Lineare Algebra 1 & 2 – HS 2020 & FS 2021
Vorlesungsstand

Prof.dr.ir. Jan Draisma (nach Dr. Pierre-Marie Poloni)

Ursprung und Zweck dieses Dokuments

Dieses Dokument wurde 2016-2017 von Herrn Dr. Pierre-Marie Poloni erfasst und wird 2020-2021 nur marginal von mir überarbeitet. Es wird wöchentlich ergänzt mit der Theorie für die nächste(n) Woche(n). Am Ende der beiden Semester wird es alle wichtigen Sätze aus beiden Vorlesungen enthalten, nicht aber die Beweise. Dafür müssen Sie in die Vorlesung kommen und/oder die empfohlene Literatur studieren (siehe unten). Das Verstehen und Rekonstruieren dieser Beweise ist ein wichtiger—wenn nicht sogar der wichtigste!—Aspekt der Vorlesung. Anders gesagt:

Vorsicht!

Dieses Dokument ist kein Vorlesungsskript und kann Vorlesungspräsenz und Vorlesungsmitschrift sicher nicht ersetzen.

Empfohlene Literatur

- *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger*, Gerd Fischer (Vieweg+Teubner Verlag).
- *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Max Koecher (Springer Verlag).
- *Algebra*, Michael Artin (Birkhäuser Verlag).

(Die Vorlesung stützt sich besonders auf das Lehrbuch von Fischer.)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Vektorräume

I.0 Mengenoperationen

Definition I.0.1. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (*Elemente* genannt) zu einem Ganzen.

Man schreibt „$x \in M$“, wenn x ein Element der Menge M ist.

Man bezeichnet mit $\emptyset$ die leere Menge.

Definition I.0.2. Seien A und B zwei Mengen. Man sagt, dass A eine *Teilmenge* von B ist (in Zeichnen $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Man sagt, dass A und B *gleich* sind (in Zeichnen $A = B$), wenn sie genau dieselben Elemente haben.

Definition I.0.3. Seien A und B zwei Mengen.

(1) Die *Vereinigung* von A und B ist $A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$.

(2) Der *Durchschnitt* von A und B ist $A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$.

(3) Die *Differenz* von A und B ist $A \setminus B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$.

Definition I.0.4. Das *kartesische Produkt* von endlich viele Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist die Menge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ aller geordneten n-Tupeln $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Sind A eine Menge und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, so setzen wir

$$A^n \coloneqq \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\text{mal}}.$$

I.1 Gruppen, Körper

Definition I.1.1. Eine *Gruppe* ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, für die folgende Regeln gelten:

(G1) $*$ ist assoziativ, d.h.: Für alle $a, b, c \in G$ gilt

$$(a * b) * c = a * (b * c) =: a * b * c.$$

(G2) Es gibt ein Element $e_G \in G$, *neutrales Element* genannt, für das gilt:

$$e_G * a = a * e_G = a \quad \text{für alle } a \in G.$$

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a_{\text{inv}} \in G$, *inverses Element* zu a genannt, für das gilt:

$$a_{\text{inv}} * a = a * a_{\text{inv}} = e_G.$$

Die Gruppe heisst *kommutativ* oder *abelsch*, falls $a*b = b*a$ für alle $a, b \in G$.

Bemerkung I.1.2. Für jede Gruppe $(G, *)$ gelten folgende Aussagen:

(1) Das neutrale Element e_G ist eindeutig bestimmt.

(2) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element.

(3) Ist $a * b = e_G$, so sind $a_{\text{inv}} = b$ und $b_{\text{inv}} = a$.

(4) Es gelten $(a_{\text{inv}})_{\text{inv}} = a$ und $(a * b)_{\text{inv}} = b_{\text{inv}} * a_{\text{inv}}$ für alle $a, b \in G$.

(5) Die Gleichung $a * x = b$ ist für alle $a, b \in G$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist $x = a_{\text{inv}} * b$.

