Dieses Kapitel dient auch dazu, die Notation festzulegen.

1.1 Objekte und Mengen

Wir verwenden eine zwei-sortige Sprache, um die Theorie relationaler Datenbanken zu entwickeln. Das heisst, wir unterscheiden zwei Arten von Entitäten: *Objekte* und *Mengen*. Wir benutzen Kleinbuchstaben $a, b, c, \ldots$ um Objekte zu bezeichnen und Grossbuchstaben $A, B, C, \ldots$ um Mengen zu bezeichnen.

Definition 1.1. Objekte sind entweder

1. *atomare Objekte*, d. h. unteilbare Objekte ohne interne Struktur oder
2. *n-Tupel* der Form $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, wobei a_1 bis a_n Objekte sind.

T. Studer, *Relationale Datenbanken*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-58976-2_1

Wir spezifizieren die atomaren Objekte hier nicht näher, sondern nehmen einfach an, dass gewisse atomare Objekte existieren.

Wir verwenden den Begriff n-Tupel nur für $n \geq 1$. Sei $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ ein n-Tupel, dann nennen wir a_i die *i-te Komponente* von a. Spielt bei einem n-Tupel die Anzahl der Komponenten keine Rolle (oder ist sie klar aus dem Kontext), so sprechen wir einfach von einem *Tupel*. Die Komponenten eines Tupels sind geordnet.

Mit Hilfe der Projektionsfunktion $\pi_i(a)$ können wir die i-te Komponente aus einem Tupel a extrahieren. Wir definieren für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $1 \leq i \leq n$:

$$\pi_i(a) := a_i.$$

Beispiel 1.2. Seien a, b und c Objekte. Dann sind auch

$$(a, a, b) \quad \text{sowie} \quad ((a, a, b), c)$$

Objekte. Dabei ist (a, a, b) ein 3-Tupel bei dem die erste und zweite Komponente identisch sind. Das Objekt $((a, a, b), c)$ ist ein 2-Tupel, dessen erste Komponente ein 3-Tupel ist.

Definition 1.3. Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei n-Tupel. Es gilt

$$a = b \qquad \text{g.d.w.} \qquad a_i = b_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Das heisst, zwei n-Tupel sind genau dann gleich, wenn Gleichheit für alle Komponenten gilt.

Definition 1.4. Eine *Menge* ist eine ungeordnete Kollektion von Objekten. Falls das Objekt a zu einer Menge M gehört, sagen wir a ist ein *Element von A* und schreiben $a \in M$. Analog schreiben wir $a \notin M$ um auszudrücken, dass a nicht zur Menge M gehört. Eine endliche Menge M kann durch Aufzählen ihrer Elemente beschrieben werden. So besteht beispielsweise die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ genau aus den Elementen a, b, c und d. Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die *leere Menge*, welche keine Elemente enthält.

Bei der Beschreibung einer Menge geht es ausschliesslich um die Frage, *welche Elemente in ihr enthalten sind*. Es wird nicht danach gefragt, ob ein Element mehrmals enthalten ist oder ob es eine Reihenfolge unter den Elementen gibt. Das heisst,

$$\{b, b, a, c, d\} \qquad \text{und} \qquad \{a, b, c, d, d, d\}$$

beschreiben dieselbe Menge.

Annahme 1.5 *Die Klasse der Objekte und die Klasse der Mengen sind disjunkt.*

Dies bedeutet, dass Mengen keine Objekte sind. Somit kann eine Menge nicht Element einer (anderen) Menge sein. Für Mengen A und B ist also $A \in B$ nicht möglich.

Wir treffen diese Annahme, damit wir uns nicht um Paradoxien der Mengenlehre kümmern müssen, siehe Bemerkung 1.14 weiter unten.

Definition 1.6. Zwei Mengen sind *gleich*, falls sie dieselben Elemente enthalten. Formal heisst das

$$A = B \qquad \text{g.d.w.} \qquad \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Statt A und B sind gleich sagen wir auch, A und B sind *identisch*.

