LA1-9

Lukas Ingold 20-123-998

Lineare Algebra 1 — **Serie 9**
HS 2020 — *Abgabe: Do. 26.11.2020, 12.15 Uhr.*

Aufgabe 1 (4 Punkte). Finden Sie ein Beispiel von zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ die dasselbe Minimalpolynom haben, obwohl sie nicht ähnlich sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte). (a) Sei $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von N.
(ii) Ist N diagonalisierbar?

(b) Gleiche Fragen für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, die durch $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } (i,j) = (1,n) \text{ und } (i,j) = (n,1) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert ist.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 0 Punkte). Wir bezeichnen mit μ_A das Minimalpolynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Beweisen Sie:

(a) Die Matrix A is genau dann invertierbar, wenn $\mu_A(0) \neq 0$ ist.

(b) Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} \in K[A]$ ein Polynom in A.

* (c) Ist A invertierbar, so gibt es ein Polynom $P \in K[t]$ mit $P(0) = 0$, so dass $P(A) = E_n$ ist.

* **Aufgabe 5** (0 + 0 Punkte). Zeigen Sie, dass eine invertierbare komplexe Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn A^2 diagonalisierbar ist.
Ist die analoge Aussage für reelle Matrizen auch richtig?

* **Aufgabe 6** (0 + 0 Punkte). Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$, die durch $\varphi(g) = f \circ g$ für alle $g \in \mathrm{End}(V)$ definiert ist.

(a) Zeigen Sie dass, φ linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn f diagonalisierbar ist.

1.) minimalpolynom

$M_8(A) = M_8(B)$

BSP. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Ähnlichkeit von Matrizen:

$\det(A) = \det(B)$ bedeuted das A & B Ähnlich sind

$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 8$

$\det(B) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = 27$

$8 \neq 27 \Rightarrow$ BSP. NICHT ÄHNLICH

Definition III. 3. 8:

ähnlich wenn invertierbare Matrix $T \in GL_n(K)$

$B = T \cdot A \cdot T^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (T) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (T)^{-1}$

$\Rightarrow A \cdot T = B \cdot T \Rightarrow AT - BT = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 2T_{21} & 2T_{22} \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -T_{21} & -T_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ nur wenn Alle einträge der MATRIX $T = 0$ sind ist die Matrixgleichung erfüllt
$\Rightarrow$ Es gibt keine T die die bedingung der ähnlichkeit erfüllt $\square$

2.)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

$a \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar

KOROLLAR III. 3. 21: diagonalisierbar falls $n \times n$ Matrix n Eigenwerte (hier $n = 3$) $\Rightarrow$
BEMERKUNG III. 3. 15: Eigenwerte einer DREIECKSMATRIX/DIAGONALMATRIX SIND DIAGONALEINTRÄGE (HIER: 1, 2, a)
$\square$

3)

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte). (a) Sei $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von N.
(ii) Ist N diagonalisierbar?

(b) Gleiche Fragen für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, die durch $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } (i,j) = (1,n) \text{ und } (i,j) = (n,1) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert ist.

a) i) $N^0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$N^{n-1} = \begin{pmatrix} & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$N^n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$N^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

also gibts "$n+1$" linear unab. Matrizen

$\Rightarrow$ existiert kein Minimalpolynom

ii.) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \mathrm{Eig}(N)_0 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\dim(\mathrm{Eig}(N)_0) > 1 < n \Rightarrow$ nicht diagonalisierbar $\square$

b) i) $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & \ddots & \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^1 \Longrightarrow \mu_A = t^3 - t = \mu_f$ mit $n > 2$

für $n = 2$

$\Rightarrow A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^0 = A^2 \Rightarrow \mu_A = t^2 - 1 = \mu_f$

ii) $\det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & -\lambda \end{pmatrix}\right) = (-\lambda)^n - (-\lambda)^{n-2} = 0$

WENN $n = 3 \Rightarrow$ Matrix hat 3 EW $\Rightarrow$ diagonalisierbar $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1)$
WENN $n = 2 \Rightarrow$ Matrix hat 2 EW $\Rightarrow$ diagonalisierbar $\det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1)$
WENN $n = 1 \Rightarrow$ Matrix hat 1 EW $\Rightarrow$ diagonalisierbar $\det(1 - \lambda) = 1 - \lambda = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 1)$
Matrix ist also für $n \leq 3$ diagonalisierbar $\square$

4.)

Aufgabe 4 (2 + 2 + 0 Punkte). Wir bezeichnen mit μ_A das Minimalpolynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Beweisen Sie:

(a) Die Matrix A is genau dann invertierbar, wenn $\mu_A(0) \neq 0$ ist.

(b) Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} \in K[A]$ ein Polynom in A.

a) A genau dann invertierbar wenn $\mu_A(0) \neq 0$

SATZ III. 3.12: EW VON A = Nullstellen von μ_A

NUN ist $\mu_A(0) \neq 0 \Rightarrow 0$ ist keine Nullstelle $\Rightarrow$ SOMIT AUCH KEIN EW VON A

$\Rightarrow A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ invertierbar $\Leftrightarrow 0 \neq$ EW von A

<u>BEWEIS:</u> $f: K^n \to K^n$, $x \mapsto A \cdot x$ ist ENDOMORPHISMUS

Da $0 \neq$ EW von A $\Rightarrow 0 \cdot x \neq f(x) \quad \forall x \in K^n$
somit $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in K^n$
$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$
$\Rightarrow$ A ist invertierbar
$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0$ da $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in K^n$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar $\square$

4b.) $A^{-1} \in K[A]$ ein Polynom in A

$A^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A^i$

A ist invertierbar $\Rightarrow \mu_A(0) \neq 0$

$\mu_A(A) = \lambda_0 E_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_n A^n = 0$

$\Rightarrow$ somit muss $\lambda_n \neq 0$ $\square$