Definition I.1.3. Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : G \times G \to G \quad \text{und} \quad \cdot : G \times G \to G,$$

für die folgende Regeln gelten:

(K1) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe. (Wir bezeichnen mit 0_K das neutrale Element bzg. der $+$ und mit $-a$ das Inverse zu $a \in K$. Weiter schreiben wir „$a - b$“ für „$a + (-b)$“.)

(K2) $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe. (Wir bezeichnen mit 1_K das neutrale Element bzg. der $\cdot$ und mit a^{-1} das Inverse zu $a \in K$.)

(K3) Für alle $a, b, c \in K$ gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Bemerkung I.1.4. Für jeden Körper K gelten folgende Aussagen:

(1) $1_K \neq 0_K$. Also hat jeder Körper mindestens zwei Elemente.

(2) $0_K \cdot a = a \cdot 0_K = 0_K$ für alle $a \in K$.

(3) Aus $a \cdot b = 0_K$ folgt $a = 0_K$ oder $b = 0_K$.

(4) $(-1_K) \cdot a = -a$ für alle $a \in K$. Somit $a \cdot (-b) = -a \cdot b$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$.

(5) Aus $a \cdot b = a \cdot c$ mit $a \neq 0_K$ folgt $b = c$.

Lemma I.1.5. Sei K ein endlicher Körper. Dann gibt es eine ganze Zahl $n \geq 2$, so dass

$$\underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n\text{-mal}} = 0_K.$$

Die kleinste solche $n \geq 2$ ist sogar eine Primzahl, *Charakteristik* von K genannt.

I.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b') \text{ und } (a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba').$$

Damit ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper. Wir nennen ihn *Körper der komplexen Zahlen* und bezeichnen ihn mit $\mathbb{C}$.

Den Unterkörper $\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ kann man mit $\mathbb{R}$ identifizieren. Wir bezeichnen $\mathbf{i} = (0, 1) \in \mathbb{C}$. Es gilt $\mathbf{i}^2 = (-1, 0) = -1$.

Definition I.2.1 (Algebraische Form)**.** Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung $z = a + \mathbf{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wir nennen $\mathrm{Re}(z) := a$ den Realteil und $\mathrm{Im}(z) := b$ den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = a + \mathbf{i}b$.

Definition I.2.2. Der *Betrag* von $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ ist $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die *konjugierte* komplexe Zahl zu $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z} := a - \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$.

Bemerkung I.2.3. Für alle $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ und alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

- $z + \overline{z} = 2a$, somit $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{i}\mathbb{R}$.
- $z - \overline{z} = 2\mathbf{i}b$, somit $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- Ist $z \neq 0$, so ist $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \mathbf{i}\dfrac{-b}{a^2+b^2}$.
- $|z| \geq 0$. Ausserdem gilt $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).

Definition I.2.4 (Polarform)**.** Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ gibt es ein eindeutig bestimmten Winkel $\theta \in [0, 2\pi[$, *Argument* von z gennant, mit

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} := |z|(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)).$$

Theorem I.2.5 (Additionstheoreme)**.** Für alle $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta+\varphi)}.$$

Somit gelten

$$(\rho\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})^{-1} = \rho^{-1}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}$$

für alle $\rho\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

Lemma I.2.6. Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich $z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Korollar I.2.7. Für jede komplexe Zahl $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und jede ganze Zahl $n \geq 1$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$.

Diese sind nämlich $z = \sqrt[n]{\rho} \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, wobei $a = \rho\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ die Polarform von a ist.

I.3 Vektorräume, Untervektorräume, Erzeugendensysteme

Definition I.3.1. Sei K ein Körper. Ein *Vektorraum* über K (man sagt auch K-Vektorraum) ist eine Menge V mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w \qquad \text{(Addition genannt)}$$

und einer äusseren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \qquad \text{(skalare Multiplikation genannt)}$$

für die folgende Regeln erfüllt sind:

(V1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

(V2) Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gelten

- (a) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$.
- (b) $1_K \cdot v = v$.
- (c) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.
- (d) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.