Anmerkung 1.7. Das Symbol $\forall$ heisst *Allquantor* und bedeutet *für alle*. Somit können wir die obige Formel

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

als

$$\text{für alle } x \text{ gilt } (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

lesen. Wir werden auch das Symbol $\exists$ verwenden. Dieses Symbol heisst *Existenzquantor* und bedeutet *es gibt*.

Definition 1.8. Eine Menge A heisst *Teilmenge* einer Menge B (wir schreiben dafür $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch ein Element von B ist. Das heisst

$$A \subseteq B \qquad \text{g.d.w.} \qquad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

A heisst *echte* Teilmenge von B (in Zeichen $A \subsetneq B$), falls

$$A \subseteq B \quad \text{und} \quad A \neq B.$$

Anmerkung 1.9. Für zwei Mengen A und B gilt somit

$$A = B \qquad \text{g.d.w.} \qquad A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

Bisher haben wir noch kein Prinzip gesehen, das die Existenz von Mengen garantiert. Um neue Mengen zu bilden, führen wir nun das Schema der *Komprehension* ein. Dazu benötigen wir den Begriff eines Prädikats. Ein Prädikat $\varphi(x)$ beschreibt eine Eigenschaft, welche Objekten zu- oder abgesprochen werden kann.[1] Der Ausdruck $\varphi(a)$ sagt, dass das Objekt a die durch $\varphi(x)$ beschriebene Eigenschaft hat. Wir sagen dann, a erfüllt φ.

Annahme 1.10 *Für jedes Prädikat $\varphi(x)$ gibt es eine Menge A, so dass für alle Objekte x gilt*

$$x \in A \qquad \text{g.d.w.} \qquad \varphi(x).$$

Wir verwenden folgende Schreibweise, um eine durch Komprehension gebildete Menge zu definieren

$$A := \{x \mid \varphi(x)\}$$

und sagen *A ist die Menge von allen x, welche φ erfüllen.*

Die folgenden drei Beispiele zeigen, wie mit dem Schema der Komprehension Mengen von Objekten gebildet werden können.

Beispiel 1.11. Sei $\varphi(x)$ das Prädikat

$$x \text{ ist eine Person mit dem Vornamen Tom.}$$

Dann ist $A := \{x \mid \varphi(x)\}$ die Menge aller Personen mit dem Vornamen Tom.

Beispiel 1.12. Sei $\varphi(x)$ das Prädikat

$$x \text{ ist ein Auto der Marke VW oder Audi.}$$

Dann ist $A := \{x \mid \varphi(x)\}$ die Menge aller VWs und Audis

Beispiel 1.13. Die Menge

$$A := \{x \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2y\}$$

ist die Menge derjenigen x für die es eine natürliche Zahl y gibt mit $x = 2y$. Das heisst, A ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen.

[1] Wir können an dieser Stelle unpräzise sein und offen lassen, in welcher Sprache Prädikate formuliert werden. Wir erlauben sogar umgangssprachliche Prädikate.

Anmerkung 1.14. In der üblichen mathematischen Mengenlehre ist das Schema der (uneingeschränkten) Komprehension nicht zulässig, da es zu Widersprüchen führt, wie z. B. der Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten

$$R := \{x \mid x \notin x\}.$$

Für diese Menge gilt

$$R \in R \qquad \text{g.d.w.} \qquad R \in \{x \mid x \notin x\} \qquad \text{g.d.w.} \qquad R \notin R,$$

was unmöglich ist.

In unserem Ansatz verhindert die Annahme 1.5 die obige Paradoxie. Der Ausdruck $x \notin x$ ist syntaktisch nicht erlaubt, da die Element-Beziehung nur zwischen Objekten und Mengen ausgedrückt werden kann, aber nicht zwischen zwei Mengen oder zwischen zwei Objekten.

1.2 Operationen auf Mengen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige grundlegende Operationen, um aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden.