Bemerkung I.3.2. Ist V ein K-Vektorraum, so gelten folgende Aussagen:

(1) $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$.

(2) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ für alle $\lambda \in K$.

(3) $\lambda \cdot v = 0_V \Leftrightarrow (\lambda = 0_K$ oder $v = 0_V)$.

(4) $(-1_K) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

Definition I.3.3. Eine Teilmenge W eines K-Vektorraums V ist ein *Untervektorraum* von V, wenn gelten:

(UV1) $W \neq \emptyset$.

(UV2) W ist abgeschlossen gegenüber der Addition, d.h.:
Sind $w_1, w_2 \in W$, so ist $w_1 + w_2 \in W$.

(UV3) W ist abgeschlossen gegenüber der skalaren Multiplikation, d.h.:
Sind $w \in W$ und $\lambda \in K$, so ist $\lambda \cdot w \in W$.

Bemerkung I.3.4. Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist zusammen mit der induzierten Addition und skalaren Multiplikation selber ein K-Vektorraum.

Lemma I.3.5. Sei V ein Vektorraum und seien W_1, W_2 Unterräume von V. Dann gelten:

(a) $W_1 \cap W_2$ ist ein Unterraum von V.

(b) $W_1 \cup W_2$ ist kein Unterraum von V, ausser wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

Definition I.3.6. Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n \in V$ gegeben. Ein Vektor $v \in V$ der Form

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

heisst *Linearkombination* von $v_1, \dots, v_n$.

Definition I.3.7. Sei V ein K-Vektorraum und sei $A \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Wir setzen

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_K(A) &:= \{\text{alle } \textbf{endlichen} \text{ Linearkombinationen von Vektoren aus } A\} \\ &= \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists v_1, \dots v_n \in A, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ mit} \\ &\qquad v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n\}. \end{aligned}$$

und $\operatorname{span}_K(\emptyset) := \{0_V\}$. Die Menge A heisst ein *Erzeugendensystem* von $\operatorname{span}_K(A)$.

Lemma I.3.8. Sei V ein K-Vektorraum und sei $A \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist die Menge $\operatorname{span}_K(A)$ ein Unterraum von V. Er ist sogar der kleinste Unterraum von V, der A enthält, d.h. es gilt:
Ist $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $A \subseteq W$, so ist $\operatorname{span}_K(A) \subseteq W$.

Lemma I.3.9 (Austauschlemma). Seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in einem K-Vektorraum V und sei $w \in V$, so dass w eine Linearkombination $w = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$ mit $\lambda_1 \neq 0$ ist. Dann gilt

$$\operatorname{span}(w, v_2, \dots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_n, w).$$

I.4 Basen, Dimension

Definition I.4.1. Sei V ein K-Vektorraum.

- Eine endliche Familie $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren aus V heisst *linear unabhängig* (über K), wenn gilt:

  Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ Skalaren mit $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_r \cdot v_r = 0_V$, so folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_K$.

- Die leere Familie ist linear unabhängig.

- Eine beliebige Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V heisst *linear unabhängig*, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

Lemma I.4.2. Äquivalent sind:

(1) Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig über K.

(2) Jeder Vektor $v \in \operatorname{span}_K((v_i)_{i \in I})$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination der Vektoren der Familie darstellen.

Bemerkung I.4.3. In jedem K-Vektorraum V gelten:

(1) Ein einziger Vektor $v \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn $v = 0_V$.

(2) Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

(3) Gehört der Nullvektor zu einer Familie, so ist sie linear abhängig.

(4) Kommt der gleiche Vektor in einer Familie mehrmals vor, so ist sie linear abhängig.

(5) Eine Familie $(v_1, \dots, v_r)$ von $r \geq 2$ Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn einer davon Linearkombination der anderen ist.

Definition I.4.4. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in einem K-Vektorraum V heisst *Basis* von V, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:

(a) Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

(b) Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

Lemma I.4.5. Ein endliches Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$ eines Vektorraums V ist genau dann eine Basis von V, wenn es unverkürzbar ist. D.h., wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Familie $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ kein Erzeugendensystem mehr ist.

Korollar I.4.6. Jeder endlicherzeugte Vektorraum besitzt eine (endliche) Basis.

Korollar I.4.7 (Basisauswahlsatz). Man kann sogar aus jedem endlichen Erzeugendensystem eine Basis auswählen.

Satz I.4.8. Sei V ein endlicherzeugter Vektorraum und seien $L \subseteq V$ eine linear unabhängige Familie von V, $B \subseteq V$ eine Basis von V und $S \subseteq V$ ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann gilt $|L| \leq |B| \leq |S|$. Insbesondere sind L und B endlich.

Korollar I.4.9. Ist V ein endlicherzeugter K-Vektorraum, so haben alle Basen von V gleich viele Elemente.
Definition: Diese Anzahl nennt man *Dimension* von V über K. Der Vektorraum V heisst *endlichdimensional* falls V eine endliche Basis hat, und sonst *unendlichdimensional*.

Korollar I.4.10. Ist $\dim(V) = n$ endlich, so ist jede Familie von $n + 1$ Vektoren von V linear abhängig.

Satz I.4.11 (Basisergänzungssatz). Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n < +\infty$ und seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig. Dann gilt:

(1) Es gibt Vektoren $w_{r+1}, \ldots, w_n \in V$, so dass $(v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n)$ eine Basis von V ist.

(2) Ist $(w_1, \ldots, w_m)$ ein Erzeugendensystem von V gegeben, so kann man sogar $i_1, \ldots, i_{n-r}$ finden, so dass $(v_1, \ldots, v_r, w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n-r}})$ eine Basis von V ist.

Korollar I.4.12. Sei V ein Vektorraum von Dimension $n < +\infty$. Für je n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.

(2) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V.

(3) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

Lemma I.4.13. Ein Vektorraum ist genau dann unendlichdimensional, wenn er eine unendliche linear unabhängige Familie besitzt.

Lemma I.4.14. Ist W ein Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so ist W auch endlichdimensional. Weiter gilt $\dim(W) \leq \dim(V)$, mit Gleichheit genau dann, wenn $W = V$ ist.

I.5 Summen von Untervektorräumen

Definition I.5.1. Seien $W_1, \ldots, W_r$ endlich viele Unterräume von einem K-Vektorraum V. Ihre *Summe* ist der Unterraum von V, der durch

$$W_1 + \cdots + W_r := \{w_1 + \cdots + w_r \mid w_i \in W_i\} = \operatorname{span}_K(W_1 \cup \cdots \cup W_r)$$

definiert ist.

Bemerkung I.5.2. Es gilt $\dim(W_1 + \cdots + W_r) \leq \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_r)$.

Satz I.5.3 (Dimensionsformel).
Sind $W_1, W_2 \subseteq V$ endlichdimensionale Unterräume, so gilt:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Definition I.5.4. Seien $W_1, \ldots, W_r$ Unterräume von einem K-Vektorraum V. Die Summe $W_1 + \cdots + W_r$ nennen wir *direkt*, wenn jeder Vektor v von $W_1 + \cdots + W_r$ eindeutig darstellbar als $v = w_1 + \cdots + w_r$ mit $w_i \in W_i$, $1 \leq i \leq r$, ist. Wir bezeichnen eine direkte Summe mit $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Lemma I.5.5. Für Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Die Summe $W_1 + \cdots + W_r$ ist direkt.

(2) Ist für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ eine Basis $(w_1^{(i)}, \ldots, w_{d_i}^{(i)})$ von W_i gegeben, so ist $(w_1^{(1)}, \ldots, w_{d_1}^{(1)}, \ldots, w_1^{(r)}, \ldots, w_{d_r}^{(r)})$ eine Basis von $W_1 + \cdots + W_r$.

(3) $\dim(W_1 + \cdots + W_r) = \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_r)$.