Definition 1.15. Die *Vereinigung* $A \cup B$ von zwei Mengen A und B besteht aus allen Objekten, die Element von A oder Element von B (oder auch von beiden) sind. Das heisst

$$x \in A \cup B \qquad \text{g.d.w.} \qquad x \in A \text{ oder } x \in B.$$

Definition 1.16. Die *Differenz* $A \setminus B$ von zwei Mengen A und B besteht aus allen Elementen von A, die nicht Element von B sind. Das heisst

$$x \in A \setminus B \qquad \text{g.d.w.} \qquad x \in A \text{ und } x \notin B.$$

Definition 1.17. Der *Schnitt* $A \cap B$ von zwei Mengen A und B besteht aus allen Objekten, die sowohl Element von A als auch Element von B sind. Das heisst

$$x \in A \cap B \qquad \text{g.d.w.} \qquad x \in A \text{ und } x \in B.$$

Anmerkung 1.18. Die Vereinigung, die Differenz und der Schnitt zweier Mengen existieren (als neue Mengen), da sie durch das Schema der Komprehension gebildet werden können.

Das folgende Lemma besagt, dass die Schnitt-Operation auch mit Hilfe der Differenz ausgedrückt werden kann.

Lemma 1.19. *Seien A und B zwei Mengen. Dann gilt*

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Beweis. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$$x \in A \cap B$$

$$x \in A \text{ und } x \in B$$

$$x \in A \text{ und } (x \notin A \text{ oder } x \in B)$$

$$x \in A \text{ und nicht } (x \in A \text{ und } x \notin B)$$

$$x \in A \text{ und nicht } x \in (A \setminus B)$$

$$x \in A \text{ und } x \notin (A \setminus B)$$

$$x \in A \setminus (A \setminus B)$$

Damit gilt $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. □

1.3 Relationen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff einer Relation ein und definieren das kartesische Produkt.

Definition 1.20. Eine Menge R heisst *n-stellige* (oder *n-äre*) *Relation* über Mengen $A_1, \ldots, A_n$, falls

$$R \subseteq \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \text{ und } \cdots \text{ und } x_n \in A_n\}.$$

Für eine n-stellige Relation R über Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt somit: Jedes Element von R ist ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in A_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 1.21. Wir verwenden eine Relation über Mengen $A_1, \ldots, A_n$, um die Beziehung zwischen Objekten dieser Mengen zu beschreiben. Sei `Personen` die Menge

`{Ann, Bob, Tom}`

und `Autos` die Menge

$$\{\texttt{Audi},\ \texttt{VW}\}.$$

Durch eine Relation über `Personen` und `Autos` können wir ausdrücken, welche Person ein Auto welcher Marke fährt. Wir finden, dass

$$P := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \texttt{Personen} \text{ und } x_2 \in \texttt{Autos}\}$$

die Menge

$$\begin{aligned}\{\,&(\texttt{Ann}, \texttt{Audi}),\ (\texttt{Ann}, \texttt{VW}),\ (\texttt{Bob}, \texttt{Audi}),\ (\texttt{Bob}, \texttt{VW}),\\ &(\texttt{Tom}, \texttt{Audi}),\ (\texttt{Tom}, \texttt{VW})\,\}\end{aligned}$$

definiert. Jede Teilmenge von P ist nun eine Relation über `Personen` und `Autos`. Beispielsweise können wir folgende Relationen über `Personen` und `Autos` definieren:

$$\begin{aligned}R_1 &:= \{\,(\texttt{Ann}, \texttt{Audi}),\ (\texttt{Bob}, \texttt{VW})\,\}\\ R_2 &:= \{\,(\texttt{Ann}, \texttt{Audi}),\ (\texttt{Ann}, \texttt{VW})\,\}\\ R_3 &:= \emptyset\end{aligned}$$

Die Relation R_1 besagt, dass `Ann` einen `Audi` fährt und `Bob` einen `VW`. Weiter besagt R_1, dass `Tom` kein Auto fährt. Wir nehmen nämlich an, dass eine Relation die *ganze* Information über die Beziehung darstellt. Somit folgt bspw. aus $(\texttt{Bob}, \texttt{Audi}) \notin R_1$, dass `Bob` *keinen* `Audi` fährt. Im Fachchinesisch heisst diese Annahme *closed world assumption*.