Behauptung I.5.6. Eine Summe $W_1 + W_2$ von zwei Unterräumen ist genau dann direkt, wenn $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist.

I.6 Das Eliminationsverfahren von Gauss

Definition I.6.1. Wir betrachten ein *lineares Gleichungssystem* über einem Körper K mit m Gleichungen für n Unbekannte $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dieses System schreiben wir auch als

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Spaltenvektoren sind und wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$$

eine $m \times n$-Matrix ist. Die Matrix A nennen wir *Koeffizientenmatrix* des linearen Systems. Die $m \times (n+1)$-Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

heisst *erweiterte Koeffizientenmatrix* des Systems.

Definition I.6.2. Eine $m \times n$-Matrix ist in *Zeilenstufenform*, wenn sie die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind:

- $r \in \{0, 1 \ldots, m\}$ ist eine natürliche Zahl.
- Die Einträge $a_{1j_1}, \ldots, a_{r,j_r}$ sind nicht Null, *Pivots* genannt.
- $*$ steht für ein beliebiges Element von K.
- In jeder Zeile stehen links vor a_{i,j_i} nur Nullen.
- In jeder Spalte stehen unterhalb von einem Pivot a_{i,j_i} nur Nullen.
- Die letzten $n - r$ Zeilen sind Nullzeilen.

Definition I.6.3. Auf den Zeilen einer Matrix benutzen wir drei Arten von *elementaren Zeilenoperationen*.

Typ 1. Vertauschung von zwei Zeilen.

Typ 2. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.

Typ 3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Satz I.6.4.

(a) Sei $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems und sei $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ aus $(A|b)$ durch endlich viele elementare Zeilenoperationen entstanden. Dann haben die Systeme $Ax = b$ und $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ dieselben Lösungen.

(b) Mit Hilfe des Gauss-Verfahren kann man jede Matrix durch elementare Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform bringen.

Bemerkung I.6.5. Seien $v_1, \ldots, v_m \in K^n$. Wir betrachten die $m \times n$-Matrix, deren Zeilen die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ sind:

$$A = \begin{pmatrix} -- \, v_1 \, -- \\ \vdots \\ -- \, v_m \, -- \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -- \, \widetilde{v}_1 \, -- \\ \vdots \\ -- \, \widetilde{v}_m \, -- \end{pmatrix}$ aus A durch endlich viele elementare Zeilenoperationen entstanden, so gilt $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \operatorname{span}(\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_m)$.

(b) Ist A in Zeilenstufenform, so sind die von Null verschiedenen Zeilen von A linear unabhängig. Somit bilden sie eine Basis von dem Unterraum $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) \subseteq K^n$.

Kapitel II

Lineare Abbildungen und Matrizen

II.0 Der Vektorraum der $m \times n$-Matrizen

Definition II.0.1. Für alle $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ in $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und alle $\lambda \in K$ setzen wir

$$A + B \coloneqq (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K) \text{ und } \lambda \cdot A \coloneqq (\lambda \cdot a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K).$$

Wir bezeichnen mit E_{ij} die Matrix von $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$, die ein $1 = 1_K$ an der Stelle (i, j) hat und deren anderen Einträgen alle Null sind.

Lemma II.0.2. Zusammen mit der obigen Addition und skalaren Multiplikation ist $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ein K-Vektorraum von Dimension $m \cdot n$. Die Elementarmatrizen E_{ij} mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$, *Standardbasis* genannt.

II.1 Der Vektorraum der linearen Abbildungen

Definition II.1.1. Seien V und W zwei Vektorräume über dem selben Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ nennen wir *linear* über K, falls sie mit der Addition und skalaren Multiplikation verträglich ist, d.h., falls gelten:

(L1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(L2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$.

Definition II.1.2.
- Eine lineare Abbildung nennt man auch *Homomorphismus* zwischen Vektorräumen. Man bezeichnet mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge aller K-linearen Abbildungen von V nach W.

- Ein bijektiver Homomorphismus nennt man *Isomorphsmus.*
- Ein Homomorphismus von V nach V nennt man *Endomorphismus.*

Behauptung II.1.3. Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ aller linearen Abbildungen zwischen K-Vektorräumen V und W ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$.

Lemma II.1.4. Seien V und W zwei Vektorräume über dem selben Körper K.

(1) Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, so gilt $f(0_V) = 0_W$.

(2) Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, so gilt

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$$

für alle Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und alle Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

(3) Jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ ist durch die Bilder der Vektoren einer Basis von V eindeutig bestimmt.

(4) Sei V endlich dimensional und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Seien $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren aus W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beispiel II.1.5. Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{cccccc} f_A : & K^n & \to & K^m & & \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

linear.

II.2 Koordinaten, Darstellungsmatrix

Definition II.2.1. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Sei $v \in V$. Die (eindeutig bestimmten) Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ nennen wir *Koordinaten* des Vektors v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Den Spaltenvektor $[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ nennen wir *Koordinatenvektor* von v bezüglich $\mathcal{B}$.

Bemerkung II.2.2. Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in K$ gelten

$$[v+v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad [\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

Satz II.2.3. Seien K-Vektorräume V mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und W mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ genau eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, so dass

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

Wir bezeichnen diese Matrix mit $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ und nennen sie *Darstellungsmatrix* von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Sie ist die einzige $m \times n$-Matrix die folgendes erfüllt:

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot [v]_{\mathcal{A}} \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Bemerkung II.2.4.

> In den Spalten von $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ stehen die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{A}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Bemerkung II.2.5. Für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und alle $\lambda \in K$ gelten

$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f+g) = \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) + \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g) \quad \text{und} \quad \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f).$$

II.3 Kern und Bild einer linearen Abbildung

Definition II.3.1. Das *Bild* und der *Kern* eines Homomorphismus f von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ sind die Mengen

$$\mathrm{Im}(f) := f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

und

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq W.$$

Lemma II.3.2. Für jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gelten:

(1) $\mathrm{Im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W mit $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(V)$.

(2) Ist $V' \subseteq V$ ein Unterraum, so ist $f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ein Unterraum von W von Dimension $\leq \dim(V')$.

(3) $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Unterraum von V.

(4) Ist $W' \subseteq W$ ein Unterraum, so ist $f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$ ein Unterraum von V.

Definition II.3.3. Der *Rang* einer linearen Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist die Dimension ihres Bildes:

$$\mathrm{rg}(f) := \dim_K \mathrm{Im}(f).$$

Satz II.3.4. (Rangsatz)
Für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $\dim(V)$ endlich gilt

$$\dim_K V = \dim_K \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f).$$

Satz II.3.5. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen V, W von Dimension $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ ist genau dann vom Rang r, wenn es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W gibt, so dass

$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)_{(r+(m-r))\times(r+(n-r))}$$

Bemerkung II.3.6. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $\dim_K W$ endlich. Dann gilt:

$$f \text{ surjektiv} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim_K W.$$

Lemma II.3.7. Für jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt

$$f \text{ injektiv} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}.$$

Korollar II.3.8. Für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mit $\dim_K V = \dim_K W$ gilt:

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv} \iff f \text{ bijektiv}.$$

Behauptung II.3.9. Ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ bijektiv, so ist ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear.

Satz II.3.10. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Dann gilt: f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $f(\mathcal{B}) := (f(v_i))_{i \in I}$ eine Basis von W ist.
Insbesondere haben isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension.

Korollar II.3.11. Zwei endlichdimensionale Vektorräume V und W über dem selben Körper K sind genau dann isomorph, wenn $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ gilt.

II.4 Affine Unterräume

Definition II.4.1. Eine Teilmenge X eines K-Vektorraums V heisst *affiner Unterraum*, wenn es einen Vektor $v \in V$ und einen Untervektorraum $W \subseteq V$ gibt, so dass $X = v + W := \{v + w \mid w \in W\}$ ist.