Natürlich kann eine Relation auch darstellen, dass eine Person mehrere Autos fährt. R_2 ist ein Beispiel dazu. Als letztes Beispiel besagt R_3, dass keine Person ein Auto fährt.

Definition 1.22. Für eine m-stellige Relation R und eine n-stellige Relation S definieren wir das *kartesische Produkt* $R \times S$ als $(m+n)$-stellige Relation durch

$$R \times S := \{(x_1, \ldots, x_{m+n}) \mid (x_1, \ldots, x_m) \in R \text{ und } (x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \in S\}.$$

Das kartesische Produkt von R und S besteht aus allen möglichen Kombinationen von Elementen aus R mit Elementen aus S. Besteht R aus h-vielen Elementen und S aus k-vielen Elementen, so enthält das kartesische Produkt $(h \cdot k)$-viele Elemente.

Beispiel 1.23. Sei R die 1-stellige Relation $R = \{(a), (b), (c)\}$ und S die 2-stellige Relation $S = \{(1, 5), (2, 6)\}$. Dann ist $R \times S$ die 3-stellige Relation

$$R \times S = \{(a, 1, 5),\ (a, 2, 6),\ (b, 1, 5),\ (b, 2, 6),\ (c, 1, 5),\ (c, 2, 6)\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass das kartesische Produkt assoziativ ist.

Lemma 1.24. *Seien R, S und T Relationen. Es gilt*

$$(R \times S) \times T = R \times (S \times T).$$

Diese Eigenschaft erlaubt es uns, die Klammern wegzulassen und einfach $R \times S \times T$ zu schreiben.

Anmerkung 1.25. Definition 1.22 liefert ein *flaches* kartesisches Produkt. Das bedeutet, dass das kartesische Produkt einer m-stelligen mit einer n-stelligen Relation eine $(m + n)$-stellige Relation ist. Üblicherweise wird in der mathematischen Mengenlehre das kartesische Produkt anders definiert, nämlich durch

$$R \times S := \{(a, b) \mid a \in R \text{ und } b \in S\}. \tag{1.1}$$

Damit ist $R \times S$ immer eine 2-stellige Relation. Für R und S aus Beispiel 1.23 finden wir dann

$$\begin{aligned} R \times S := \{&((a), (1, 5)),\ ((a), (2, 6)),\ ((b), (1, 5)),\ ((b), (2, 6)),\\ &((c), (1, 5)),\ ((c), (2, 6))\}. \end{aligned}$$

Die Elemente aus $R \times S$ sind 2-Tupel (Paare) bestehend aus einem 1-Tupel und einem 2-Tupel.

Im Gegensatz zu unserem kartesischen Produkt erfüllt das Produkt aus (1.1) das Assoziativgesetzt nicht.

Weiterführende Literatur[2]

1. Feferman, S.: A language and axioms for explicit mathematics. In: Crossley, J. (Hrsg.) Algebra and Logic. Lecture Notes in Mathematics, Bd. 450, S. 87–139. Springer, Berlin/New York (1975)
2. Friedrichsdorf, U., Prestel, A.: Mengenlehre für den Mathematiker. Vieweg, Braunschweig (1985). https://doi.org/10.1007/978-3-322-89856-2
3. Jäger, G., Studer, T.: Extending the system T_0 of explicit mathematics: the limit and Mahlo axioms. Ann. Pure Appl. Logic **114**, 79–101 (2002)
4. Jech, T.: Set Theory. Springer Monographs in Mathematics, 3. Aufl. Springer, Berlin (2003). https://doi.org/10.1007/3-540-44761-X

[2] Das Buch von Friedrichsdorf und Prestel [2] bietet eine gute und einfache Einführung in die mathematische Mengenlehre. Jech [4] liefert eine ausführliche Darstellung der Mengenlehre, welche auch weiterführende Themen behandelt. Eine zwei-sortige Sprache, wie wir sie in diesem Kapitel eingeführt haben, wird beispielsweise auch in Systemen der expliziten Mathematik [1, 3] eingesetzt, um Objekte und Mengen zu unterscheiden und so allgemeine Komprehensionsprinzipien zu ermöglichen.