Lemma II.4.2. (1) Ist $X = v + W \subseteq V$ ein affiner Unterraum, so gilt $X = v' + W$ für alle $v' \in X$.

(2) Sind $X = v + W$ und $X' = v' + W'$ affine Unterräume von V, so gelten:

(a) $X \subseteq X' \iff (v \in X'$ und $W \subseteq W')$.

(b) $X = X' \iff (W = W'$ und $v - v' \in W)$.

(c) Ist $X \cap X' \neq \emptyset$, so ist $X \cap X'$ ein affiner Unterraum von V und es gilt $X \cap X' = x + (W \cap W')$ für alle $x \in X \cap X'$.

Definition II.4.3. Die Dimension eines affinen Unterraums $X = v + W$ ist definiert durch $\dim(X) := \dim_K(W)$.

- Ein affiner Unterraum von Dimension 1 heisst *affine Gerade*.
- Ein affiner Unterraum von Dimension 2 heisst *affine Ebene*.
- Ist $\dim(V) = n$ endlich, so nennen wir *affine Hyperebene* jeden affinen Unterraum von V, der Dimension $n - 1$ hat.

Definition II.4.4. Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix. Wir definieren $\mathrm{Ker}(A) := \mathrm{Ker}(f_A)$, $\mathrm{Im}(A) := \mathrm{Im}(f_A)$ und $\mathrm{rg}(A) := \dim_K(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}(f_A)$, wobei f_A die Abbildung $f_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$, bezeichnet.

Bemerkung II.4.5. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}_K\{\text{Spalten von } A\} \subseteq \mathbb{K}^m$.

Satz II.4.6. Seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix vom Rang r und $b \in K^m$ ein Spaltenvektor. Dann gelten:

(1) Die Lösungen $\mathrm{Lös}(A|0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $AX = 0$ bilden einen Untervektorraum von K^n von Dimension $n - r$.

(2) Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, so gilt $\mathrm{Lös}(A|b) = v + \mathrm{Lös}(A|0)$ für jede spezielle Lösung $v \in \mathrm{Lös}(A|b)$. Insbesondere ist dann $\mathrm{Lös}(A|b)$ ein affiner Unterraum von K^n von Dimension $n - r$.

(3) $\mathrm{Lös}(A|b) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathrm{Rang}(A|b) = \mathrm{Rang}(A)$.

Bemerkung II.4.7. Ist $\mathrm{Rang}(A|b) = \mathrm{Rang}(A) = n$, so besitzt das lineare Gleichungssystem $AX = b$ genau eine Lösung.

Behauptung II.4.8. Sei X ein affiner Unterraum von K^n von Dimension r. Dann ist X die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems von $n-r$ Gleichungen in K^n, d.h. es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}((n-r) \times n, K)$ und einen Spaltenvektor $b \in K^{n-r}$ mit $X = \mathrm{Lös}(A|b)$.

II.5 Multiplikation von Matrizen

Definition II.5.1. Das Produkt $C = A \cdot B$ der Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times s, K)$ ist die Matrix $C = (c_{ij})$ in $\mathrm{Mat}(m \times s, K)$, die durch

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s$$

definiert ist.

Vorsicht!.

- Im allgemeinen gilt $AB \neq BA$ für $n \times n$-Matrizen A und B.
- Es kann $AB = 0$ sein, obwohl A und B beide verschieden von der Nullmatrix sind.

Bemerkung II.5.2. Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ K-linear, so ist die Komposition $g \circ f : U \to W$ ebenfalls K-linear.

Behauptung II.5.3. Seien $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und seien $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$ Basen von U, V und W. Dann gilt

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{M}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3}(g) \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f).$$

Behauptung II.5.4. Für alle Matrizen $A, A' \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, $B, B' \in \mathrm{Mat}(n \times s, K)$ und $C \in \mathrm{Mat}(s \times r, K)$ gelten

(i) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ und $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$.

(ii) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

II.6 Invertierbare Matrizen

Definition II.6.1. Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ heisst *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gibt, so dass

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{E}_n.$$

Hierbei bezeichnet E_n die *Einheitsmatrix* in $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

Bemerkung II.6.2. Ist A invertierbar, so ist die Matrix B mit der Eingenschaft $A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{E}_n$ eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie mit A^{-1}.

Bemerkung II.6.3. Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V und W. Dann ist die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ invertierbar mit $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f^{-1})$.

Satz II.6.4. Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) A ist invertierbar.

(ii) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

(iii) $\mathrm{rg}(A) = n$.

(iv) Die lineare Abbildung $f_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ ist ein Isomorphismus.

Korollar II.6.5. Eine Matrix in $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spalten eine Basis von K^n bilden.

Korollar II.6.6. Für jede quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ sind folgende äquivalent:

$$\begin{aligned} A \text{ ist invertierbar } &\iff \exists B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K), BA = \mathrm{E}_n \\ &\iff \exists B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K), AB = \mathrm{E}_n. \end{aligned}$$

Bemerkung II.6.7. Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ invertierbar, so sind A^{-1} und $A \cdot B$ invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$ und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Definition II.6.8. Die Menge $\mathrm{GL}_n(K) := \{A \in \mathrm{M}(n \times n; K) \mid A \text{ invertierbar}\}$ zusammen mit der Multiplikation von Matrizen ist eine (nicht kommutative) Gruppe, *allgemeine lineare Gruppe* genannt.

Definition II.6.9. Für alle $n \geq 1$, alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ und alle $\lambda \in K^*$ nennen wir die folgenden $n \times n$-Matrizen *Elementarmatrizen*:

- $S_i(\lambda) := \mathrm{E}_n + (\lambda - 1)\mathrm{E}_{ii}$.
- $Q_{ij}(\lambda) := \mathrm{E}_n + \lambda \mathrm{E}_{ij}$.
- $P_{ij} := \mathrm{E}_n - \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} + \mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji}$.

Bemerkung II.6.10. Jede Linksmultiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix entspricht der Anwendung einer elementaren Zeilenoperation auf A.

Bemerkung II.6.11. Jede Elementarmatrix ist invertierbar. Ihre Inverse ist sogar eine Elementarmatrix vom selben Typ.

Satz II.6.12. Jede invertierbare Matrix ist ein endliches Produkt von Elementarmatrizen.

II.7 Koordinatentransformationen

Definition II.7.1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Basen von V. Wir nennen *Transformationsmatrix* (man sagt *Übergangsmatrix*) des Basiswechsels $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ die Matrix

$$\mathrm{T}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} := \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V).$$

Bemerkung II.7.2. Jede Transformationsmatrix ist invertierbar und jede invertierbare Matrix ist eine Transformationsmatrix.

Bemerkung II.7.3. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so gilt

$$[v]_{\mathcal{B}} = \mathrm{T}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{A}}$$

für alle $v \in V$.

Behauptung II.7.4 (Transformationsformel für Matrizen). Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ zwei Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums V und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ zwei Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums W. Für jedes $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt

$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \left(\mathrm{T}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}\right)^{-1}.$$

Korollar II.7.5. Für alle $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gilt

$$\mathrm{rg}(SAT) = \mathrm{rg}(A).$$

Definition II.7.6. Die *Transponierte* einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ist die Matrix ${}^tA \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$, die durch

$${}^tA = (a'_{ij}) \text{ mit } a'_{ij} = a_{ji}$$

definiert ist.

Behauptung II.7.7 (Eigenschaften der Transponierten)**.**

(1) ${}^t({}^tA) = A$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

(2) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ und ${}^t(\lambda A) = \lambda \cdot {}^tA$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und alle $\lambda \in K$.

(3) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und alle $B \in \mathrm{Mat}(n \times r, K)$.

(4) Ist A invertierbar, so ist ${}^tA$ invertierbar mit $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Satz II.7.8. Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.
Anders gesagt: Zeilenrang von A = Spaltenrang von A.